DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# TP 1 - Sistemas de Ecuaciones Lineales

**Keywords: Ranking - Colley - WinRate - Massey**

11/09/2020 Métodos Numéricos

**Grupo TP: 4**


| Integrante | LU | Correo electrónico |
|---|---|---|
| Miodownik, Federico | 726/18 | `fede@miodo.com.ar` |
| Puerta, Ezequiel | 812/09 | `armando.ezequiel.puerta@gmail.com` |
| Sujovolsky, Tomás | 113/19 | `tsujovolsky@gmail.com` |

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

http://www.fcen.uba.ar

# Índice

# 1. Introducción

## 1.1. Motivación

En toda competencia deportiva es necesario determinar un orden que refleje el desempeño de los equipos o jugadores durante un intervalo de tiempo. Dicho orden, comúnmente conocido como *ranking*, es de vital importancia no solo para proclamar al ganador del torneo, sino también para filtrar la participación de sus integrantes en competencias futuras o de un rango superior (continentales, internacionales), para determinar la clasificación a las fases siguientes (etapas de eliminación directa, *play-offs*, etc), para definir prioridades en procesos posteriores (como los *Drafts*, usados en competencias deportivas de América del Norte) o para indicar aquellos participantes que deberán ascender o descender de división o categoría.

La técnica de *ranking* se ha extendido a diversas aplicaciones fuera del universo de las competencias deportivas tradicionales. Tal es el caso de los *e-sports*, los sistemas de recomendación y los motores de búsqueda. Además, las técnicas aprendidas en dichas áreas se pueden reimplementar en el ámbito deportivo, como se menciona en (Govan, C. D. Meyer y Albright 2008).

Dichos *rankings* se obtienen con diferentes métodos, definidos por reglas que siguen un modelo matemático. Pero como cada competencia tiene sus particularidades, los métodos varían su complejidad según cuantas de esas cualidades contempla. Éstas pueden ser: tener muchos participantes y que no jueguen *todos contra todos*, que no se juegue la misma cantidad de partidos según la pertenencia a divisiones o conferencias, la existencia o no del concepto de empate, que la diferencia de goles sea relevante, entre otras.

Por lo tanto, es de esperar que métodos distintos resulten en *rankings* diferentes para una misma competencia. Esto nos lleva a pensar en cualidades de los métodos, tales como si es justo (es decir, si el resultado de un partido entre un par de equipos puede afectar indirectamente a un tercero), a qué tipo de competencias se ajusta mejor, etc.

## 1.2. Presentación

En este trabajo nos propusimos comparar las fortalezas y debilidades de tres métodos de *rankeo*, muy conocidos y usados en el deporte profesional. Los mismos fueron aplicados en los resultados de la temporada 2015-2016 de la *NBA*. Los métodos considerados fueron:

- Colley Matrix Method: el *ranking* de cada equipo toma en cuenta múltiples factores como su tasa de victorias y derrotas, y la fuerza de tabla de cada equipo. Se calcula construyendo la matriz ($C$) definida en (Colley 2002), donde los rankings resultantes ($r$) son la solución del sistema lineal $Cr = b$.

- Win rate: el *ranking* de cada equipo es dado por la cantidad de partidos ganados sobre su total de partidos jugados.

- Massey Matrix Method: el *ranking* de cada equipo hace énfasis en la diferencia de goles/puntos que logra un equipo en la temporada. Para calcularlo, se aproxima por el método de cuadrados mínimos a una matriz muy similar a la de Colley, donde la solución del sistema son los rankings finales (Starnes y Massey 2005).

## 1.3. Términos usados

- Método de rankeo: el sistema que determina el *ranking* de los equipos y consecuentemente su orden en la tabla.

- Fuerza de tabla: el promedio de ranking de los equipos contra los que se juega. Tener una alta fuerza de tabla puede afectar indirectamente tu ranking en algunos métodos considerados en este trabajo.

- Diferencial de puntos: en una temporada, la sumatoria de todos los puntos a favor y en contra de un equipo.

# 2. Desarrollo

## 2.1. Clases Match y Schedule

Dado el formato indicado por la cátedra para los archivos de entrada, definimos las clases `Match` y `Schedule` para organizar los datos adecuadamente. El calendario introducido al ejecutable contendrá en su primer línea la cantidad total de equipos y la cantidad de partidos. Luego siguen $n$ líneas, una por cada partido jugado.

```cpp
class Schedule {
  public:
    Schedule(int amount_of_teams, int amount_of_matches, list<string> all_matches) {
      teams_amount = amount_of_teams;
      matches_amount = amount_of_matches;
      matches = parse_matches(all_matches);
    }

    int teams_amount;
    int matches_amount;
    list<Match> matches;

  private:
    list<Match> parse_matches(list<string> all_matches) {}
};
```

Listing 1: Fragmento de Schedule.h

Dichas líneas, referentes a cada partido, se parsearan como instancias de `Match`:

```cpp
class Match {
  public:
    Match(string match_date,
        int first_team,
        int first_team_score,
        int second_team,
        int second_team_score) {
          date = match_date;
          team_1_id = first_team;
          team_1_score = first_team_score;
          team_2_id = second_team;
          team_2_score = second_team_score;
    }

    string date;
    int team_1_id;
    int team_1_score;
    int team_2_id;
    int team_2_score;
};
```

Listing 2: Fragmento de Match.h

Una vez parseados los datos provenientes del archivo input seleccionado, se procederá a ejecutar alguno de los métodos de *ranking*. A continuación detallaremos cuáles son, la teoría subyacente de cada uno de ellos, sus particularidades y los algoritmos utilizados para implementarlos.

## 2.2. Método Win Rate

Utilizamos Win Rate como un método de control. Dentro de los tres seleccionados, es el más trivial y difundido en el ámbito de los deportes profesionales: es el cociente de la cantidad de partidas ganadas sobre la cantidad total de partidas que se jugaron.

$$\begin{aligned} \text{Sean} \quad w_i &= \#(victorias_i) \\ l_i &= \#(derrotas_i) \\ m_i &= w_i + l_i \\ \text{Definimos} \quad r_i &= \frac{w_i}{m_i} \quad \forall i \in equipos \end{aligned}$$

El mismo no considera información alguna sobre contra quienes se jugó o la performance de los equipos en sus respectivos partidos. A pesar de ser el menos complejo, es el más intuitivo y también el más fácil de modelar e implementar. Por todo esto, es un buen método para comparar.

### 2.2.1. Algoritmo

El algoritmo toma como entrada un Schedule y un arreglo de tuplas de largo igual a la cantidad de equipos, donde la primera coordenada indica la cantidad de partidos ganados y la segunda la cantidad total de partidos jugados. Por cada partido del Schedule, se aumenta la segunda coordenada de ambos equipos y se aumenta la primera coordenada del ganador.

Luego, armamos un nuevo arreglo (`rankings`) de mismo largo, esta vez de tipo `double`, donde en la i-ésima posición guardamos la división de los elementos de la tupla del arreglo anterior. Para mantener la mayor precisión posible, antes de dividir los elementos de tipo `int`, los pasamos a `double`.

```
build_wins_and_played_vector (schedule, wins_and_played):
    for match in schedule:
        wins_and_played[match.team_1][played]++
        wins_and_played[match.team_2][played]++
        if match.team_1.is_winner():
            wins_and_played[match.team_1][wins]++
        else:
            wins_and_played[match.team_2][wins]++

calculate_win_rate_ranking (wins_and_played):
    for each in wins_and_played:
        rankings[i] <- each[wins] / each[played]
    return rankings
```

Listing 3: Pseudo-código — Método Win Rate — win_rate.h

## 2.3. Método de Colley

El método de Colley incorpora otros factores que el win rate deja de lado, que al fin y al cabo, pueden ser igualmente determinantes a la hora de decidir un *ranking* más justo para con el desempeño de los equipos. ¿Acaso debería ser indistinto ganarle al equipo más débil de la tabla que al más fuerte? ¿Se debería considerar de igual forma a un equipo que tuvo que jugar la temporada entera contra equipos fuertes, frente a otro que por suerte u otro factor selectivo, jugó siempre contra equipos más débiles?

La matriz $C$ del método (Colley 2002) se construye de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Sean} \quad m_{i,j} &= \#(partidos\_entre_{i,j}) \\ m_i &= \sum_{j \in equipos} m_{i,j} \\ \text{Definimos} \quad C_{i,j} &= \begin{cases} 2 + m_i & si \quad i = j \\ \\ -m_{i,j} & si \quad i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Por la manera en que está construida $C$, podemos asegurar que la matriz es **estrictamente diagonal dominante** y **simétrica definida positiva**. Estas condiciones aseguran que $C$ es inversible, y se puede triangular con el método de **Eliminación Gaussiana** directamente, manteniendo la mayor estabilidad de las cuentas sin tener que recurrir a pivoteos de ningún tipo.

Para realizar el *ranking*, se necesita proveer la cantidad de partidos ganados y perdidos por cada equipo, esto se consigue con un vector que llamaremos $b$ tal que:

$$b_i = 1 + \frac{\#(victorias)_i - \#(derrotas)_i}{2} \tag{1}$$

El sistema lineal $Cx = b$ es entonces el problema que se debe resolver, donde $x$, la solución, será el *ranking* final de los equipos. Ésta solución siempre existe, y es única.

### 2.3.1. Algoritmo

El algoritmo toma como entrada un `schedule`, una matriz $C$ (de $n \times n$ ceros) y un vector $b$ (de $n$ ceros). Primero, pone en todos los elementos de la diagonal principal el número 2. Luego, por cada partido dentro del torneo (en el cual se enfrentan los equipos $i$ y $j$), se incrementa en una unidad los elementos $C_{i,i}$ y $C_{j,j}$ de la diagonal y se decrementan en una unidad las posiciones que indican que entre ellos jugaron (es decir, se decrementa $C_{i,j}$ y $C_{j,i}$).

Luego, en la misma iteración, si el ganador del partido es el equipo $i$, se incrementa $b_i$ y se decrementa $b_j$. Caso contrario, si el ganador es el equipo $j$, se incrementa $b_j$ y se decrementa $b_i$

Al finalizar el parseo de todos los partidos del torneo, el i-ésimo elemento del vector $b$ sólo contiene la diferencia entre las partidas ganadas y perdidas. Este $b$ no es el indicado para resolver las ecuaciones planteadas por el método de Colley. Es por eso que por cada equipo $i$ reescribimos $b_i$ para llegar a la ecuación 1:

$$b_i = 1 + \frac{b_i}{2} \tag{2}$$

```
build_colley_matrix (schedule, C, b) {
    for team in schedule.teams:
        C[team][team] <- 2

    for match in schedule:
        C[match.team_1][match.team_1]++
        C[match.team_2][match.team_2]++
        C[match.team_1][match.team_2]--
        C[match.team_2][match.team_1]--

        if match.team_1.is_winner():
            b[match.team_1]++
            b[match.team_2]--
        else:
            b[match.team_1]--
            b[match.team_2]++

    for team in schedule.teams:
        b[team] <- 1 + (b[team] / 2)
```

Listing 4: Pseudo-código — Método Colley — colley.h

## 2.4. Método de Massey

Decidimos incorporar como tercer método de rankeo al algoritmo de Massey porque propone tener en cuenta un factor que Colley deja de lado, la diferencia de los puntos logrados en un partido. Bajo el método de Colley o por simple Win Rate, a cada equipo le alcanza con ganar su partido para maximizar su *ranking*, ignorando su desempeño dentro de sus partidos. Analizar los partidos únicamente de manera binaria (ganar/perder) puede conducir a un comportamiento conservador en algunos deportes. Por ejemplo, en el fútbol, si un equipo se encuentra ganando 2-1 en un partido, un simple análisis de costo/beneficio indica que al equipo le conviene evitar el gol del contrincante más de lo que le conviene convertir un gol propio, pues el resultado 3-1 es ligeramente superior al 2-1, pero el 2-2 hace una diferencia enorme al llevar el encuentro a un empate.

La manera en que se construye la matriz $M$ del método MMM (*Massey Matrix Method*) es la siguiente:

$$\text{Sean} \quad m_{i,j} = \#(partidos\_entre_{i,j})$$
$$m_i = \sum_{j \in equipos} m_{i,j}$$
$$\text{Definimos} \quad M_{i,j} = \begin{cases} m_i & si \quad i = j \\ \\ -m_{i,j} & si \quad i \neq j \end{cases}$$

$M$ es **simétrica**, pero desafortunadamente resulta **singular**, por lo tanto, no se puede resolver el sistema $Mx = p$, donde el vector $p$ contiene los diferenciales de puntos de todos los equipos, mediante inversas. Para solventar esto, se propone realizar una aproximación, (Langville y C. Meyer 2012) reemplazando la última fila de la matriz $M$ por un vector que contiene solo *unos* y reemplazando el último valor del vector $p$ por *cero*. Con este paso se asegura su **inversibilidad** y permite que $Mx = p$ **tenga solución y sea única**, además de que el ranking de todos los equipos sume 0.

### 2.4.1. Algoritmo

El algoritmo toma como entrada un `schedule`, una matriz $M$ (de $n \times n$ ceros) y un vector $p$ (de $n$ ceros). Primero, por cada partido dentro del torneo se incrementa en una unidad aquellos elementos de la diagonal principal, correspondientes a los equipos que jugaron (si los equipos que se enfrentaron en el encuentro son $i$ y $j$, los elementos a incrementar en la diagonal son $M_{i,i}$ y $M_{j,j}$). Además se decrementan en una unidad las posiciones que indican que entre ellos jugaron dicho partido (se decrementan $M_{i,j}$ y $M_{j,i}$).

También, en la misma iteración se le suma a $p_i$ y $p_j$ el diferencial de puntos del partido jugado. Al finalizar todas las iteraciones, la $M$ es la matriz de Colley sin los "+2" en las diagonales y el i-ésimo elemento del vector $p$ contiene el diferencial de puntos del equipo $i$ de todo el torneo.

Como la matriz $M$ en este estado no garantiza que pueda resolverse la ecuación $Mx = p$, el siguiente paso del algoritmo (como vimos anteriormente al describir el método) es poner el valor *uno* en cada posición de la última fila de $M$ y setear el último valor de $p$ en *cero*.

```
build_massey_matrix (schedule , M, p){
    for match in schedule:
        M[match.team_1][match.team_1]++
        M[match.team_2][match.team_2]++
        M[match.team_1][match.team_2]--
        M[match.team_2][match.team_1]--

        p[match.team_1] <- p[match.team_1] + (match.team_1_score - match.team_2_score)
        p[match.team_2] <- p[match.team_2] + (match.team_2_score - match.team_1_score)

    for j in M.columns():
        (last_row(M))[j] <- 1

    last(p) <- 0
```

Listing 5: Pseudo-código — Método Massey — massey.h

## 2.5. Algoritmos para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales

Ya creamos los sistemas de ecuaciones de Colley y Massey y sabemos que las matrices son **triangulables**. Ahora queremos resolverlas. Primero, necesitamos triangularlas. Para eso, implementamos el método de eliminación gaussiana de la siguiente manera:

```
gaussian_elimination (A, b):
    for j in range(0, size(A)):
        A_jj <- A[j][j]

        for i in range(j+1, size(A)):
            m_ij <- A[i][j] / A_jj;
            A[i] <- A[i] - m_ij * A[j]     #calculos vectoriales
            b[i] <- b[i] - (m_ij * b[j])
```

Listing 6: Pseudo-código — Eliminación Gaussiana — gaussian_elimination.h

Una vez triangulada la matriz, se resuelve el nuevo sistema equivalente con el siguiente algoritmo:

```
linear_equations_system_solver(A, b):
    X <- [0 for each in b]
    for i in range(size(b)-1, 0):
        Y <- 0
        for j in range(size(b)-1, i):
            Y <- Y + (A[i][j] * X[j])
        X[i] <- (b[i] - Y) / A[i][i]
    return X
```

Listing 7: Pseudo-código — Solucionador de sistemas de ecuaciones lineales — gaussian_elimination.h

# 3. Experimentación

## 3.1. Casos de tests

Una vez implementados los tres métodos a analizar, junto al algoritmo de eliminación gaussiana, estamos en condiciones de testear nuestra solución. Aclaramos que el ejecutable se puede compilar con el script provisto por la cátedra (mediante `python ./src/metnum.py build`). Al ejecutar la suite de casos de tests provistos por la cátedra, observamos que nuestra implementación del método de Colley los supera con éxito. Sabemos que la tolerancia máxima del error absoluto (entre nuestros resultados y el de los *rankings* proporcionados) es de $10^{-4}$.

```
g++ -std=c++11 -O2 -c ./main/main.cpp -o ./main/main.o
tests_test-prob-1 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test-prob-2 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test1 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test2 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test_completos_test_completo_1000_2 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test_completos_test_completo_1000_8 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test_completos_test_completo_100_4 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test_completos_test_completo_100_8 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test_completos_test_completo_10_1 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok

----------------------------------------------------------------------
Ran 9 tests in 4.290s

OK
```

Figura 1: Tests provistos por la cátedra - Tolerancia: $10^{-4}$

Como para los casos `test_completo_1000_2` y `test_completo_1000_8` observamos que los *rankings* (almacenados en los respectivos archivos `*.expected` y `*.out`) difieren desde el cuarto dígito a la derecha de la coma, aumentamos la tolerancia de los tests a $10^{-5}$, con la intención de hacer fallar los tests.

Cabe aclarar que esto lo logramos, editando el archivo `src/scripts/tptests.py`, cuya línea 30 define el parámetro `delta`$= 10^{-4}$.

| **.expected** | **.out** | **error absoluto** | **<0,0001 ?** | **<0,00001 ?** |
|---|---|---|---|---|
| 0,50139627800839 | 0,50141120539323 | 0,000014927 | SI | NO |

Cuadro 1: Error absoluto y tolerancia $10^{-4}$ ó $10^{-5}$

Efectivamente como pensábamos, al definir una tolerancia mas restrictiva que la utilizada por la cátedra, fallan los dos tests que esperábamos.

```
g++ -std=c++11 -O2 -c ./main/main.cpp -o ./main/main.o
g++ -o ./tp ./main/main.o
tests_test-prob-1 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test-prob-2 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test1 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test2 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test_completos_test_completo_1000_2 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... FAIL
tests_test_completos_test_completo_1000_8 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... FAIL
tests_test_completos_test_completo_100_4 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test_completos_test_completo_100_8 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
tests_test_completos_test_completo_10_1 (scripts.tptests.Tp1TestCase) ... ok
```

Figura 2: Tests provistos por la cátedra - Tolerancia: $10^{-5}$

## 3.2. Comparando el error absoluto

Yendo un paso mas allá, queremos analizar el error absoluto que cometen nuestras implementaciones de Colley y Massey frente a otra solución. En particular, optamos por la función `numpy.linalg.solve`, de la librería *Numpy* para Python, ya que toda la experimentación la realizamos en Python, más precisamente en el Jupyter Notebook `./python/MetNum_tp1.ipynb`.

Primero, sobrecargamos el operador `<<` para vectores de `doubles`, dentro de nuestra solución en C++ (Esto lo realizamos en el archivo `./src/main/utils.h`). De esta manera, podremos imprimir fácilmente por `stdout` las matrices de Colley y Massey, junto con sus vectores solución, antes de ser resueltas por nuestro algoritmo de Eliminación Gaussiana. Las mismas las almacenamos en archivos que luego procesaremos en Python. Para el análisis, usamos el schedule de la NBA 2015-2016, que llevamos al formato esperado por el ejecutable con el siguiente *snippet*, también dentro del mismo Jupyter Notebook.

```python
columns = ["code", "date", "team 1", "local", "score 1", "team 2", "visitor", "score 2"]
nba_raw = pd.read_csv(
    os.path.join(data_path, "nba_2016_scores.csv"),
    names = columns)
nba = nba_raw.drop(columns = ["code", "local", "visitor"])

teams_amount = len(nba["team 1"].unique())
matches_amount = len(nba['team 1'])

nba.to_csv(
    path_or_buf=os.path.join(temp_path, "nba.in"),
    sep = " ",
    index= False,
    header = [str(teams_amount), str(matches_amount), "", "", ""])
```

Listing 8: Convirtiendo los datos a un archivo input válido

Con el ejecutable compilado (con la modificación indicada) y el archivo `./python/tmp/nba.in`, ejecutamos los métodos Colley (0) y Massey (2), y guardamos la salida de las matrices generadas en los respectivos archivos `*.txt`. El método Win Rate (1), al no resolverse mediante Eliminación Gaussiana, no será tenido en cuenta en esta comparación.

```
../src/tp "tmp/nba.in" "matrix_error/colley.out" 0 > colley_matrix.txt
../src/tp "tmp/nba.in" "matrix_error/massey.out" 2 > massey_matrix.txt
```

Luego, dentro Jupyter Notebook, leemos ambos archivos para cada método (la matriz y el *ranking* obtenido). Parseamos las matrices (en `colley_matrix` y `massey_matrix`) y los vectores solución (en `colley_results` y `massey_results`), para resolver el sistema de ecuaciones lineales usando el paquete *Numpy*. A continuación observamos el snippet utilizado para tal fin.

```python
# Colley: Cr = b
C = np.row_stack(colley_matrix)
C = C.astype(np.float64)
b = np.array(colley_results)
b = b.astype(np.float64)
r = np.linalg.solve(C, b)

# Massey: Mx = p
M = np.row_stack(massey_matrix)
M = M.astype(np.float64)
p = np.array(massey_results)
p = p.astype(np.float64)
x = np.linalg.solve(M, p)
```

Listing 9: Sistema de ecuaciones lineales en Numpy

Una vez hecho esto, solo falta comparar los resultados obtenidos en *Numpy* contra los *rankings* devueltos por nuestras implementaciones en C++. Por cada método, y para cada equipo, calculamos la diferencia absoluta entre ambos valores. Luego, corroboramos que sea menor a $10^{-14}$. En ambos casos, el resultado es verdadero.

```python
colley_ranking_file = open(os.path.join('matrix_error', 'colley.out'))
colley_ranking = [np.float64(each_ranking) for each_ranking in colley_ranking_file]
result = True
for i in range(0,30):
    result = result and (abs(r[i]-colley_ranking[i]) < pow(10,-14))
result # True

massey_ranking_file = open(os.path.join('matrix_error', 'massey.out'))
massey_ranking = [np.float64(each_ranking) for each_ranking in massey_ranking_file]
result = True
for i in range(0,30):
    result = result and (abs(x[i]-massey_ranking[i]) < pow(10,-14))
result # True
```

Listing 10: Análisis de error absoluto en Numpy

### 3.3. Preliminares

La siguiente tabla es un fragmento de los resultados de los *rankings* para el set de datos de NBA 2015-2016. Se visualizan los 5 primeros lugares según el *ranking* obtenido por Colley y los 2 últimos de la tabla. A su vez, también se visualizan los *rankings* obtenidos para los mismos equipos mediante los métodos restantes (notar que el orden en ellos se ve alterado).

La tabla completa (ordenada por *colley_ranking*) se encuentra en la Sección 5, Cuadro 11. Se omiten decimales para facilitar el análisis cualitativo.

| **Equipo** | **Conferencia** | **colley_ranking** | **wp_ranking** | **massey_ranking** |
|---|---|---|---|---|
| Golden_State | W | 0.874 | 0.909 | 10.30 |
| San_Antonio | W | 0.804 | 0.851 | 11.23 |
| Cleveland | E | 0.692 | 0.712 | 5.755 |
| Toronto | E | 0.659 | 0.682 | 3.930 |
| Oklahoma_City | W | 0.656 | 0.672 | 6.469 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| LA_Lakers | W | 0.237 | 0.206 | -8.214 |
| Philadelphia | E | 0.151 | 0.134 | -10.43 |

Cuadro 2: Recorte de Resultados NBA temporada 2015-2016

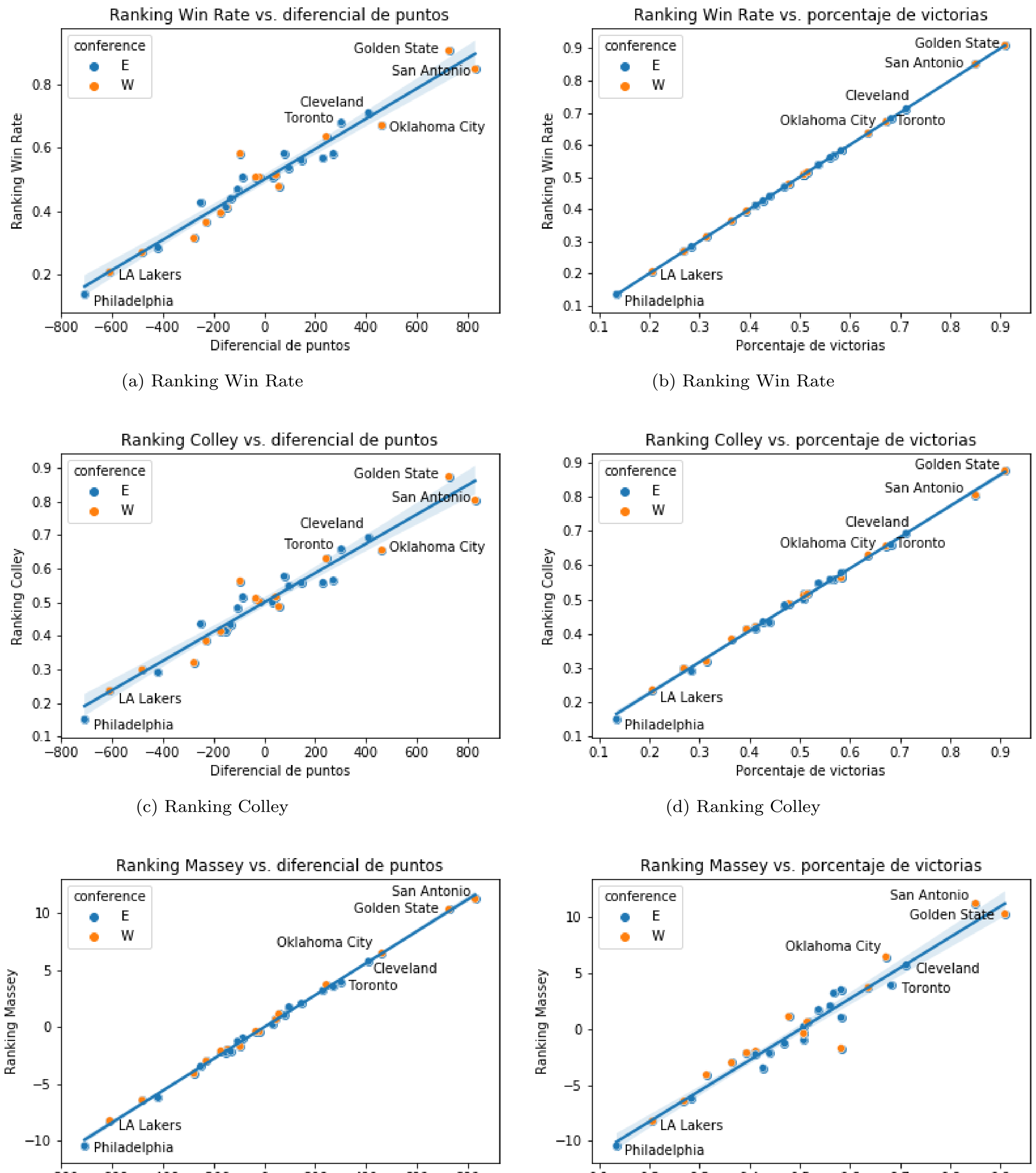
La primer mirada a los resultados ya resalta un aspecto importante: dependiendo del método usado, el campeón de la liga puede ser uno de dos equipos, Golden State o San Antonio. En efecto, notamos que el *ranking* de Massey (sobre todo por el centro de la tabla) intercambió los puestos de algunos equipos, uno o más lugares frente a los otros dos métodos.

A su vez, Colley y Win Rate resultaron bastante compatibles entre sí, entregando casi el mismo orden de equipos (mas allá del valor nominal del *ranking*). Una sutil diferencia que se presenta, es que Colley (por medio de fuerza de tabla) ajusta resultados que son indistinguibles en el método de Win Rate, como es el caso de Miami, Boston y Memphis (ver Cuadro 11).

Para entender más claramente las diferencias de *ranking* encontradas entre los métodos, graficamos el *ranking* de cada equipo (según los tres algoritmos) contra su porcentaje de victorias y contra el diferencial de puntos que obtuvieron en la temporada, esperando ver para algunos métodos, una correlación lineal clara entre estos factores (Figura 3).

Podemos ver que el método que mejor se ajusta al diferencial de puntos, es efectivamente Massey (Figura 3e). Por el contrario, dicho método frente al porcentaje de victorias no tiene una fuerte correlación (por ejemplo, podemos observar en la (Figura 3f), como Golden State teniendo el mejor porcentaje de victorias del torneo, obtiene un ranking inferior al de San Antonio, siendo relegado al segundo lugar).

A la inversa, Win Rate se ajusta perfectamente al gráfico contra el porcentaje de victorias (como era de esperar, ya que es la definición del método (Figura 3b)), pero obtiene la peor correlación contra el diferencial de puntos (Figura 3a), ya que este algoritmo no contempla esta información de los encuentros.




(a) Ranking Win Rate

(b) Ranking Win Rate

(c) Ranking Colley

(d) Ranking Colley

(e) Ranking Massey

(f) Ranking Massey

Figura 3: Métodos vs. diferencial de puntos & Métodos vs. porcentaje de victorias

El método de Colley ofrece una correlación lineal intermedia en ambos casos. Esto ocurre porque Colley considera las victorias y derrotas en una manera similar a Win Rate (Figura 3d), y porque la fuerza de tabla compensa en parte (Figura 3c), el hecho de no considerar el desempeño en los partidos.

Otra pieza de información que obtenemos de la (Figura 3), es que dado que no se enfrentan todos los equipos entre sí la misma cantidad de veces, si no que se reparten en dos conferencias de quince equipos y 6 divisiones de 5 equipos, notamos mayor variabilidad de puntos en la conferencia Oeste (W). Los mejores equipos de esta división obtuvieron generalmente una mayor diferencia de puntos en cada victoria que los del Este, lo cual no es significativo para otros métodos pero sí para Massey. De hecho San Antonio, como vimos, teniendo un promedio de victorias mas bajo que Golden State, quedaría en primer puesto por este factor.

Este mismo resultado se podría haber predicho analizando el método de Colley. El *ranking* de cada equipo refleja en parte su fuerza de tabla, es decir, puntúa mejor a quienes se enfrentan a mejores equipos. Observando que los equipos del Este se encuentran más centrados y los del Oeste en las puntas de la tabla, se podría deducir que la diferencia de habilidad de los equipos es más notoria en la última, y sería lógico predecir una mayor diferencia de puntos que la refleje.

## 3.4. Hipótesis planteadas

A partir del marco teórico explicado en la Sección 2 y los resultados obtenidos, planteamos las siguientes hipótesis sobre los factores determinantes para el *ranking* de cada método.

#### Método de Win Rate

Nuestra hipótesis sobre este método es que lo único que afecta el *ranking* de un equipo es ganar o perder, y no se tendrá en cuenta contra quién, o por cuántos puntos. Tampoco se podrá afectar el *ranking* de un equipo a partir de resultados externos.

#### Método de Colley

Nuestra hipótesis sobre este método es que será similar al Win Rate, tomando en cuenta otros factores que el primero deja de lado. El *ranking* de cada equipo se verá afectado indirectamente y de forma leve por sus rivales; si éstos son superiores a la media, ganarle a los mismos generará un valor mayor que ganarle a uno inferior. No se verá afectado el *ranking* por diferencias de puntaje, por lo tanto a los equipos les será indistinto ganar por un margen amplio o acotado.

#### Método de Massey

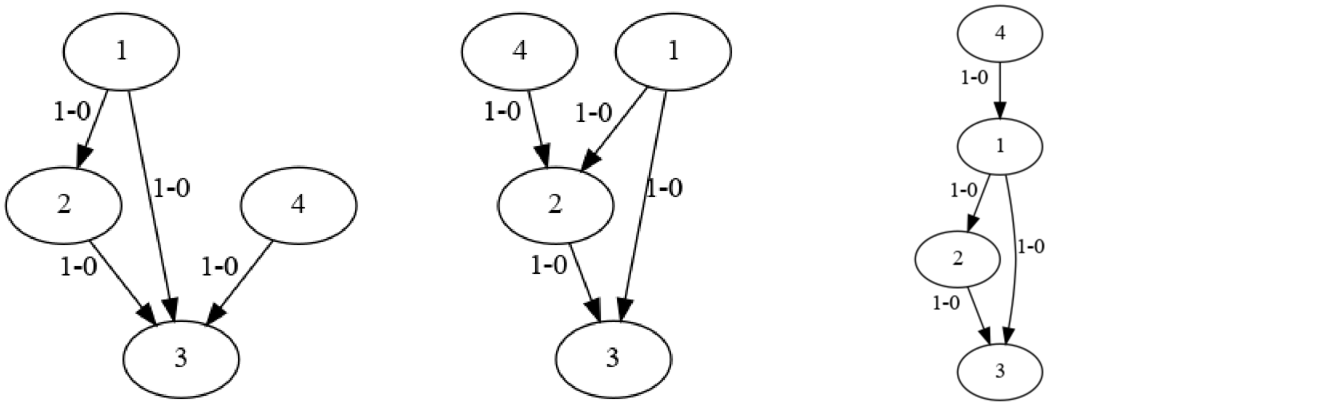
Nuestra hipótesis sobre este método es que el *ranking* estará linealmente correlacionado con la diferencia total de puntos que marcaron en la temporada. Para maximizar su *ranking*, un equipo no solo deberá ganar la mayor cantidad posible de partidos (y si es contra los mejores, mejor) sino que además deberá conseguir la mayor diferencia de puntaje que pueda en cada fecha.

Para este segundo punto, su mejor estrategia dependerá del contrincante. En una fecha “complicada”, será difícil obtener una amplia diferencia de puntos, pero ganar dicho partido aumentará su *ranking* sustancialmente en comparación a ganarle a un equipo inferior. Por otro lado, si el oponente es accesible (tiene un *ranking* mas bajo), una simple victoria no aumenta demasiado el *ranking* propio, pero es una excelente oportunidad para golear a dicho contrincante y obtener así una amplia diferencia de puntos, que también decantará en un incremento del propio *ranking*.

## 3.5. Puesta a prueba de las hipótesis

Para comprobar las hipótesis detalladas, trabajamos con ligas reducidas de 4 equipos y pocos enfrentamientos, donde pudimos observar los efectos que genera en los *rankings* los distintos escenarios. A partir de esta información concluimos qué modificaciones son las que más y menos afectan los resultados entre los equipos, y comprobamos o falseamos nuestros supuestos sobre las mismas.

Utilizamos al equipo “4” como pivot de permutación, manteniendo constantes los resultados de los demás equipos. Utilizamos los siguientes grafos dirigidos para explicar de forma concisa y visual las permutaciones en la liga, donde cada nodo es un equipo y las flechas que los conectan es un partido que parte del ganador y apunta al perdedor. El puntaje final de cada fecha se visualiza sobre su respectiva flecha.




(a) le gana al peor (b) le gana a uno del medio (c) la gana al mejor

Figura 4: El equipo “4” gana por la mínima diferencia (modelo)

Las permutaciones realizadas en la Figura 4 representan leves modificaciones al `schedule` para generar diferentes escenarios de posibles victorias del equipo “4”.

1. Esperamos diferencias significativas entre los *rankings* de Colley, porque el equipo 4, si bien siempre obtiene una victoria, la obtiene contra un oponente de distinta fuerza (y de hecho se observa, entre los resultados de ganarle al mejor y al peor). que el *ranking* de “4” sea el mismo en todos los casos para Win Rate (ya que tiene un 100 % de efectividad), aunque dependiendo del caso quedará en distinto lugar en el *ranking* debido al empate entre porcentajes de victorias.

2. Al ganar los enfrentamientos contra equipos de dificultad moderada y alta, esperamos que el *ranking* de Massey del equipo “4” suba notoriamente. No así en el caso de la victoria contra un equipo débil, ya que lo hace por la mínima diferencia.

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.683333333333333 | 1 | 1.0 | 1 | 0.5833333333333299 |
| 4 | 0.583333333333333 | 4 | 1.0 | 4 | 0.25 |
| 2 | 0.483333333333333 | 2 | 0.5 | 2 | -0.0833333333333330 |
| 3 | 0.25 | 3 | 0.0 | 3 | -0.75 |

(a) le gana al peor

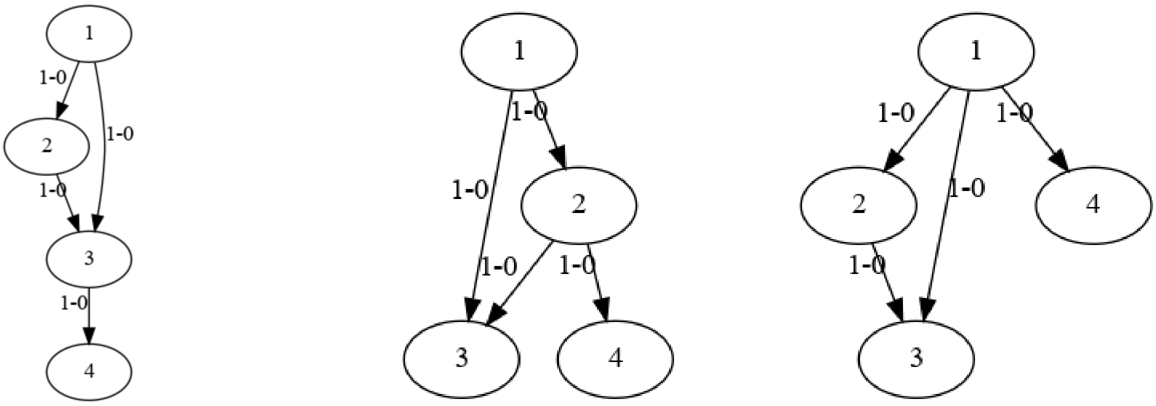
| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.672222222222222 | 1 | 1.0 | 4 | 0.75 |
| 4 | 0.638888888888889 | 4 | 1.0 | 1 | 0.416666666666667 |
| 2 | 0.416666666666667 | 2 | 0.333333333333333 | 2 | -0.25 |
| 3 | 0.272222222222222 | 3 | 0.0 | 3 | -0.9166666666666 |

(b) le gana a uno del medio

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.694444444444444 | 4 | 1.0 | 4 | 1.25 |
| 1 | 0.583333333333332 | 1 | 0.666666666666667 | 1 | 0.25 |
| 2 | 0.461111111111111 | 2 | 0.5 | 2 | -0.416666666666667 |
| 3 | 0.261111111111111 | 3 | 0.0 | 3 | -1.08333333333333 |

(c) le gana al mejor

Cuadro 3: gana por mínima diferencia (resultados)




(a) pierde contra el peor (b) pierde contra uno del medio (c) pierde contra el mejor

Figura 5: El equipo “4” pierde por la mínima diferencia (modelo)

Las permutaciones realizadas en la Figura 5 representan leves modificaciones al `schedule` para generar diferentes escenarios de posibles derrotas del equipo “4”.

1. Dada la fuerza de tabla, esperamos ver que el *ranking* de Colley varíe en base al oponente. Si el mismo es un equipo “fuerte”, la derrota podría considerarse como un resultado esperado, por lo tanto el *ranking* del oponente aumenta levemente y el propio disminuye poco. Dado que el equipo “3” sufrió mas derrotas, “4” no cae al fondo de la tabla. Por el contrario, si la derrota es precisamente frente el equipo “3”, como éste es un equipo débil, se observa un salto en el *ranking* del equipo victorioso.

2. Esperamos que el *ranking* de “4” sea el mismo en todos los casos para Win Rate (ya que tiene un 0 % de efectividad), aunque podría quedar en distinto lugar debido al empate entre porcentajes.

3. En el caso de Massey, al perder los enfrentamientos contra equipos de dificultad alta, esperamos que el *ranking* del equipo “4” baje levemente. No así en el caso de la derrota contra un equipo débil.

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.73888888888889 | 1 | 1.0 | 1 | 1.08333333333333 |
| 2 | 0.53888888888889 | 2 | 0.5 | 2 | 0.41666666666667 |
| 3 | 0.41666666666667 | 3 | 0.33333333333333 | 3 | -0.25 |
| 4 | 0.30555555555555 | 4 | 0.0 | 4 | -1.25 |

(a) pierde contra el peor

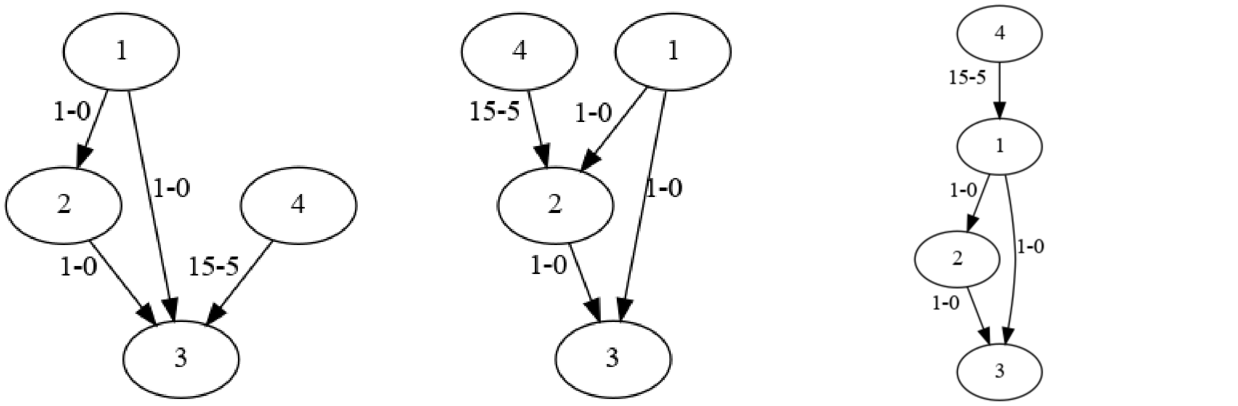
| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.72777777777778 | 1 | 1.0 | 1 | 0.91666666666667 |
| 2 | 0.58333333333332 | 2 | 0.6666666666666 | 2 | 0.25 |
| 4 | 0.36111111111111 | 3 | 0.0 | 3 | -0.41666666666667 |
| 3 | 0.32777777777778 | 4 | 0.0 | 4 | -0.75 |

(b) pierde contra uno del medio

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.75 | 1 | 1.0 | 1 | 0.75 |
| 2 | 0.51666666666667 | 2 | 0.5 | 2 | 0.08333333333333001 |
| 4 | 0.41666666666667 | 3 | 0.0 | 4 | -0.25 |
| 3 | 0.31666666666667 | 4 | 0.0 | 3 | -0.5833333333333299 |

(c) pierde contra el mejor

Cuadro 4: pierde por mínima diferencia (resultados)




(a) le gana al peor (b) le gana a uno del medio (c) le gana al mejor

Figura 6: El equipo “4” gana por amplia diferencia (modelo)

Las permutaciones realizadas en la Figura 6 representan leves modificaciones al `schedule` para generar diferentes escenarios de posibles victorias del equipo “4” por amplia diferencia de goles.

1. Para el método de Colley, esperamos ver exactamente los mismos resultados que en los casos observados en (Cuadro 3), ya que los escenarios son idénticos, a excepción de la diferencia de goles en cada partido.

2. De igual forma que en el método de Colley, esperamos ver los mismos resultados para Win Rate.

3. Para el método de Massey, esperamos ver el impacto de la diferencia de goles. Anteriormente, en el caso de victorias por ventaja mínima, el equipo “4” quedó en primer lugar salvo cuando le ganó a un equipo de menor *ranking*, donde quedó segundo. Como habíamos dicho, la mejor estrategia para Massey es, al enfrentar a un contrincante débil ganar por amplia ventaja, que es lo que en esta ocasión sí sucede. Por lo tanto, observamos que el equipo “4” queda primero en los tres casos, aunque con un mayor *ranking* absoluto en el caso de golear a un equpo superior.

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.6833333333333 | 1 | 1.0 | 4 | 7.0 |
| 4 | 0.5833333333333 | 4 | 1.0 | 1 | -1.6666666666666698 |
| 2 | 0.48333333333333 | 2 | 0.5 | 2 | -2.3333333333333304 |
| 3 | 0.25 | 3 | 0.0 | 3 | -3.0 |

(a) le gana al peor

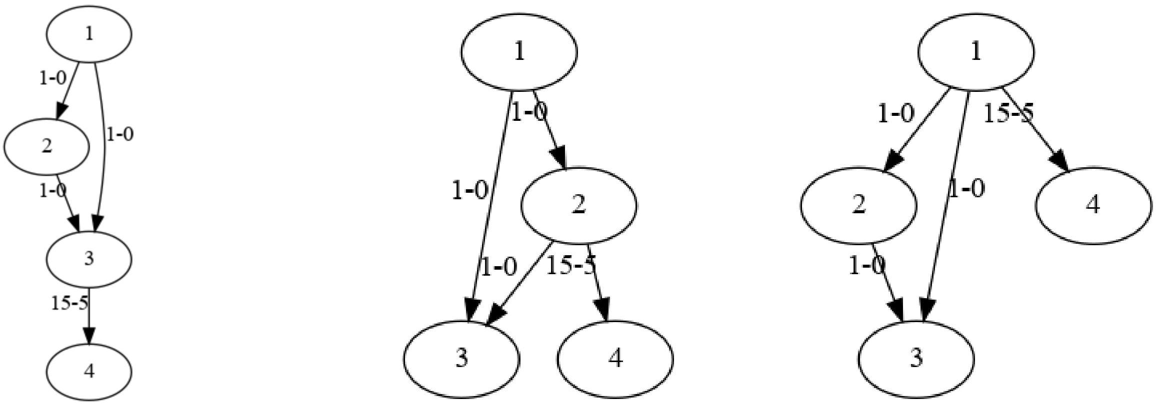
| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.67222222222222 | 1 | 1.0 | 4 | 7.5 |
| 4 | 0.63888888888889 | 4 | 1.0 | 1 | -1.8333333333333302 |
| 2 | 0.41666666666667 | 2 | 0.33333333333333 | 2 | -2.5 |
| 3 | 0.27222222222222 | 3 | 0.0 | 3 | -3.1666666666666696 |

(b) le gana a uno del medio

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.69444444444444 | 4 | 1.0 | 4 | 8.0 |
| 1 | 0.58333333333332 | 1 | 0.66666666666667 | 1 | -2.0 |
| 2 | 0.46111111111111 | 2 | 0.5 | 2 | -2.6666666666666696 |
| 3 | 0.26111111111111 | 3 | 0.0 | 3 | -3.3333333333333304 |

(c) le gana al mejor

Cuadro 5: gana por amplia diferencia (resultados)




(a) pierde contra el peor (b) pierde contra uno del medio (c) pierde contra el mejor

Figura 7: El equipo "4" pierde por amplia diferencia (modelo)

Las permutaciones realizadas en la Figura 7 representan leves modificaciones al `schedule` para generar diferentes escenarios de posibles derrotas del equipo "4" por amplia diferencia de goles.

1. Para el método de Colley, esperamos ver exactamente los mismos resultados que en los casos observados en (Cuadro 4), ya que los escenarios son idénticos, a excepción de la diferencia de goles en cada partido.

2. De igual forma que en el método de Colley, esperamos ver los mismos resultados para Win Rate.

3. Para el método de Massey, esperamos ver el impacto de la diferencia de goles, esta vez de forma negativa para nuestro equipo. Anteriormente, en el caso de derrotas por ventaja mínima, el equipo "4" quedó en último lugar salvo cuando perdió frente a un equipo de mayor *ranking*, donde quedó anteúltimo. Ahora, quedó al final de la tabla en todos los casos ya que no fue perdonado por perder por goleada hasta contra el mejor equipo. Es mas, observamos que el *ranking* nominal es muchísimo menor en todos los casos, comparado con las derrotas por la mínima.

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.738888888888889 | 1 | 1.0 | 1 | 3.33333333333333 |
| 2 | 0.538888888888889 | 2 | 0.5 | 2 | 2.66666666666666 |
| 3 | 0.416666666666667 | 3 | 0.33333333333333 | 3 | 2.0 |
| 4 | 0.305555555555555 | 4 | 0.0 | 4 | -8.0 |

(a) pierde contra el peor

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.727777777777778 | 1 | 1.0 | 1 | 3.16666666666666 |
| 2 | 0.583333333333332 | 2 | 0.6666666666666 | 2 | 2.5 |
| 4 | 0.361111111111111 | 3 | 0.0 | 3 | 1.8333333333333302 |
| 3 | 0.327777777777778 | 4 | 0.0 | 4 | -7.5 |

(b) pierde contra uno del medio

| Equipo | colley_ranking | Equipo | wp_ranking | Equipo | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.75 | 1 | 1.0 | 1 | 3.0 |
| 2 | 0.516666666666667 | 2 | 0.5 | 2 | 2.3333333333333304 |
| 4 | 0.416666666666667 | 3 | 0.0 | 3 | 1.6666666666666698 |
| 3 | 0.316666666666667 | 4 | 0.0 | 4 | -7.0 |

(c) pierde contra el mejor

Cuadro 6: pierde por amplia diferencia (resultados)

De los resultados obtenidos hasta ahora, en la Figura 4c encontramos resultados llamativos con respecto a Colley. Si bien esperábamos que el ranking aumente al derrotar un equipo superior, no previmos que salga primero. Para analizar más a fondo el peso de la fuerza de tabla en casos extremos, elaboramos el siguiente experimento: un nuevo torneo con 5 equipos, donde el equipo "1" gana un solo partido en todo el torneo contra el equipo "5", quien gana el resto de sus partidos; el resto de los equipos juegan entre sí, y ganan y pierden la misma cantidad de partidos. Siguiendo el patrón esperado del experimento anterior el equipo "1" debería salir primero, por batir al líder.

Consideramos necesario aclarar que este experimento se encuentra muy lejano a la realidad y de seguro en la práctica salir primero habiendo jugado un solo partido, mientras que el resto de los equipos jugó muchos más, sería un resultado controversial. Sin embargo, creemos que podría darnos información relevante acerca de los efectos de ganarle a un rival superior.

En primera instancia probamos con un torneo de 35 partidos donde el equipo "5" juega 10 partidos. Los resultados fueron los siguientes:

| Equipo | colley_ranking |
|---|---|
| 1 | 0.74468085106383 |
| 5 | 0.73404255319149 |
| 2 | 0.34042553191489006 |
| 3 | 0.34042553191489006 |
| 4 | 0.34042553191489006 |

Cuadro 7: caso extremo (35 partidos), ganar al mejor

Nuevamente, el equipo "1" se posiciona primero, jugando solamente un partido mientras que el "5" jugó diez. Esto nos hace suponer que siempre que se le gane al mejor se saldrá primero. Para confirmarlo, decidimos llevar la misma idea al extremo: el mismo modelo con 325 partidos, donde "5" gane 108 partidos y pierda sólo contra el "1". Sorprendentemente, el resultado cambió:

| Equipo | colley_ranking |
|---|---|
| 5 | 0.800420 |
| 1 | 0.766807 |
| 2 | 0.310924 |
| 3 | 0.310924 |
| 4 | 0.310924 |

Cuadro 8: caso extremo (325 partidos), ganar al mejor

Para entender mejor que ocurrió en este experimento, analizamos las ecuaciones de los *rankings* de los equipos "1" y "5".

Analizando la ecuación (16) de Colley 2002,

$$(2 + n_{tot,i})r_i - \sum_{j=1}^{n_{tot,i}} r_j^i = 1 + \frac{(n_{w,i}, -n_{l,i})}{2}$$

Podemos ver cual es la ecuación puntual del *ranking* del i-ésimo equipo:

$$r_i = \frac{1+\frac{(n_{w,i}-n_{l,i})}{2}}{2+n_{tot,i}} + \frac{\sum_{j=1}^{n_{tot,i}} r_j^i}{2+n_{tot,i}}$$

Se puede entonces ver la ecuación del *ranking* del equipo "1" ($r_1$) para los cuadros 7 y 8:

$$r_1 = \frac{1+\frac{(1-0)}{2}}{2+1} + \frac{\sum_{j=1}^{1} r_j^i}{2+1} = \frac{1}{2} + \frac{r_5}{3}$$

Para entender mejor el *ranking* del equipo "5" analizemos su limite con $n_{tot,5}$ tendiendo hacía el infinito, sabiendo que gana todos sus partidos menos uno,

$$\text{lím}_{n_{tot,5}\to\infty} r_5 = \text{lím}_{n_{tot,5}\to\infty} \frac{1+\frac{(n_{tot,5}-1-1)}{2}}{2+n_{tot,5}} + \frac{\sum_{j=1}^{n_{tot,5}} r_j^i}{2+n_{tot,5}} = \frac{1}{2} + \text{su fuerza de tabla}^1$$

[1] según la definición de fuerza de tabla escrita en términos usados

Entonces, podemos concluir que para que el equipo "5" supere al equipo "1" en el ranking de Colley en este modelo, su fuerza de tabla debe representar más de un tercio de su *ranking*, ya que ambos equipos maximizan la parte de la ecuación dependiente de partidos ganados y perdidos y pasan a depender solo de su fuerza de tabla. Además, por los resultados del cuadro 8, podemos afirmar que existe cierto $n_0$, cantidad de partidos jugados, para el cual se cumple que la fuerza de tabla del equipo "5" representa más de un tercio de su *ranking*.

## 3.6. Estrategias

### 3.6.1. Win Rate

El método de control de Win Rate reflejó, como se esperaba, la propiedad de sólo modificarse al ganar o perder y mantenerse estable a cualquier otro cambio, sea variaciones en los puntos o los resultados de partidos jugados por otros equipos. En base a esto, podemos definir la estrategia para maximizar el *ranking*.

Retomemos el calendario de la NBA 2015-2016, donde Philadelphia quedó al final de la tabla de posiciones, y alteremos algunos partidos para tratar de aplicar la estrategia de Win Rate y corroborar que Philadelphia recupera algunas posiciones. El primer escenario a considerar, será modificar los partidos de Philadelphia contra los mejores cinco equipos de la temporada (los llamamos `top_5`), invirtiendo los puntajes, de forma que Philadelphia termine ganandole a los líderes de tabla. En total, son 11 partidos. El segundo escenario, será invertir los puntajes de las derrotas de Philadelphia frente a aquellos equipos pertenecientes al `last_5`. En total, son cinco partidos. Para equiparar los 11 partidos modificados del escenario anterior, alteramos además 6 partidos de Philadelphia frente a algunos `top_5`.

| Fecha | Equipo 1 | Puntaje 1 | Equipo 2 | Puntaje 2 |
|---|---|---|---|---|
| 20151102 | Cleveland | 107 | Philadelphia | 100 |
| 20151106 | Cleveland | 108 | Philadelphia | 102 |
| 20151111 | Toronto | 119 | Philadelphia | 103 |
| 20151113 | Oklahoma City | 102 | Philadelphia | 85 |
| 20151114 | San Antonio | 92 | Philadelphia | 83 |
| 20151207 | San Antonio | 119 | Philadelphia | 68 |
| 20151213 | Toronto | 96 | Philadelphia | 76 |
| 20151220 | Cleveland | 108 | Philadelphia | 86 |
| 20160109 | Toronto | 108 | Philadelphia | 95 |
| 20160110 | Cleveland | 95 | Philadelphia | 85 |
| 20160130 | Golden State | 108 | Philadelphia | 105 |

Cuadro 9: Los 11 partidos originales de Philadelphia vs Top5

| Fecha | Equipo 1 | Puntaje 1 | Equipo 2 | Puntaje 2 |
|---|---|---|---|---|
| 20151123 | Minnesota | 100 | Philadelphia | 95 |
| 20151210 | Brooklyn | 100 | Philadelphia | 91 |
| 20160101 | LA Lakers | 93 | Philadelphia | 84 |
| 20160219 | New Orleans | 121 | Philadelphia | 114 |
| 20160315 | Brooklyn | 131 | Philadelphia | 114 |

Cuadro 10: Los 5 partidos originales perdidos por Philadelphia vs Last5

```
top_5 = [golden_state, san_antonio, cleveland, toronto, oklahoma_city]
last_5 = [new_orleans, minnesota, brooklyn, phoenix, la_lakers]
```

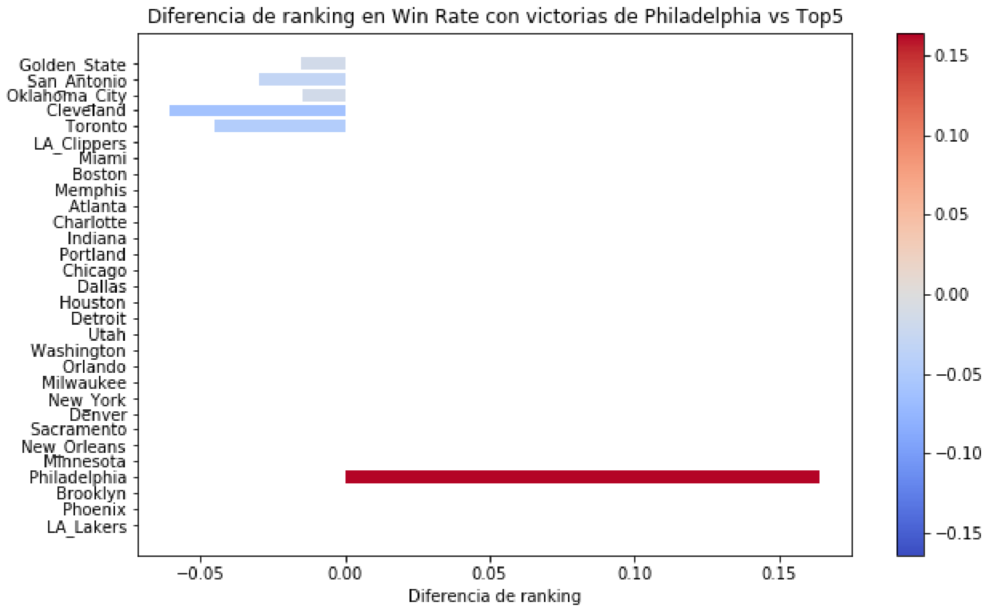



Figura 8: Escenario 1: 11 victorias vs Top5

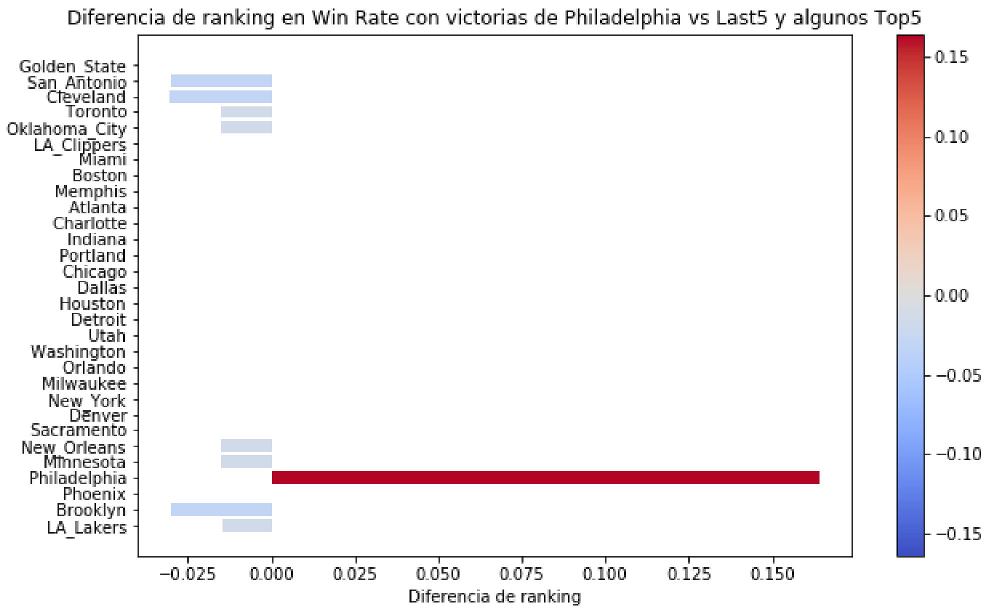



Figura 9: Escenario 2: 5 victorias vs Last5 y 6 vs Top5

Como se puede apreciar en la Figura 8 y en el Cuadro 12 (ver en el Apéndice), las modificaciones hicieron que el porcentaje de victorias logradas por Philadelphia se incremente notablemente, lo que lo hizo subir 3 posiciones y despegarse del fondo de la tabla hasta llegar a la posición 27. Se puede visualizar facilmente que los resultados de un partido solo afectan a los equipos que lo jugaron, ya que la diferencia de *ranking* para los equipos restantes, se mantuvo inalterable (en la tabla lo vemos como diferencias en cero, en los gráficos, por la ausencia de barras horizontales, especialmente en la zona central de la tabla).

Por otro lado, en la Figura 9 y en el Cuadro 13 (ver en el Apéndice), podemos ver como al modificar menos partidos que involucren a los `top_5` y más a los últimos equipos, Philadelphia no solo mantiene su nuevo *ranking* (es exactamente el mismo valor en ambas situaciones, ya que el nuevo porcentaje de victorias es idéntico), sino que además, queda mas cerca de los próximos escalafones. De hecho, el equipo inmediato (Minnesota), también tiene el mismo *ranking*, así que Philadelphia tiene un virtual empate por la posición

26.

Esto indica que si bien el porcentaje de victorias para Philadelphia es el mismo en ambos casos (y al seguir incrementando, eventualmente podría llegar al primer lugar), como los resultados no afectan el *ranking* de terceros, conviene derrotar a los equipos inmediatamente superiores para poder escalar posiciones mas rápidamente, ya que al perder, sus *rankings* disminuyen y se acelera el ascenso hasta sus escalafones.

### 3.6.2. Método de Colley

Respecto a Colley, si bien esperábamos que ganarle a un equipo superior aumente el *ranking* un poco más que si fuera uno inferior, vimos que en algunos casos borde como en el Cuadro 7 este factor puede ser determinante. Creemos que, pensando en la mejor estrategia que podría adoptar un equipo, ésta sería intentar enfrentarse contra los rivales más poderosos a los que se tenga la confianza de ganar, con tal de maximizar la fuerza de tabla sin poner en peligro la tasa de victorias. Y para un equipo débil, que prevé perder la mayoría de los partidos, la mejor estrategia sería apuntar a perderlos contra los mejores, apostando a ganar algunos encuentros y elevar su *ranking* en base a su fuerza de tabla.

Esta estrategia la corroboramos en las Figuras 10, 11 y en los Cuadros 14 y 15, donde se ve claramente que ganar los 11 partidos contra los mejores 5 equipos del torneo, no hace que Philadelphia se ubique en una posición superior a la que obtiene ganando los 5 partidos que había perdido contra los `last_5` y consagrándose victorioso solo en 6 partidos contra los `top_5`. Resumiendo, en el primer escenario termina en la posición 27, mientras que en el segundo logra el puesto 26. También vemos en este método cómo los resultados de un partido afectan a todo el torneo y no solo a los equipos involucrados. Efectivamente en el centro de la tabla se revelan diferencias de *ranking*, evidenciando el concepto de Fuerza de tabla sin dejar de ser un método justo (el efecto de un partido dado, sobre un tercer equipo, es muy pequeño).

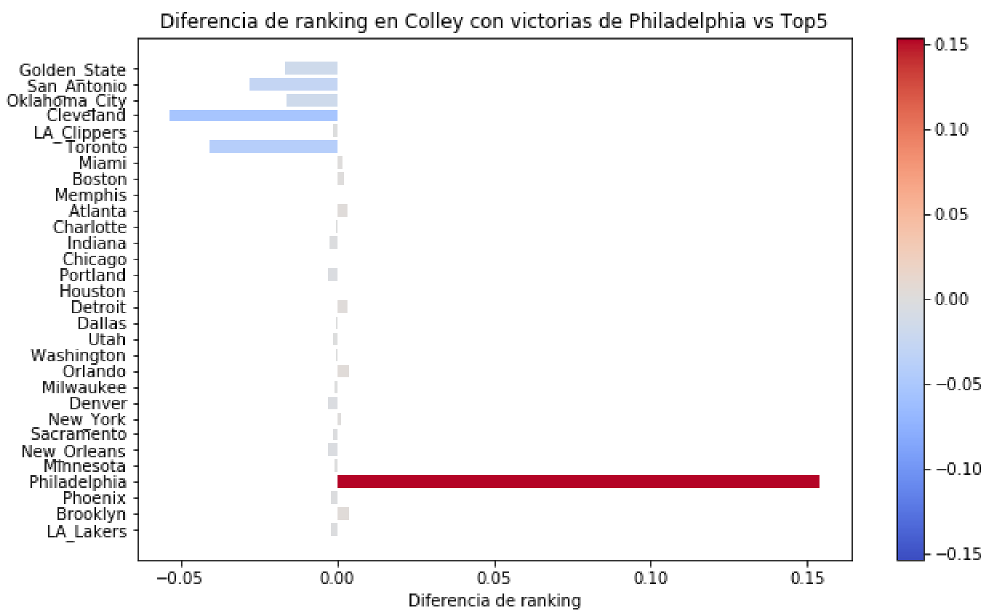



Figura 10: Escenario 1: 11 victorias vs Top5

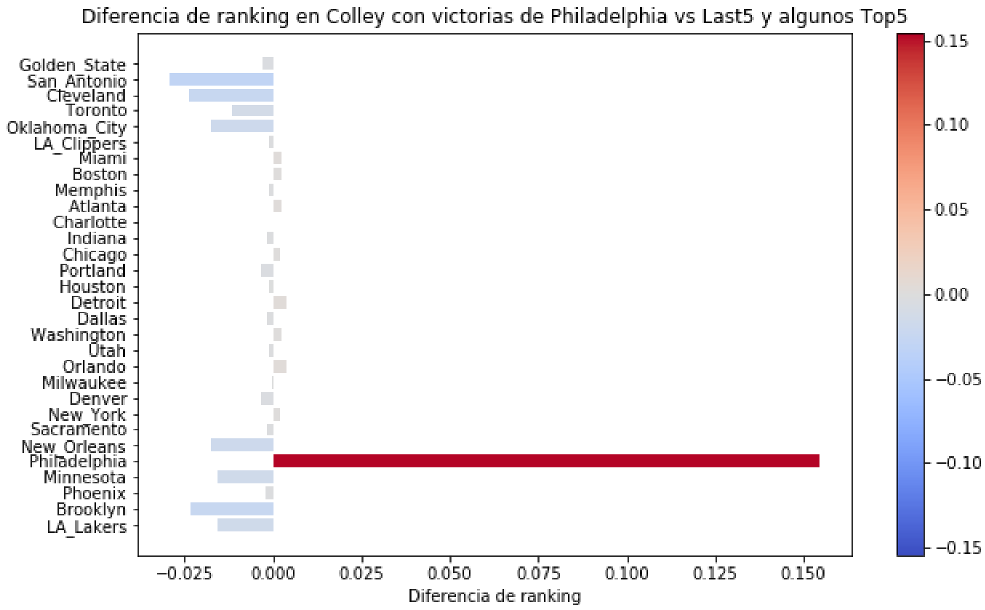



Figura 11: Escenario 2: 5 victorias vs Last5 y 6 vs Top5

### 3.6.3. Método de Massey

Respecto a Massey, la correlación lineal prevista entre el *ranking* y el diferencial de puntos fue correcta, aunque se vio una variabilidad mayor cuando se contaba con pocos enfrentamientos totales. Es el caso de la Figura 4b, donde el equipo "1" obtiene un diferencial de +2 contra el +1 del equipo "4", pero aún así queda en segundo lugar, debido a que los logró teniendo una fuerza de tabla inferior. Respecto a la mejor estrategia, se mantuvo en pie la conjetura de que, al enfrentarse a un rival de menor *ranking*, es importante obtener una diferencia sustancial de puntos aprovechando que el otro equipo es peor, a sabiendas de que con respecto a la fuerza de tabla suma poco al *ranking*. Y al enfrentarse a un equipo superior, la mejor estrategia sería jugar de manera defensiva, minimizando así la perdida en el diferencial de puntos y apostando a la fuerza de tabla.

Entre las Figuras 12 y 13, además de los Cuadros 16 y 17, se puede apreciar precisamente esto. Aunque el *ranking* obtenido en el segundo caso es levemente inferior, Philadelphia se ubica en la misma posición (la 27). Por lo tanto, ganar solo 6 de los 11 partidos contra los equipos del `top_5` (además de ganar otros 5 contra los `last_5`), no impidió que Philadelphia pueda ubicarse en la misma posición que en el escenario donde gana los 11 partidos.

Podríamos intuir que esto se debe a que los partidos que ahora Philadelphia ganó frente a los equipos que se ubican en el fondo de la tabla, tenían un diferencial de puntos mas amplio que aquellos partidos frente a los equipos `top_5`. Nuestra estrategia indica que para estas situaciones, es importante aprovechar los encuentros con equipos débiles y ser agresivo, salir a buscar un amplio margen de diferencia. La Figura 14 lo reafirma, mostrando como Philadelphia se ubica en el puesto 24 luego de repetir el mismo escenario dos, con la única diferencia que los partidos donde se derrota a un equipo débil, es decir del `last_5`, la diferencia de puntos está multiplicada por 5, a favor de Philadelphia. Este número es totalmente arbitrario, pero demuestra como con el mismo resultado binario (victoria-derrota), se puede extraer beneficios en pos de ascender el *ranking*.

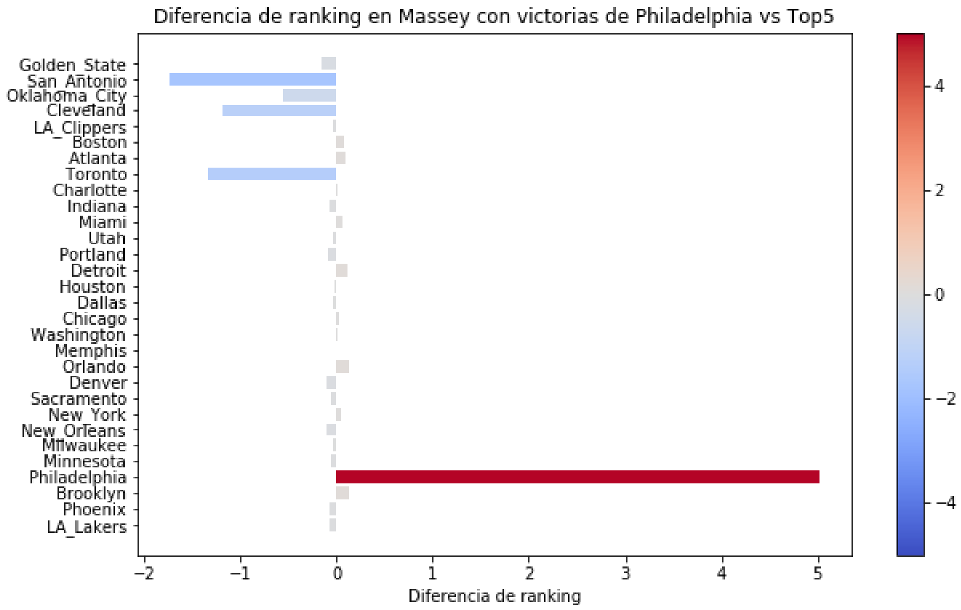



Figura 12: Escenario 1: 11 victorias vs Top5

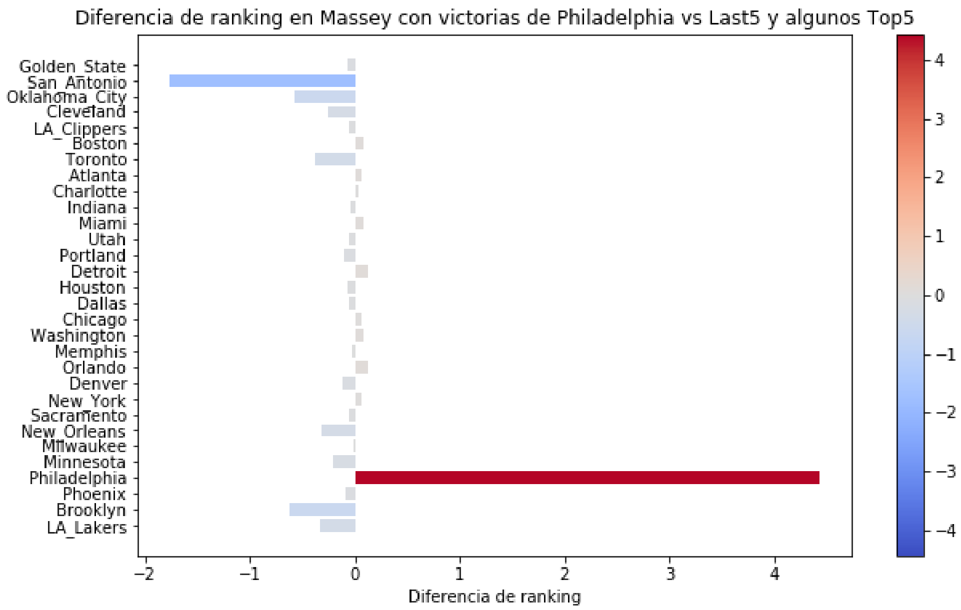



Figura 13: Escenario 2: 5 victorias vs Last5 y 6 vs Top5

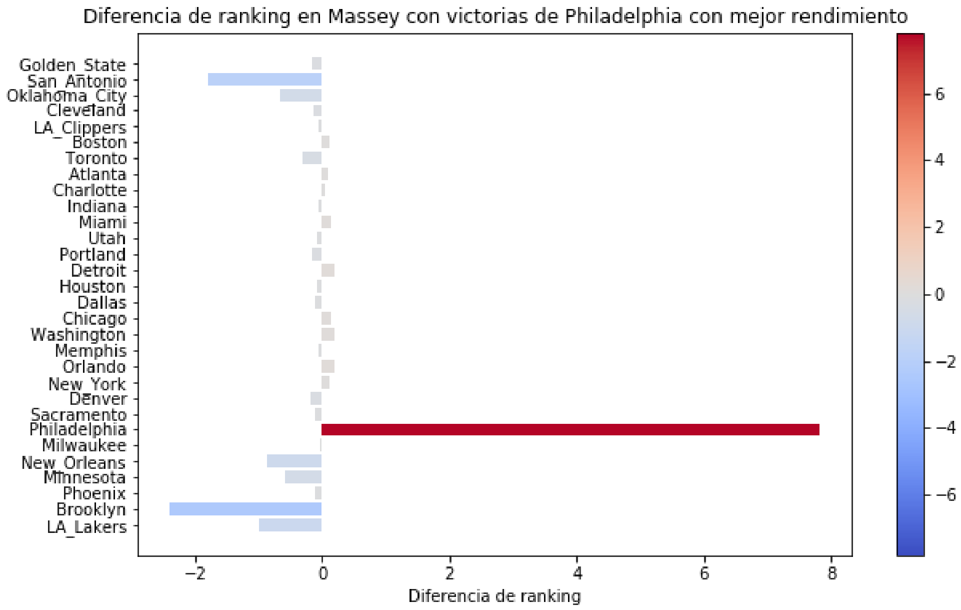



Figura 14: Escenario 3: 5 victorias vs Last5 y 6 vs Top5, con 5 veces el diferencial de puntos

## 4. Conclusiones

Creemos que es relevante la pregunta: ¿cuál de los métodos de rankeo fue el más justo? Partiendo de la base de que todo método contemplará algún aspecto más fuertemente que otro, mientras que dejará de lado algún otro, la respuesta a esta pregunta se vuelve mucho más relevante al contexto de uso.

Con respecto al win rate, aunque sea el menos informativo de los métodos analizados en el trabajo, no debemos descartar el poder del resumen. En la práctica, una vez que nos dicen que un equipo gana la mayor cantidad de sus partidos, ya podemos asumir que debe tener bases sólidas en la mayoría de los aspectos que respectan a ese deporte. Asimismo, si nos dicen que pierde mas de lo que gana, sabemos que tiene mucho por mejorar. Si bien es poco detallista, la simpleza con la que representa los datos expresa mucho.

El método de Colley incorpora a la lectura del win rate un carácter comparativo. El simple hecho de que David, el pequeño, se haya enfrentado a Goliath, el grande, es significativo y llena de matices los resultados. La victoria del pequeño esta glorificada y su derrota justificada. La victoria del grande estaba prevista, no sorprende y su derrota desilusiona. Ampliar así la evaluación de los equipos permite reflejar progreso, errores y superación. Por otro lado, se podría argumentar que el hecho de que el resultado de un partido ajeno altere tu rating es injusto, y a primera vista lo es: el resultado del mismo estuvo absolutamente fuera de tu control. Sin embargo, tu rating se basa en la dificultad de tus oponentes, y sus partidos y sus contrincantes son la forma de analizar y definir esa dificultad. Por lo tanto, no consideramos este aspecto del método de Colley injusto.

Por último, el método de Massey realiza un paso extra, tomando en cuenta un factor de desempeño, en forma de diferencia de puntos. A simple vista, parecería que evaluar el desempeño de los equipos dentro del torneo es una manera de entrar más en detalle. No solo jugó contra el equipo de tal dificultad si no que también jugó de tal manera. Pero esto puede ser abusado. Salir primero por golear a los peores del torneo (como se estudió en el experimento referido a la Figura 6) no parecería justo. Y esto último no está muy alejado de la realidad, es altamente probable que dentro de un torneo un equipo habilidoso se enfrente con uno de los equipos más débiles. Por lo tanto, este método, utilizado como único método de evaluación, podría resultar inadecuado o injusto.

Concluyendo el trabajo realizado, un comentario sobre la suficiencia de los métodos. Todos los deportes, hasta los más simples, tienen más variables que sólo ganar, perder y hacer puntos. Y cada análisis que tome en cuenta nuevas variables inevitablemente devolverá resultados distintos en ciertos casos, como lo vimos en este trabajo. Por lo tanto, nos resulta difícil decidir cuál de estos tres métodos es el mejor a la hora de evaluar el desempeño de los equipos. Si queremos ser realmente justos con el deporte, y analizarlo de manera global, nos veríamos obligados a concluir que los tres, si se utilizaran aisladamente, son insuficientes y hace falta rankear a los equipos de más maneras en simultáneo, contemplando una mayor cantidad de aspectos del deporte en cuestión.

En la práctica, los deportes profesionales siguen esta línea de pensamiento. Suele existir un método principal para decidir quién sale campeón, quién avanza a otra copa, quién desciende a otra liga, pero no se utiliza este mismo método como el absoluto para definir quién tuvo el mejor desempeño, el mejor defendiendo, atacando, etc. Mezclando distintos métodos de rankeo, se puede obtener una visión más global sobre la esencia misma del deporte.

# 5. Apéndice

## 5.1. Empate

Como los datos que utilizamos no contienen ejemplos de empates, no nos encontramos la con la necesidad de implementarlo en nuestros algoritmos. Sin embargo, a pedido del ejercicio opcional, dejamos la siguiente reflexión:

Dentro de la NBA, y muchos de los deportes estadounidenses, el empate no existe. Es por eso que el método de Colley no lo considera, ya que fue creado particularmente para estas ligas. Sin embargo, si hubiera que aplicar los métodos considerados en un deporte donde exista el empate, podríamos hacerlo de la siguiente manera (sabiendo que no es la única):

Dentro del Win Rate, el empate podría contar como derrota para ambos equipos. La modificación que habría que hacerle al algoritmo en este caso es, en caso de empate, **sólo** aumentar las partidas jugadas para ambos equipos. Nos resulta interesante mencionar que el empate se tornaría un resultado indirectamente beneficioso para los equipos que no participaron del partido, ya que ambos participantes pierden *ranking*.

Nuestra manera de agregar el empate al método de Colley es la siguiente: al igual que en Win Rate, por cada partido empatado, incrementar solo la cantidad de partidos jugados para ambos equipos. El cambio que se podrá ver en los resultados, ante un empate, es que un equipo que tiene más victorias que derrotas disminuirá su *ranking*, y un equipo con más derrotas que victorias, aumentará el suyo. Esto se debe a que el *ranking* de un equipo en Colley tiene dos partes, la dependiente de las victorias y derrotas:

$$\frac{\#Victorias - \#Derrotas}{Totales} \tag{3}$$

y la dependiente de los contrincantes. Con respecto a la primera parte, si se tiene que $\#Victorias - \#Derrotas > 0$, al aumentar un partido en el denominador, esa parte de del *ranking* baja. Pero, si se tiene que $\#Victorias - \#Derrotas < 0$ el *ranking* sube. La otra parte del *ranking* se mantiene estable.

Afortunadamente, nuestra implementación del método de Massey ya está preparada para aceptar empates. Esto se debe a que nuestro algoritmo aumentaría la cantidad de partidos jugados acordemente y al calcular los diferenciales de puntos sumaría un cero al de ambos equipos. Con este cambio, empatar favorecería directamente al equipo con el rating más bajo.

### 5.2. Tabla entera de NBA Rankings

| Equipo | Conferencia | colley_ranking | wp_ranking | massey_ranking |
|---|---|---|---|---|
| Golden_State | W | 0.87406268585848 | 0.9090909090909101 | 10.299530330231 |
| San_Antonio | W | 0.80397569628583 | 0.8507462686567199 | 11.22958985683614 |
| Cleveland | E | 0.6924282509226299 | 0.7121212121212099 | 5.75538952391281 |
| Toronto | E | 0.6593469134188901 | 0.6818181818181801 | 3.92961243244308 |
| Oklahoma_City | W | 0.65555249192855 | 0.6716417910447801 | 6.468821795086559 |
| LA_Clippers | W | 0.62970790233517 | 0.63636363636364 | 3.71400911210841 |
| Miami | E | 0.57736691176686 | 0.5820895522388101 | 1.04952790084623 |
| Boston | E | 0.5656898812167099 | 0.5820895522388101 | 3.5362789449717003 |
| Memphis | W | 0.56317630318572 | 0.5820895522388101 | -1.71187857346962 |
| Atlanta | E | 0.55882185437766 | 0.56716417910448 | 3.20597523990619 |
| Charlotte | E | 0.5582243910853699 | 0.56060606060606 | 2.08557462629171 |
| Indiana | E | 0.5479618158411199 | 0.53731343283582 | 1.7623327764619199 |
| Portland | W | 0.5159407208259199 | 0.51470588235294 | 0.65853611630185 |
| Chicago | E | 0.51600655636765 | 0.50769230769231 | -0.9738558116466899 |
| Detroit | E | 0.5002504633787399 | 0.50746268656716 | 0.22470846269122 |
| Houston | W | 0.51132717558098 | 0.50746268656716 | -0.38848891722108 |
| Dallas | W | 0.50217823453513 | 0.50746268656716 | -0.41184286578209006 |
| Utah | W | 0.4872064942913 | 0.47761194029851006 | 1.12433422263523 |
| Washington | E | 0.4837092750028 | 0.46969696969697 | -1.25364969853732 |
| Orlando | E | 0.43224434566414 | 0.43939393939393995 | -2.16039444345005 |
| Milwaukee | E | 0.43502499070781997 | 0.42647058823529 | -3.4661632713594703 |
| New_York | E | 0.41439319523409 | 0.41176470588235 | -2.23842239692468 |
| Denver | W | 0.42085818870416997 | 0.41176470588235 | -1.97541075375424 |
| Sacramento | W | 0.41281707659663 | 0.39393939393939004 | -2.11602848648856 |
| New_Orleans | W | 0.38452079098266995 | 0.36363636363636004 | -2.99208260249952 |
| Minnesota | W | 0.31998444787248 | 0.31343283582090004 | -4.08437793206401 |
| Brooklyn | E | 0.29073556727558003 | 0.28358208955224 | -6.2028794311508895 |
| Phoenix | W | 0.29895222580363 | 0.26865671641791 | -6.42425851157498 |
| LA_Lakers | W | 0.23672170016845004 | 0.20588235294117999 | -8.21358021252894 |
| Philadelphia | E | 0.15081345278487 | 0.13432835820896002 | -10.43090743227192 |

Cuadro 11: Resultados NBA temporada 2015-2016

## 5.3. Tabla Philadelphia vs Top5 (Win Rate)

| Equipo | wp_ranking | wp_new_ranking | Diferencia |
|---|---|---|---|
| Golden_State | 0.9090909090909101 | 0.893939393939 | -0.01515 |
| San_Antonio | 0.8507462686567199 | 0.8208955223880601 | -0.02985 |
| Oklahoma_City | 0.6716417910447801 | 0.65671641791045 | -0.01493 |
| Cleveland | 0.7121212121212099 | 0.65151515151515 | -0.06061 |
| Toronto | 0.6818181818181801 | 0.63636363636364 | -0.04545 |
| LA_Clippers | 0.63636363636364 | 0.63636363636364 | 0.0 |
| Miami | 0.5820895522388101 | 0.5820895522388101 | 0.0 |
| Boston | 0.5820895522388101 | 0.5820895522388101 | 0.0 |
| Memphis | 0.5820895522388101 | 0.5820895522388101 | 0.0 |
| Atlanta | 0.56716417910448 | 0.56716417910448 | 0.0 |
| Charlotte | 0.56060606060606 | 0.56060606060606 | 0.0 |
| Indiana | 0.53731343283582 | 0.53731343283582 | 0.0 |
| Portland | 0.51470588235294 | 0.51470588235294 | 0.0 |
| Chicago | 0.50769230769231 | 0.50769230769231 | 0.0 |
| Dallas | 0.50746268656716 | 0.50746268656716 | 0.0 |
| Houston | 0.50746268656716 | 0.50746268656716 | 0.0 |
| Detroit | 0.50746268656716 | 0.50746268656716 | 0.0 |
| Utah | 0.47761194029851006 | 0.47761194029851006 | 0.0 |
| Washington | 0.46969696969697 | 0.46969696969697 | 0.0 |
| Orlando | 0.43939393939393995 | 0.43939393939393995 | 0.0 |
| Milwaukee | 0.42647058823529 | 0.42647058823529 | 0.0 |
| New_York | 0.41176470588235 | 0.41176470588235 | 0.0 |
| Denver | 0.41176470588235 | 0.41176470588235 | 0.0 |
| Sacramento | 0.39393939393939004 | 0.39393939393939004 | 0.0 |
| New_Orleans | 0.36363636363636004 | 0.36363636363636004 | 0.0 |
| Minnesota | 0.31343283582090004 | 0.31343283582090004 | 0.0 |
| Philadelphia | 0.13432835820896002 | 0.29850746268656997 | 0.16418 |
| Brooklyn | 0.28358208955224 | 0.28358208955224 | 0.0 |
| Phoenix | 0.26865671641791 | 0.26865671641791 | 0.0 |
| LA_Lakers | 0.20588235294117999 | 0.20588235294117999 | 0.0 |

Cuadro 12: Ranking Win Rate - Philadelphia vs Top5

### 5.4. Tabla Philadelphia vs Last5 y Top5 (Win Rate)

| Equipo | wp_ranking | wp_new_ranking | Diferencia |
|---|---|---|---|
| Golden_State | 0.9090909090909101 | 0.9090909090909101 | 0.0 |
| San_Antonio | 0.8507462686567199 | 0.8208955223880601 | -0.02985 |
| Cleveland | 0.7121212121212099 | 0.6818181818181801 | -0.0303 |
| Toronto | 0.6818181818181801 | 0.6666666666666701 | -0.01515 |
| Oklahoma_City | 0.6716417910447801 | 0.65671641791045 | -0.01493 |
| LA_Clippers | 0.63636363636364 | 0.63636363636364 | 0.0 |
| Miami | 0.5820895522388101 | 0.5820895522388101 | 0.0 |
| Boston | 0.5820895522388101 | 0.5820895522388101 | 0.0 |
| Memphis | 0.5820895522388101 | 0.5820895522388101 | 0.0 |
| Atlanta | 0.56716417910448 | 0.56716417910448 | 0.0 |
| Charlotte | 0.56060606060606 | 0.56060606060606 | 0.0 |
| Indiana | 0.53731343283582 | 0.53731343283582 | 0.0 |
| Portland | 0.51470588235294 | 0.51470588235294 | 0.0 |
| Chicago | 0.50769230769231 | 0.50769230769231 | 0.0 |
| Dallas | 0.50746268656716 | 0.50746268656716 | 0.0 |
| Houston | 0.50746268656716 | 0.50746268656716 | 0.0 |
| Detroit | 0.50746268656716 | 0.50746268656716 | 0.0 |
| Utah | 0.47761194029851006 | 0.47761194029851006 | 0.0 |
| Washington | 0.46969696969697 | 0.46969696969697 | 0.0 |
| Orlando | 0.43939393939393995 | 0.43939393939393995 | 0.0 |
| Milwaukee | 0.42647058823529 | 0.42647058823529 | 0.0 |
| New_York | 0.41176470588235 | 0.41176470588235 | 0.0 |
| Denver | 0.41176470588235 | 0.41176470588235 | 0.0 |
| Sacramento | 0.39393939393939004 | 0.39393939393939004 | 0.0 |
| New_Orleans | 0.36363636363636004 | 0.34848484848485 | -0.01515 |
| Minnesota | 0.31343283582090004 | 0.29850746268656997 | -0.01493 |
| Philadelphia | 0.13432835820896002 | 0.29850746268656997 | 0.16418 |
| Phoenix | 0.26865671641791 | 0.26865671641791 | 0.0 |
| Brooklyn | 0.28358208955224 | 0.25373134328358 | -0.02985 |
| LA_Lakers | 0.20588235294117999 | 0.19117647058824 | -0.01471 |

Cuadro 13: Ranking Win Rate - Philadelphia vs Last5 y Top5

## 5.5. Tabla Philadelphia vs Top5 (Colley)

| Equipo | colley_ranking | colley_new_ranking | Diferencia |
|---|---|---|---|
| Golden_State | 0.87406268585848 | 0.85738054575056 | -0.01668 |
| San_Antonio | 0.80397569628583 | 0.77635943574872 | -0.02762 |
| Oklahoma_City | 0.65555249192855 | 0.6393474081076099 | -0.01621 |
| Cleveland | 0.6924282509226299 | 0.63922206462762 | -0.05321 |
| LA_Clippers | 0.62970790233517 | 0.6286529268390799 | -0.00105 |
| Toronto | 0.6593469134188901 | 0.61874915828411 | -0.0406 |
| Miami | 0.57736691176686 | 0.57895908529024 | 0.00159 |
| Boston | 0.5656898812167099 | 0.5679836730036 | 0.00229 |
| Memphis | 0.56317630318572 | 0.56319815444827 | 2e-05 |
| Atlanta | 0.55882185437766 | 0.56201620660227 | 0.00319 |
| Charlotte | 0.5582243910853699 | 0.55799766853776 | -0.00023 |
| Indiana | 0.5479618158411199 | 0.5456242012447899 | -0.00234 |
| Chicago | 0.51600655636765 | 0.5164592157555 | 0.00045 |
| Portland | 0.5159407208259199 | 0.51312114994743 | -0.00282 |
| Houston | 0.51132717558098 | 0.51135897363951 | 3e-05 |
| Detroit | 0.5002504633787399 | 0.50353302341848 | 0.00328 |
| Dallas | 0.50217823453513 | 0.50184817460633 | -0.00033 |
| Utah | 0.4872064942913 | 0.48614881714100006 | -0.00106 |
| Washington | 0.4837092750028 | 0.48365844804039 | -5e-05 |
| Orlando | 0.43224434566414 | 0.4359797918383 | 0.00374 |
| Milwaukee | 0.43502499070781997 | 0.4341017169378 | -0.00092 |
| Denver | 0.42085818870416997 | 0.41819492776516 | -0.00266 |
| New_York | 0.41439319523409 | 0.41587480030077 | 0.00148 |
| Sacramento | 0.41281707659663 | 0.41148275855424 | -0.00133 |
| New_Orleans | 0.38452079098266995 | 0.38178122289752 | -0.00274 |
| Minnesota | 0.31998444787248 | 0.31915437173807 | -0.00083 |
| Philadelphia | 0.15081345278487 | 0.30472218904112 | 0.15391 |
| Phoenix | 0.29895222580363 | 0.29722835468351005 | -0.00172 |
| Brooklyn | 0.29073556727558003 | 0.29477726529328996 | 0.00404 |
| LA_Lakers | 0.23672170016845004 | 0.23508426991701997 | -0.00164 |

Cuadro 14: Ranking Colley - Philadelphia vs Top5

## 5.6. Tabla Philadelphia vs Last5 y Top5 (Colley)

| Equipo | colley_ranking | colley_new_ranking | Diferencia |
|---|---|---|---|
| Golden_State | 0.87406268585848 | 0.87115576811314 | -0.00291 |
| San_Antonio | 0.80397569628583 | 0.77484536904376 | -0.02913 |
| Cleveland | 0.6924282509226299 | 0.66840788328843 | -0.02402 |
| Toronto | 0.6593469134188901 | 0.64780878322532 | -0.01154 |
| Oklahoma_City | 0.65555249192855 | 0.63819370975061 | -0.01736 |
| LA_Clippers | 0.62970790233517 | 0.62831885457875 | -0.00139 |
| Miami | 0.57736691176686 | 0.5799524953623499 | 0.00259 |
| Boston | 0.5656898812167099 | 0.5680054592210799 | 0.00232 |
| Memphis | 0.56317630318572 | 0.56183934716813 | -0.00134 |
| Atlanta | 0.55882185437766 | 0.56132539456703 | 0.0025 |
| Charlotte | 0.5582243910853699 | 0.5585465478462199 | 0.00032 |
| Indiana | 0.5479618158411199 | 0.54635696988196 | -0.0016 |
| Chicago | 0.51600655636765 | 0.5180400811231 | 0.00203 |
| Portland | 0.5159407208259199 | 0.5125937518527399 | -0.00335 |
| Houston | 0.51132717558098 | 0.51017190587271 | -0.00116 |
| Detroit | 0.5002504633787399 | 0.50411365622137 | 0.00386 |
| Dallas | 0.50217823453513 | 0.50050120884226 | -0.00168 |
| Washington | 0.4837092750028 | 0.48603649219474004 | 0.00233 |
| Utah | 0.4872064942913 | 0.48579745912712 | -0.00141 |
| Orlando | 0.43224434566414 | 0.4360828536445 | 0.00384 |
| Milwaukee | 0.43502499070781997 | 0.43469469952193 | -0.00033 |
| Denver | 0.42085818870416997 | 0.41745277821214 | -0.00341 |
| New_York | 0.41439319523409 | 0.41637700486122997 | 0.00198 |
| Sacramento | 0.41281707659663 | 0.41107660155669 | -0.00174 |
| New_Orleans | 0.38452079098266995 | 0.36721569762384004 | -0.01731 |
| Philadelphia | 0.15081345278487 | 0.30529938863481 | 0.15449 |
| Minnesota | 0.31998444787248 | 0.30433052071802 | -0.01565 |
| Phoenix | 0.29895222580363 | 0.29703998416573996 | -0.00191 |
| Brooklyn | 0.29073556727558003 | 0.26723538582108 | -0.0235 |
| LA_Lakers | 0.23672170016845004 | 0.22118394795924998 | -0.01554 |

Cuadro 15: Ranking Colley - Philadelphia vs Last5 y Top5

## 5.7. Tabla Philadelphia vs Top5 (Massey)

| Equipo | massey_ranking | massey_new_ranking | Diferencia |
|---|---|---|---|
| Golden_State | 10.299530330231 | 10.14003221108266 | -0.1595 |
| San_Antonio | 11.22958985683614 | 9.500039072973369 | -1.72955 |
| Oklahoma_City | 6.468821795086559 | 5.90775633299364 | -0.56107 |
| Cleveland | 5.75538952391281 | 4.566295215551429 | -1.18909 |
| LA_Clippers | 3.71400911210841 | 3.66968515689187 | -0.04432 |
| Boston | 3.5362789449717003 | 3.6184566776118796 | 0.08218 |
| Atlanta | 3.20597523990619 | 3.30804734623164 | 0.10207 |
| Toronto | 3.92961243244308 | 2.58709677038665 | -1.34252 |
| Charlotte | 2.08557462629171 | 2.09923653783636 | 0.01366 |
| Indiana | 1.7623327764619199 | 1.69450552452445 | -0.06783 |
| Miami | 1.04952790084623 | 1.1160170506038898 | 0.06649 |
| Utah | 1.12433422263523 | 1.08067336026472 | -0.04366 |
| Portland | 0.65853611630185 | 0.5665395359280699 | -0.092 |
| Detroit | 0.22470846269122 | 0.34422253962946997 | 0.11951 |
| Houston | -0.38848891722108 | -0.41506019242275 | -0.02657 |
| Dallas | -0.41184286578209006 | -0.44606968351876 | -0.03423 |
| Chicago | -0.9738558116466899 | -0.94891220260424 | 0.02494 |
| Washington | -1.25364969853732 | -1.2428454671246598 | 0.0108 |
| Memphis | -1.71187857346962 | -1.7142451846561 | -0.00237 |
| Orlando | -2.16039444345005 | -2.02656889354334 | 0.13383 |
| Denver | -1.97541075375424 | -2.07638052000387 | -0.10097 |
| Sacramento | -2.11602848648856 | -2.16488893542292 | -0.04886 |
| New_York | -2.23842239692468 | -2.1848763506994398 | 0.05355 |
| New_Orleans | -2.99208260249952 | -3.0942026675034304 | -0.10212 |
| Milwaukee | -3.4661632713594703 | -3.49562313426851 | -0.02946 |
| Minnesota | -4.08437793206401 | -4.13215018065951 | -0.04777 |
| Philadelphia | -10.43090743227192 | -5.40942903055458 | 5.02148 |
| Brooklyn | -6.2028794311508895 | -6.0666171194625695 | 0.13626 |
| Phoenix | -6.42425851157498 | -6.497149863548841 | -0.07289 |
| LA_Lakers | -8.21358021252894 | -8.283583906516629 | -0.07 |

Cuadro 16: Ranking Massey - Philadelphia vs Top5

## 5.8. Tabla Philadelphia vs Last5 y Top5 (Massey)

| Equipo | massey_ranking | massey_new_ranking | Diferencia |
|---|---|---|---|
| Golden_State | 10.299530330231 | 10.22591508651098 | -0.07362 |
| San_Antonio | 11.22958985683614 | 9.46907563676742 | -1.76051 |
| Oklahoma_City | 6.468821795086559 | 5.889804510711241 | -0.57902 |
| Cleveland | 5.75538952391281 | 5.50924583936844 | -0.24614 |
| LA_Clippers | 3.71400911210841 | 3.66300847530562 | -0.051 |
| Boston | 3.5362789449717003 | 3.6111150092569204 | 0.07484 |
| Toronto | 3.92961243244308 | 3.5610915883181202 | -0.36852 |
| Atlanta | 3.20597523990619 | 3.27705918404546 | 0.07108 |
| Charlotte | 2.08557462629171 | 2.11613201361094 | 0.03056 |
| Indiana | 1.7623327764619199 | 1.7217743637375 | -0.04056 |
| Miami | 1.04952790084623 | 1.1356791645474098 | 0.08615 |
| Utah | 1.12433422263523 | 1.07293650985613 | -0.0514 |
| Portland | 0.65853611630185 | 0.56471351089967 | -0.09382 |
| Detroit | 0.22470846269122 | 0.34768845754528 | 0.12298 |
| Houston | -0.38848891722108 | -0.45243272827920006 | -0.06394 |
| Dallas | -0.41184286578209006 | -0.47443786208824 | -0.06259 |
| Chicago | -0.9738558116466899 | -0.9091241179557601 | 0.06473 |
| Washington | -1.25364969853732 | -1.17698509105349 | 0.07666 |
| Memphis | -1.71187857346962 | -1.7433805019691002 | -0.0315 |
| Orlando | -2.16039444345005 | -2.03947817504398 | 0.12092 |
| Denver | -1.97541075375424 | -2.0893640380487297 | -0.11395 |
| New_York | -2.23842239692468 | -2.17453644697889 | 0.06389 |
| Sacramento | -2.11602848648856 | -2.17755669828873 | -0.06153 |
| New_Orleans | -2.99208260249952 | -3.30117633231192 | -0.30909 |
| Milwaukee | -3.4661632713594703 | -3.47435943753781 | -0.0082 |
| Minnesota | -4.08437793206401 | -4.28790744315414 | -0.20353 |
| Philadelphia | -10.43090743227192 | -5.995575438849991 | 4.43533 |
| Phoenix | -6.42425851157498 | -6.5031152454617205 | -0.07886 |
| Brooklyn | -6.2028794311508895 | -6.82112485653515 | -0.61825 |
| LA_Lakers | -8.21358021252894 | -8.54468493692429 | -0.3311 |

Cuadro 17: Ranking Massey - Philadelphia vs Last5 y Top5

## 5.9. Tabla Philadelphia vs Last5 y Top5, con amplia diferencia (Massey)

| Equipo | massey_ranking | massey_new_ranking | Diferencia |
|---|---|---|---|
| Golden_State | 10.299530330231 | 10.14450389786709 | -0.15503 |
| San_Antonio | 11.22958985683614 | 9.43132588607324 | -1.79826 |
| Oklahoma_City | 6.468821795086559 | 5.8033187422792105 | -0.6655 |
| Cleveland | 5.75538952391281 | 5.618134650260821 | -0.13725 |
| LA_Clippers | 3.71400911210841 | 3.6410100631261404 | -0.073 |
| Boston | 3.5362789449717003 | 3.6400006225566 | 0.10372 |
| Toronto | 3.92961243244308 | 3.60506867727522 | -0.32454 |
| Atlanta | 3.20597523990619 | 3.30484744252047 | 0.09887 |
| Charlotte | 2.08557462629171 | 2.12436125428711 | 0.03879 |
| Indiana | 1.7623327764619199 | 1.6923383766068198 | -0.06999 |
| Miami | 1.04952790084623 | 1.18395582821467 | 0.13443 |
| Utah | 1.12433422263523 | 1.04804497776374 | -0.07629 |
| Portland | 0.65853611630185 | 0.48596211906421005 | -0.17257 |
| Detroit | 0.22470846269122 | 0.42623804465636 | 0.20153 |
| Houston | -0.38848891722108 | -0.484377987139 | -0.09589 |
| Dallas | -0.41184286578209006 | -0.51444342322863 | -0.1026 |
| Chicago | -0.9738558116466899 | -0.8430680150084201 | 0.13079 |
| Washington | -1.25364969853732 | -1.07425078536559 | 0.1794 |
| Memphis | -1.71187857346962 | -1.7843722380651 | -0.07249 |
| Orlando | -2.16039444345005 | -1.96137678962282 | 0.19902 |
| New_York | -2.23842239692468 | -2.13383713702878 | 0.10459 |
| Denver | -1.97541075375424 | -2.16817407287445 | -0.19276 |
| Sacramento | -2.11602848648856 | -2.2170107914976 | -0.10098 |
| Philadelphia | -10.43090743227192 | -2.61510764298844 | 7.8158 |
| Milwaukee | -3.4661632713594703 | -3.4901826829900497 | -0.02402 |
| New_Orleans | -2.99208260249952 | -3.8576424535361804 | -0.86556 |
| Minnesota | -4.08437793206401 | -4.67605139708645 | -0.59167 |
| Phoenix | -6.42425851157498 | -6.52851190959473 | -0.10425 |
| Brooklyn | -6.2028794311508895 | -8.59541460027445 | -2.39254 |
| LA_Lakers | -8.21358021252894 | -9.205288656251 | -0.99171 |

Cuadro 18: Ranking Massey - Philadelphia vs Last5 y Top5 con 5 veces el diferencial de puntos

## Referencias

[1] W. N. Colley. “Colley’s bias free college football ranking method: The Colley matrix explained”. En: Working Paper (2002), págs. 1-23.

[2] Anjela Y Govan, Carl D Meyer y Russell Albright. “Generalizing google’s pagerank to rank national football league teams”. En: Proceedings of the SAS Global Forum 2008 (2008), págs. 1-11.

[3] A. Langville y C. Meyer. “Who’s #1?: The Science of Rating and Ranking”. En: Princeton y Oxford: Princeton University Press, 2012. Cap. 2, págs. 1-6.

[4] A. Starnes y W. Massey. “Statistical Models Applied to the Rating of Sports Teams”. En: 2005.