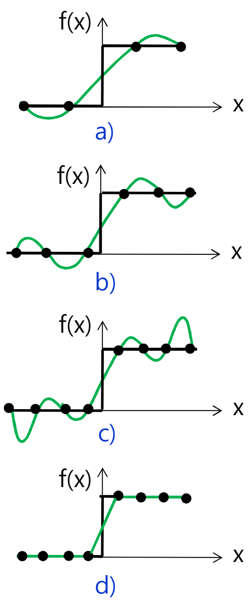
18. Splines & Piecewise Interpolation

HoHee Kim

Spline interpolation : 구간마다 낮은 차수의 다항식으로 interpolation

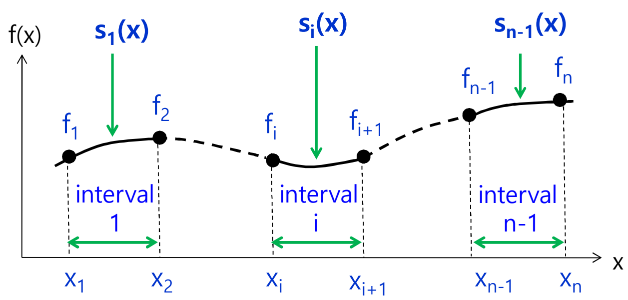


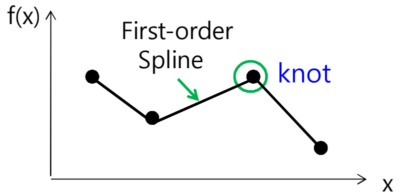
a), b), c) 급격하게 변하는 함수 위의 점들을

각각 3차, 5차, 7차 다항식으로 interpolation

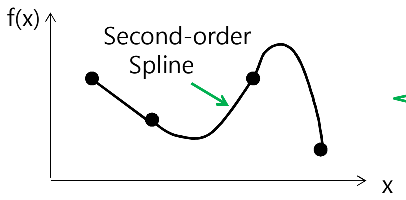
→ 진동이 발생

d) 점 사이 마다 linear spline → 더 적합한 근사함수

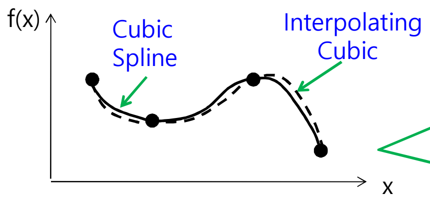




Linear spline,
knot 에서 1차 도함수 불연속
→ not smooth



Quadratic spline,
knot 에서 1차 도함수 연속
→ 너무 큰 swing



Cubic spline (많이 사용),
knot 에서 2차 도함수도 연속
→ 자연스러운 연속
— : 구간마다 3차 다항식
- - : 하나의 3차 다항식

Linear Splines : 구간 마다 직선으로 연결

- n 개의 data 점, (n-1) 개의 interval 일 때,

구간 i 번째 spline 함수 : $s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$

Newton's 1차 다항식과 같다

(x_i , f_i) 을 대입 → $a_i = f_i$ → 위 식에 대입

(x_{i+1} , f_{i+1}) 을 대입 → $b_i = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$

Ex) Fit the data with first-order splines. Evaluate the function at x = 5.

i	x_i	y_i
1	3.0	2.5
2	4.5	1.0
3	7.0	2.5
4	9.0	0.5

x=5 → 두 번째 구간(4.5~7.0)에 속함

$$s_2(x) = f_2 + \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) = 1.0 + \frac{2.5 - 1.0}{7.0 - 4.5}(x - 4.5)$$

$$\rightarrow \ s_2(5) = 1.3$$

Quadratic Splines : 구간마다 포물선(2차 다항식)으로 연결

- n 개의 data 점, (n-1) 개의 interval 일 때,

구간 i 번째 spline 함수 : $s_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2$

☞ 3(n-1)개의 미지수 구하기 위해 3(n-1)개의 식이나 조건 필요

① 각 spline 함수는 구간 시작 data 점을 통과 :

(x_i, f_i)를 $s_i(x)$ 에 대입 → $a_i=f_i$ (n-1)개

② knot 에서 양쪽의 함수 값 같다 :

$s_i(x_{i+1})=s_{i+1}(x_{i+1})$ → $f_i+b_i(x_{i+1}-x_i)+c_i(x_{i+1}-x_i)^2=f_{i+1}$ (n-1)개

③ 내부 점에서 양쪽의 1차 도함수 값 같다 :

$s'_i(x_{i+1})=s'_{i+1}(x_{i+1})$ → $b_i+2c_i(x_{i+1}-x_i)=b_{i+1}$ (n-2)개

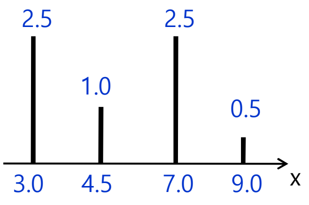
④ 첫 번째 점에서 2차 도함수 값=0 : 처음 두 점은 직선으로 연결

$s''_1(x_1)=2c_1=0$ → $c_1=0$ 1개

Ex) Fit quadratic splines to the data employed in the previous example.

Use the results to estimate the value at x=5.

unknown



$\boxed{c_1=0}$

$$a_1=f_1 \rightarrow f_1+\boxed{b_1}(x_2-x_1)+\boxed{c_1}(x_2-x_1)^2=f_2 \quad ①$$

$$a_2=f_2 \rightarrow f_2+\boxed{b_2}(x_3-x_2)+\boxed{c_2}(x_3-x_2)^2=f_3 \quad ②$$

$$a_3=f_3 \rightarrow f_3+\boxed{b_3}(x_4-x_3)+\boxed{c_3}(x_4-x_3)^2=f_4 \quad ③$$

$$b_1+2\boxed{c_1}(x_2-x_1)=b_2 \rightarrow b_1=b_2 \quad ④$$

$$b_2+2c_2(x_3-x_2)=b_3 \quad ⑤$$

$b_1=-1$, $b_2=-1$, $b_3=2.2$

$c_2=0.64$, $c_3=-1.6$

$$\rightarrow \begin{cases} s_1(x)=2.5-(x-3) \\ s_2(x)=1.0-(x-4.5)+0.64(x-4.5)^2 \\ s_3(x)=2.5+2.2(x-7.0)-1.6(x-7.0)^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{s_2(5)=0.66}$$

Cubic Splines : 구간마다 3차 다항식으로 연결, 많이 사용됨

- n 개 data 점, (n-1) 개의 interval 일 때,

구간 i 번째의 spline 함수 : $s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$

☞ 4(n-1)개의 미지수를 구하기 위해 4(n-1)개의 식이나 조건이 필요

① 각 spline 함수는 구간 시작 data 점을 통과 :

(x_i, f_i)를 $s_i(x)$ 에 대입 → $a_i = f_i$ (n-1)개

② knot 에서 양쪽의 함수 값 같다 : $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$

$$\rightarrow f_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = f_{i+1}$$ (n-1)개

③ 내부 점에서 양쪽의 1차 도함수 값 같다 : $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$

$$\rightarrow b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 = b_{i+1}$$ (n-2)개

④ 내부 점에서 양쪽의 2차 도함수 값이 같아야 함 : $s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$

$$\rightarrow 2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i) = 2c_{i+1} \rightarrow c_i + 3d_i(x_{i+1} - x_i) = c_{i+1}$$ (n-2)개

⑤ 양쪽 끝 점 에서 2차 도함수 값 = 0 (natural spline) :

$s''_1(x_1) = 0 \rightarrow 2c_1 + 6d_1(x_1 - x_1) = 0 \rightarrow c_1 = 0$ 2개

$s''_{n-1}(x_n) = 0 \rightarrow 2c_{n-1} + 6d_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0 \rightarrow c_{n-1} + 3d_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0$

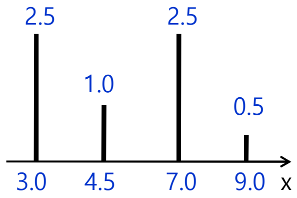
End Condition

- Natural spline : 양쪽 끝 점에서 2차 도함수 =0
- Not-a-Knot : 앞에서 두 번째와 끝에서 두 번째 점에서 3차 도함수 연속

  → MATLAB의 built-in 함수 spline() 에서 적용
- Clamped : 시작점과 끝점의 1차 도함수 값을 특정 지움

Ex) Fit cubic splines to the data used in the previous examples. Utilize the results to estimate the value at x=5.

$\boxed{c_1 = 0}$ unknown



$$f_1+\boxed{b_1}(x_2-x_1)+\boxed{c_1}(x_2-x_1)^2+\boxed{d_1}(x_2-x_1)^3=f_2 \quad ①$$

$$f_2+\boxed{b_2}(x_3-x_2)+\boxed{c_2}(x_3-x_2)^2+\boxed{d_2}(x_3-x_2)^3=f_3 \quad ②$$

$$f_3+\boxed{b_3}(x_4-x_3)+\boxed{c_3}(x_4-x_3)^2+\boxed{d_3}(x_4-x_3)^3=f_4 \quad ③$$

$$b_1+2\boxed{c_1}(x_2-x_1)+3d_1(x_2-x_1)^2=b_2 \quad ④$$

$$b_2+2c_2(x_3-x_2)+3d_2(x_3-x_2)^2=b_3 \quad ⑤$$

$$\boxed{c_1}+3d_1(x_2-x_1)=c_2 \quad ⑥$$

$$c_2+3d_2(x_3-x_2)=c_3 \quad ⑦$$

$$c_3+3d_3(x_4-x_3)=0 \quad ⑧$$

$$s_1(x)=2.5-1.419771863(x-3)+0.186565272(x-3)^3$$

$$s_2(x)=1.0-0.160456274(x-4.5)+0.839543726(x-4.5)^2-0.214144487(x-4.5)^3$$

$$s_3(x)=2.5+0.022053232(x-7.0)-0.766539924(x-7.0)^2+0.127756654(x-7.0)^3$$

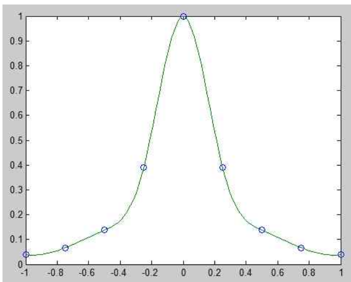
$$\rightarrow \quad s_2(5)=1.102889734$$


```
>> x = linspace(-1,1,9);
>> y = 1./(1+25*x.^2);
>> xx = linspace(-1,1);
>> yy = spline(x,y,xx);
>> plot(x,y,'o',xx,yy)
```

data 9개

data 100개

cubic spline,
Not-a-Knot condition



```
>> t = [0 20 40 56 68 80 84 96 104 110];
>> v = [0 20 20 38 80 80 100 100 125 125];
>> tt = linspace(0,110);
>> v1 = interp1(t,v,tt,'spline');
>> plot(t,v,'o',tt,v1)
```

방법을 설정 가능
linear, cubic spline등