論理と証明 期末試験 (2016年5月31日実施)

学生番号　　　　　　　　氏名

1. 公理と推論規則だけを用いて

$$A, \neg A \vdash \neg(A \to A).$$

を証明せよ. ただし, 証明中の式を A_i と置き, 用いた公理, 推論規則と前提とする式 ($\vdash$ の左に出現するときには"$\in \Sigma$") を明記すること. (プリントの補題を用いてはいけない.)

$$\begin{array}{lcll}
A_1 & = & A & \in \Sigma \\
A_2 & = & \neg A & \in \Sigma \\
A_3 & = & A \to (\neg\neg(A \to A) \to A) & \text{公理 P1} \\
A_4 & = & \neg A \to (\neg\neg(A \to A) \to \neg A) & \text{公理 P1} \\
A_5 & = & \neg\neg(A \to A) \to A & A_1, A_3, \text{MP} \\
A_6 & = & \neg\neg(A \to A) \to \neg A & A_2, A_4, \text{MP} \\
A_7 & = & (\neg\neg(A \to A) \to \neg A) \to \big((\neg\neg(A \to A) \to A) \to \neg(A \to A)\big) & \text{公理 P3} \\
A_8 & = & (\neg\neg(A \to A) \to A) \to \neg(A \to A) & A_6, A_7, \text{MP} \\
A_9 & = & \neg(A \to A) & A_5, A_8, \text{MP}
\end{array}$$

2. (a) 以下の二つのアトムが単一化可能であれば最汎単一化代入 (mgu) を，そうでなければ×を空欄に記入せよ．ただし，P は述語記号，f は関数記号，x, y, z, w, u, v は変数とする．(計算過程は記入する必要はない．)

$P\Big(f\big(x, f(y,z)\big), f\big(z, f(y,x)\big)\Big)$ $P\big(f(u,v), f(u,v)\big)$	$x := u, z := u, v := f(y,u)$
$P\Big(f\big(x, f(y,z)\big), f\big(z, f(y,x)\big)\Big)$ $P\big(f(u,v), f(v,u)\big)$	×
$P\Big(f\big(x, f(y,z)\big), f\big(z, f(y,x)\big)\Big)$ $P\Big(f\big(f(u,u), v\big), f\big(w, f(w,w)\big)\Big)$	$x := f(u,u), y := f(u,u), z := f(u,u),$ $v := f(f(u,u), f(u,u)), w := f(u,u)$
$P\Big(f\big(x, f(y,z)\big), f\big(z, f(y,x)\big)\Big)$ $P\Big(f\big(u, f(u,u)\big), f\Big(v, f\big(v, f(w,w)\big)\Big)\Big)$	$x := f(w,w), y := f(w,w), z := f(w,w),$ $u := f(w,w), v := f(w,w)$

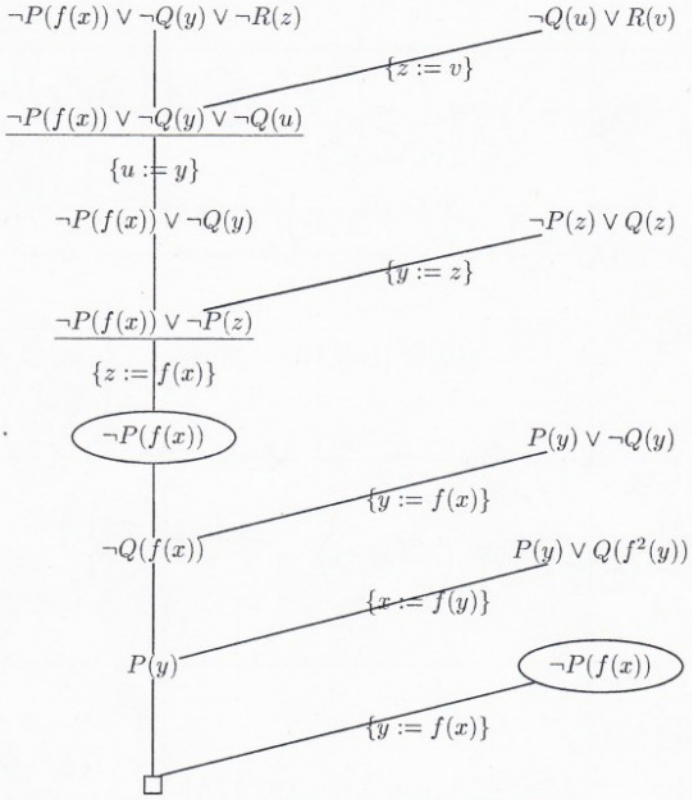
(b) 以下の二つのリストが単一化可能であれば最汎単一化代入 (mgu) を，そうでなければ×を空欄に記入せよ．ただし，a, b は定数記号，x, y, z は変数とする．(計算過程は記入する必要はない．)

$[x, y \| [x \| y]]$ $[a, [b], a \| z]$	$x := a, y := [b],$ $z := [b]$	$[x, y \| [x \| y]]$ $[a, [b] \| z]$	$x := a, y := [b],$ $z := [a, b]$
$[x, y \| [x \| y]]$ $[x \| [y, y]]$	$x := [\ ], y := [\ ]$	$[x, y \| [x \| y]]$ $[[a, b] \| [[\ ] \| z]]$	$x := [a, b], y = [\ ],$ $z := [[a, b]]$
$[x, y \| [x \| y]]$ $[a \| [a \| y]]$	×	$[x, y \| [x \| y]]$ $[[a] \| [[b] \| z]]$	$x := [a], y := [b],$ $z := [[a], b]$

$[a,[b]|[a|z]]$

3. 以下の節集合の**線形反駁**を求めよ．ただし，導出に用いた mgu を明記し，因子化も下線を引き mgu を明記すること．また，導出節を再び利用する場合には，利用する導出節を丸で囲むこと．

$$\left\{\begin{array}{l} P(x) \vee Q(f^2(x)) \\ \neg P(x) \vee Q(x) \\ P(x) \vee \neg Q(x) \\ \neg P(f(x)) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(z) \\ \neg Q(x) \vee R(y) \end{array}\right\}$$



4. (a) 以下の確定プログラム Π に対して, $T_\Pi\uparrow\omega$ と $T_\Pi\downarrow\omega$ を求めよ. なお, $\overbrace{f(\cdots f(a))}^{n}$ は $f^n(a)$ と表し, $\{P(a), P(f(a)), P(f^2(a)), \ldots\}$ は $\{P(f^n(a)) \mid n \geq 0\}$, $\{P(f(a)), P(f^2(a)), \ldots\}$ は $\{P(f^n(a)) \mid n \geq 1\}$ などと表せ.

Π	$T_\Pi\uparrow\omega$	$T_\Pi\downarrow\omega$
$\left\{\begin{array}{l} P(x) \\ Q(x) \leftarrow P(x) \\ R(a) \leftarrow P(x), R(x) \end{array}\right\}$	$\{P(a), Q(a)\}$	$\{P(a), Q(a), R(a)\}$
$\left\{\begin{array}{l} P(a) \\ Q(x) \leftarrow P(x) \\ R(x) \leftarrow Q(b) \end{array}\right\}$	$\{P(a), Q(a)\}$	Pa ~~b~~ a b a Qa b a b R~~b~~ Ra b P b $\{P(a), Q(a)\}$
$\left\{\begin{array}{l} P(f(a)) \\ P(f(x)) \leftarrow Q(x) \\ Q(x) \leftarrow P(f(x)) \end{array}\right\}$	$\{P(f(a)), Q(a)\}$	$\{P(f^n(a)) \mid n \geq 1\}$ $\cup\{Q(f^n(a)) \mid n \geq 0\}$
$\left\{\begin{array}{l} P(f(x)) \leftarrow Q(a) \\ Q(a) \leftarrow R(x) \\ R(x) \leftarrow P(f(a)) \end{array}\right\}$	$\emptyset$	$\{P(f^n(a)) \mid n \geq 1\}$ $\cup\{Q(a)\}$ $\cup\{R(f^n(a)) \mid n \geq 0\}$
$\left\{\begin{array}{l} P(f^2(a)) \\ P(f(x)) \leftarrow R(f^3(x)) \\ Q(f^2(x)) \leftarrow P(f^2(x)) \\ R(f^3(x)) \leftarrow Q(f(x)) \end{array}\right\}$	$\{P(f^2(a)), Q(f^2(a)), R(f^4(a))\}$	$\{P(f^n(a)) \mid n \geq 2\}$ $\cup\{Q(f^n(a)) \mid n \geq 2\}$ $\cup\{R(f^n(a)) \mid n \geq 4\}$

φからスタート　　B_Pからスタート

エルブランベース

ナ

(b) 以下の確定プログラム Π に対して, 空欄に n の式を記入することで $0 \leq i \leq 9$ に対する $T_\Pi{\downarrow}i$ を求め, $T_\Pi{\downarrow}\omega$ を推測せよ.

$$\Pi = \left\{ \begin{array}{l} P(f^2(a)) \\ P(f^3(x)) \leftarrow R(x) \\ Q(x) \leftarrow P(f^2(x)) \\ R(f(x)) \leftarrow Q(f(x)) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
T_\Pi{\downarrow}0 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 0}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 0}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 0}\}, \\
T_\Pi{\downarrow}1 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 2}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 0}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 1}\}, \\
T_\Pi{\downarrow}2 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n = 2, n \geq 4}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 0}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 1}\} \\
T_\Pi{\downarrow}3 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n = 2, n \geq 4}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n = 0, n \geq 2}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 1}\} \\
T_\Pi{\downarrow}4 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n = 2, n \geq 4}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n = 0, n \geq 2}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 2}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\Pi{\downarrow}5 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n = 2, n \geq 5}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n = 0, n \geq 2}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 2}\} \\
T_\Pi{\downarrow}6 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n = 2, n \geq 5}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n = 0, n \geq 3,}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 2}\}, \\
T_\Pi{\downarrow}7 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n = 2, n \geq 5}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n = 0, n \geq 3}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 3}\}, \\
T_\Pi{\downarrow}8 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n = 2, n \geq 6}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n = 0, n \geq 3}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 3}\} \\
T_\Pi{\downarrow}9 = & \{P(f^n(a)) \mid \boxed{n = 2, n \geq 6}\} \\
& \cup\{Q(f^n(a)) \mid \boxed{n = 0, n \geq 4}\} \\
& \cup\{R(f^n(a)) \mid \boxed{n \geq 3}\}
\end{aligned}$$

$$T_\Pi{\downarrow}\omega = \boxed{\{P(f^2(a)), Q(a)\}}$$