論理と証明 期末試験 (2015 年 8 月 3 日実施)

学生番号　　　　　　　　　　氏名

1. 以下の規則 1–3:

$$
\begin{array}{ll}
\text{規則 1} & \vdash \neg\neg A \to A \\
\text{規則 2} & \vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \\
\text{規則 3} & A \to B, B \to C \vdash A \to C
\end{array}
$$

を用いて以下を証明せよ. ただし, 証明中の式を A_i と置き, 用いた公理, 推論規則, 規則を明記すること.

$\neg($ $)$ MP

$$\vdash \neg(A \to \neg B) \to (\neg A \to B).$$

$$
\begin{array}{lcll}
A_1 & = & \neg B \to (A \to \neg B) & \text{公理 P1} \\
A_2 & = & (\neg B \to (A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg B) & \text{規則 2} \\
A_3 & = & \neg(A \to \neg B) \to \neg\neg B & A_1, A_2, \text{MP} \\
A_4 & = & \neg\neg B \to B & \text{規則 1} \\
A_5 & = & \neg(A \to \neg B) \to B & A_3, A_4, \text{規則 3} \\
A_6 & = & B \to (\neg A \to B) & \text{公理 P1} \\
A_7 & = & \neg(A \to \neg B) \to (\neg A \to B) & A_5, A_6, \text{規則 3}
\end{array}
$$

- これは $\vdash (A \wedge B) \to (A \vee B)$ の証明である.

2. (a) 以下の二つのアトムが単一化可能であれば最汎単一化代入 (mgu) を, そうでなければ×を空欄に記入せよ. ただし, P は述語記号, f は関数記号, x, y, z, w, u, v は変数とする. (計算過程は記入する必要はない.)

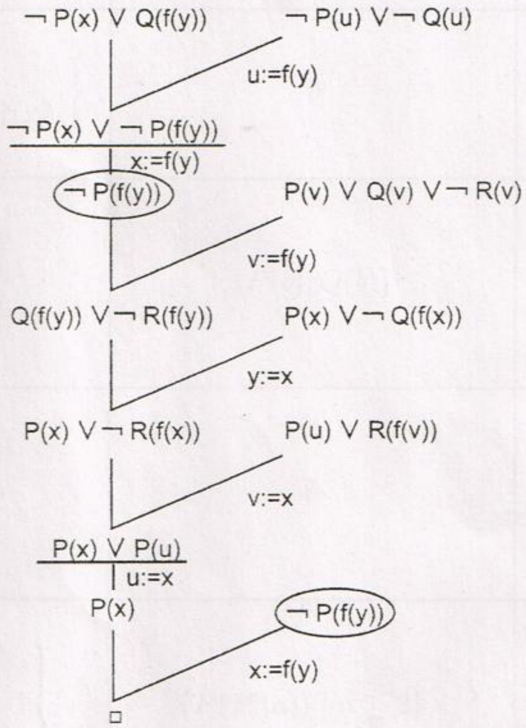
$P(f(f(x,y),z),f(f(y,z),x))$ $P(f(u,u),f(v,v))$	×
$P(f(f(x,y),z),f(f(y,z),x))$ $P(f(u,v),f(w,v))$	$x := v, z := v,$ $u := f(v,y), w := f(y,v)$
$P(f(f(x,y),z),f(f(y,z).x))$ $P(f(u,v),f(f(v,w),f(v,w)))$	$x := f(v,v), y := v, z := v$ $u := f(f(v,v),v), w := v$
$P(f(f(x,y),z),f(f(y,z),x))$ $P(f(u,f(v,v)),f(f(w,w),v))$	$x := v, y := f(v,v), z := f(v,v),$ $u = f(v,f(v,v)), w := f(v,v)$

(b) 以下の二つのリストが単一化可能であれば最汎単一化代入 (mgu) を, そうでなければ×を空欄に記入せよ. ただし, a, b, c は定数記号, x, y, z, w は変数とする. (計算過程は記入する必要はない.)

$[[x,y],z\|w]$ $[[[[a]\|[b]],c,[\ ]]$	$x := [a], y := b,$ $z := c, w := [[\ ]]$	$[[x,y],z]\|w]$ $[[[[a]\|[b]],c\|x]$	$x := [a], y := b,$ $z := c, w := [a]$
$[[[x,y]\|z]\|w]$ $[[[[a]\|[b]],c,[\ ]]$	×	$[[[x,y]\|z]\|w]$ $[[[[a]\|[b]],c\|x]$	×
$[[[x,y]\|z]\|w]$ $[[[[a]\|[b]],c\|z]$	×	$[[[x,y]\|z]\|w]$ $[[[[a]\|[b]],c\|w]$	×

3. 以下の節集合の**線形反駁**を求めよ．ただし，導出に用いた mgu を明記し，因子化も下線を引き mgu を明記すること．また，導出節を再び利用する場合には，利用する導出節を丸で囲むこと．

$$\left\{\begin{array}{l} P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x) \\ P(x) \vee \neg Q(f(x)) \\ P(x) \vee R(f(y)) \\ \neg P(x) \vee Q(f(y)) \\ \neg P(x) \vee \neg Q(x) \end{array}\right\}$$



4. 以下の確定プログラム Π_i に対して, $T_{\Pi_i}\uparrow\omega$ と $T_{\Pi_i}\downarrow\omega$ を求めよ. なお, $\overbrace{f(\cdots f}^{n}(a))$ は $f^n(a)$ と表し, $\{P(a), P(f(a)), P(f^2(a)), \ldots\}$ は $\{P(f^n(a)) \mid n \geq 0\}$, $\{P(f(a)), P(f^2(a)), \ldots\}$ は $\{P(f^n(a)) \mid n \geq 1\}$ などと表せ.

Π_i	$T_{\Pi_i}\uparrow\omega$	$T_{\Pi_i}\downarrow\omega$
$\Pi_1 = \left\{ \begin{array}{l} P(x) \\ Q(a) \leftarrow P(b) \end{array} \right\}$	$\{P(a), P(b), Q(a)\}$	$\{P(a), P(b), Q(a)\}$
$\Pi_2 = \left\{ \begin{array}{l} Q(x) \leftarrow P(x) \\ P(x) \leftarrow Q(x), R(x) \end{array} \right\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\Pi_3 = \left\{ \begin{array}{l} P(b) \\ P(x) \leftarrow Q(a) \\ Q(x) \leftarrow P(x) \end{array} \right\}$	$\{P(b), Q(b)\}$	$\{P(a), P(b), Q(a), Q(b)\}$
$\Pi_4 = \left\{ \begin{array}{l} P(x) \leftarrow Q(a) \\ Q(a) \leftarrow R(x) \\ R(x) \leftarrow P(b) \end{array} \right\}$	$\emptyset$	$\left\{ \begin{array}{l} P(a), P(b), Q(a), \\ R(a), R(b) \end{array} \right\}$
$\Pi_5 = \left\{ \begin{array}{l} P(f(f(a))) \\ Q(f(b)) \\ P(f(x)) \leftarrow P(x) \\ Q(f(x)) \leftarrow Q(x) \end{array} \right\}$	$\{P(f^n(a)) \mid n \geq 2\}$ $\cup\{Q(f^n(b)) \mid n \geq 1\}$	$\{P(f^n(a)) \mid n \geq 2\}$ $\cup\{Q(f^n(b)) \mid n \geq 1\}$
$\Pi_6 = \left\{ \begin{array}{l} Q(x) \leftarrow P(f(f(x))) \\ R(f(x)) \leftarrow Q(f(x)) \\ P(f(f(x))) \leftarrow R(x) \end{array} \right\}$	$\emptyset$	$\{P(f^n(a)) \mid n \geq 3\}$ $\cup\{Q(f^n(a)) \mid n \geq 1\}$ $\cup\{R(f^n(a)) \mid n \geq 1\}$

Π_6 について:

$$
\begin{aligned}
T_{\Pi_6} \downarrow 0 &= B_{\Pi_6}, \\
T_{\Pi_6} \downarrow 1 &= \{P(f^n(a)) \mid n \geq 2\} \cup \{Q(f^n(a)) \mid n \geq 0\} \cup \{R(f^n(a)) \mid n \geq 1\}, \\
T_{\Pi_6} \downarrow 2 &= \{P(f^n(a)) \mid n \geq 3\} \cup \{Q(f^n(a)) \mid n \geq 0\} \cup \{R(f^n(a)) \mid n \geq 1\}, \\
T_{\Pi_6} \downarrow 3 &= \{P(f^n(a)) \mid n \geq 3\} \cup \{Q(f^n(a)) \mid n \geq 1\} \cup \{R(f^n(a)) \mid n \geq 1\}, \\
T_{\Pi_6} \downarrow 4 &= \{P(f^n(a)) \mid n \geq 3\} \cup \{Q(f^n(a)) \mid n \geq 1\} \cup \{R(f^n(a)) \mid n \geq 1\}, \\
&\;\;\vdots \\
T_{\Pi_6} \downarrow \omega &= \{P(f^n(a)) \mid n \geq 3\} \cup \{Q(f^n(a)) \mid n \geq 1\} \cup \{R(f^n(a)) \mid n \geq 1\}.
\end{aligned}
$$

$\downarrow_0$ P $n \geq 0$. Q $n \geq 0$ R ≥ 0

$\downarrow_1$ P $n \geq 1$ Q$n \geq 2$ R ≥ 3.

$\downarrow_2$ P $n \geq 1$. Q $n \geq 2$ R$n \geq 4$.

$\downarrow_3$ P $n \geq 2$. Q $n \geq 2$ R $n \geq 4$

$\downarrow_4$ P $n \geq 2$. Q $n \geq 2$ R $n \geq 4$.

5. 末尾再帰を用いたリストの反転プログラムを参考に, 以下の述語を計算する**3つの節からなる確定プログラム**を求めよ. なお, 各問の補助述語は同一の述語記号を用いてもよい.

(a) **長さ1以上**のリスト x の反転が y となることを表す述語 $P(x,y)$. すなわち, $P([a],[a])$, $P([a,b],[b,a])$, $P([a,b,c],[c,b,a])$ は真となるが, $P([\,],[\,])$ は偽となる.

$$\left\{\begin{array}{l} P([w|x],y) \leftarrow A(x,[w],y) \\ A([\,],x,x) \\ A([w|x],y,z) \leftarrow A(x,[w|y],z) \end{array}\right\}$$

[w|x]　[w|x]

[x] = [ ]　[ ] | [ ]

(b) **長さ1以上**のリスト x の**先頭要素**を除いたリストの反転が y となることを表す述語 $Q(x,y)$. すなわち, $Q([a],[\,])$, $Q([a,b],[b])$, $Q([a,b,c],[c,b])$, $Q([a,b,c,d],[d,c,b])$ は真となるが, $Q([\,],[\,])$, $Q([a],[a])$, $Q([a,b],[b,a])$, $Q([a,b],[a])$ は偽となる.

$$\left\{\begin{array}{l} Q([w|x],y) \leftarrow A(x,[\,],y) \\ A([\,],x,x) \\ A([w|x],y,z) \leftarrow A(x,[w|y],z) \end{array}\right\}$$

(c) **長さ1以上**のリスト x の**末尾要素**を除いたリストの反転が y となることを表す述語 $R(x,y)$. すなわち, $R([a],[\,])$, $R([a,b],[a])$, $R([a,b,c],[b,a])$, $R([a,b,c,d],[c,b,a])$ は真となるが, $R([\,],[\,])$, $R([a],[a])$, $R([a,b],[b,a])$, $R([a,b],[b])$ は偽となる.

$$\left\{\begin{array}{l} R(x,y) \leftarrow A(x,[\,],y) \\ A([w],x,x) \\ A([w|x],y,z) \leftarrow A(x,[w|y],z) \end{array}\right\}$$

(d) **長さ2以上**のリスト x の**先頭要素**と**末尾要素**を除いたリストの反転が y となることを表す述語 $S(x,y)$. すなわち, $S([a,b],[\,])$, $S([a,b,c],[b])$, $S([a,b,c,d],[c,b])$, $S([a,b,c,d,e],[d,c,b])$ は真となるが, $S([a,b,c,d],[d,c,b,a])$, $S([a,b,c,d],[c,b,a])$, $S([a,b,c,d],[d,c,b])$ は偽となる.

$$\left\{\begin{array}{l} S([w|x],y) \leftarrow A(x,[\,],y) \\ A([w],x,x) \\ A([w|x],y,z) \leftarrow A(x,[w|y],z) \end{array}\right\}$$

P([a, b, c], y)　P([w|x], V) ←
A(x, [w], V)

y := V1

A([b, c], [a], V1)

A([c], [a, b] a V2)

A([ ], [~~a, b,~~ c], V3)
c b a

A([ ], [a, c b a] V4)