7.2 判定 x^4+12x^2+5x-9 的实根数

$f_0(x)=f(x)=x^4+12x^2+5x-9$

$f_1(x)=f'(x)=4x^3+24x+5$

$f_2(x)=-rem(f_0(x),f_1(x))$
$=-6x^2-\frac{15}{4}x+9.$

$f_3(x)=-\frac{505}{16}x-\frac{5}{4}$

$f_4(x)=-\frac{93228}{10201}$

由§7.1中判别式

有 $|\alpha|\le 12+5+9=26$

考虑在 ~~(-26, 26)~~ $[-30,30]$ 上的实根个数

因

$V_{-30}(sturm(f))=3$

$V_{30}(sturm(f))=1$

$3-1=2$ 有2个实根.

$p(x)=x^6-x^4+2x^2-3x-1$ 的正实根数

$p'(x)=6x^5-4x^3+4x-3$

sturm 序列

$p_0(x)=p(x)$

$p_1(x)=p'(x)$

$p_2(x)=-rem(p_0,p_1)=\frac{1}{3}x^4-\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{2}x+1$

$p_3(x)=-20x^3+45x^2+14x+3$

$p_4(x)=-\frac{47}{80}x^2-\frac{123}{40}x-\frac{89}{80}$

$p_5(x)=\frac{1616024}{2209}x+\frac{619488}{2209}$

$p_6(x)=\frac{13096942309}{652883392144}$

$p_7(x)=0$

由§7.1得 $|\alpha|\le 17$.

考虑上述实根即考虑在

$[0,20]$ 上的实根个数

$V_0(perm(p))$

$=2$

$V_{20}(perm(p))$

$=1.$

故有一个实根.

7.3

(1) $-rem(f_0,f_1,x)=-\frac{2px}{3}-q=?f_2.$

$-rem(f_1,f_2,x)=-\frac{4p^3+27q^2}{4p^2}=4p^2f_3$

故 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为 Sturm 序列

只需 $f_3\neq 0$

(2)

对 $x\to-\infty$	对 $x\to+\infty$
$f_0<0$	$f_0>0$
$f_1>0$	$f_1>0$
f_2 与 p 同号	f_2 与 p 异号

① $f_3>0$ 则 $p<0$

有 $V_{-\infty}(sturm(f))=3$

$V_{\infty}(sturm(f))=0$

则有3个实根

② $f_3<0$ 无论 f_2 符号

$V_{-\infty}(sturm(f))=2$

$V_{\infty}(sturm(f))=1$

则有1个实根.

7.5. x^4+px^2+qx+r

判别式序列 10×10 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p & q & r & & & \\ & 4 & 0 & 2p & q & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & 0 & p & q & r \\ & & & & 4 & 0 & 2p & q \end{bmatrix}$$

算得判别式序列后

计算符号表与修订表

保证无实根 则下方等于0.

用Maple算得判别式为

$\Delta=16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144pq^2r$
$-27q^4+256r^3$

条件为 $\Delta>0$

7.8. 令 $\hat f(x,y)=f(x+y)$ $\hat g(x,y)=g(x)$

则令 $F(y)=res_x(\hat f(x,y),\hat g(x,y))$

则 $(\beta,\alpha-\beta)$ 为 $\hat f(x,y)=0$ $\hat g(x,y)=0$

的根 故 $F(\alpha-\beta)=0$

则 $F(y)=res_x(f(x+y),g(x))$

设 M 为 $f(x+y)$, $g(x)$ 关于 x 的

Sylvester矩阵

由命题7.1.4知

$$\|F\|_\infty\le\|F\|_1\le\prod_{1\le i\le n+m}\|M_i(y)\|_1$$

而当 $i\in[1,m]$ $\|M_i(y)\|_1$ 为 $f(x+y)$

$=a_m(x+y)^m+\cdots a_1(x+y)+a_0$

拆为 $\sum_{ij}c_{ij}x^iy^j$ 后的 $\sum_{ij}|c_{ij}|$

即所有单项式系数绝对值

的和

而 $(x+y)^m$ 拆后所有单项和为 2^m

故 $\|M_i(y)\|_1\le 2^{m+1}\|f\|_1$ $i\in\{1,2\cdots$

故 $\|F\|_\infty\le(2^{m-1}\|f\|_1)^n(\|g\|_1)^m$

由命题7.1.2知

$$|\alpha-\beta|>\frac{1}{1+\|F\|_\infty}\ge\frac{1}{1+2^{(m+1)n}\|f_1\|^n\|g_1\|}$$

$$>\frac{1}{2^{(m+1)(n+1)}\|f_1\|^n\|g_1\|}$$