進捗報告

フーリエ解析

- フーリエ級数
  - 周期関数
  - フーリエ係数
  - 三角関数系の直交性
  - 例題
  - 複素フーリエ級数
  - 一般の周期関数に対するフーリエ級数
  - スペクトルを求める
- フーリエ変換
  - フーリエの積分公式
  - フーリエ変換

※参考図書…理工系の数学入門コース6 フーリエ解析（大石進一）

フーリエ級数展開

- 任意の関数を三角関数の和として表す
- フーリエ級数は理工学に現れる様々な現象の解析やシステムの設計に有用
  - 音、光、振動など

周期関数

- 三角関数の性質のうち、フーリエ級数を考える際に最も基本的となるのは次の三角関数の周期性である

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x$$
$$\cos(x+2n\pi)=\cos x \quad (n=0,1,2,\dots)$$

- 一般に、関数$f(x)$が

$$f(x+T)=f(x) \quad (T>0) \quad \dots \quad (1)$$

を満たすとき、f を**周期関数**と呼び、また T をその**周期**という

特に、式(1)を満たす最小の T を基本周期という

フーリエ級数展開

- 関数 $f(x)$ を周期2πの周期関数とする。関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開とは、三角関数の級数

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$$

$$=\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)}\quad\cdots\quad(2)$$

によって関数 $f(x)$ を表そうというものである。

フーリエ係数

■ 展開係数は以下のように求められる

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1, 2, \dots) \quad \dots \quad (3)$$

この a_n と b_n を**フーリエ係数**と呼ぶ。

三角関数系

- フーリエ係数が式(3)のように与えられるのは、式(2)の右辺に現れる関数$\cos nx\,(n=0,1,2,\ldots),\ \sin nx\,(n=1,2,\ldots)$が互いに直交することを用いると見やすい。これは、**三角関数系**

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$$

が全体としてもつ性質であるので、**三角関数系の直交性**とよばれる。

三角関数系の直交性

- いま、関数 $f(x)$ と $g(x)$ を周期2πの周期関数とする。関数 f と g が直交するとは、

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = 0 \quad \dots \quad (4)$$

が成立することであると定義される。これは、ベクトルが直交するという概念を素直に拡張したものである。式(4)の左辺を関数 $f(x)$ と $g(x)$ の**内積**という。

三角関数系の直交性

■ 三角関数系の直交性とは、次の２つのことが成立することである

①自分と異なる三角関数系の関数との内積が0

すなわち、任意の$m = 1, 2, \ldots$に対して

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos mx dx = \left[\frac{\sin mx}{m}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin mx dx = \left[-\frac{\cos mx}{m}\right]_0^{2\pi} = -\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m}\right) = 0$$

三角関数系の直交性

- 三角関数系の直交性とは、次の２つのことが成立することである

①自分と異なる三角関数系の関数との内積が0

任意の$m = 1, 2, \ldots$と$n = 1, 2, \ldots$に対して

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)x dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m-n)x dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x dx = 0$$

三角関数系の直交性

■ 三角関数系の直交性とは、次の２つのことが成立することである

②自分自身との内積が0でない

すなわち、

$$\int_{0}^{2\pi} 1 \cdot 1 dx = [x]_{0}^{2\pi} = 2\pi$$

三角関数系の直交性

■ 三角関数系の直交性とは、次の２つのことが成立することである

②自分自身との内積が0でない

任意の$m = 1, 2, \ldots$について

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 2\mathrm{m}x + 1) dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2mx) dx = \pi$$

フーリエ係数の公式の導出

■ 以上の結果をもとに、フーリエ係数の公式を導く。関数$\boldsymbol{f(x)}$が

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mathbf{cos}nx + b_n \mathbf{sin}nx)}$$

と展開できるする。この式の両辺に関数$\mathbf{cos}\boldsymbol{mx}(\boldsymbol{m} = \mathbf{0, 1, 2, \ldots})$をかけ、

０から2πまで積分すると、

$$\boldsymbol{\int_0^{2\pi} f(x)\mathbf{cos}mx\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\mathbf{cos}mx\,dx}$$

$$\boldsymbol{+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}(a_n \mathbf{cos}nx\mathbf{cos}mx + b_n \mathbf{sin}nx\mathbf{cos}mx)dx = a_m\pi}$$

フーリエ係数の公式の導出

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

この式の両辺に関数$\sin mx (m = 0, 1, 2, \ldots)$をかけ、０から$2\pi$まで積分すると、

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) dx = b_m \pi$$

これらから、三角関数系の直交性から、フーリエ係数の公式が導かれる

フーリエ級数まとめ

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)} \\ \boldsymbol{b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \ldots)} \end{cases}$$

の形で表される級数を$f(x)$のフーリエ級数という

フーリエ級数まとめ

- また

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{C}^{C+2\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{C}^{C+2\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

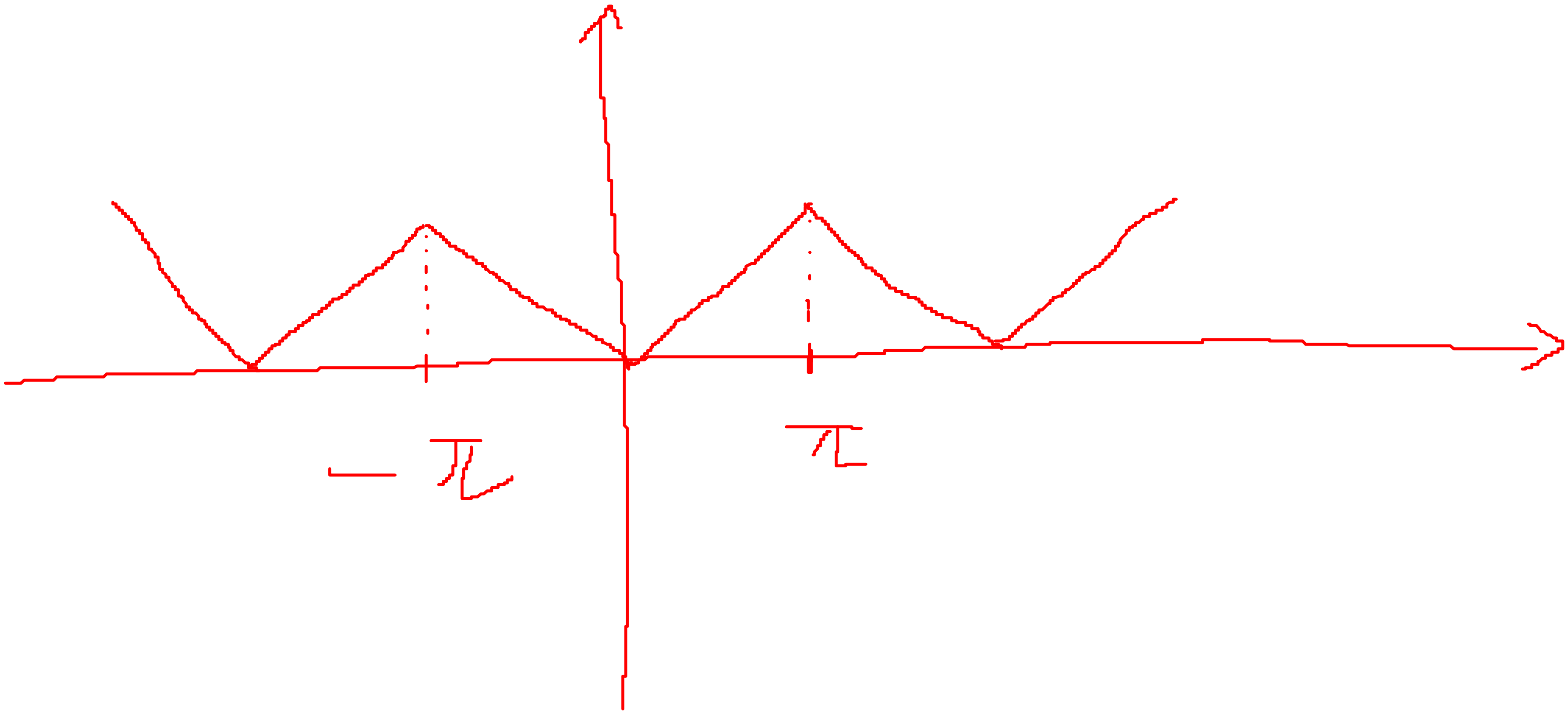
より、$C = -\pi$とすると、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

フーリエ級数展開の例題

- $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$を周期的に拡張



フーリエ級数展開の例題

- $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$を周期的に拡張

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2} = \frac{2\{(-1)^n - 1\}}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & (n\text{: 偶数}) \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & (n\text{: 奇数}) \end{cases}$$

フーリエ級数展開の例題

- $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$を周期的に拡張

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots) = 0$$

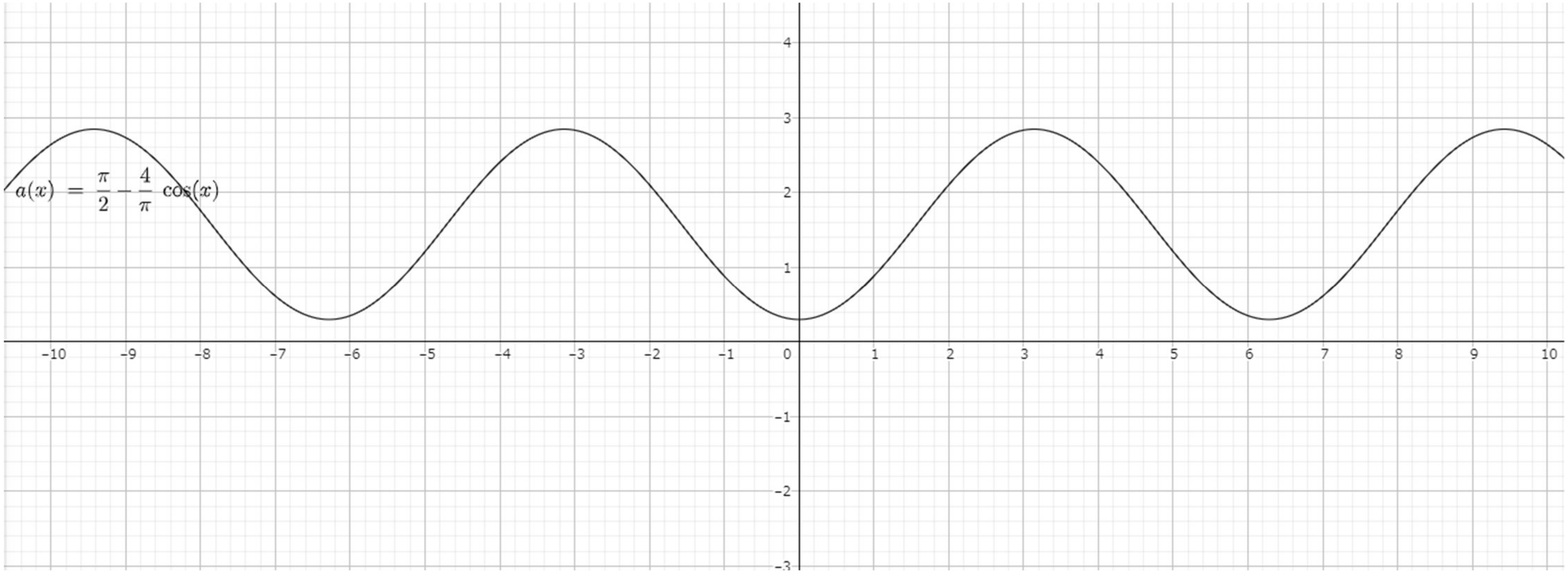
以上から

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x - \cdots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

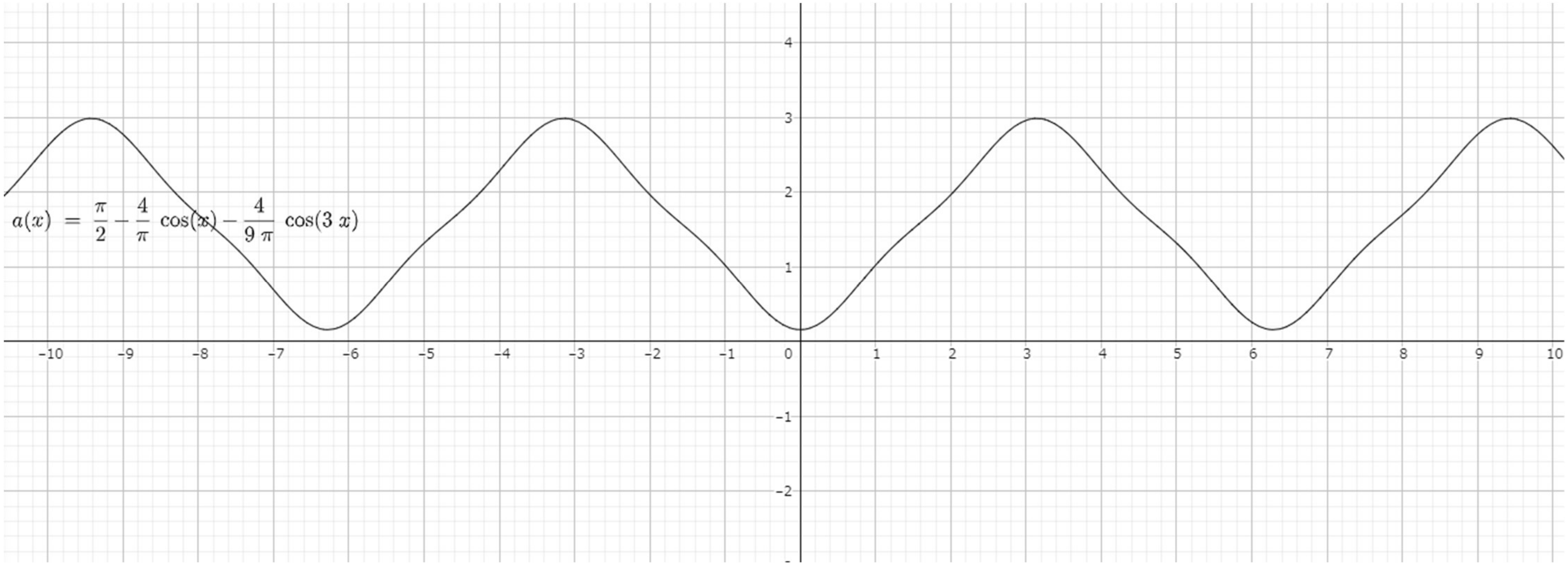
フーリエ級数展開の例題

■ $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x$



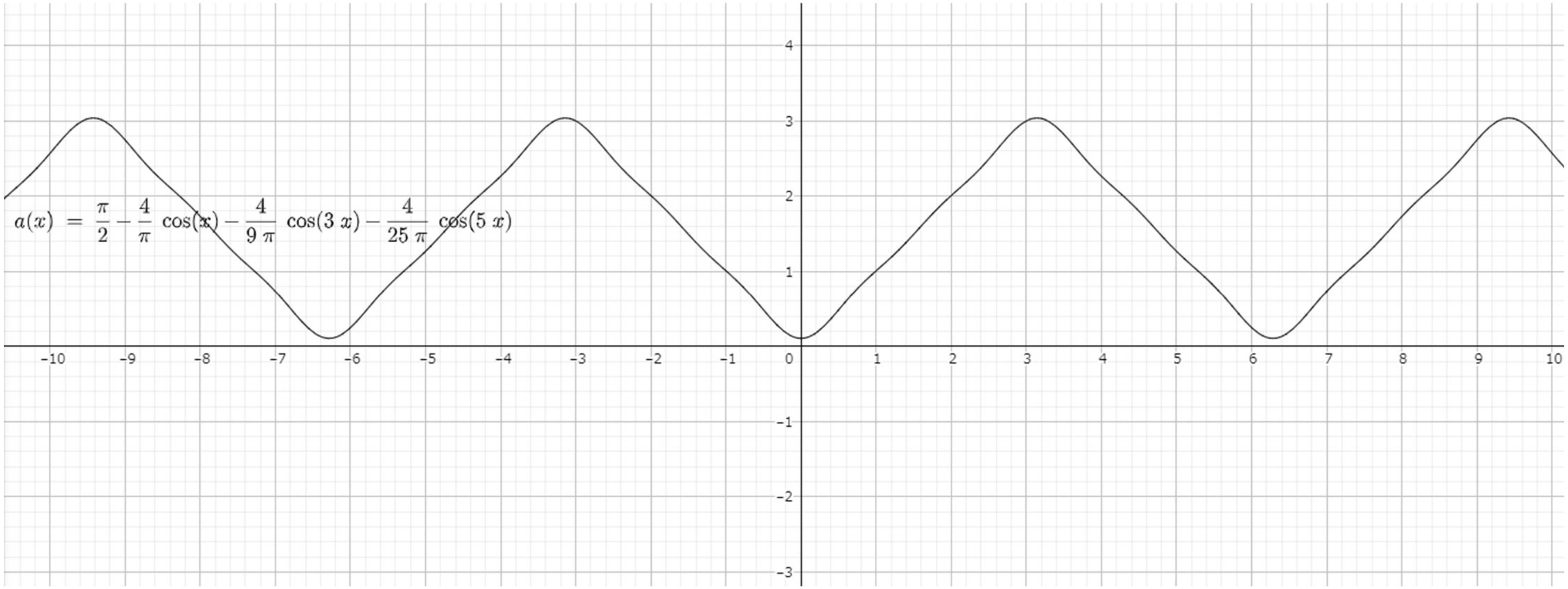
フーリエ級数展開の例題

- $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x$



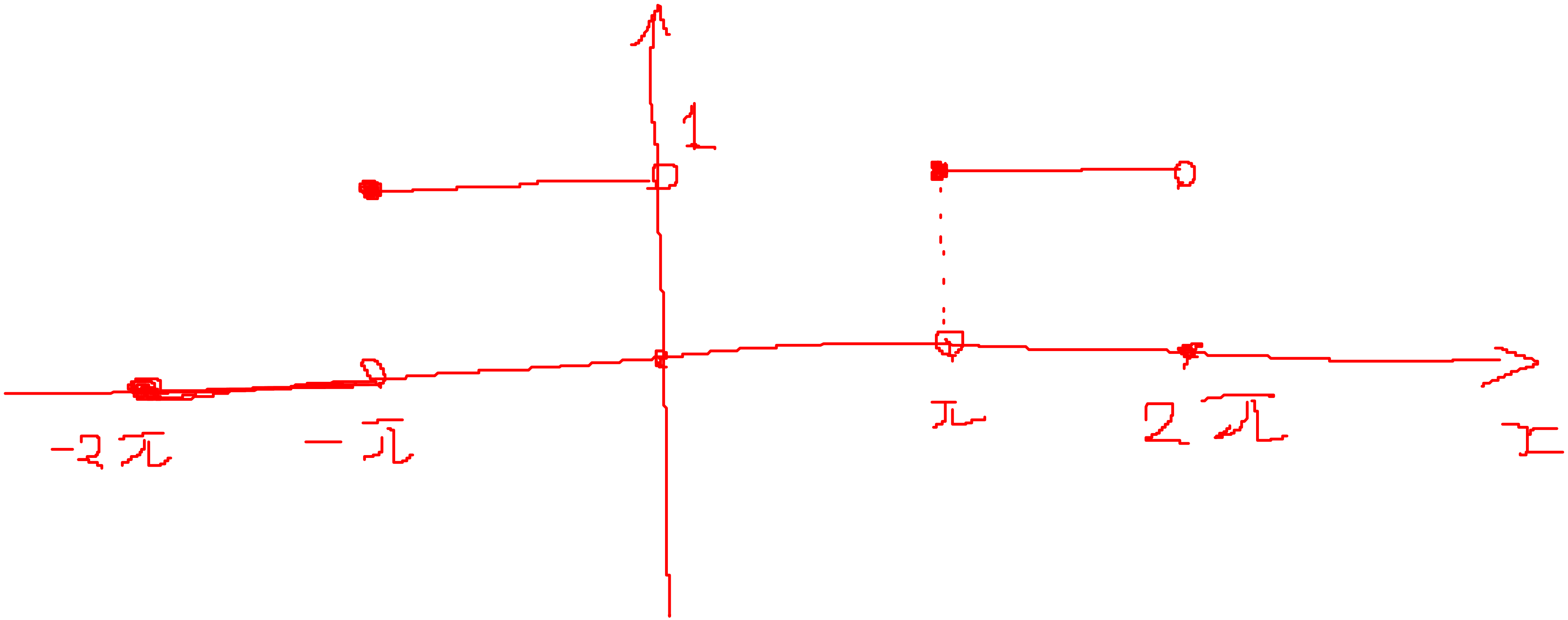
フーリエ級数展開の例題

- $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x$



フーリエ級数展開の例題2（不連続点のある場合）

- $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi) \\ 0 & (\pi \le x < 2\pi) \end{cases}$　　（周期的に拡張）



フーリエ級数展開の例題2（不連続点のある場合）

- $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$　　（周期的に拡張）

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 1dx + \int_{0}^{\pi} 0dx\right\} = \frac{1}{\pi}[x]_{-\pi}^{0} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{0} = 0$$

フーリエ級数展開の例題2（不連続点のある場合）

- $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$　　（周期的に拡張）

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n\pi}\{1-(-1)^n\}$$

フーリエ級数展開の例題2（不連続点のある場合）

■ $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$ （周期的に拡張）

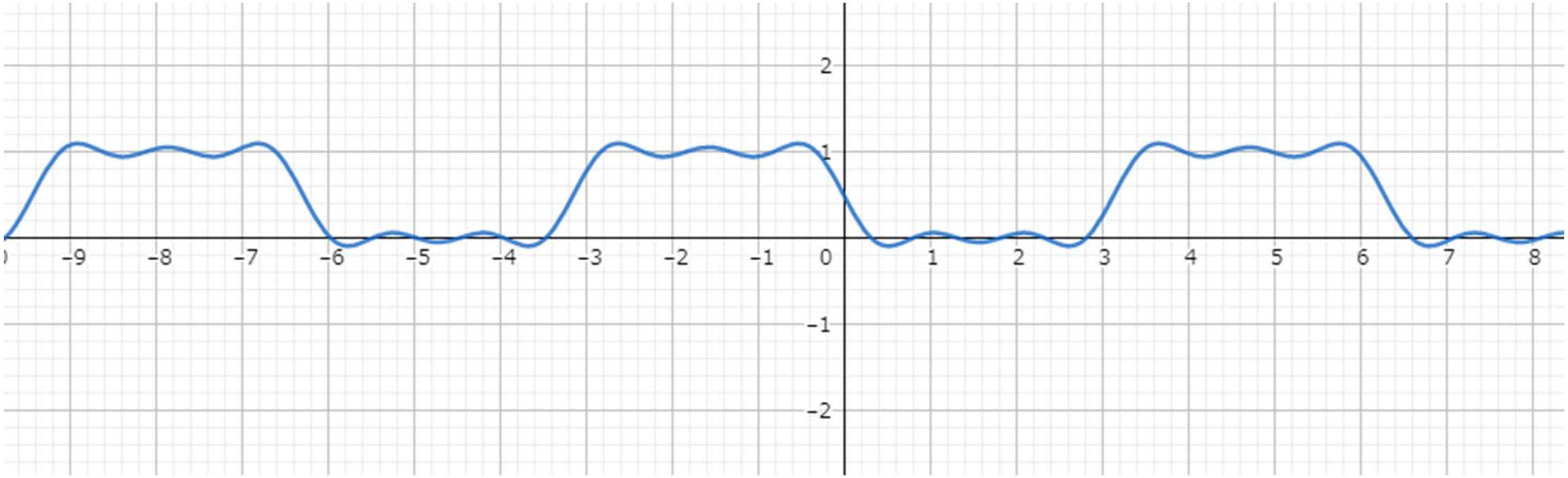
以上から、フーリエ級数は、

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sin x - \frac{2}{3\pi}\sin 3x - \frac{2}{5\pi}\sin 5x - \cdots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

フーリエ級数展開の例題2（不連続点のある場合）

- $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sin x - \frac{2}{3\pi}\sin 3x - \frac{2}{5\pi}\sin 5x$



フーリエ級数の収束

- **周期2πの周期関数$f(x)$が区分的に滑らかであるとき、$f(x)$のフーリエ級数は次のように収束する**

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & \text{（連続な点）} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{（不連続な点）} \end{cases}$$

区分的に滑らか

- $a \leq x \leq b$上の関数$f(x)$が次の条件を満たす時、 $a \leq x \leq b$で
  区分的に連続であるという
  - $a \leq x \leq b$で有限個の点を除いて連続
  - 不連続点Cにおいて$f(C-0), f(C+0)$が存在する
    （左極限と右極限が存在する）
- さらに、導関数$f'(x)$が区分的に連続である時、関数$f(x)$を
  区分的に滑らかという

複素フーリエ級数

- フーリエ級数を、複素関数を使って複素形式に書き直していくと式の変形が簡単になることがある
- フーリエ級数を複素形式に書き直すときに基礎となるのは、オイラーの公式である

$$\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

ただし、iは虚数単位$\sqrt{-1}$

複素フーリエ級数

■ **オイラーの公式において**

$$\begin{cases} e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \\ e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx \end{cases}$$

より、

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

複素フーリエ級数

■ これらをフーリエ級数の式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に代入すると、この式の右辺は

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \right\}$$

複素フーリエ級数

■ ここで、フーリエ係数を

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

のように定義すると、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と書き直される

これを複素フーリエ級数という

複素フーリエ級数

■ 複数フーリエ係数を求める

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

複素フーリエ級数

オイラーの公式より、

$$e^{-inx} = \cos(-nx) + i\sin(-nx) = \cos nx - i\sin nx$$

よって、複素フーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

一般の周期関数に対するフーリエ級数

- 関数$f(x)$を周期$2L(L > 0)$の周期関数とし、この関数をフーリエ級数展開することを考える

$$\text{周期}2\pi \quad \rightarrow \quad \text{周期}2L(\mathrm{L} > 0)$$

一般化

- 周期$2L$の周期関数は、変数 x のスケールを変換すれば、周期2πの周期関数に変換できる
- すなわち、$x = Lt/\pi$とすれば、t が2π変化する間に x は$2L$変化する

一般の周期関数に対するフーリエ級数

■ したがって、関数$f(x)$の変数をスケール変換して得られる関数$h(t) = f(Lt/\pi)$は、周期2πの周期関数となり

$$h(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

とフーリエ級数展開される

■ ここで、t を変数 x に戻すと、$f(x) = h(\pi x/L)$により

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

となる

一般の周期関数に対するフーリエ級数

■ フーリエ係数は

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

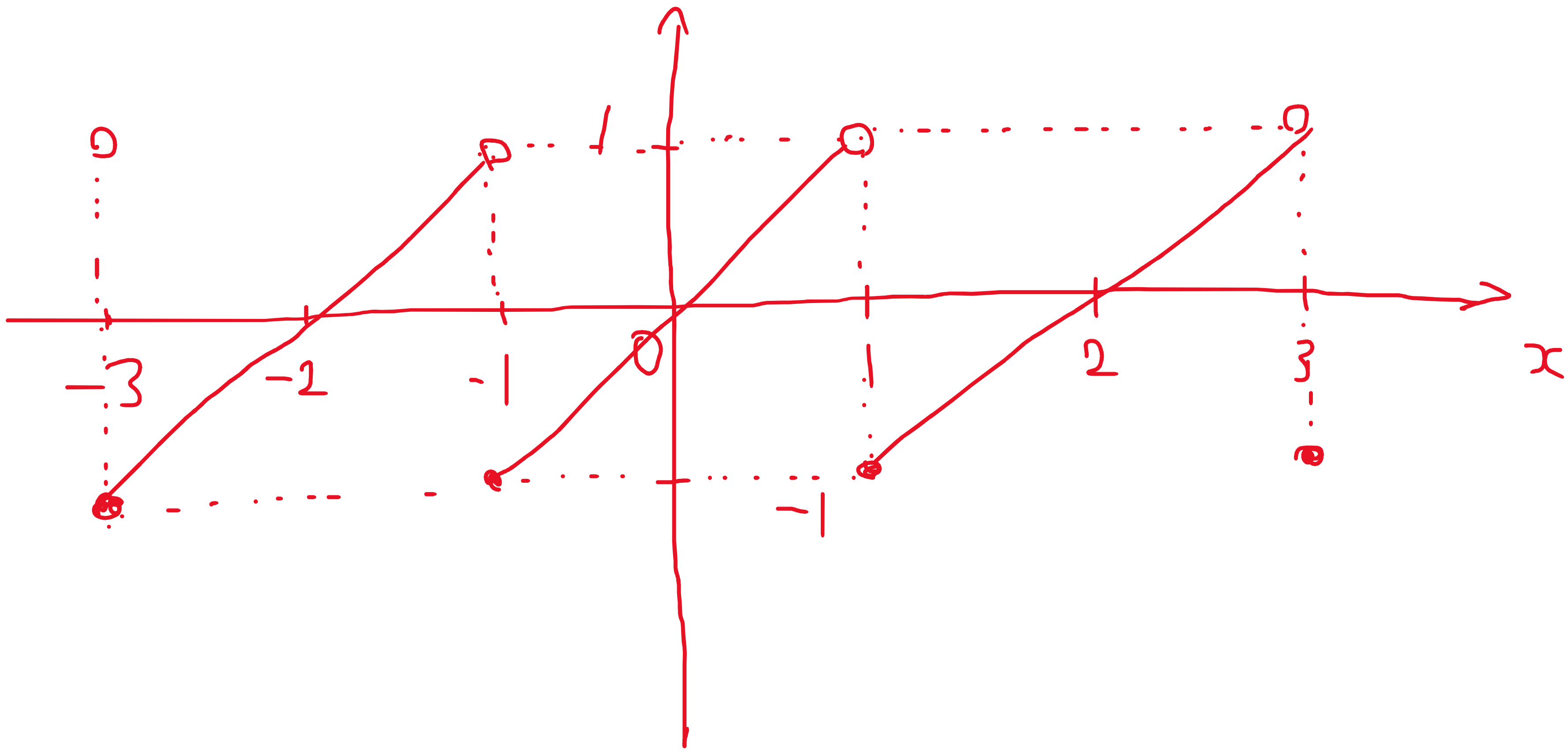
■ 複素フーリエ級数及び係数は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x}$$

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x}dx$$

フーリエ級数：スペクトルの計算

- $f(x) = x(-1 \leq x < 1)$のスペクトルを求める



フーリエ級数：スペクトルの計算

$e^{2x}{}' = 2e^{2x}$

- $n \neq 0$のとき

$$C_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x e^{-in\pi x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{in\pi} x e^{-in\pi x}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{in\pi}\int_{-1}^{1} e^{-in\pi x} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{in\pi}\left(e^{in\pi} + e^{-in\pi}\right) + \frac{1}{in\pi}\left[-\frac{1}{in\pi} e^{-in\pi x}\right]_{-1}^{1}\right\}$$

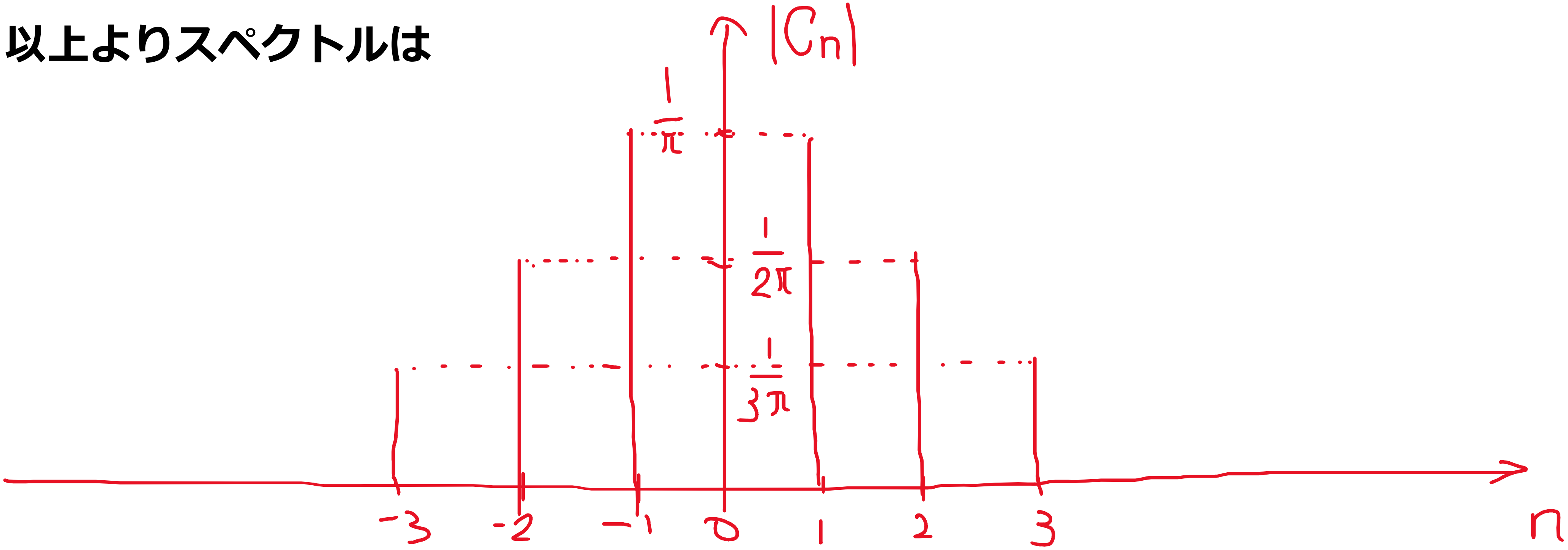
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2i}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right)\right\} = \frac{i}{n\pi}(-1)^n$$

フーリエ級数：スペクトルの計算

- $n = 0$のとき

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = 0$$

以上よりスペクトルは



フーリエの積分公式

- 非周期関数に対してもフーリエ解析を行う
- 周期Tの周期関数に対するフーリエ級数展開が$T \to \infty$でどのようになるかを観察し、非周期関数に対するフーリエ変換を導入する
- 周期$T = 2L$の周期関数$f(x)$を考える
  関数$f(x)$が複素フーリエ級数に展開できるとすると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x}$$

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t) e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)t} dt$$

フーリエの積分公式

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)t}dt\right] e^{i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x}}$$

ここで

$$\boldsymbol{\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}}$$

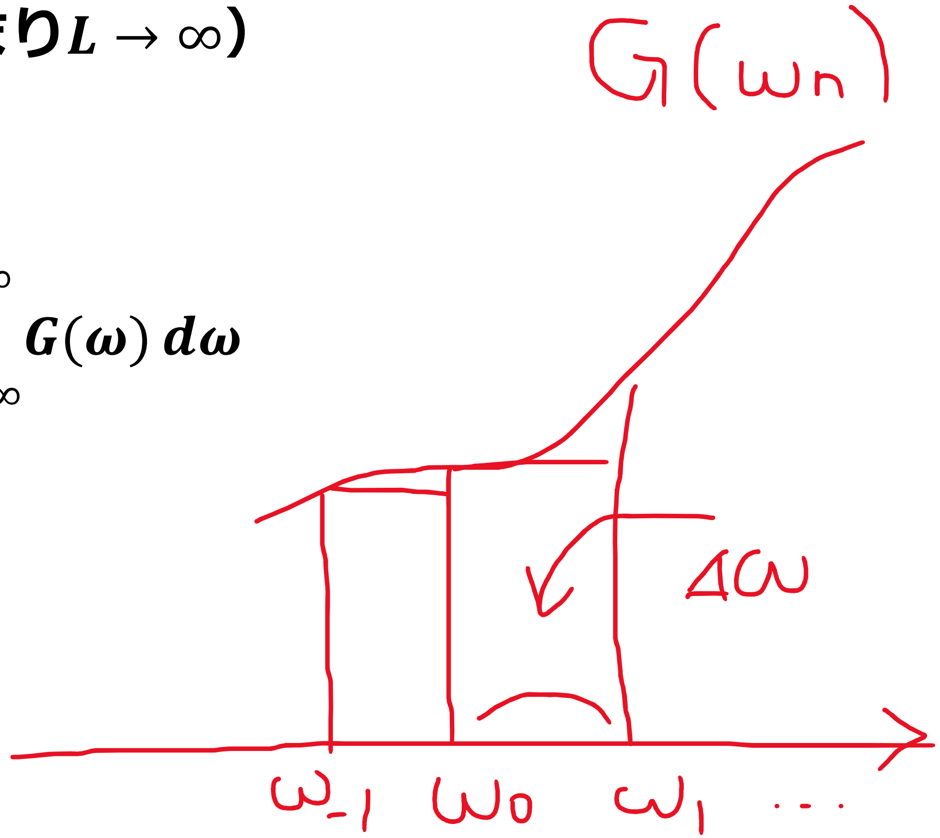
と置くと

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\,(\omega_n)t}dt\right] e^{i\,(\omega_n)x}\,\Delta\omega}$$

フーリエの積分公式

- 周期が無限大になるときを考えたい（つまり$L \to \infty$）
- $L \to \infty$で、$\Delta\omega \to 0$なので、

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n)\,\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\,d\omega$$



フーリエの積分公式

- **フーリエの積分公式**

$$\boldsymbol{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega x}\, d\omega}$$

- **この関数$f(x)$は周期$2L$と仮定した上で$L \to \infty$としたので、非周期関数である**
- **したがって、$f(x)$を非周期関数に対するフーリエ級数展開の拡張と考えることができる**

フーリエ変換

- フーリエの積分公式は以下の式で表される

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega x}\, d\omega$$

- ここで、$\frac{1}{2\pi}$ は定数なので、外に出して書き換えると

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega x}\, d\omega$$

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ とすると、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

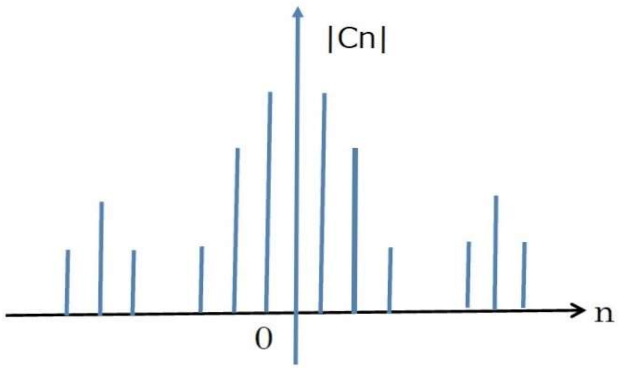
フーリエ級数・変換まとめ

■ 周期

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)e^{-i\frac{n\pi}{L}t}dt$$

離散スペクトル



■ 非周期

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

連続スペクトル