13. Eigenvalues

HoHee Kim

Eigenvalues & Eigenvectors

Square 행렬 A 에 대해

X 2

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \{u\}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\quad \boxed{\{v\}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}} \quad \Rightarrow \quad A\{u\}=\begin{bmatrix}-5\\ -1\end{bmatrix},\quad \boxed{A\{v\}=\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}}$$

→ 행렬 A 의 eigenvalue 는 2 이고, {v} 는 2에 대한 eigenvector 라 함

- 어떤 벡터 {x}에 대해 $[A]\{x\}=\lambda\{x\}$ 를 만족한다고 가정,
  λ 를 행렬 A의 eigenvalue 라고 하고, nontrivial solution {x} 를
  λ 의 eigenvector 라고 함 (zero vector는 eigenvector 될 수 없음)
- λ 를 구하는 방법 : $\boxed{\det([A]-\lambda[I])=0}$ characteristic polynomial

Ex) Use the polynomial method to solve the eigenvalues of

$$A=\begin{bmatrix}10 & -5\\ -5 & 10\end{bmatrix}. \qquad \begin{vmatrix}10-\lambda & -5\\ -5 & 10-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-20\lambda+75=0 \longrightarrow \lambda=5,\ 15$$

- $\lambda = 5$ 일 때, $([A] - \lambda[I])\{x\} = 0$ 에서

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ -5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{즉,} \quad x_1 = x_2 \longrightarrow$$

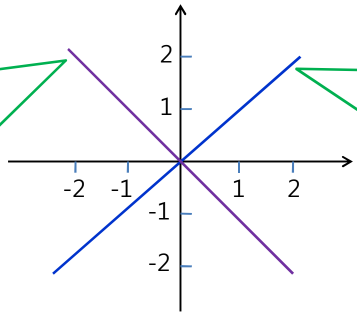
$\lambda = 5$ 에 대한 eigenvector $\{x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

- $\lambda = 15$ 일 때, $([A] - \lambda[I])\{x\} = 0$ 에서

$$\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 = 0 \\ -5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{즉,} \quad x_1 = -x_2 \longrightarrow$$

$\lambda = 15$ 에 대한 eigenvector $\{x\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

zero vector를 제외한 이 직선상의 모든 벡터가 λ =15 에 대한 eigenvector들



zero vector를 제외한 이 직선상의 모든 벡터가 λ =5 에 대한 eigenvector들

Power Method : 가장 큰 eigenvalue와 그에 따른 eigenvector를 찾는 반복법 (가장 작은 eigenvalue 구할 땐 A^{-1} 를 이 방법에 적용하면 가장 큰 eigenvalue $1/\lambda$ 에 수렴 → 가장 작은 eigenvalue λ 얻음)

Ex) Power method for highest eigenvalue

$$A = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix}$$

$\{x\} = [1\ 1\ 1]^T$를 가정, $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$ 의 좌변에 맞추어 λ를 유추

- First iteration

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 20 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda = 20$

- Second iteration

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 40 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda = 40$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{40 - 20}{40} \right| \times 100\% = 50\%$$

- Third iteration

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ -80 \\ 60 \end{Bmatrix} = -80\begin{Bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -0.75 \end{Bmatrix} \qquad \varepsilon_a = \left|\frac{-80-40}{-80}\right| \times 100\% = 150\%$$

λ =-80

- Fourth iteration

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -0.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50 \\ 70 \\ -50 \end{Bmatrix} = 70\begin{Bmatrix} -0.71429 \\ 1 \\ -0.71429 \end{Bmatrix} \qquad \varepsilon_a = \left|\frac{70-(-80)}{70}\right| \times 100\% = 214\%$$

λ =70

- Fifth iteration

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.71429 \\ 1 \\ -0.71429 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48.51714 \\ 68.51714 \\ -48.51714 \end{Bmatrix} = 68.51714\begin{Bmatrix} -0.70833 \\ 1 \\ -0.70833 \end{Bmatrix} \qquad \varepsilon_a = 2.08\%$$

λ =68.51714

☞ 반복하면 가장 큰 $\lambda = 68.28427$,

그에 따른 eigenvector $\{-0.707107 \quad 1 \quad -0.707107\}^T$ 에 근접

행렬 A 가 diagonalizable 일 때,

n 개의 선형독립인 eigenvectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$

n 개의 eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $(|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_n|)$

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n \quad \text{가정}$$

$$\rightarrow A\mathbf{x}_0 = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \dots + c_nA\mathbf{v}_n$$

$$= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n\mathbf{v}_n$$

$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$

$$\rightarrow A^k\mathbf{x}_0 = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

양변을 λ_1^k 으로 나눔

$$\rightarrow \left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_n$$

$$\xrightarrow{k \to \infty} \left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1$$

```
>> A = [ 10 -5; -5 10 ];
>> p = poly(A)
 p =   1     -20     75
 >> d = roots(p)
 d =   15     5
>> A = [ 40 -20 0; -20 40 -20; 0 -20 40 ];
>> [v, d] = eig(A)
 v = 0.5000    -0.7071    -0.5000
     0.7071    -0.0000     0.7071
     0.5000     0.7071    -0.5000
 d =   11.7157         0         0
             0   40.0000         0
             0         0   68.2843
>> a =[ -0.7071     1     -0.7071 ]';
>> b = a/norm(a)
   b =   -0.5000
          0.7071
         -0.5000
```

characteristic polynomial 의 계수

A 의 eigenvalues

A 의 eigenvalues 와 eigenvectors

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

예) $A = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -2$

$\lambda_1=-0.5$, $\lambda_2=-2$ 에 대한 eigenvectors

$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-0.5t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-0.5t} - c_2 e^{-2t} \\ 2c_1 e^{-0.5t} + c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(0)$ 초기값을 이용해 c_1 , c_2 를 구함