

HW02題目

May 25, 2018 - Jun 7, 2018 17:00

本次作業一共有兩題，第一題數值積分的計算，第二題為奈米壓痕實驗資料。

1 Question1

面對大正整數階乘，如果仍採取原本的定義進行運算，容易遇到運算效率上的問題，因此可透過近似解方式來取代。以下兩組常用來替代大正整數階乘取得近似解，請依序解答以下題目。

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (1)$$

$$n! \approx \sqrt{(2n + \frac{1}{3})\pi} n^n e^{-n} \quad (2)$$

1.1 請分別將上列兩組方程式寫成兩個函式

1.2 請利用 matplotlib 畫半對數圖，畫出(1)與(2)分別對於 `np.math.factorial()` 之誤差(3)

$$[RelativeError] = \left| \frac{v - v_{approx}}{v} \right| \quad (3)$$

X軸表示 `n!` 的 `n` 值，Y軸為 $\log[RelativeError]$

`n` 值範圍：1 to 90

1.3 請試著解釋你由圖看到的現象(請於書面報告說明)

Gamma Function 使用領域非常廣，Ex:機率論，統計學，量子力學，拓樸學等)。而 Gamma Function 也是階乘在實數與虛數上的擴展，因此可用於非整數的階乘或是大數字的階乘求解，可以更快求得解。如(4)。

$$z! = \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \quad (4)$$

請找出可以滿足 $20!$ 的真實值的最小 b 值，並基於該最小 b 值找出最小 n 值 (因為在電腦裡面沒有所謂的 ∞ ，必須直接給上界值，假設上界值為 b ，請將數值方法寫成函式型態，試著找出最小收斂的 b 值，計算以下兩題。)

1.4 請運用 HW01 的梯型法解

1.5 請使用 Simpson's Rule 法，求解

1.6 請問以上兩種方法其最小步數各為多少？那個數值方式求解最快？

為避免發散，數值法的 n ，最大值請不要超過 200，
上界 b 請不要超過 100。
迴圈可以用 for loop 或是 while loop，請自行斟酌。

Hint:

Simpson's Rule 數值積分是一個二次多項式近似，將區間 $[a,b]$ 作 n 個子區間(n 為偶數)，得 $(n+1)$ 個端點

假設

$$y = \int_a^b f(x)dx \quad (5)$$

直接推得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + \dots + 4 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (6)$$

Simpson's Rule 係數型態為 1,4,2,4,2,4,2,...,4,2,4,1

下圖為透過sympy 模組求得 b 在第 84 步，可得其解

```
t = symbols('t')
z = 20
i = 1
print('20! = ', np.math.factorial(z))

while True:
    _ = int(integrate((t**z)*np.e**(-1*t), (t, 0, i)))
    a = _ - np.math.factorial(z)
    if a == 0:
        print()
        print('z! = ', _)
        print('第', i, '步')
        break
    i+=1
```

20! = 2432902008176640000

z! = 2432902008176640000

第 84 步

Figure 1: 透過sympy求解

2 Question2

請利用硬度公式(7)，完成以下題目

$$H = \frac{P}{A} \approx \frac{P}{C_0 h^2} \quad (7)$$

P 為 intend load, A 為 contact area, $c_0 = 24.5$. intend load P 單位為 μN 。本題提供之 CSV File，包含有 Intend Load, Contact Depth, Contact Area, Hardness.

Hint: X軸為筆數，Y軸為硬度值

2.1 請利用 pandas 讀取 CSV File，找出 Hardness 並畫出

2.2 請利用 pandas 讀取 CSV File

請畫出

$$H = \frac{P}{A} \quad (8)$$

2.3 請利用 pandas 讀取 CSV File

請畫出

$$H \approx \frac{P}{C_0 h^2} \quad (9)$$

2.4 請畫出 (8),(9) 相差之絕對值

2.5 請將以上四張圖，運用 subplot()，整合成一張 2x2 的圖片，如 Figure 2 所示

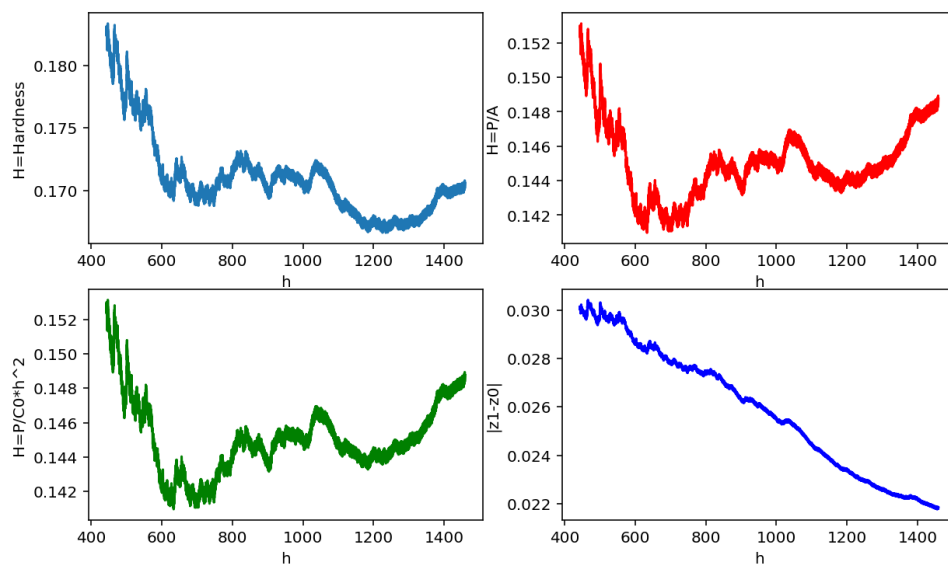


Figure 2: matplotlib 2x2 subplot