6.1

$1 = w^0x^0y^0z^0 = (0,0,0,0)$

$z = (0,0,0,1)$ 1

$z^2 = (0,0,0,2)$ 2

$z^5 = (0,0,0,5)$ 5

$y = (0,0,1,0)$ 1

$y^3 = (0,0,3,0)$ 3

$y^4 = (0,0,4,0)$ 4

$x = (0,1,0,0)$ 1

$xy = (0,1,1,0)$ 2

$x^3 = (0,3,0,0)$ 3

$w = (1,0,0,0)$ 1

$wz = (1,0,0,1)$ 2

$wx = (1,1,0,0)$ 2

$w^3 = (3,0,0,0)$ 3

$wy = (1,0,1,0)$ 2

$xz = (0,1,0,1)$ 2

$yz = (0,0,1,1)$ 2

字典序 $w^3 > wx > wy > wz > w > x^3 > xy > xz > x > y^4 > y^3 > yz > y > z^5 > z^2 > z$.

逆字典序 $w^3 < wx < wy < wz < w < x^3 < xy < xz < x < y^4 < y^3 < yz < y < z^5 < z^2 < z$

分次字典序 $z^5 > y^4 > w^3 > x^3 > y^3 > wx > wy > wz > xy > xz > yz > z^2 > w > x > y > z$

分次逆字典序 $z^5 > y^4 > y^3 > x^3 > w^3 > z^2 > yz > xz > xy > wz > wy > wx > z > y > x > w$

解. 首先证明项序为良序

设 $x^{\alpha_1} > x^{\alpha_2} > \cdots > x^{\alpha_k} > \cdots$

是一个无穷下降序列. 由Dickson引理

以该序列上的项为元素, 构成的集合

X有一个有限的子集合Y

使X的每个元素都为Y中某个元素倍式

设 $x^{\alpha_k} \in Y$ 为序列中最后一个属于Y

的项. $x^{\alpha_{k+1}}$ 是 $x^{\alpha_l} \in Y$ 的倍式

则 $l \le k$ $\quad x^{\alpha_{k+1}} = x^{\beta} x^{\alpha_l} \ge x^{\alpha_l} \ge x^{\alpha_k} > x^{\alpha_{k+1}}$

矛盾

又 S为良序的充要条件为

S的任何平移下降序列有限

证毕

(1) 解. 证明

假设子G的真子集 G' 为 I 的 Gröbner 基 $\exists g \in G$ 但 $g \notin G'$

g 能被 G' 中的多项式的首项整除

又 $G\setminus\{g\}$ 首项...

矛盾

假设不成立

G一定为理想I的极小 Gröbner 基.

(2)

解 若为分次字典序

主变元为 $x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \forall g \in G$

g 关于 $G\setminus\{g\}$ 首项...

则V为极小 Gröbner 基.

6.4. $xyz\, g_1 = 8x^2y^3z + 2xyz^4 + 5xyz$

$xy^2z\, g_2 = 6x^2y^3z + 3xy^3z + 2xy^2z^2$

$2x^2y^3z = xyz\, g_1 - xy^2z\, g_2 - 2xyz^4$

$+ 3xy^3z - 5xyz$

$+ 2xy^2z^2$

则

$f = 2xyg_1 - 2xy^2g_2 - 4xyz^2$

$+ 6xy^3z - 10xyz + 4xy^2z^2$

$+ 8xy^2 + 6xy + 4$

再用 $6xy = g_2 - 3y - 2z$

$8xy^2 = g_1 - 2z^3 + 5$

替换 可得 f关于 g_1, g_2 的表式

6.16

~~$spol(g_1, g_2) =$~~

由 $spol(f,g) = \dfrac{lcm(lt(f), lt(g))}{lt(f)} lc(g) f$

$- \dfrac{lcm(lt(f), lt(g))}{lt(g)} lc(f) g$

$g_1 = x^2 - y \quad g_2 = y^2 - z \quad g_3 = z^2 - x$

由于

$spol(g_1, g_2) = \dfrac{x^2y^2}{x^2} \cdot 1 \cdot (x^2 - y)$

$- \dfrac{x^2y^2}{y^2} \cdot 1 \cdot (y^2 - z)$

$= y^2(x^2 - y) - x^2(y^2 - z)$

$= x^2y^2 - y^3 - x^2y^2 + x^2z$

$= x^2z - y^3$

$spol(g_1, g_3) = \dfrac{x^2z^2}{x^2} \cdot 1 \cdot (x^2 - y)$

$- \dfrac{x^2z^2}{z^2} \cdot 1 \cdot (z^2 - x)$

$= z^2(x^2 - y) - x^2(z^2 - x)$

$= x^3 - z^2y$

spol(g_2, g_3)

$$= \frac{y^2z^2}{y^2}\cdot 1\cdot(y^2-z) - \frac{y^2z^2}{z^2}\cdot 1\cdot(z^2-x)$$

$$= z^2(y^2-z) - y^2(z^2-x)$$

$$= xy^2 - z^3$$

$$\mathrm{spol}(g_1, g_2) = x^2z - y^3$$

$$= z(x^2-y) + yz - y^3$$

$$= z(x^2-y) + y(z-y^2)$$

$$= zg_1 - yg_2$$

$$\mathrm{spol}(g_1, g_3) = x^3 - z^2y$$

$$= x(x^2-y) + xy - z^2y$$

$$= x(x^2-y) + y(x-z^2)$$

$$= xg_1 - yg_3$$

$$\mathrm{spol}(g_2, g_3) = xy^2 - z^3$$

$$= x(y^2-z) + xz - z^3$$

$$= x(y^2-z) + z(x-z^2)$$

$$= xg_2 - zg_3$$

6.17. 计算生成理想的交 $\langle S\rangle \cap \langle T\rangle$

构造

$$F=[zg_1, zg_2, zg_3, (1-z)h_1, (1-z)h_2]$$

计算 F 的 Grobner 基。由于计算复杂。

用 Maple 算得 Grobner 基为

$$G1 = [3x_3^2x_6z + 4x_4^2x_5z,\ 3x_2^2x_3^2x_6 + 4x_2^2x_4^2x_5,$$

$$4x_1x_4z + 3x_2x_3z - 4x_1x_4 - 3x_2x_3,\ 4x_1x_4^2x_5 + 3x_2x_3x_4x_5,$$

$$x_1x_3x_6z - x_2x_4x_5z,\ 4x_1x_3x_4x_6 + 3x_2x_3^2x_6,$$

$$x_1x_2x_3x_6 - x_2^2x_4x_5,\ 4x_1x_2^2x_3x_4x_5 + 3x_2^3x_3^2x_5,$$

$$4x_1^2x_6z + 3x_2^2x_5z - 4x_1^2x_6 - 3x_2^2x_5,\ x_1^2x_3x_6 - x_1x_2x_4x_5,$$

$$108x_1^3x_4x_6 - 175x_1x_2^2x_4x_5 - 192x_2^3x_3x_5]$$

其中不含 z 的构成

$\langle S\rangle \cap \langle T\rangle$ 的 Groebner 基为

$$[3x_2^2x_3^2x_6 + 4x_2^2x_4^2x_5,\ 4x_1x_4^2x_5 + 3x_2x_3x_4x_5,$$

$$4x_1x_3x_4x_6 + 3x_2x_3^2x_6,\ x_1x_2x_3x_6 - x_2^2x_4x_5,$$

$$4x_1x_2^2x_3x_4x_5 + 3x_2^3x_3^2x_5,\ x_1^2x_3x_6 - x_1x_2x_4x_5,$$

$$108x_1^3x_4x_6 - 175x_1x_2^2x_4x_5 - 192x_2^3x_3x_5]$$

$$\langle S\rangle : \langle T\rangle = \bigcap_{i=1}^{2}(\langle S\rangle : \langle h_i\rangle)$$

$$= (\langle S\rangle : \langle h_1\rangle) \cap (\langle S\rangle : \langle h_2\rangle)$$

先求 $\langle S\rangle \cap \langle h_1\rangle$ 的基

为 $[4x_1x_3x_4x_6 + 3x_2x_3^2x_6,\ 4x_1x_2^2x_3x_4x_5 + 3x_2^3x_3^2x_5,\ 108x_1^3x_4x_6 + 81x_1^2x_2x_3x_6 - 256x_1x_2^2x_4x_5 - 192x_2^3x_3x_5]$

$\langle S\rangle \cap \langle h_1\rangle$ 的基除以 h_1

得到 $\langle S\rangle : \langle h_1\rangle$

同理计算 $\langle S\rangle : \langle h_2\rangle$

再求交的 Grobner 基.