11. Matrix Inverse & Condition

HoHee Kim

Matrix Inverse

3X3 matrix [*A*] 가 $[A]^{-1}$ 존재한다면, $[A][A]^{-1}$= [I] 이므로

[I]의 열 벡터들을 이용하여

$$[A]\{x_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [A]\{x_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [A]\{x_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad [A]^{-1} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

만약, A = LU 로 되어있다면

$[L]\{d\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ 에서 {d} 를 구한 뒤 $[U]\{x_1\} = \{d\}$ 에서 $\{x_1\}$ 을 구함

☞ 같은 방법으로 $\{x_2\}$ 와 $\{x_3\}$ 을 구함

예)

$$A=\begin{bmatrix}3&-7&-2\\-3&5&1\\6&-4&0\end{bmatrix}=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-7&-2\\0&-2&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-5&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\longrightarrow\begin{Bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\\3\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&-7&-2\\0&-2&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\\3\end{Bmatrix}\longrightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2/3\\1\\-3\end{Bmatrix}$$

$\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$ 와 $\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}$ 에 대해 계산을 하면

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2/3&4/3&1/2\\1&2&1/2\\-3&-5&-1\end{bmatrix}$$

Ex) Employ LU factorization to determine the matrix inverse for the system.

$$A=\begin{bmatrix}3&-0.1&-0.2\\0.1&7&-0.3\\0.3&-0.2&10\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0.0333333&1&0\\0.100000&-0.0271300&1\end{bmatrix}}_{\text{L}}\underbrace{\begin{bmatrix}3&-0.1&-0.2\\0&7.00333&-0.293333\\0&0&10.0120\end{bmatrix}}_{\text{U}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0.0333333&1&0\\0.100000&-0.0271300&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\longrightarrow\begin{Bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-0.03333\\-0.1009\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&-0.1&-0.2\\0&7.00333&-0.293333\\0&0&10.0120\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-0.03333\\-0.1009\end{Bmatrix}\longrightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.33249\\-0.00518\\-0.01008\end{Bmatrix}$$

$\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$ 와 $\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}$ 에 대해 계산을 하면

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0.33249&0.004944&0.006798\\-0.00518&0.142903&0.004183\\-0.01008&0.002710&0.099880\end{bmatrix}$$

System Condition

[A]{x}={b} 에서

- 역 행렬로 ill-conditioned system 인지 판별가능

① [A]에서 각 행의 가장 큰 요소가 1이 되도록 scaled 행렬을 만든 뒤, scaled 행렬의 역 행렬에서 scaled 행렬 요소보다 더 큰 요소가 있으면 ill-conditioned

② $[A][A]^{-1}$ 계산해서 [I] 에 접근하지 않으면 ill-conditioned

③ $([A]^{-1})^{-1}$ 계산해서 [A] 에 접근하지 않으면 ill-conditioned

- **Matrix Condition number** : ill-conditioned system 의 정도를 나타내는 수치, Norm 의 계산을 바탕으로 함

Norms : 벡터나 행렬의 양을 재는(quantify) 값

- **Vector Norms**

n-dimensional vector $\lfloor X \rfloor = \lfloor x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \rfloor$ 일 때,

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$ p-norm

p=1: $$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$ 요소들의 절대치의 합

p=2: $$\|X\|_2 = \|X\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$ Euclidean norm

p= ∞: $$\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$ 가장 큰 절대치를 갖는 요소

- **Matrix Norms**

행렬 [*A*] 의 norm

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

Column-sum norm : 각 column 에 대해 절대치 합 중에서 가장 큰 것

$$\|A\|_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$$

Frobenius norm

$$\|A\|_2 = (\mu_{max})^{1/2}$$

Spectral norm, 가장 엄격한 척도

(μ_{max} : the largest eigenvalue of $[A]^T[A]$.)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

Row-sum norm : 각 row 에 대해 절대치 합 중에서 가장 큰 것

Matrix Condition Number : 선형방정식의 해의 precision 을 예측하는데 사용

Cond[*A*] = ||*A*||·||A^{-1}|| (1 이상)

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \mathrm{Cond}[A]\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

☞ 해 X 의 상대오차는 행렬 A 의 상대오차에 Cond[A]를 곱한 것보다 작거나 같다 (ill-conditioned 일 때, Cond[A] 는 크다)

- 행렬 A 의 계수가 *t* digit precision 이면 (즉, 반올림 오차의 차수는 10^{-t})
  Cond[A] = 10^C 이면 solution X 의 반오림 오차는 10^{c-t}
  → solution X 의 *t-c* digits 는 믿을만 하고, *c* digits 는 의심

예) 행렬 A 의 계수가 4-digit precision 에서 Cond[A] = 10^2 이면,

→ 해 X 의 (4-2) digits 만 명백

Ex) Use the row-sum norm to estimate the matrix condition number for the 3X3 Hilbert matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

3X3 Hilbert matrix,
Notoriously ill-conditioned

각 행의 최대 요소가 1 이 되도록 normalized 한 후

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2/3 & 1/2 \\ 1 & 3/4 & 3/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{역 행렬}} A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -36 & 96 & -60 \\ 30 & -90 & 60 \end{bmatrix}$$

$\|A\|_\infty$ = 1+ ¾ + 3/5 =2.35 , $\|A^{-1}\|_\infty$ = |-36|+|96|+|-60|= 192

Cond[A]= $\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$ = 451.2 ☞ ill-conditioned

c = log 451.2 ≒ 2.65

☞ solution X 의 끝에서 3자리는 반올림오차라서 의심스럽다


```
>>  A=[1 1/2 1/3 ; 1 2/3 1/2 ; 1 3/4 3/5 ];
>> norm(A, inf)
ans =
    2.3500
>> cond(A, inf)
ans =
  451.2000

>> cond(A, 'fro')
ans =
  368.0866

>> cond(A)
ans =
  366.3503
```

$\|A\|_\infty$

= norm(A, inf)*norm(inv(A), inf)

Frobenius norm 에 기초한 condition number

Spectral norm 에 기초한 condition number