

10. LU Factorization

HoHee Kim

LU factorization : $[A]\{x\}=\{b\}$ 의 해 구할 때, $\{b\}$ 조작을 $[A]$ 와 분리시켜
노력을 줄이고자 만든 방법, 0 로 나누는 것을 피하려 pivoting 함

L : 대각선 entry가 1인
lower triangular
 U : upper triangular

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

$$[L][U]\{x\} = \{b\}$$

$$[L] \underbrace{[U]\{x\}}_{\{d\} \text{로 치환}} = \{b\}$$

- Forward substitution

$$[L]\{d\} = \{b\} \quad \text{에서 } \{d\} \text{ 를 구함}$$

- Back substitution

$$[U]\{x\} = \{d\} \quad \text{에서 } \{x\} \text{ 를 구함}$$

예) $[A]\{x\} = \{b\}$ 에서 LU factorization 을 이용하여 $\{x\}$ 를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

행교환 없이 Forward elimination 으로 U 를 구한 뒤,
U를 구하는 과정에서 pivot 아래에 있는 entry들을
pivot 으로 나눔으로써 L 을 구함

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

수치해석-10장

경북대 전자공학부 김호희

3

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_U$$

① $[L]\{d\} = \{b\}$ 에서 $\{d\}$ 를 구함

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

② $[U]\{x\} = \{d\}$ 에서 $\{x\}$ 를 구함

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

수치해석-10장

경북대 전자공학부 김호희

4

Ex) Derive an LU Factorization based on the Gauss elimination.

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

$$\frac{0.1}{3} = 0.0333333, \quad \frac{0.3}{3} = 0.1000000, \quad \frac{-0.19}{7.00333} = -0.0271300$$

$$\rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

수치해석-10장

경북대 전자공학부 김호희

5

Ex) Complete the previous problem by generating the final solution with forward and back substitution.

① $[L]\{d\} = \{b\}$ 에서 $\{d\}$ 를 구함

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{Bmatrix}$$

② $[U]\{x\} = \{d\}$ 에서 $\{x\}$ 를 구함

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 7.00003 \end{Bmatrix}$$

수치해석-10장

경북대 전자공학부 김호희

6

```

>> A = [ 3 -0.1 -0.2; 0.1 7 -0.3; 0.3 -0.2 10 ];
>> b = [ 7.85; -19.3; 71.4];
>> [L, U] = lu(A)

```

LU factorization 하는 built-in 함수

$$L = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1.0000 & 0 \\ 0.1000 & -0.0271 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3.0000 & -0.1000 & -0.2000 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

```

>> d = L\b
d = 7.8500
    -19.5617
    70.0843
>> x = U\d
x = 3.0000
    -2.5000
    7.0000

```

$L\{d\}=\{b\}$ 에서 $\{d\}$ 구하기

$U\{x\}=\{d\}$ 에서 $\{x\}$ 구하기

수치해석-10장 경북대 전자공학부 김호희 7

LU factorization with Pivoting : 0 으로 나누는 것을 피하려고

예) $\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0001 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$ 을 이용해 행 교환

① $PA = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.0003 & 3.0000 \end{bmatrix} = LU \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.0003 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2.9997 \end{bmatrix}$

$P\{b\} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.0001 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.0001 \end{Bmatrix}$

② $[L]\{d\} = P\{b\} : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.0003 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.0001 \end{Bmatrix}$

$[U]\{x\} = \{d\} : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2.9997 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.9998 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 - 1(0.66667)}{1} = 0.33333 \\ x_2 = \frac{1.9998}{2.9997} = 0.66667 \end{cases}$

수치해석-10장 경북대 전자공학부 김호희 8

Cholesky factorization: 행렬 A 가 대칭행렬일 때, $A = U^T U$ 로 분해 \rightarrow $A\{x\}=\{b\}$ 해 구하는 과정에서 저장공간과 계산시간이 절반

$$u_i = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_i}, \quad j = i+1, \dots, n$$

Ex) Compute the Cholesky factorization for the symmetric matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2.44949, \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = 6.123724, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = 22.45366$$

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = 4.1833, \quad u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12} u_{13}}{u_{22}} = 20.9165$$

$$u_{33} = \sqrt{a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2} = 6.110101$$

$$U = \begin{bmatrix} 2.44949 & 6.123724 & 22.45366 \\ 0 & 4.1833 & 20.9165 \\ 0 & 0 & 6.110101 \end{bmatrix}$$

수치해석-10장

경북대 전자공학부 김호희

9

```
>> A = [ 6 15 55; 15 55 225; 55 225 979 ];
>> b = [ sum(A(1,:)); sum(A(2,:)); sum(A(3,:)) ]
b =
    76
   295
  1259
>> U = chol(A)
U = 2.4495    6.1237   22.4537
      0    4.1833   20.9165
      0         0    6.1101
>> d = U' \ b
d = 31.0269
   25.0998
    6.1101
>> x = U \ d
x = 1.0000
    1.0000
    1.0000
```

Cholesky factorization 하는 built-in 함수

$U^T \{d\} = \{b\}$ 에서 $\{d\}$ 구하기

$U \{x\} = \{d\}$ 에서 $\{x\}$ 구하기

수치해석-10장

경북대 전자공학부 김호희

10