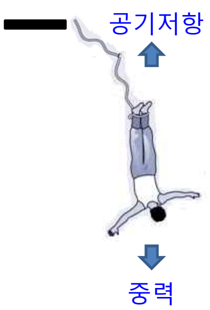
1. Mathematical Modeling, Numerical Methods, and Problem Solving

HoHee Kim

Mathematical Model : 물리적 시스템의 근본적인 상태를 formulation 또는 equation 으로 표현하는 것

$$\begin{matrix}\text{Dependent}\\ \text{variable}\end{matrix} = f\left(\begin{matrix}\text{independent}\\ \text{variables}\end{matrix},\ \text{parameters},\ \begin{matrix}\text{forcing}\\ \text{functions}\end{matrix}\right)$$

예) a bungee jumper



$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2$$ (drag coefficient : c_d)

$$\frac{1}{gm - c_d v^2}dv = \frac{1}{m}dt$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$?

Exact solution 또는 Analytical solution

☞ 대부분의 수학적 모델들은 풀 수 없어 정확한 해 구하기 힘들다

$$\frac{1}{gm - c_d v^2} dv = \frac{1}{m} dt$$ 양변에 c_d 곱한 뒤 양변 적분

$$\rightarrow \int \frac{1}{gm/c_d - v^2} dv = \int \frac{c_d}{m} dt$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{gm/c_d}} \ln\left|\frac{\sqrt{gm/c_d}+v}{\sqrt{gm/c_d}-v}\right| = \frac{c_d}{m} t \quad \rightarrow \quad \ln\left|\frac{\sqrt{gm/c_d}+v}{\sqrt{gm/c_d}-v}\right| = 2\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t$$

$w = \sqrt{\dfrac{gm}{c_d}}$, $u = \sqrt{\dfrac{gc_d}{m}}$ 로 치환 $\rightarrow$ $e^{2ut} = \dfrac{w+v}{w-v}$ 를 정리

$$\rightarrow v(t) = \frac{w(e^{2ut}-1)}{e^{2ut}+1} = w\left(\frac{e^{ut}-e^{-ut}}{e^{ut}+e^{-ut}}\right) = w \tanh ut = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right)$$

Numerical Methods(수치해법): 해석적으로 풀기 힘든 수학적 모델을 산술연산을 통해 해를 얻도록 수학적 문제를 재공식화 하는 것

예) $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{c_d}{m} v^2$ 에서 $\dfrac{dv}{dt} \approx \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$ 로 근사화

Finite-difference approximation

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2$$

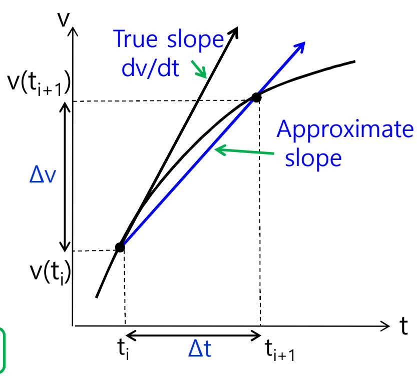
$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left(g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2\right)(t_{i+1} - t_i)$$

☞ $v(t_i)$ 를 이용하여 $v(t_{i+1})$ 를 알아내는 산술방정식으로 바꿈

new = old + slope × step

: Euler 's method

22장



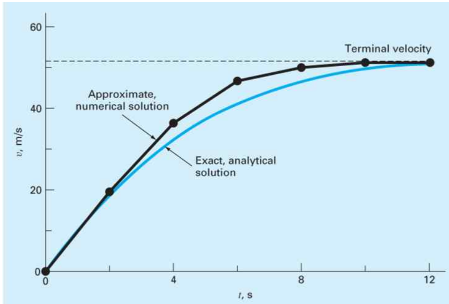
$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left(g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2\right)(t_{i+1} - t_i)$$

($t_0=0$, $v_0=0$ 를 이용)

$$t = 2: \qquad v = 0 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1}(0)^2\right] \times 2 = 19.62$$

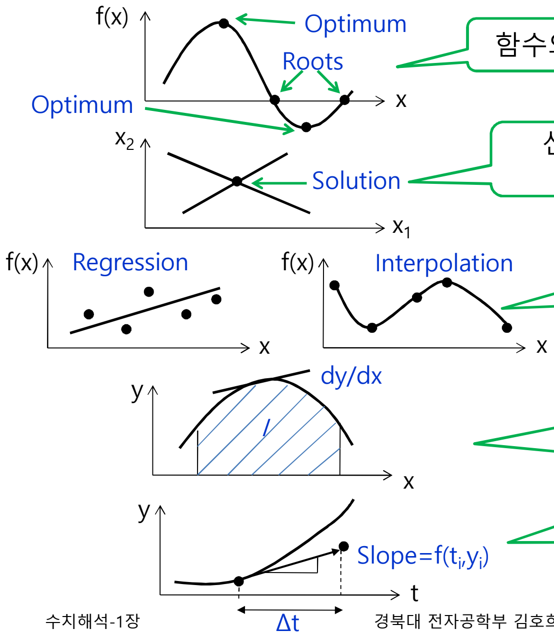
$$t = 4: \qquad v = 19.62 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1}(19.62)^2\right] \times 2 = 36.4137$$

t (s)	v (m/s)
0	0
2	19.6200
4	36.4137
6	46.2983
8	50.1802
10	51.3123
12	51.6008



☞ 구간을 좁히면 정확 해에 가까워짐

Summary of Numerical Methods



함수의 근과 최적점을 찾는 방법

선형 방정식 시스템의 해를 찾는 방법

Data 로부터 곡선을 유도하는 방법

함수의 적분값과 미분값을 결정 방법

상미분방정식(ODE)의 초기치, 경계치 조건에서 해를 찾는 방법