5.1 $[g_1, g_2, \cdots g_k] \subseteq k[x_1, x_2, \cdots x_n]$

为升列

则 $\forall i$ g_i 对于 $1 \le j < i$ g_j 为约化的

$\deg_{x_j}(g_i) < \deg(g_j)$

任取 $ini(g_i)$ 由于 $\deg_{x_j}(ini(g_i)) \le \deg_{x_j}(g_i)$

故 $ini(g_i)$ 关于 g_j 约化，其中 $1 \le j \le i-1$

当 $j \ge i$ 时，$ds(g_j) > ds(ini(g_i))$

故 $\deg_{x_j}(ini(g_i)) = 0$

进而 $ini(g_i)$ 关于 g_j 约化，其中 $i \le j \le k$

因此 $ini(g_i)$ 关于升列 $[g_1, \cdots g_k]$ 约化

5.3 f_1 为秩最小的多项式 $S_0 = [f_1, f_2, f_3]$

$G_1 = [f_1]$ $S_0 \backslash G_1 = [f_2, f_3]$

f_2, f_3 关于 f_1 均不约化

基本列为 f_1

$r_1 = prem(f_2, f_1)$

$= -2x_1x_2^2 - x_1^2x_2 - x_1 - x_3^2 + x_1x_2x_3$

$r_2 = prem(f_3, f_1)$

$R = [r_1, r_2]$

5.4. $S = \{f_1, f_2, f_3\}$

其特征列.

① 最小秩为 f_1 $G = [f_1]$

$\Omega = [f_2, f_3]$.

② 最小秩为 f_2 $G = [f_1, f_2]$

$\Omega = \phi$

S 特征列为 $G_0 = [f_1, f_2]$

$ini(G_0) = 2 \cdot (-1) = -2$ 为非零常数

故 $Zero(S) = Zero\{f_1, f_2\}$

5.7. 由 G 为三角列知

$0 < ds(g_1) < ds(g_2) < \cdots < ds(g_n) \le n$

$[1, n]$ 之间整数有且仅有 n 个

故必有 $ds(g_i) = i$

故 $ds(g_1) = 1$ 即 $g_1 \in k[x_1]$

解在任意扩域上满足 $g_1 = 0$ 的 x_1

有限 记为 S_1

对于 g_2 $ds(g_2) = 2$ $g_2 \in k[x_1, x_2]$

$ini(g_2) \in k[x_1]$

$\forall x_1 \in S_1$ 满足 $ini(g_2)(x_1) \ne 0$ 时

$g_2(x_1) \in k[x_2]$

此时满足 $g_2(x_1) = 0$ 的 x_2 个数有限

记为 $S_2(x_1)$

因为 $x_1 \in S_1$ 有限

故 $\{S_2(x_1) \mid x_1 \in S_1\}$ 有最大的 记为 S_2

则满足 $g_1 = 0$ 且 $g_2 = 0$ 且 $ini(g_2) \ne 0$

的 $(x_1, x_2) \in k^2$ 个数 $\le |S_1||S_2|$

由此类推，$Zero(G/ini(G))$ 个数有限.

5.9 $G = [g_1, g_2 \cdots g_k]$

充分性 若有 $H = [h_1, h_2 \cdots h_l]$ 是 I 中比 G

更低的升列

当 $l \le k$ 时 $\exists i \in l$ s.t. $h_i < g_i$ 且

$\forall j < i$ $h_j \sim g_j$

由命题 5.1.1 知 h_i 关于 $[g_1, g_2 \cdots g_{i-1}]$

约化.

因 $h_i < g_i$ 且 G 为三角列 有

$g_i < g_{i+1} \cdots < g_k$.

故 $h_i < g_m$ $\forall m \in \{i, i+1, \cdots k\}$

则 h_i 关于 g_m 约化

则 h_i 关于 $[g_1, g_2 \cdots g_k] = G$ 约化

则 $prem(h_i, G) = h_i \ne 0$

$h_i \in I$ 与条件矛盾 故不存在H

故 G 为基本列

同理 当 $l>k$ 时 则 $h_i \sim g_i$

$\forall i \in \{1, 2, \cdots k\}$

则 h_{l+1} 关于 $[h_1, h_2, \cdots h_l]$ 约化

则 h_{l+1} 关于 G 约化

则 $\mathrm{prem}(h_{l+1}, G) = h_{l+1} \neq 0$ 矛盾

必要性 若有 $f \in I$ s.t.

$\mathrm{prem}(f, G) = h \neq 0$.

则 h 关于 G 约化

则有由命题 5.1.5 知

$G \cup \{h\} < G$, $G \cup \{h\}$ 仍为升列

与 G 为基本列矛盾