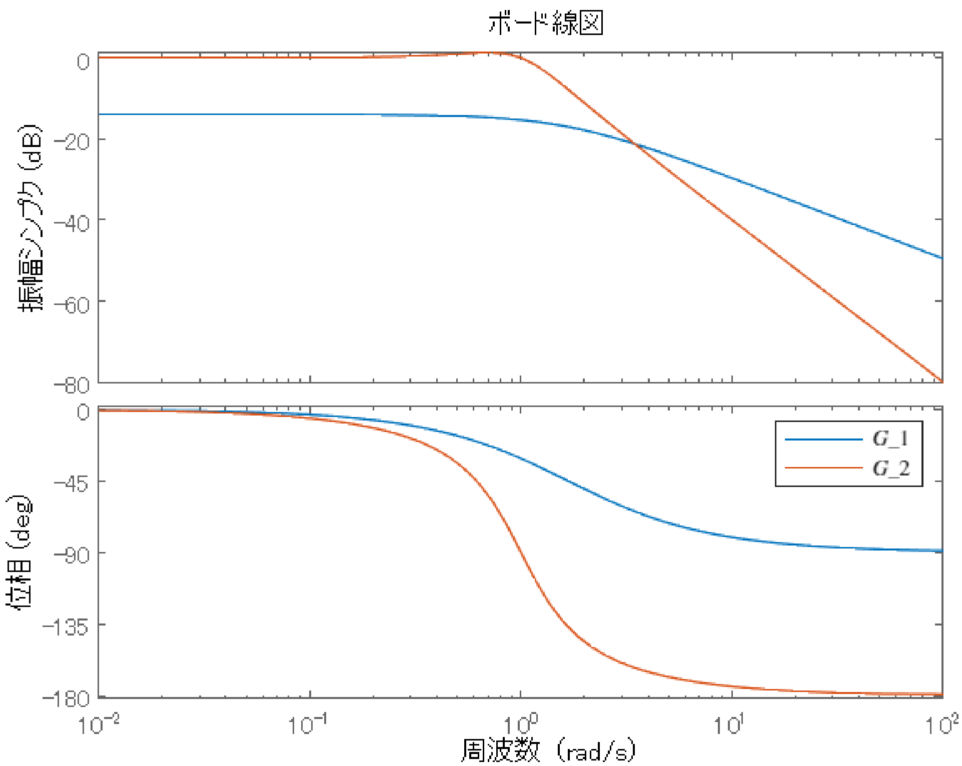
実践ロバスト制御　第 2 章演習問題

問題 1

次の伝達関数の H_∞ ノルムを定義から求めよ。

$$G_1 = \frac{1}{3s+5}、\ G_2 = \frac{1}{s^2+s+1}$$




```
G1_hinfnorm = 0.2000
G2_hinfnorm = 1.1547
```

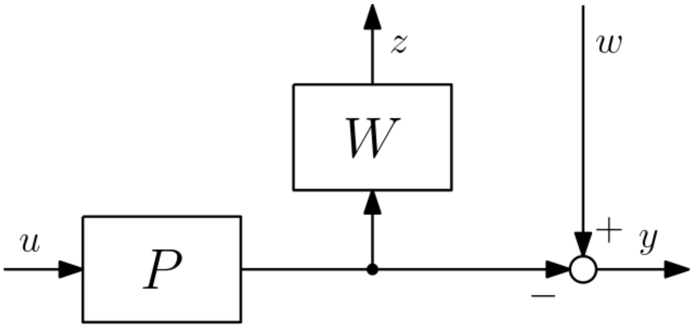
問題 2

図 2.1 の一般化プラントについて、つぎの各問いに答えよ。

1. w **から** z **までの閉ループ伝達関数** G_{zw} **が**

$$G_{zw} = \frac{PK}{1+PK}W$$

となるように一般化プラント G **を構成し、**G **の伝達行列表現を求めよ。ただし、**P **は 1 入出力の制御対象、**K **はフィードバック制御器、**W **は重み関数とする。なお、**w **は** P **の出力端に加えるものとし、**P **は虚軸上に極および零点を持たず、**W **は安定で虚軸上に零点を持たないものとする。**



$$G = \begin{pmatrix} 0 & PW \\ 1 & -P \end{pmatrix}$$

2. 上記 1.で求めた一般化プラントは、標準H_∞制御問題の仮定 A1~A4 を満たすかどうか考察し、満たさない場合は、満たすように修正せよ。

なお、一般化プラント G の状態空間実現は

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t)$$
$$z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t)$$
$$y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t)$$

で一般化でき、ドイルの記号法を使って、

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & O \end{array}\right)$$

と記述できる。

仮定 A1:(A, B_2)は可安定、かつ、(C_2, A)は可検出（*実際の制御対象が可安定、可検出であることに加えて、重み関数が全て安定）

両方とも〇。P に加え W も安定。

仮定 A2:D_{12}は縦長列フルランク、かつ、D_{21}は横長行フルランク

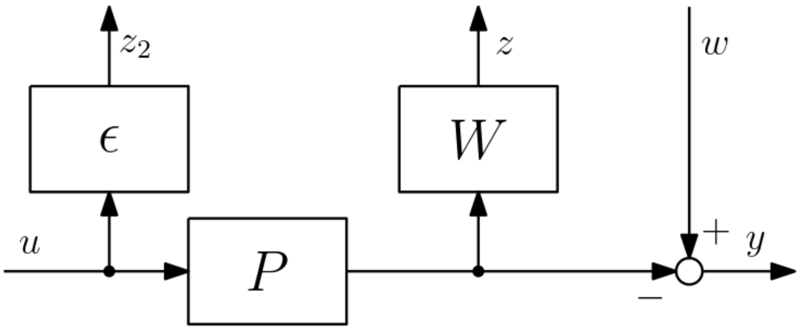
D_{12}は×。P は厳密にプロパなため、u から z の直達項が 0 であるため。

D_{21}は〇。w から y の直達項が 1 であるため。

仮定 A3:G_{12}は虚軸上に不変零点を持たない。

仮定 A4:G_{21}は虚軸上に不変零点を持たない。

上記仮定は P および W が虚軸上に極および零点を持たない限り成立。仮に持っている場合でも、虚軸上で(C_1, A)が不可観測または虚軸上で(A, B_1)が不可制御でなければ大丈夫。



仮定 A2 の D_{12} が縦長列フルランクを満たさない場合は新たな制御量 z_i を導入する。

仮定 A2 の D_{21} が横長行フルランクを満たさない場合は新たな外部入力 w_i を導入する。

今回は前者のため、上図の様に新しい制御量 z_2 を導入する。

問題 3

図 2.3 の一般化プラントにおいて、$P = 10/(s+1)$、$W = 1/(s+5)$ としたとき、つぎの各問いに答えよ。

1. 一般化プラント G の状態空間実現を求めよ。

```
警告: いくつかの入力、または、出力名が繰り返されています。
G =

  A =
        x1  x2
   x1   -1   1
   x2    0  -5

  B =
         w   u
   x1    0  -1
   x2    1   0

  C =
          x1  x2
   [+P]   10   0
   [+P]   10   0

  D =
          w  u
   [+P]   0  0
   [+P]   0  0

連続時間状態空間モデル。
```

2. 上記 1.の結果を使って、W の極 -5 が G_{21} (G_{12}?)の不変零点になることを、実際に計算して確かめよ。

```
G12_invariant_zero = -5
```

3. 制御器を定数ゲイン $K = \alpha > 0$ と仮定し、$\|G_{zw}\|_\infty < 1$ を満たす α の範囲を求めよ。

$G_{zw} = \dfrac{P}{1+PK}W$ より、P、W および K を具体的に与えてノルム条件を求めると、次式より、

$$\left\| \frac{PW}{1+PK} \right\|_\infty = \left\| \frac{10}{(s+1+10\alpha)(s+5)} \right\|_\infty = \frac{2}{10\alpha+1} < 1$$

$\alpha > 0.1$となる。

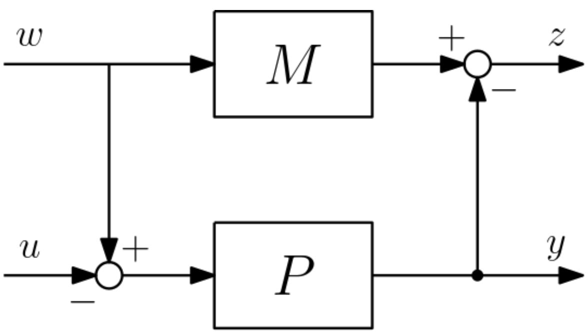
```
Gzw_hinfnorm = 1.0000
```

問題 4

一般化プラント G の伝達行列表現を次式で与えるとき、つぎの各問いに答えよ。ただし、P および M は安定かつプロパな 1 入出力の伝達関数とする。

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M-P & P \\ P & -P \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

1. 一般化プラント G のブロック線図を描け。



2. 制御器 K によって、フィードバック制御$u = Ky$を施した。このとき、w から z までの閉ループ伝達関数 G_{zw}を求めよ。

$$G_{zw} = M - \frac{P}{1+PK}$$

3. G_{zw}のH_∞ノルムが 0 になる制御器 K が得られたとしよう。このとき、P、M、K の間に成り立つ関係式を書け。

2.より$\|G_{zw}\|_\infty = 0 \Leftrightarrow G_{zw} = 0$を計算して、

$$M = \frac{P}{1+PK}$$

問題 5

式(2.35)のハミルトニアン行列 H は、λを固有値に持つとき、$-\lambda$も固有値に持つ。このことを示せ。

式(2.35)より、$H = \begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^\top \end{pmatrix}$であるため（$Q = Q^\top$、$R = R^\top$）、固有値$\lambda$の固有ベクトルを$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$としたとき、

$Hv = \lambda v$から$H^\top \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$が成り立つ。

Hと$H^\top$の固有値は同じため、固有値$-\lambda$もHの固有値となる。