【受験科テスト 05 問題】

水平でなめらかな氷の上を質量 m の子供 A が東向きに速さ $2V$ で滑走しているとき，質量 $2m$ の大人 B が北向きに速さ V で滑走してきて衝突した。衝突と同時に二人は一体となり，回転することなく速さ V' で直線 L 上を滑走し続けた。

⑴ 衝突後に一体となった二人はどの方向に向かうか。東から北への振れ角を θ とし，$\tan\theta$ の値を求めよ。

⑵ 衝突して一体となった二人が滑走する速さ V' を求めよ。

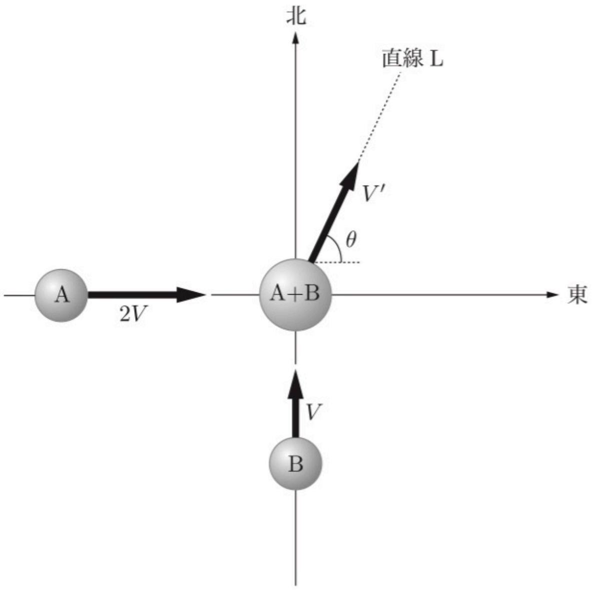
⑶ A と B の運動エネルギーの和の衝突前後での変化量 ΔK を求めよ。増加した場合をプラスとして，プラス・マイナスいずれかの符号を付けて答えよ。

滑走を続けているとき，急に A が B を真横に（直線 L に垂直な方向に）力を加えて突き放したところ，ともに回転することなく，B は A から見て速さ U で離れていった。

⑷ B が直線 L から離れる速さを求めよ。

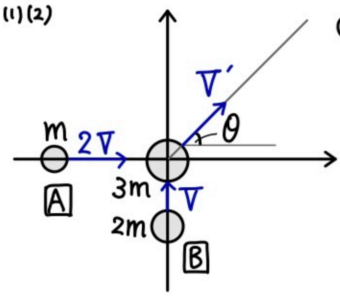
⑸ 突き放されたことで B の運動エネルギーはどれだけ変化したか。増加した場合をプラスとして，プラス・マイナスいずれかの符号を付けて答えよ。

⑹ A と B の運動エネルギーの和が，突き放された後と衝突前とで変わらないようにするには速さ U を V の何倍にすればよいか。



Memo

(1)(2)



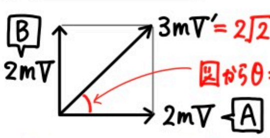
運動量保存則

$$\begin{cases} m\times 2V = 3m\times V'\cos\theta \\ 2m\times V = 3m\times V'\sin\theta \end{cases}$$

式2つ、未知数2つ ⇒ 解ける!

$\tan\theta = 1,\ V' = \frac{2\sqrt{2}}{3}V$ //

別解 ベクトル図



$3mV' = 2\sqrt{2}mV \rightarrow V' = \frac{2\sqrt{2}}{3}V$

図からθ=45° → $\tan\theta = 1$ //

(3) 運動エネルギーを計算して、衝突後−衝突前 とするだけ!

$$\Delta K = \frac{1}{2}\cdot 3m\cdot V'^2 - \left\{\frac{1}{2}\cdot m(2V)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot V^2\right\}$$

$$= -\frac{5}{3}mV^2$$ //

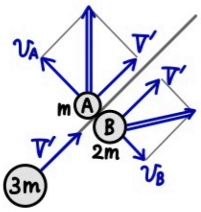
(4)『AがBを直線Lに垂直な方向に力を加えて突き放した』

ポイント1 物体は力を加えた方向に加速する
力を加えていない方向の速度は変化しない

→ 直線Lと平行な速度成分はV'で一定

ポイント2 AがBを突き放したらAもBから反作用を受ける

→AもBも直線Lから離れる速度成分を持つようになる
└これをv_A, v_Bとして、下図。



運動量保存則　式2つ 未知数2つ

$0 = mv_A - 2m\cdot v_B$

これと $v_A + v_B = U$ をあわせて

$v_A = \frac{2}{3}U,\ v_B = \frac{1}{3}U$ //

Aが受ける力積とBが受ける力積(=運動量の変化量)
は同じ大きさ、逆向き
⇒離れる速さは質量の逆比になるはず

(5) AとBの運動エネルギーの変化量をΔK_A, ΔK_Bとする
計算するだけ!!

$$\Delta K_A = \frac{1}{2}m(V'^2 + v_A^2) - \frac{1}{2}mV'^2 = +\frac{2}{9}mU^2$$ //

$$\Delta K_B = \frac{1}{2}\cdot 2m(V'^2 + v_B^2) - \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot V'^2 = +\frac{1}{9}mU^2$$ //

(6)「エネルギー変化の和が0」

$\Leftrightarrow \Delta K + \Delta K_A + \Delta K_B = 0 \Leftrightarrow U^2 = 5V^2$

もしくは

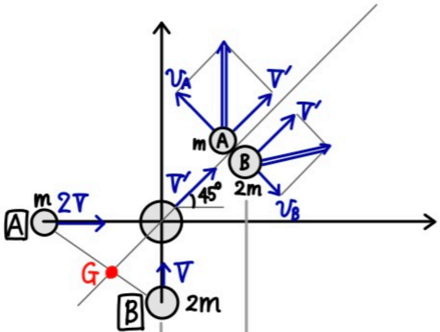
「衝突前の運動エネルギー」=「分裂後の運動エネルギー」

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m(2V)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot V^2 = \frac{1}{2}m\left\{V'^2 + \left(\frac{2}{3}U\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\cdot 2m\left\{V'^2 + \left(\frac{1}{3}U\right)^2\right\}$$

$\Leftrightarrow U^2 = 5V^2$

UをVの√5倍にする //

別解 重心の運動エネルギーと相対運動のエネルギー



衝突　分裂

K_G: 運動量が保存 ⇒ 一定

K_μ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{3}\cdot(\sqrt{5}V)^2$　　0　　$\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{3}U^2$

換算質量

$m_\mu = \frac{m\times 2m}{m+2m}$

相対速度

始点そろえて描く

相対速度0

$\boxed{恒等式\ K_A + K_B = K_G + K_\mu}$

(3) 衝突前後での運動エネルギーの和の変化量

→ ΔK_μを求めればよい

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{3}\cdot(\sqrt{5}V)^2 = -\frac{5}{3}mV^2$ //

(6) 衝突前と分裂後の運動エネルギーが等しい

→ 衝突前と分裂後のK_μが等しい

→ $\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{3}(\sqrt{5}V)^2$ と $\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{3}U^2$ が等しい

→ $U = \sqrt{5}V$ //

円運動

・物体が円運動をしているという事実から何がわかるか？

(1) 物体の中心向き加速度がわかる ➡ $a = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$　ω: 角速度[rad/s]

(2) 向心方向の運動方程式：$m \cdot \dfrac{v^2}{r} =$ (合力の中心向き成分)　これをまとめて向心力とよぶ

➡ これにより，物体に作用する力を計算できる。

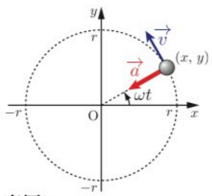
※(1)(2)とも，等速円運動・非等速円運動の双方で成立。

※通常の運動方程式の用い方（力から加速度を求める）との違いを意識せよ。

1秒間にvがどれだけ変化するか
→ 加速度a
Δt秒間なら？
→ aΔt

【等速円運動の加速度の導出】

① 座標をおく方法



時刻 t における物体の座標は，

$$(x,\, y) = (r\cos\omega t,\, r\sin\omega t)$$

と表されるので，t で微分していけば，

$$\vec{v} = r\omega(-\sin\omega t,\, \cos\omega t)$$

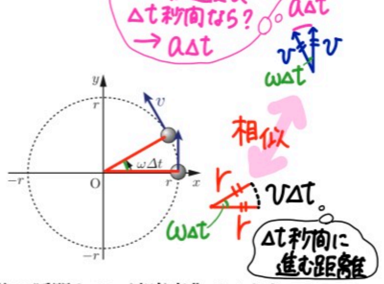
$$\therefore\ \vec{a} = -r\omega^2(\cos\omega t,\, \sin\omega t) = -\omega^2(x,\, y)$$

したがって，

速度は，接線方向に大きさ $|\vec{v}| = r\omega$

加速度は，中心向きに大きさ $|\vec{a}| = r\omega^2$ ■

② 相似に着目する方法



ある瞬間と微小時間 Δt 後の瞬間とで，速度変化のベクトル図と座標変化のベクトル図を考える。両者は相似な図形になっているので，速度変化が $a\Delta t$，座標変化が $v\Delta t$ と表されることに注意して，

$$v : a\Delta t = r : v\Delta t \qquad \therefore\ a = \frac{v^2}{r}$$ ■

また，加速度は速度と垂直で，円の中心向きであることもわかる。

【等速円運動のまとめ】

等速円運動を行う物体に対しては運動方程式を立式するのが鉄則（中心向き）。接線方向には力がつり合う（または力が作用しない）。

周　期：$T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

速　さ：$v = r\omega$

加速度：$a = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$

【非等速円運動の場合は？】 ➡詳細は発展講座テキスト p.196 を参照

やはり運動方程式は立式する（中心向き）。等速円運動の場合と異なり，加速度の大きさも速さも変化するため，一般に周期は求められないが，速さについてはエネルギー保存則から求めることができる。非等速円運動は，以上２式を利用して考察するのが鉄則。

回転座標系における見かけの力

・一定角速度 ω で回転する座標系で観測する場合に導入すべき見かけの力は，遠心力 と コリオリ力 。

【遠心力】

向　き：中心から遠ざかる向き

大きさ：$ma \left(= mr\omega^2 = m\dfrac{v^2}{r}\right)$

※「円運動している物体の中心向きの加速度は a だから，その物体とともに運動する観測者から見ると慣性力 ma が外向きに作用する」と考えても結果的に正しい立式とはなるが，厳密には遠心力は回転座標系の原点で回転している観測者から見て作用する力である。発展講座テキスト p.197 以降に詳細を掲載しているので，興味のある者は一度目を通しておいてほしい。

【コリオリ力】（覚える必要はない）

向　き：$\vec{v}$ を ω の回転方向（時計回り or 反時計回り）と逆向きに 90° 回転した向き

大きさ：$2m\omega v$

※コリオリ力を考える状況になった時点で 負け 。速やかに 静止系 に戻って考え直すこと。

コリオリ力によって
右側にふくらんでいる

種々の力学条件（既出）

・回転座標系でも，$W_{非}$（遠心力のする仕事など）に注意すればエネルギー保存則は利用可能

$$\varDelta K = W_{保} + W_{非} \Leftrightarrow \varDelta K + (-W_{保}) = W_{非} \Leftrightarrow \varDelta K + \varDelta U = W_{非} \Leftrightarrow \varDelta E = W_{非}$$

・糸がたるむかたるまないか

➡　たるまないと仮定して運動方程式を解いて T を求め，$T \geqq 0$ が破綻すればたるむと考える

・面から離れるか離れないか

➡　離れないと仮定して運動方程式を解いて N を求め，$N \geqq 0$ が破綻すれば離れると考える

・滑るか滑らないか

➡　滑らないと仮定して運動方程式を解いて f を求め，$f \leqq \mu_0 N$ が破綻すれば滑ると考える

【発展例題１】〈不等速円運動〉

図１に示すように，水平に置かれた滑らかな平面板上に，高さ h の棒の一端を点Ｏで垂直に固定し，棒の上端に長さ l $(l > h)$ の伸びない軽い糸をつけ，糸の他端に質量 m の小球Ｐを付けた。この小球Ｐの運動に関する以下の設問に答えよ。ただし重力加速度の大きさを g とする。

まず小球Ｐに速さ v を与えたところ，小球は平面板上で点Ｏを中心とした半径 a の円運動を行った。

(1)　このときの糸の張力の大きさ T および小球Ｐが平面板から受ける垂直抗力の大きさ N を求めよ。
(2)　次第に速さ v を大きくしていくと小球は平面板から離れる。小球Ｐが平面板から離れる瞬間の速さを求めよ。

次にこの平面板を図２に示すように水平と角度 θ（ただし $0 < \tan\theta < \dfrac{a}{h}$）だけ傾け，この面上で円運動させる。小球Ｐがこの面上を円運動する軌道上の最下点をＡ，最上点をＢとし，小球Ｐが最下点Ａを通るときの速さを v_0 とする。

(3)　小球Ｐが最下点Ａを通過するときに面から受ける垂直抗力の大きさ N_{A} および糸から受ける張力の大きさ T_{A} を求めよ。
(4)　小球Ｐが最下点Ａで平面板から離れないためには速さ v_0 はどのような範囲にあればよいか。
(5)　小球Ｐが最上点Ｂを通過するときの速さ v_{B} を求めよ。
(6)　小球Ｐが最上点Ｂを通過するときに面から受ける垂直抗力の大きさ N_{B} および糸から受ける張力の大きさ T_{B} を求めよ。
(7)　小球Ｐが最下点Ａでも最上点Ｂでも平面板から離れずに円運動するためには速さ v_0 がどのような範囲にあればよいか。
(8)　(7)の円運動が実現されるための $\tan\theta$ の条件を求めよ。

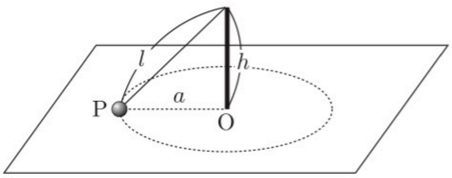


図１

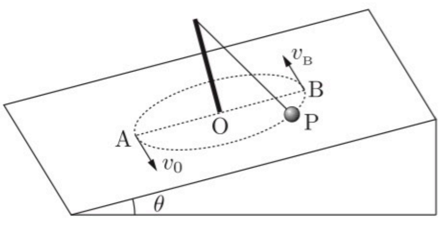
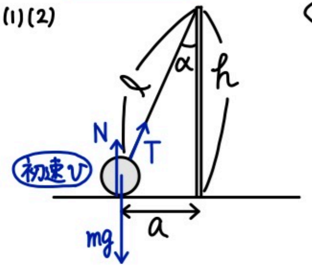


図２

Memo

(1)(2)



力のつりあい

$T\cos\alpha + N = mg$

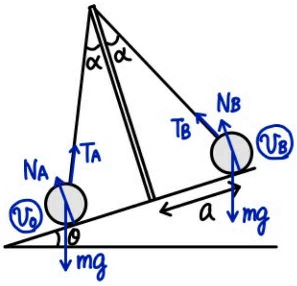
未知数2つ
式2つ ⇒ OK!

EOM

$m\frac{v^2}{a} = T\sin\alpha$

→ "N=0で離れる"ので
このときのvを求めるだけ

(3)(5)(6)



EOM

$$\begin{cases} m\frac{v_0^2}{a} = T_A\sin\alpha - mg\sin\theta & \cdots ① \\ 0 = N_A + T_A\cos\alpha - mg\cos\theta & \cdots ② \\ m\frac{v_B^2}{a} = T_B\sin\alpha + mg\sin\theta & \cdots ③ \\ 0 = N_B + T_B\cos\alpha - mg\cos\theta & \cdots ④ \end{cases}$$

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2mga\sin\theta \cdots ⑤$$

未知数5つ、式5つ ⇒ OK!

(4) "Aで板から離れない"

⇔ $N_A \geqq 0$ となる v_0 を求めるだけ

(7)「Aで浮かない　たるまない
Bで浮かない　たるまない　で円運動を続ける」

⇔「$N_A \geqq 0$ かつ $T_A \geqq 0$ かつ
$N_B \geqq 0$ かつ $T_B \geqq 0$ かつ $v_B \geqq 0$」

⇔「$N_A \geqq 0$ かつ $T_B \geqq 0$」

⇔ ○ $\leqq v_0 \leqq$ △

(8) ○ $\leqq$ △ ならばv_0が存在でき、
円運動が実現する。

(1) $T = \frac{mv^2 l}{a^2}$

$N = mg - \frac{mv^2 h}{a^2}$

(2) $v = a\sqrt{\frac{g}{h}}$

①、⑤からT_A v_Bが求まる
→②、③に代入してN_A、T_Bも求まる
→④からN_Bが求まる

(3) $T_A = \frac{mv_0^2 l}{a^2} + \frac{mgl\sin\theta}{a}$

$N_A = mg\cos\theta - \frac{mv_0^2 h}{a^2} - \frac{mgh\sin\theta}{a}$

(5) $v_B = \sqrt{v_0^2 - 4ga\sin\theta}$

(6) $T_B = \frac{mv_0^2 l}{a^2} - \frac{5mgl\sin\theta}{a}$

$N_B = mg\cos\theta - \frac{mv_0^2 h}{a^2} + \frac{5mgh\sin\theta}{a}$

(4) $v_0 \leqq \sqrt{\frac{ag(a\cos\theta - h\sin\theta)}{h}}$

⑤より $v_0 > v_B$

大 $m\frac{v_0^2}{a} = T_A\sin\alpha - mg\sin\theta \cdots ①$

∨

小 $m\frac{v_B^2}{a} = T_B\sin\alpha + mg\sin\theta \cdots ③$

⇓

$T_A > T_B$のはず = 最もたるみやすいのはB

ならば…

$0 = N_A + T_A\cos\alpha - mg\cos\theta \cdots ②$

大 ∨ 小

$0 = N_B + T_B\cos\alpha - mg\cos\theta \cdots ④$

⇓

$N_A < N_B$のはず = 最も浮きやすいのはA

→ Bでたるまない条件
Aで浮かない条件 を考えれば、他でも たるまない
浮かない

(7) $\sqrt{5ga\sin\theta} \leqq v_0 \leqq \sqrt{\frac{ag(a\cos\theta - h\sin\theta)}{h}}$

(8) $\tan\theta \leqq \frac{a}{6h}$

【発展例題２】〈遠心力〉

半径 R の輪と穴のあいた質量 m の小球がある。小球は輪に通されており，輪に沿って動くことができる。図のように，輪が，中心を通る鉛直な軸のまわりに角速度 ω で回転している場合，小球に働く力のつり合いや小球の運動を，輪と一緒に回転する立場で考える。輪に対する小球の位置は，角度 θ で表すことができる。重力加速度の大きさを g とする。以下の問いに答えよ。

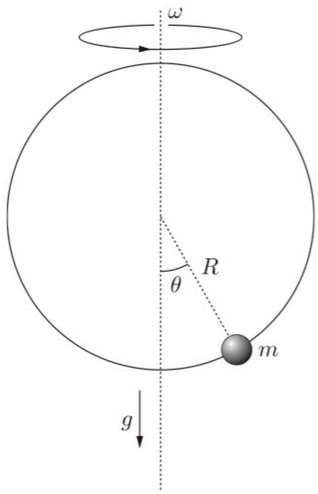
Ⅰ　輪と小球の間に摩擦がない場合を考える。

⑴　小球が位置 θ にある場合，小球に働くすべての力について説明せよ。さらに，それらの向きを図示せよ。

⑵　小球が $\theta = \theta_0$ の位置に止まっている場合，位置 θ_0，半径 R，角速度 ω の間の関係式を求めよ。ただし，$0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

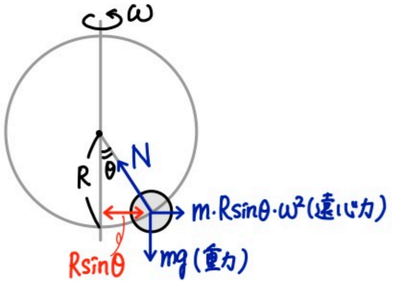
⑶　小球を $\theta = 0$ の位置から静かに放すと，小球は輪に沿って昇り始める。位置 θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ における小球の速さ v を求めよ。

Ⅱ　輪と小球の間に摩擦がある場合を考え，静止摩擦係数を μ $(0 < \mu < 1)$ とする。小球が位置 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ に止まっているとする。角速度 ω を徐々に変化させた場合，小球が動き始めるときの角速度 ω_0 を求めよ。



Memo

Ⅰ (1) "輪と一緒に回転する立場で考えた"力の作用図



(2) $\theta=\theta_0$でつりあった。

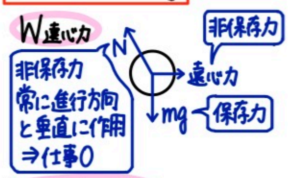
力のつりあい 接線方向：Nを含まない方向で立式

$$mR\omega^2\sin\theta_0\times\cos\theta_0 = mg\sin\theta_0$$

$$\therefore\ \underline{R\omega^2\cos\theta_0 = g}$$

(3) 力学的エネルギーの変化量 = 非保存力のした仕事

$$\frac{1}{2}mv^2+mgR(1-\cos\theta) = W_{遠心力}$$

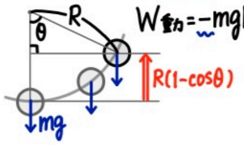


$$\frac{1}{2}mv^2+mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$$

$$\therefore\ v=\sqrt{R(1-\cos\theta)\{R\omega^2(1+\cos\theta)-2g\}}$$

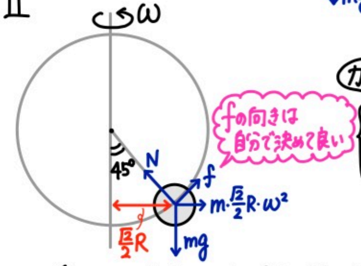
※当然 運動エネルギーの変化量 = 全ての力のした仕事 でもOK!

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_{重力}+W_{遠心力}$$



$W_{重力}=-mgR(1-\cos\theta)$

Ⅱ



力のつりあい

$$\begin{cases} f + m\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R\cdot\omega^2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = mg\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ N = m\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R\cdot\omega^2\times\frac{\sqrt{2}}{2} + mg\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

式2つ・未知数2つ

動かない条件 $-\mu N \leq f \leq \mu N$ に代入して

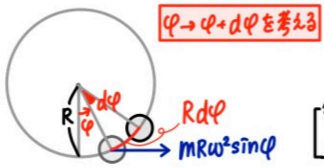
$$\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{\sqrt{2}g}{R}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\sqrt{2}g}{R}}$$ のとき小球は静止

→ ω_0のとき小球は下向きに ω_0のとき小球は上向きに動きだす

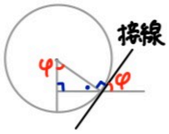
W遠心力を求めよう!

遠心力はθの値によって大きさが変化する＆進行方向となす角が変化する

→ 微小仕事を考える



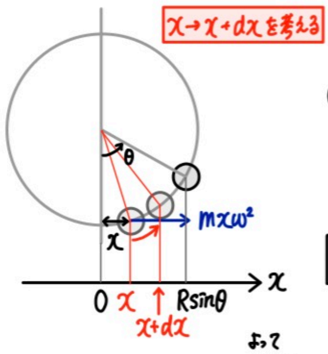
微小仕事: $mR\omega^2\sin\varphi\times Rd\varphi\times\cos\varphi$

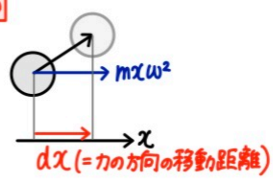


よって

$$W_{遠心力}=\int_0^\theta mR\omega^2\sin\varphi\times Rd\varphi\times\cos\varphi$$
$$= mR^2\omega^2\int_0^\theta\frac{1}{2}\sin2\varphi\,d\varphi$$
$$= -\frac{mR^2\omega^2}{4}\left[\cos2\varphi\right]_0^\theta$$
$$= \frac{mR^2\omega^2}{4}(1-\cos2\theta)$$
$$= \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$$

別解



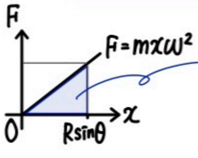


微小仕事: $mx\omega^2\times dx$

よって

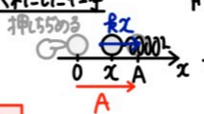
$$W_{遠心力}=\int_0^{R\sin\theta} mx\omega^2 dx$$
$$= m\omega^2\int_0^{R\sin\theta} x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$$

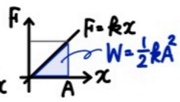
別解 F-xグラフの面積



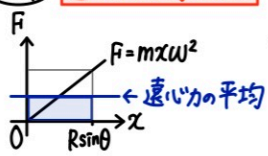
$R\sin\theta\times mR\omega^2\sin\theta\times\frac{1}{2}$ で求めてもOK

※バネにした仕事





別解 遠心力の平均を考える



$$W_{遠心力}=m\underbrace{\frac{R\sin\theta}{2}\omega^2}_{遠心力の平均}\times\underbrace{R\sin\theta}_{移動距離}$$