- ©Jan Schmidt 2011
  Katedra číslicového návrhu
  Fakulta informačních technologií
  České vysoké učení technické v Praze

- Zimní semestr 2013/14

EVROPSKÁ UNIE

EVROPSKÝ SOCIÁLNÍ FOND
PRAHA & EU: INVESTUJENE
DO VAŠÍ BUDOUCNOSTI

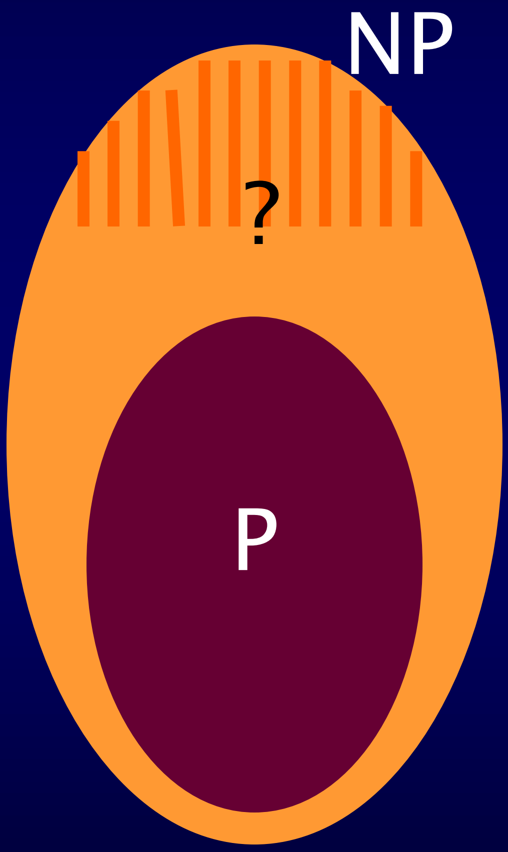
MI-PAA
3. NP-úplné (NPC) a NP-těžké (NPH) problémy

- Karpova redukce
- NP-úplné problémy (NPC)
- Cookova věta
- Turingova redukce
- NP-těžké problémy (NPH)
- problémy mezi P a NPC

NP-úplné (NPC) a NP-těžké (NPH) problémy

- Karpova redukce
- NP-úplné problémy (NPC)
- Cookova věta
- Turingova redukce
- NP-těžké problémy (NPH)
- problémy mezi P a NPC

Vztah tříd P a NP



- možná, že P = NP: na každý NP-problém existuje polynomiální algoritmus, ale my o něm nevíme
- ale jsou příznaky, že P⊂NP
- jeden z hlavních příznaků: **nejtěžší problémy v NP**
  - je jich mnoho
  - polynomiální alg. na jeden ⇒ polynomiální alg. na všechny

Pojmy X–těžký a X–úplný
(X–complete a X–hard)

- Problém Π je X–těžký, jestliže se efektivní řešení všech problémů z třídy X dá zredukovat na efektivní řešení problému Π.
- Problém Π je X–úplný, jestliže je X–těžký a sám patří do třídy X.
- efektivní řešení: v polynomiálním čase (jindy např. s omezenou chybou)
- zredukovat: vyřešit pomocí
- za X dosadit: NP, NPO, APX…

Co jsou nejtěžší problémy v NP?

Co je „lehčí“ a „těžší“ problém?

instance problému Π_1 → snadný převod → instance problému Π_2 → algoritmus na Π_2 → shodný výstup

- získali jsme algoritmus na Π_1
- který není horší než algoritmus na Π_2

- Π_1 je nejvýše tak těžký jako Π_2
- Π_2 je nejméně tak těžký jako Π_1

Který problém je nejtěžší?

instance problému Π_1 → snadný převod → instance problému Π_2

- Π_1 je nejvýše tak těžký jako Π_2 →
- ← Π_2 je nejméně tak těžký jako Π_1

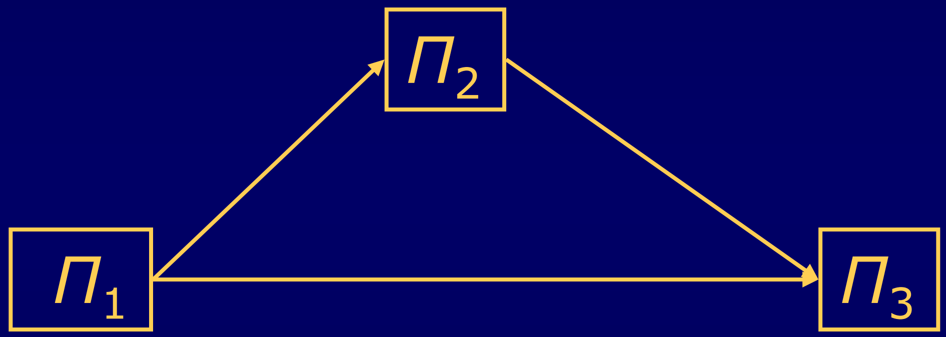
Ten, na který jdou převést všechny ostatní.

Karpova redukce (polynomiální transformace)

- Definice Karpovy redukce
  Rozhodovací problém Π_1 je Karp-redukovatelný na Π_2 ($\Pi_1 \propto \Pi_2$), jestliže existuje polynomiální program pro (deterministický) Turingův stroj, který převede každou instanci I_1 problému Π_1 na instanci I_2 problému Π_2 tak, že výstup obou instancí je shodný.
- Jiné značení: $\lhd$

Vlastnosti

- Tranzitivita
  $$\Pi_1 \propto \Pi_2 \wedge \Pi_2 \propto \Pi_3 \Rightarrow \Pi_1 \propto \Pi_3$$



- Třídy polynomiální ekvivalence
  $\Pi_1 \propto \Pi_2 \wedge \Pi_2 \propto \Pi_1 \Rightarrow \Pi_1$ a Π_2 jsou polynomiálně ekvivalentní.

Příklad: HC $\propto$ TSP

Dán graf G=(V,E). Obsahuje tento graf Hamiltonovu kružnici?

převést

Dána množina n měst $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Pro každá dvě města c_i, c_j je dána vzdálenost $d(c_i, c_j)>0$. Existuje uzavřená túra, která prochází každým městem právě jednou a má délku nejvýše B?

Karpova redukce HC $\propto$ TSP

$V, E \rightarrow C, d(c_i, c_j), B$

Algoritmus:

- Nechť každému uzlu v_i odpovídá jiné město c_i.
- Je-li $(v_i, v_j) \in E$, nechť $d(c_i, c_j)=1$ jinak $d(c_i, c_j)=2$
- Nechť $B=|V|$.

Osnova důkazu, že je Karpovou redukcí:

1. HC $\propto$ TSP má polynomiální složitost
2. výstup je stejný
   - 2.1 $\exists$ kružnice v $G \Rightarrow \exists$ túra v C
   - 2.2 $\exists$ túra v $C \Rightarrow \exists$ kružnice v G

Důkaz HC $\propto$ TSP

1. HC $\propto$ TSP má polynomiální složitost ($n=|V|$)

- Konstrukce měst: $O(n)$; vzdáleností: $O(n^2)$; B: $O(1)$
- $\Rightarrow$ složitost $O(n^2)$;

2.1 $\exists$ kružnice v $G \Rightarrow \exists$ túra v C

- $(v_1, v_2, \ldots v_n, v_1)$ Hamiltonova kružnice v G.
- $\Rightarrow (c_1, c_2, \ldots c_n, c_1)$ je túra v C o délce $n.1$ (každý úsek túry odpovídá hraně)
- $n \leq B$.

2.2 $\exists$ túra v $C \Rightarrow \exists$ kružnice v G

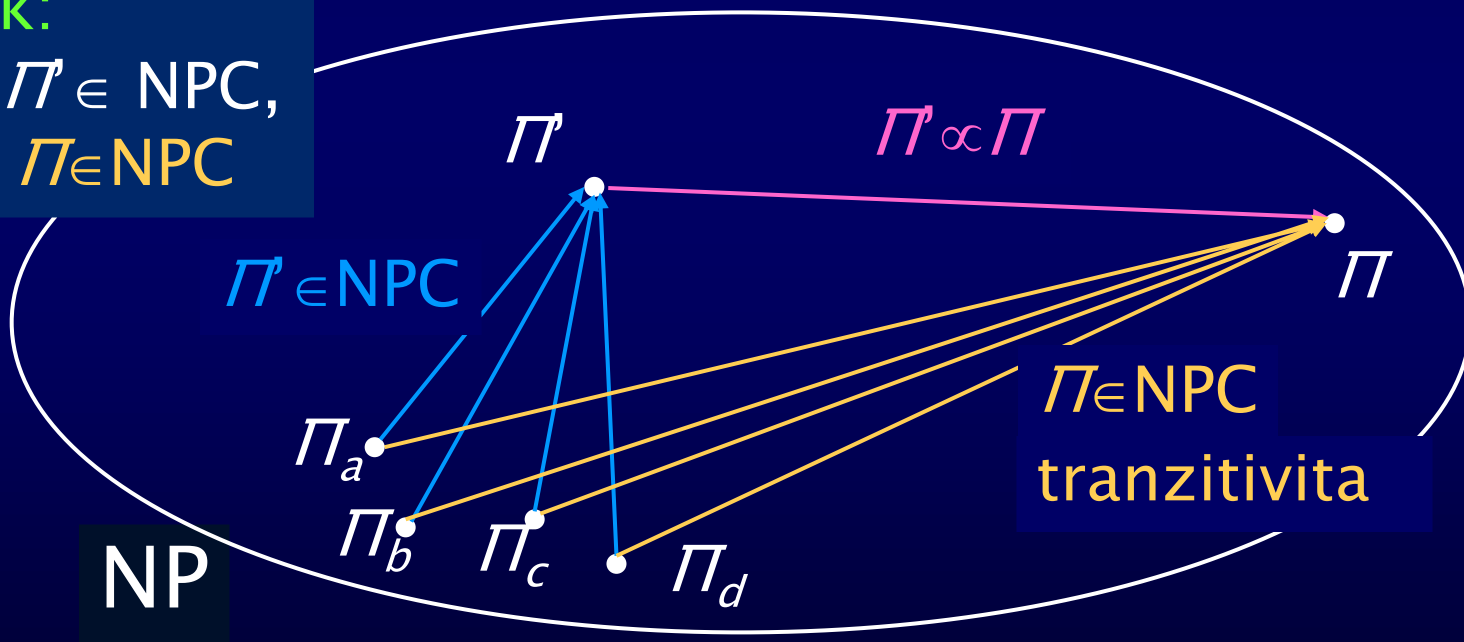
- $(c_1, c_2, \ldots c_n, c_1)$ je túra délky nejvýše B.
- n úseků, délka $B=n$ každý úsek túry má délku 1
- $\Rightarrow$ každý úsek odpovídá hraně
- $(v_1, v_2, \ldots v_n, v_1)$ Hamiltonova kružnice v G.

Q.e.d.

Třída NP-úplný (NP-Complete, NPC)

- Definice (třída NP-úplný):
- Problém Π je NP-úplný, jestliže
  - $\Pi \in$ NP
  - pro všechny problémy $\Pi' \in$ NP, $\Pi' \propto \Pi$
- Důsledek:

  $\Pi \in$ NP, $\exists \Pi' \in$ NPC, $\Pi' \propto \Pi \Rightarrow \Pi \in$ NPC

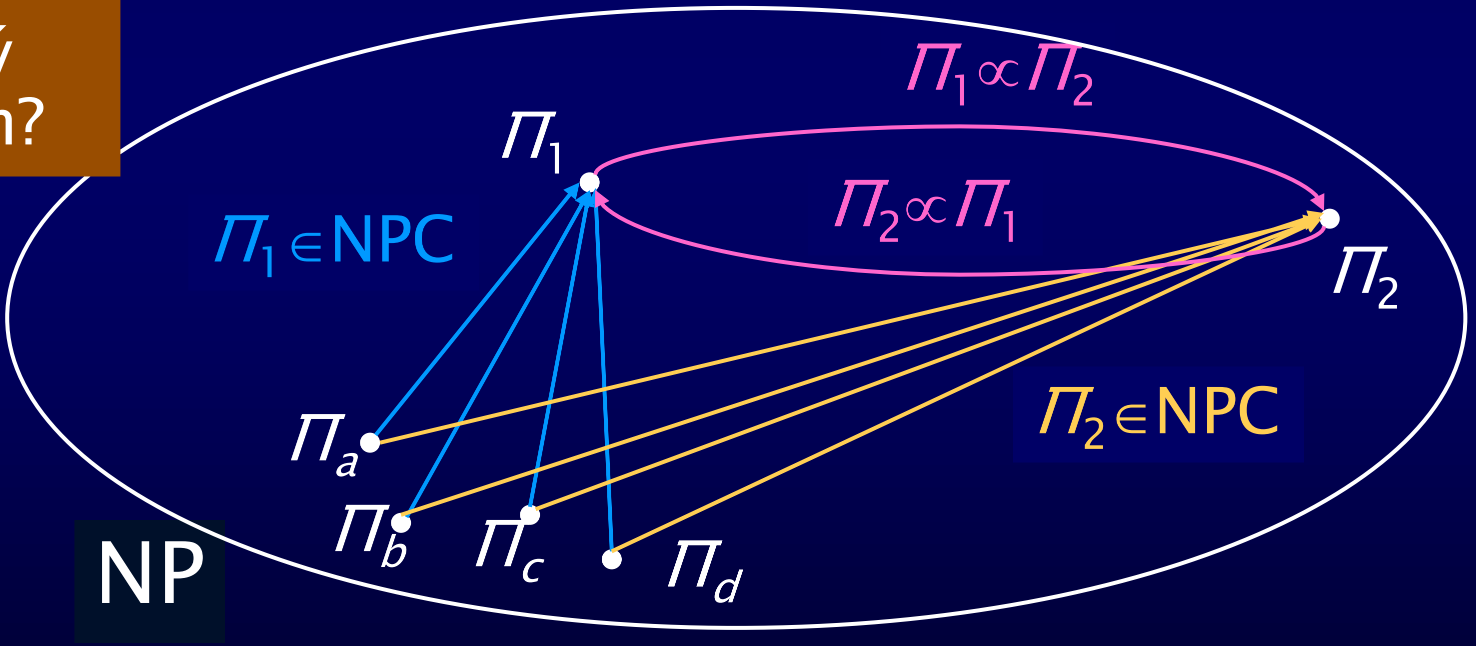


NP–úplný jako třída ekvivalence

- Všechny NPC problémy tvoří třídu ekvivalence
- $\Pi_1, \Pi_2 \in$NPC ($\Rightarrow \Pi_1 \in$NP, $\Pi_2 \in$NP)
- $\Pi_1 \propto \Pi_2$ (protože $\Pi_1 \in$NP, $\Pi_2 \in$NPC)
- $\Pi_2 \propto \Pi_1$ (protože $\Pi_2 \in$NP, $\Pi_1 \in$NPC)

Q.e.d.

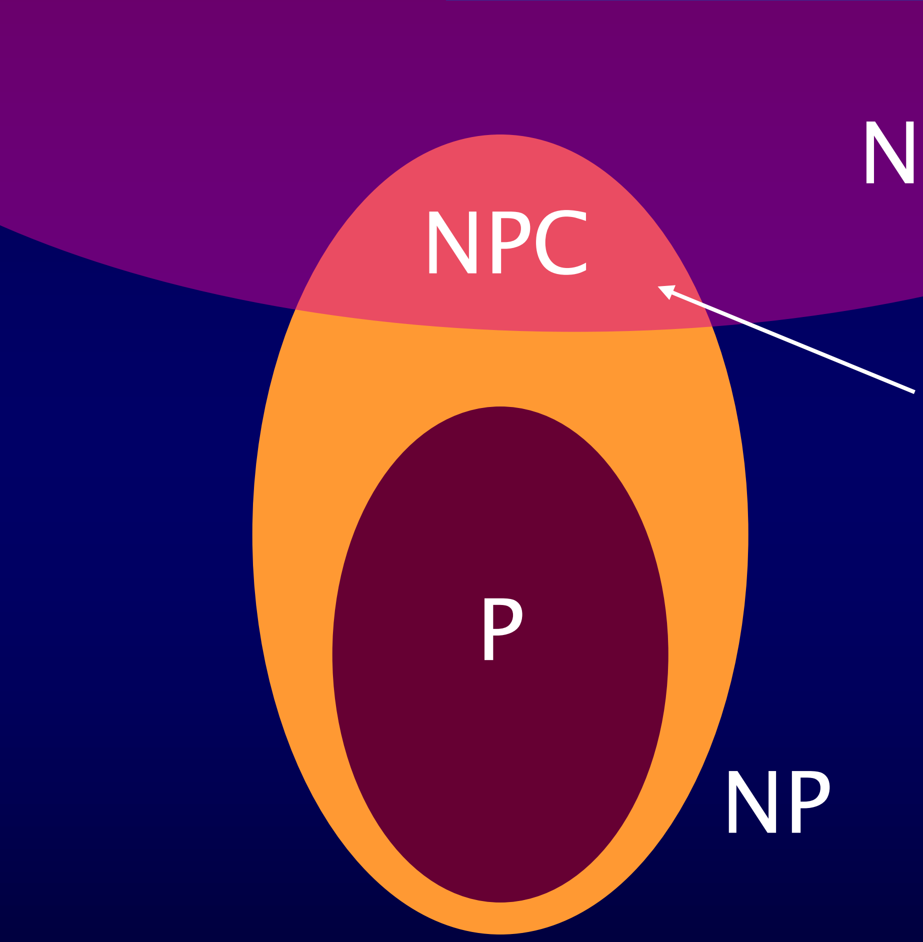
existuje vůbec nějaký NPC problém?



Cookova věta a důsledky

- SAT je NP-úplný
- říká, že NPC není prázdná
- otevírá cestu k důkazům NP-úplnosti převodem
- jsou známy tisíce NPC problémů
- které tvoří třídu ekvivalence
- polynomiální program na jeden $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ polynomiální program na všechny
- nevypadá to, že by P=NP…

P, NP, NPC (a NPH)



vzájemně převoditelné, nejtěžší problémy v NP

Osnova důkazu

SAT$\in$NP

SAT$\in$NPC ?

$\forall \Pi \in$ NP, $\Pi \propto$ SAT

každou instanci *I*
každého problému Π
převést na booleovskou formuli

v polynomiálním čase

I má výstup „ano“ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ formule je splnitelná

Důsledky $\Pi \in \mathrm{NP}$, $I \in \Pi_{\mathrm{ANO}}$

- Existuje program M pro Turingův stroj, který kontroluje certifikát Y instance I v čase $p(n)$, kde p je polynom a n velikost instance I a skončí ve stavu q_{ANO}.
- Velikost certifikátu je nejvýše $p(n)$.
- Rozsah políček pásky je $-p(n) \ldots p(n)+1$.

Konstruovaná formule

- Jestliže $I \in \Pi_{\mathrm{ANO}}$, pak formule, která vyjadřuje výrok „proběhl výpočet stroje *M*, který se zastavil ve stavu q_{ANO}“ má ohodnocení proměnných, při kterém nabývá hodnoty true.
- „Náhrada naprogramovaného počítače kombinačním obvodem“
- Musí obsahovat
  - vlastnosti Turingova stroje
  - program *M*
  - výsledek „ano“

Celkový stav Turingova stroje

- Stav řídícího automatu
- Obsah všech políček pásky
- Pozice hlavy na pásce

Výpočet Turingova stroje

- Posloupnost celkových stavů v čase 0…t, kde t je celkový čas výpočtu
- $\rightarrow$ proměnné formule

Proměnné formule

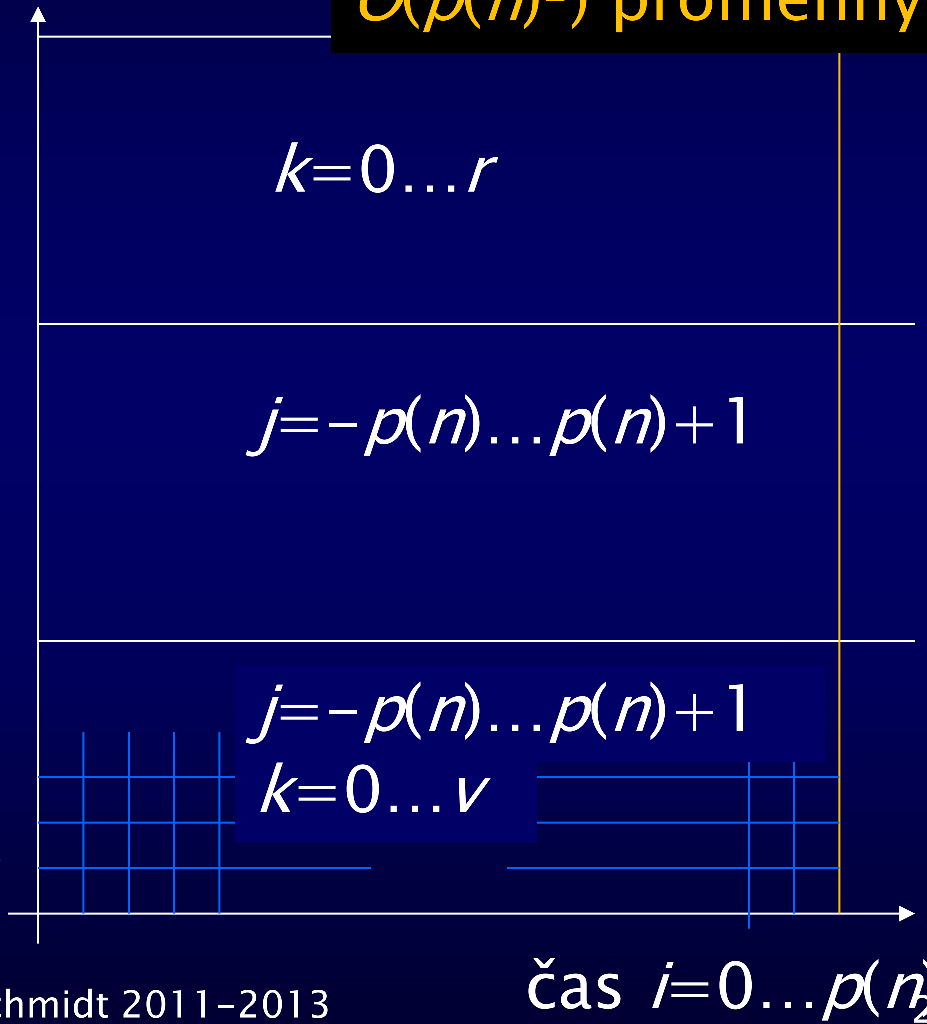
r…počet stavů; v…počet symbolů abecedy pásky

$O(p(n)^2)$ proměnných

$Q[i, k]$
v čase i je M ve stavu q_k

$H[i, j]$
v čase i je hlava na políčku j

$S[i, j, k]$
v čase i je obsah políčka j symbol s_k



Klauzule formule

musí být splněny současně (součin)

počítá to jako Turingův stroj

v každém čase i, řízení je v právě jednom stavu

v každém čase i, hlava je na právě jednom políčku

v každém čase i, každé políčko obsahuje právě jeden symbol

v čase 0, celkový stav je inicializován

výstup je „ano“

v čase $p(n)$, řízení je ve stavu q_{ANO}

program

v každém čase i, celkový stav je výsledkem aplikace přechodové funkce δ na předchozí celkový stav

Ukázky konstrukce některých skupin

v každém čase *i*, řízení je v právě jednom stavu

… v nejvýše jednom stavu

… v alespoň jednom stavu

$\neg(\ Q[i,0]\,.\,Q[i,1]\ ) =$
$= (\neg Q[i,0] + \neg Q[i,1]\ )$

$(\neg Q[i,j] + \neg Q[i,j']\ )$

$i=0\ldots p(n) \quad j=-p(n)\ldots p(n)+1$

$j'=j+1\ldots p(n)+1$

$(\ Q[i,0] + Q[i,1] + \ldots + Q[i,r]\ )$

$i=0\ldots p(n) \quad k=0\ldots r$

Ukázky konstrukce některých skupin

v každém čase i, celkový stav je výsledkem aplikace přechodové funkce δ na předchozí celkový stav

když hlava není na políčku j, obsah se nezmění

$$(\neg S[i, j, l] + H[i, j] + S[i+1, j, l])$$

$$i=0 \dots p(n) \quad j=-p(n) \dots p(n)+1 \quad l=0 \dots$$

$$a \Rightarrow b = \neg a + b$$

$$(\neg H[i, j] + \neg Q[i, k] + \neg S[i, j, l] + H[i+1, j+\Delta])$$

$$(\neg H[i, j] + \neg Q[i, k] + \neg S[i, j, l] + Q[i+1, k'])$$

$$(\neg H[i, j] + \neg Q[i, k] + \neg S[i, j, l] + S[i+1, j, l'])$$

$$i=0 \dots p(n) \quad j=-p(n) \dots p(n)+1 \quad l=0 \dots \quad k=0 \dots r$$

Polynomiální složitost

- Ukázat, že velikost výsledné formule F je polynomiální s n – velikostí původní instance
- velikost formule s množinou C klauzulí nad množinou X proměnných: $|X|.|C|$
- r, v … konstantní pro daný problém Π
- $|X| = O(p(n)^2)$ $|C| = O(p(n)^2)$
- $|F| = O(p(n)^4)$

Osnova důkazu

SAT $\in$NP

vyhodnocení $\in$P

SAT$\in$NPC ?

$\forall \Pi \in$NP, $\Pi \propto$ SAT

každou instanci *I* každého problému *Π* převést na booleovskou formuli *V*

v polynomiálním čase *V*

I má výstup „ano“ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ formule je splnitelná *V*

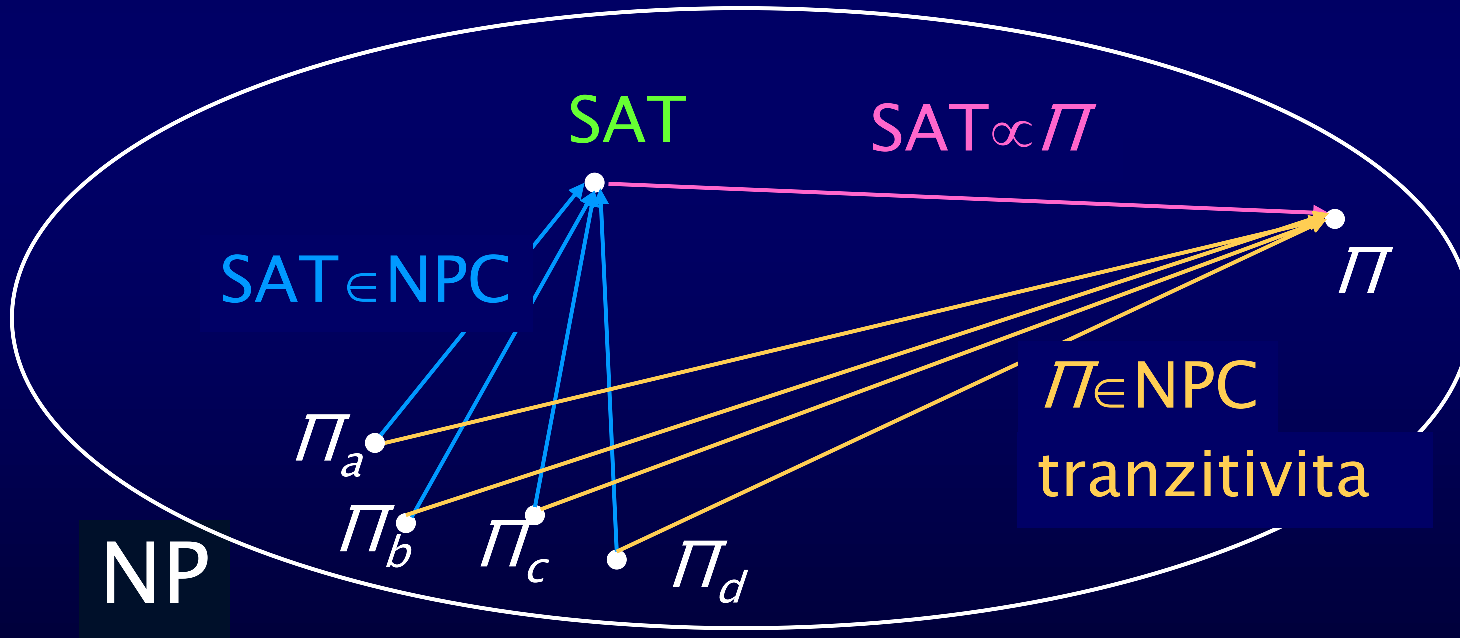
SAT$\in$ NPC
Q. e. d.

UF...

Dokazování NP-úplnosti Π

- Z definice
- $\Pi' \in$ NPC je speciálním případem Π
- $\Pi \in$ NP, $\exists \Pi' \in$ NPC, $\Pi' \propto \Pi \Rightarrow \Pi \in$ NPC
  $\Pi \in$ NP, SAT $\propto \Pi \Rightarrow \Pi \in$ NPC

lehce nepraktické, že



Na počátku je SAT…

… a takto to bylo dál

SAT

3-SAT

trojná svatba

3D MATCHING

uzlové pokrytí

VERTEX COVER

problém rozkladu

PARTITION

klika

CLIQUE

Hamiltonova kružnice

HC

problém batohu

KNAPSACK

dnes

TSP

Bestiarium

- 3-SAT: každá klauzule má právě 3 literály
- Trojná svatba:
  - dány disjunktní množiny W, X, Y, $|W|=|X|=|Y|=q$, množina $M \subseteq W \times X \times Y$;
  - existuje $M' \subseteq M$ taková, že $|M'|=q$ a žádné dva prvky M' se neshodují ani v jedné souřadnici?
- Uzlové pokrytí:
  - dán graf $G=(V,E)$, celé číslo $K \leq |V|$;
  - existuje $V' \subseteq V$ taková, že $|V'| \leq K$ a $\forall (u,v) \in E$, $u \in V'$ nebo $v \in V'$?

Bestiarium

- Klika: („politická klika“)
  - dán graf $G=(V,E)$, celé číslo $K\leq|V|$;
  - existuje úplný podgraf $G'=(V',E')$ grafu G takový, že $|V'|\geq K$?
- Problém rozkladu:
  - dána množina $A=\{a_1, \ldots ,a_n\}$ a funkce $s: A\rightarrow Z^+$;
  - existuje podmnožina $A'\subseteq A$ taková, že

$$\sum_{a\in A'} s(a) = \sum_{a\in A-A'} s(a)$$

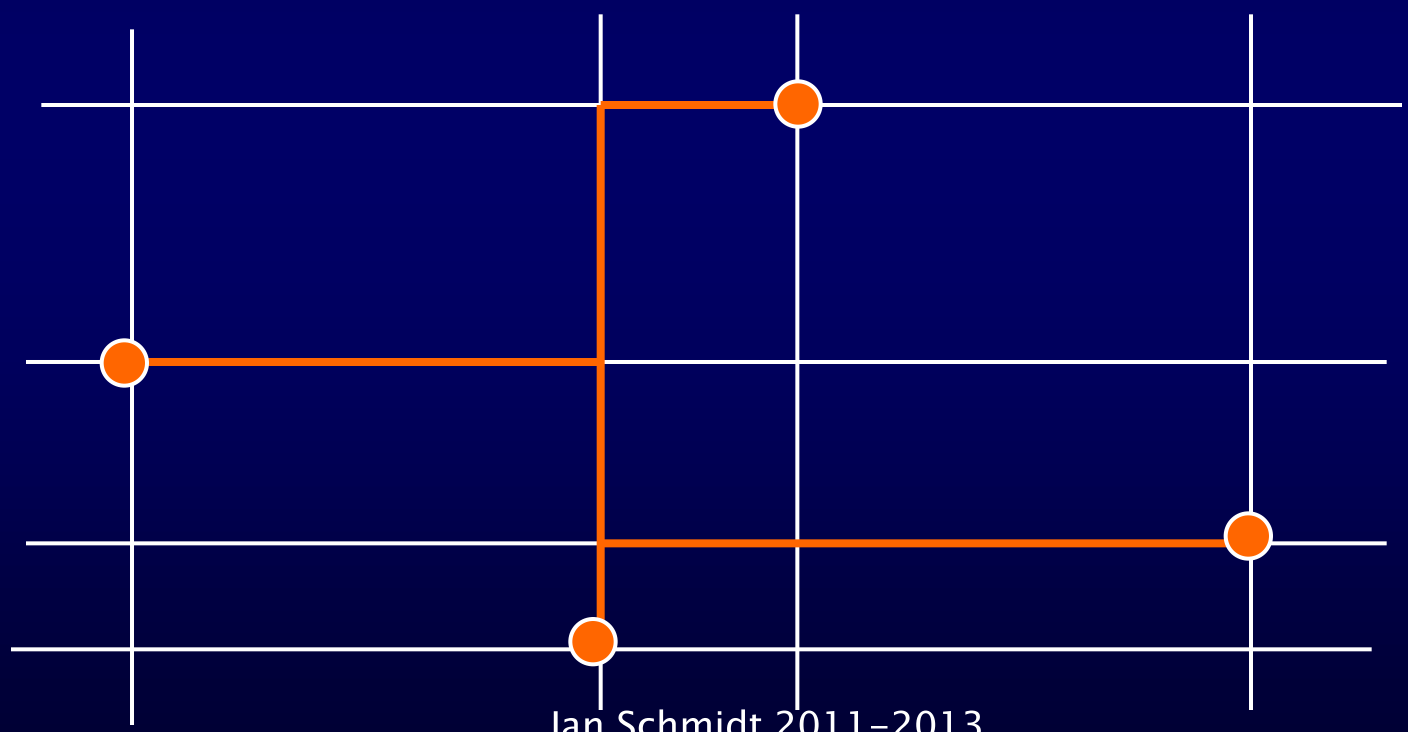
(rozklad na podmnožiny se stejnou cenou)

Bestiarium

- Steinerův problém
  - dán graf $G=(V,E)$
  - dána podmnožina $V' \subseteq V$
  - sestrojit minimální souvislý podgraf $H=(W,F)$ takový, že $V' \subseteq W$.
- Mnoho variant na speciálních grafech

Bestiarium

- Steinerův problém v pravoúhlé metrice



Bestiarium

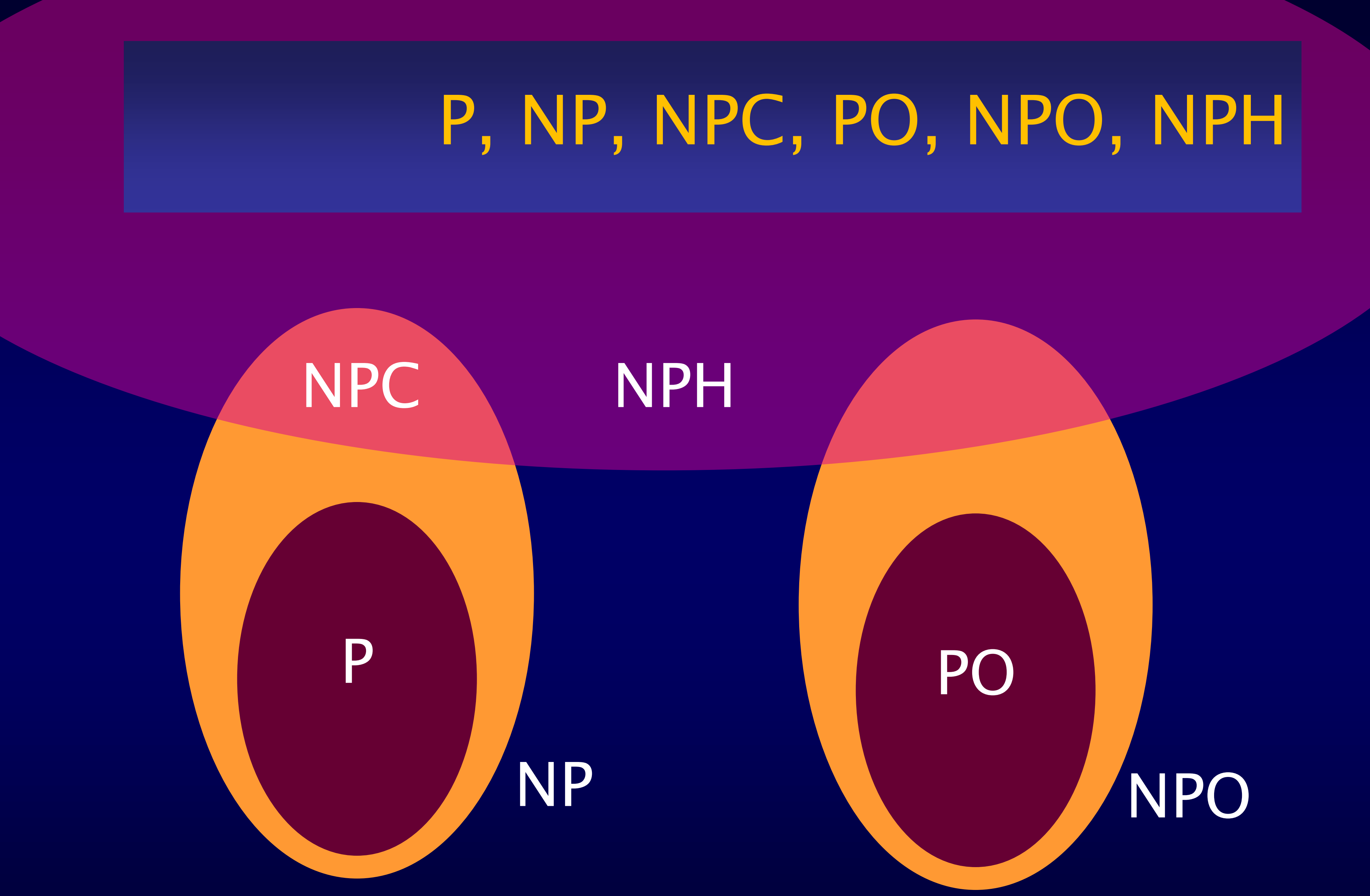
Problém plánování (jeden z mnoha)

- Dána množina T operací o jednotkové době trvání, dále je dáno částečné uspořádání $<$ na T a maximální doba výpočtu $D \in Z^+$.
  Existuje takový plán δ: $T \rightarrow \{0, 1, \ldots D\}$ že
  - v každém okamžiku z $\{0, 1, \ldots D\}$ je naplánováno nejvýše m operací a
  - je-li $t_i < t_j$ pak $\delta(t_i) < \delta(t_j)$
- Úloha je NP-těžká; je-li však $<$ zobrazitelné množinou stromů, je polynomiální.

Smečka bestií jménem SAT

F		
obecná	SAT $\exists\ Y, F(Y) = 1$ je NP–úplný	tautologie $\forall\ Y, F(Y) = 1$ je co–NP úplný
omezená	SAT $\exists\ Y, CNF(Y) = 1$ je NP–úplný	tautologie $\forall\ Y, DNF(Y) = 1$ je co–NP úplný
obecná	QBF_k $\exists Y_1 \forall Y_2 \exists Y_3 \ldots,$ $F(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots) = 1$ je Σ_k^{P}–úplný	co–QBF_k $\forall Y_1 \exists Y_2 \forall Y_3 \ldots,$ $F(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots) = 1$ je Π_k^{P}–úplný

P, NP, NPC, PO, NPO, NPH



Turingova redukce (Turingova transformace)

- Definice Turingovy redukce
  Rozhodovací problém Π_1 je Turing-redukovatelný na Π_2 ($\Pi_1 \underline{\propto} \Pi_2$), jestliže existuje program pro (deterministický) Turingův stroj, který řeší každou instanci I_1 problému Π_1 tak, že používá program M_2 pro problém Π_2 jako podprogram (jehož trvání považujeme za jeden krok).
- Pozor: obecně se nevyžaduje, aby Turingova redukce proběhla v polynomiálním čase. Pro naše účely to musíme říkat explicitně (… *Turing-redukovatelný v polynomiálním čase …)*

Třída NP-těžký
(NP-Hard, NPH)

- Definice (třída NP-těžký):
  Problém Π je NP-těžký, jestliže pro všechny problémy $\Pi' \in$ NP, $\Pi' \underline{\propto} \Pi$ v polynomiálním čase.
- Karpova redukce je speciálním případem Turingovy redukce (volání podprogramu jednou, přímé použití výsledku)
- NPC $\subset$ NPH

Rozhodovací (TS) a optimalizační (TSO) verze TSP

v poly čase $\underline{\propto}$ A

$$\mathrm{TS} \rightarrow \mathrm{TSO}$$

$$\mathrm{TS} \leftarrow \mathrm{TSO}$$

$\underline{\propto}$ B

existuje túra délky nejvýše *B*?

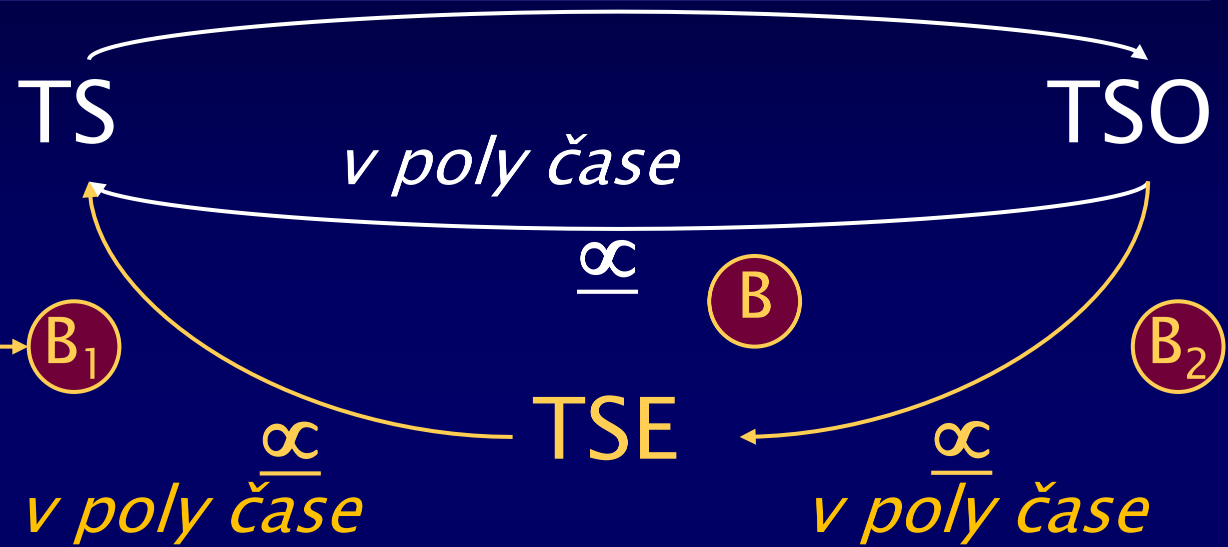
v poly čase

zkonstruovat nejkratší túru

A
- spočítat nejkratší túru pomocí TSO
- porovnat

Turingova redukce

- TSE $\in$ NP
- TS $\in$ NPC
- TSE $\propto$ TS
- TSE $\underline{\propto}$ TS



TSE: Dána množina n měst $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Pro každá dvě města c_i, c_j je dána vzdálenost $d(c_i, c_j)$. Dále dána mez B a cesta Θ procházející K městy. Dá se Θ prodloužit na túru délky nejvýše B?

TSE: Dána množina n měst $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, vzdálenost $d(c_i, c_j)$. Dále mez B a cesta Θ procházející K městy. Dá se Θ prodloužit na túru délky $\leq B$?

TSO $\underline{\propto}$ TSE

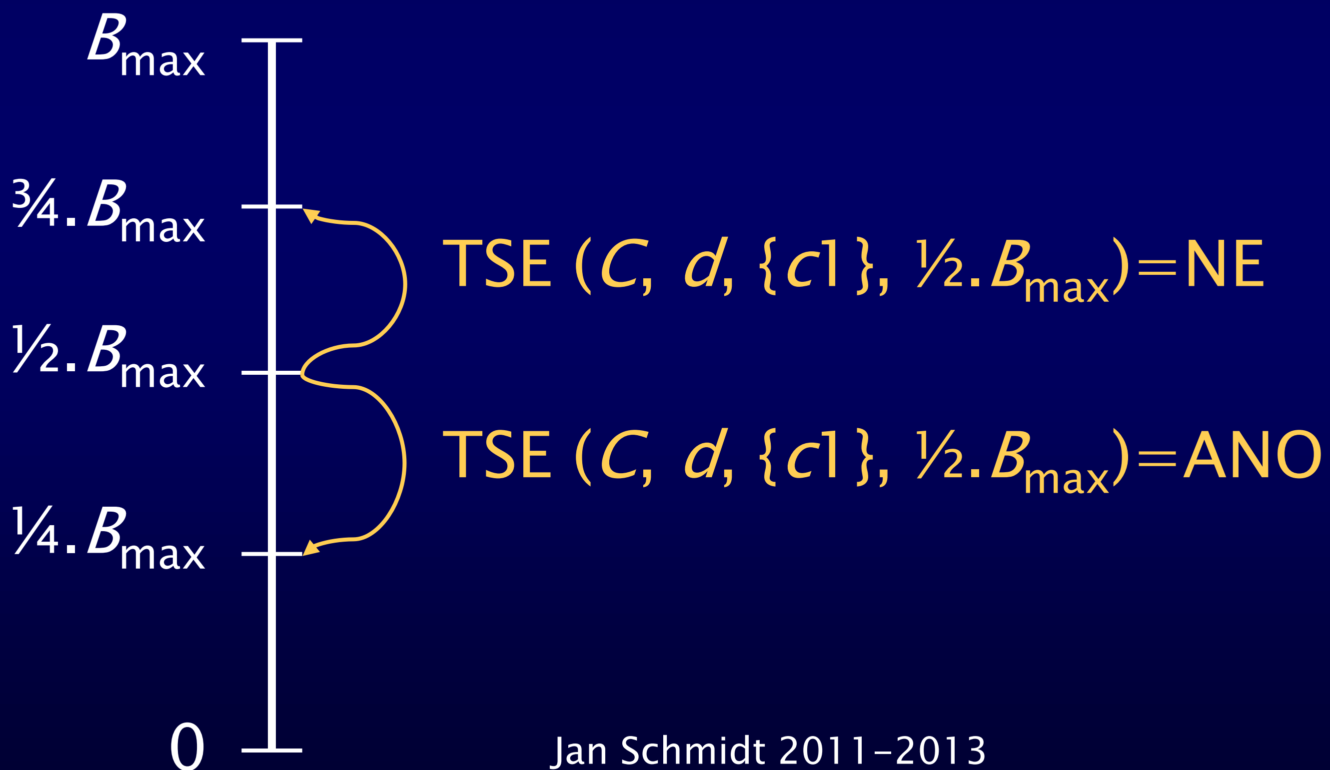
B₂

- Víme, že $B_{min} = n$, $B_{max} = n.\max\{d(ci, cj)\}$
- Velikost instance měřme $N = n + \log_2 B_{max}$
- Nechť existuje program TSE (C, d, Θ, B). Jak pomocí něj vyřeším TSO?
- 1. Určím B^* pomocí $\log_2 B_{max}$ volání TSE (C, d, $\{c_1\}$, B).
- 2. Určím další město k C_1 pomocí TSE (C, d, $\{c_1, c_i\}$, B^*).
- 3. Opakuji, až určím celou kružnici

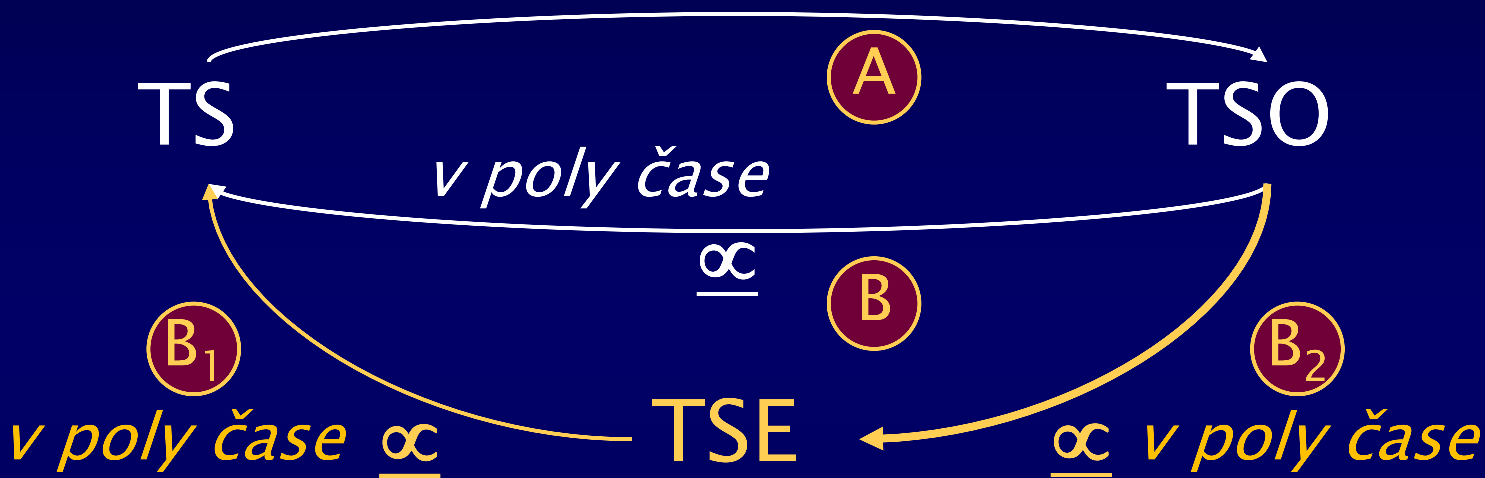
$$\boxed{O(\log_2 B_{max}) + O(n^2) = O(N^2)}$$

K předchozímu důkazu

1. Určím B^* pomocí $\log_2 B_{max}$ volání TSE (C, d, $\{c_1\}$, B).

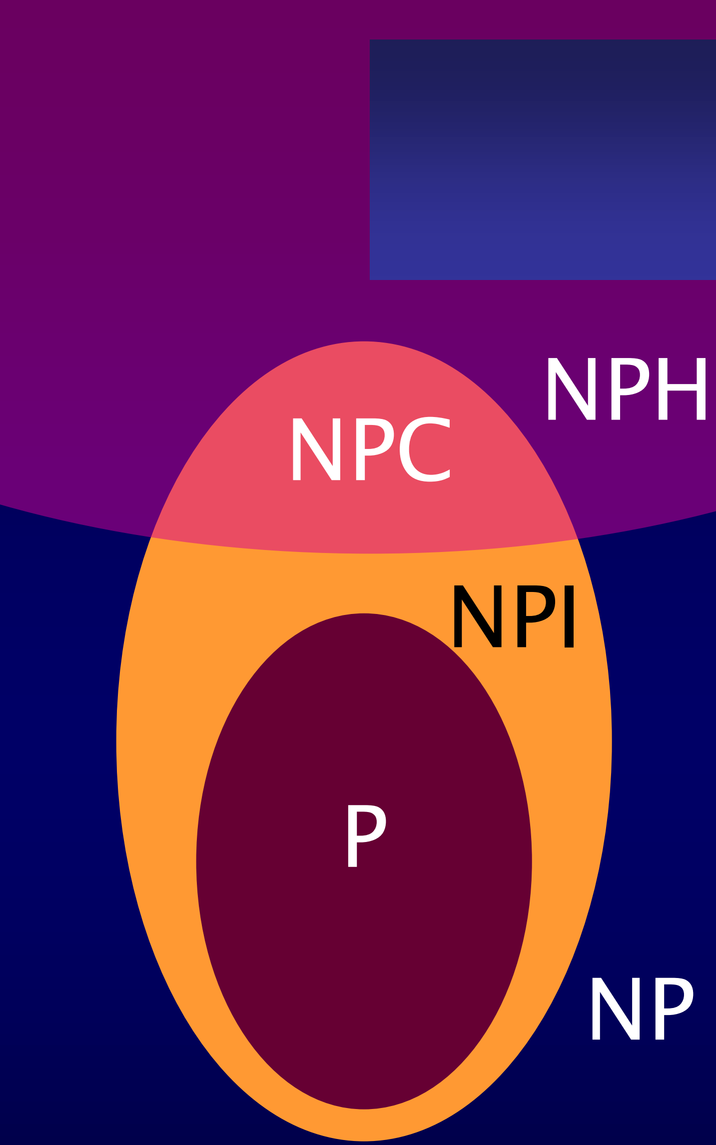


TS a TSO



TS a TSO jsou Turing-ekvivalentní
a tedy stejně těžké.

NP-intermediate (NPI)



- NPI: problémy, které nemohou mít polynomiální algoritmus ani na ně nikdy nemůže být převeden SAT, pokud $P \neq NP$
- NP–P–NPC: problémy, pro které ani neumíme nalézt polynomiální algoritmus, ani na ně převést SAT.

Např. izomorfismus grafů, do r. 2004 také test prvočíselnosti

NPI není prázdná

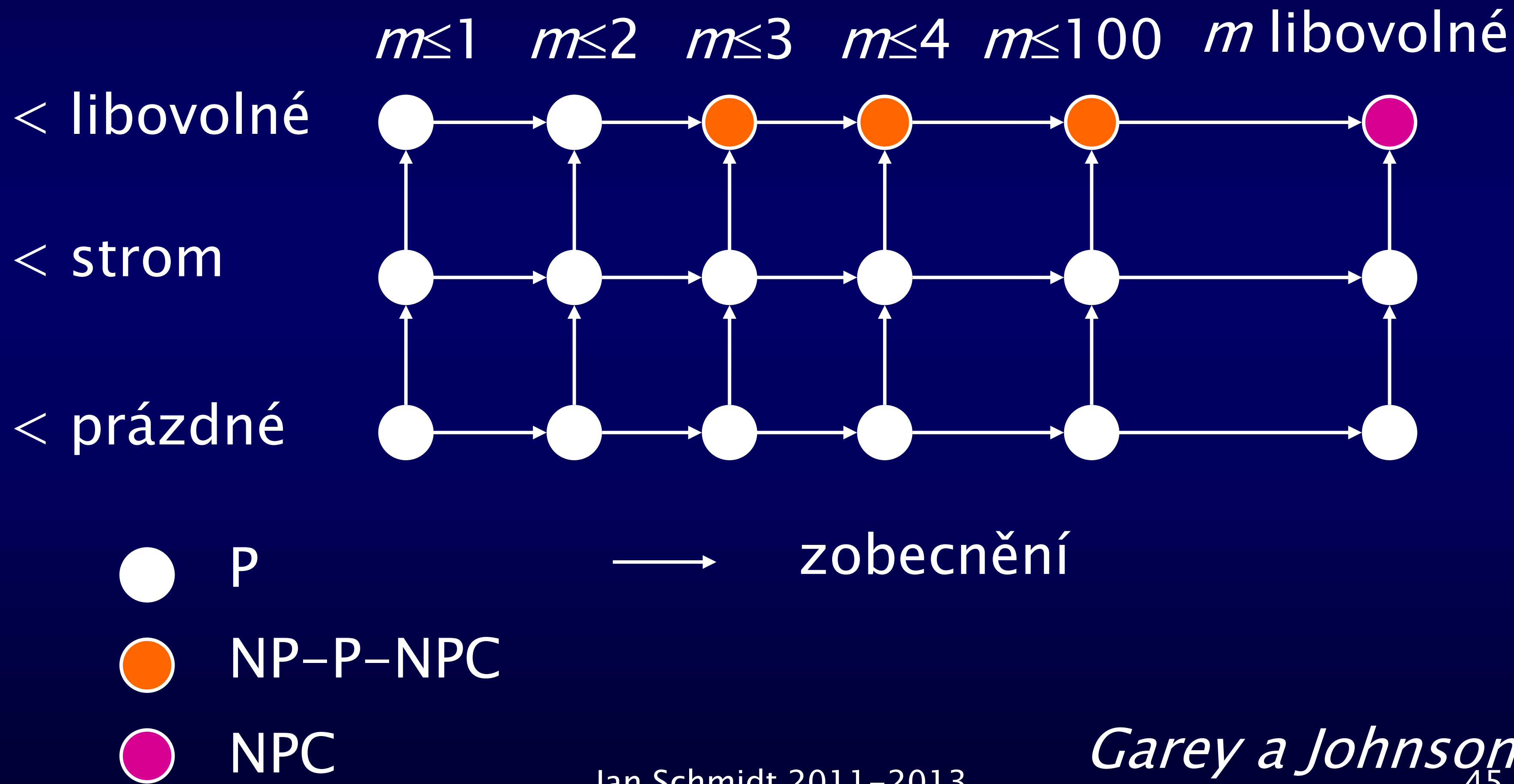
- Důsledek obecnější věty (Ladner 1975):
- Nechť *Π* je NP-úplný problém a *I* množina jeho instancí. Pak existuje podmnožina *I'* jeho instancí, rozpoznatelná polynomiálním algoritmem taková, že problém *Π'* vzniklý omezením *Π* na *I'* není ani NPC, ani P.
- Příklad: musí existovat množina grafů, pro kterou HC není ani NPC, ani P.
- Zatím nalezeny jen zcela „nepřirozené“ případy

Kandidát NPI: isomorfismus grafů

BI-GRA 1

- Dány grafy $G = (V,E)$ a $H = (W,F)$.
- Existuje prosté zobrazení f: $V \rightarrow W$ takové, že pro každé $u,v \in V$ platí $(u,v) \in E$ právě tehdy, když $(f(u), f(v)) \in F$?
- Pokud by tento problém byl NPC, polynomiální hierarchie by zkolabovala (minulá přednáška)

Otevřené verze problémů: problém plánování



Garey a Johnson

Čemu teď rozumíme

Co to znamená „úplnost" problému v nějaké třídě.

Jak srovnáme dva rozhodovacíproblémy co do obtížnosti (základní kámen teorie složitosti)

Co musíme dokázat, abychom algoritmus prohlásili za Karpovu redukci

Jak můžeme dokázat, že problém je NP-úplný

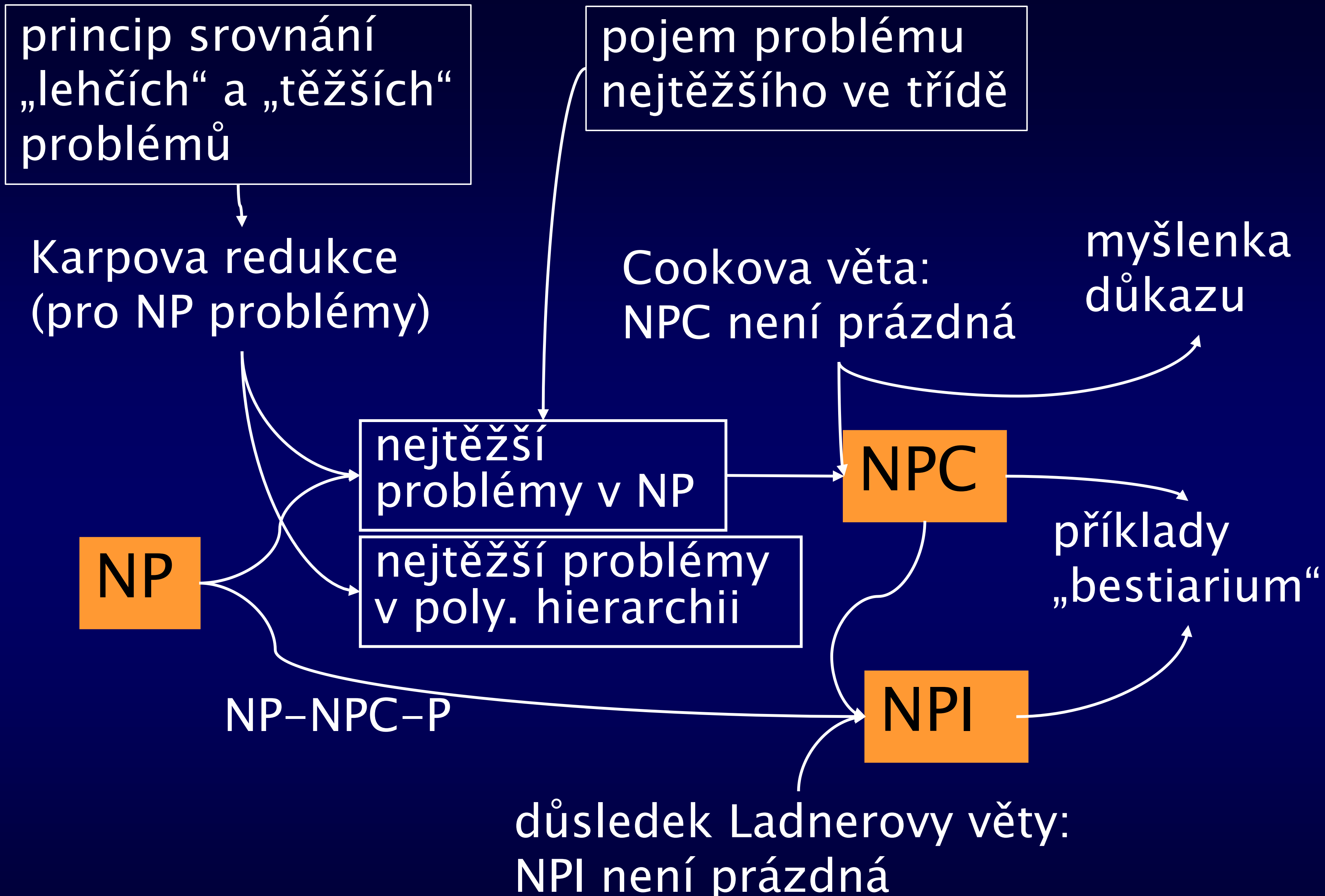
Jak funguje Turingova redukce

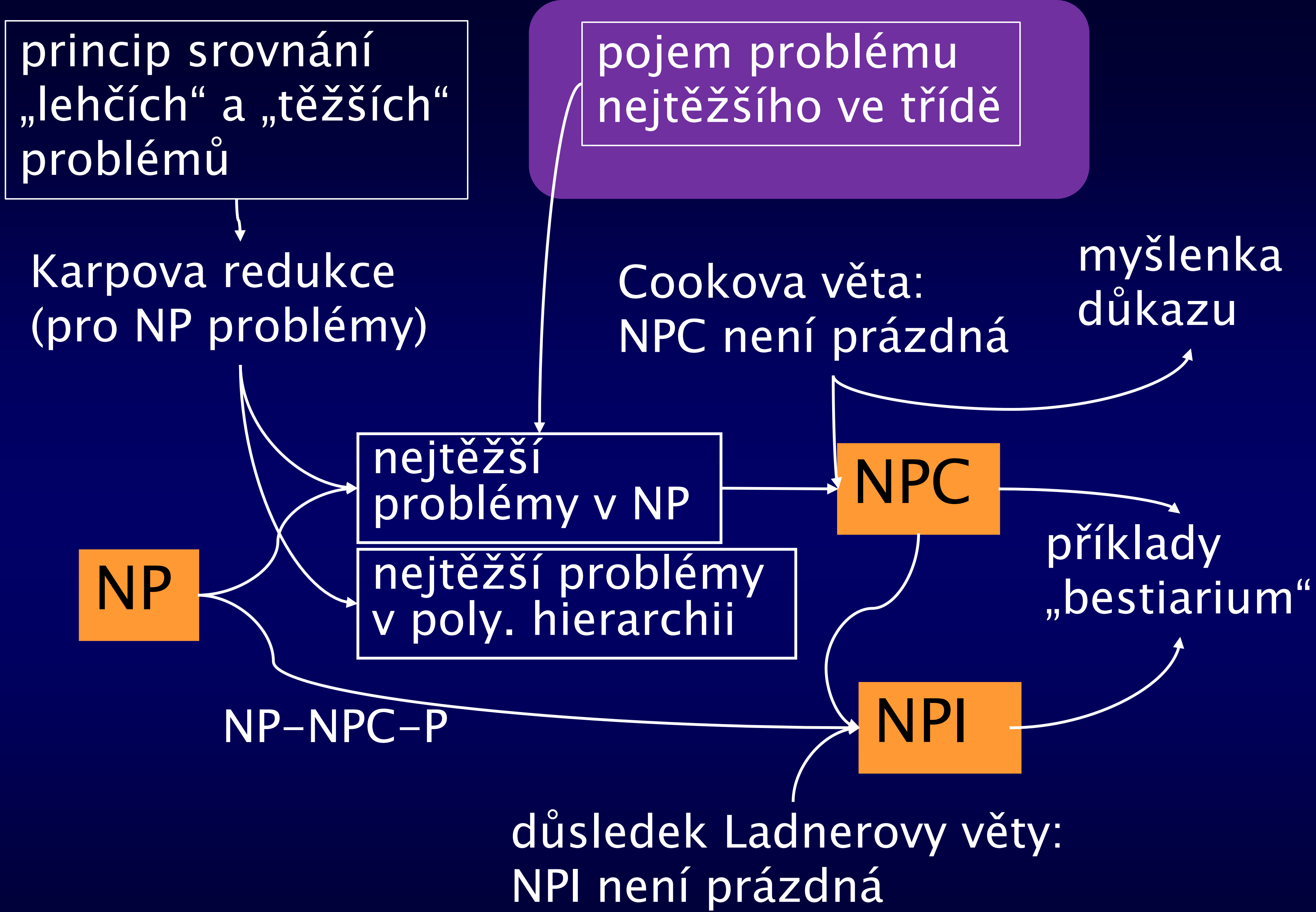
Jak dokážeme, že problém mimo NPO je aspoň tak těžký jako NPC problémy

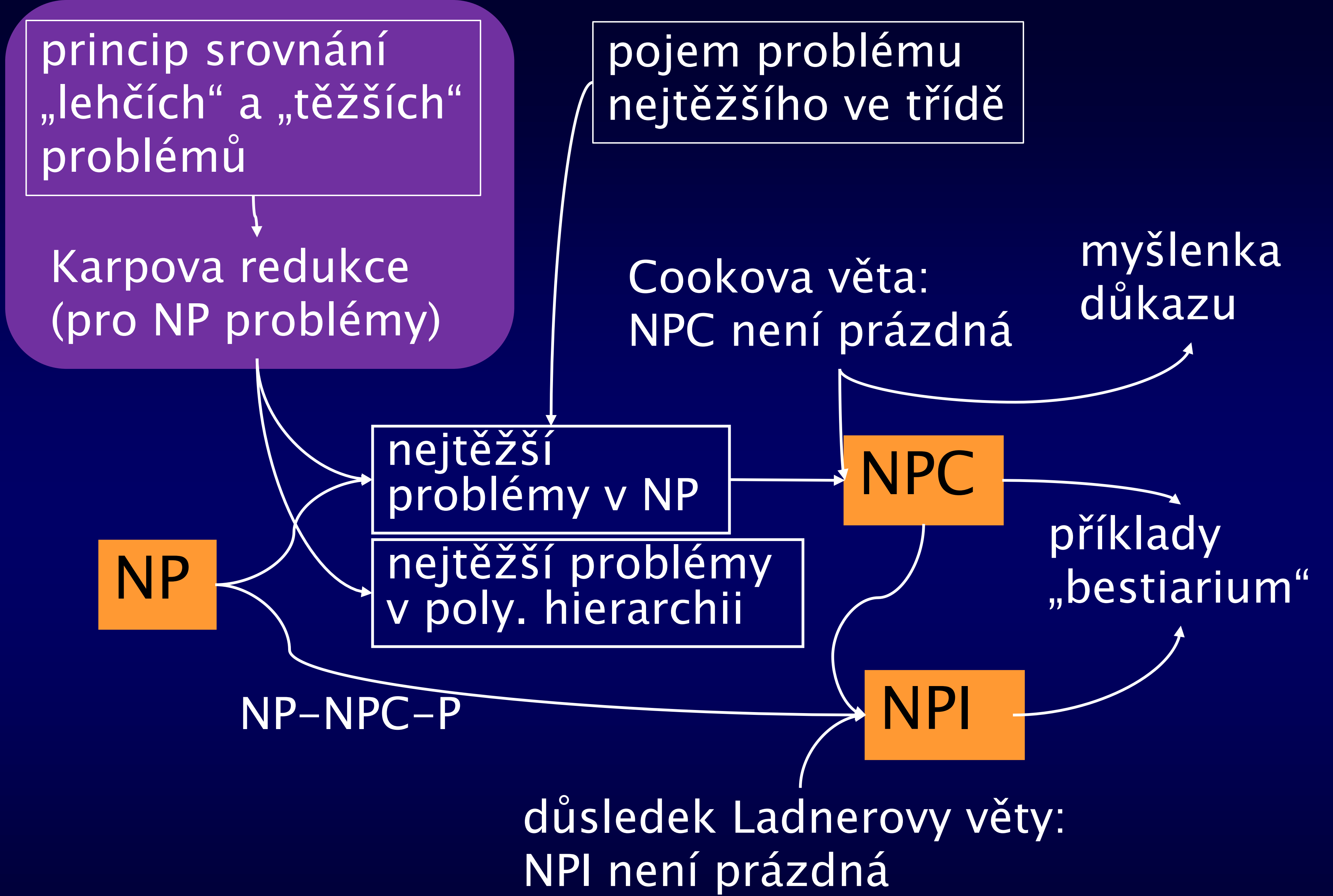
Jaké pojmy k tomu potřebujeme

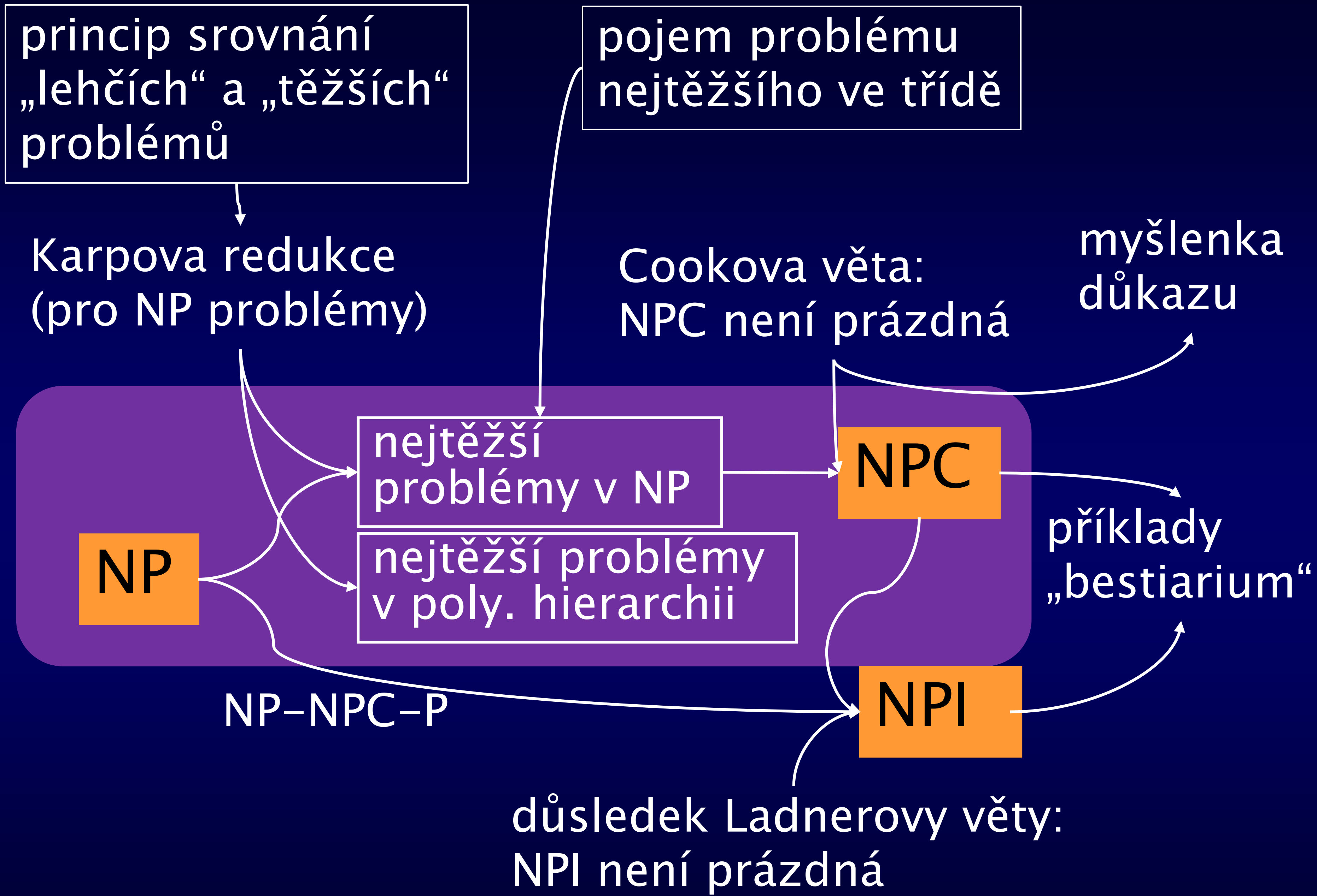
Karpova redukce, Turingova redukce

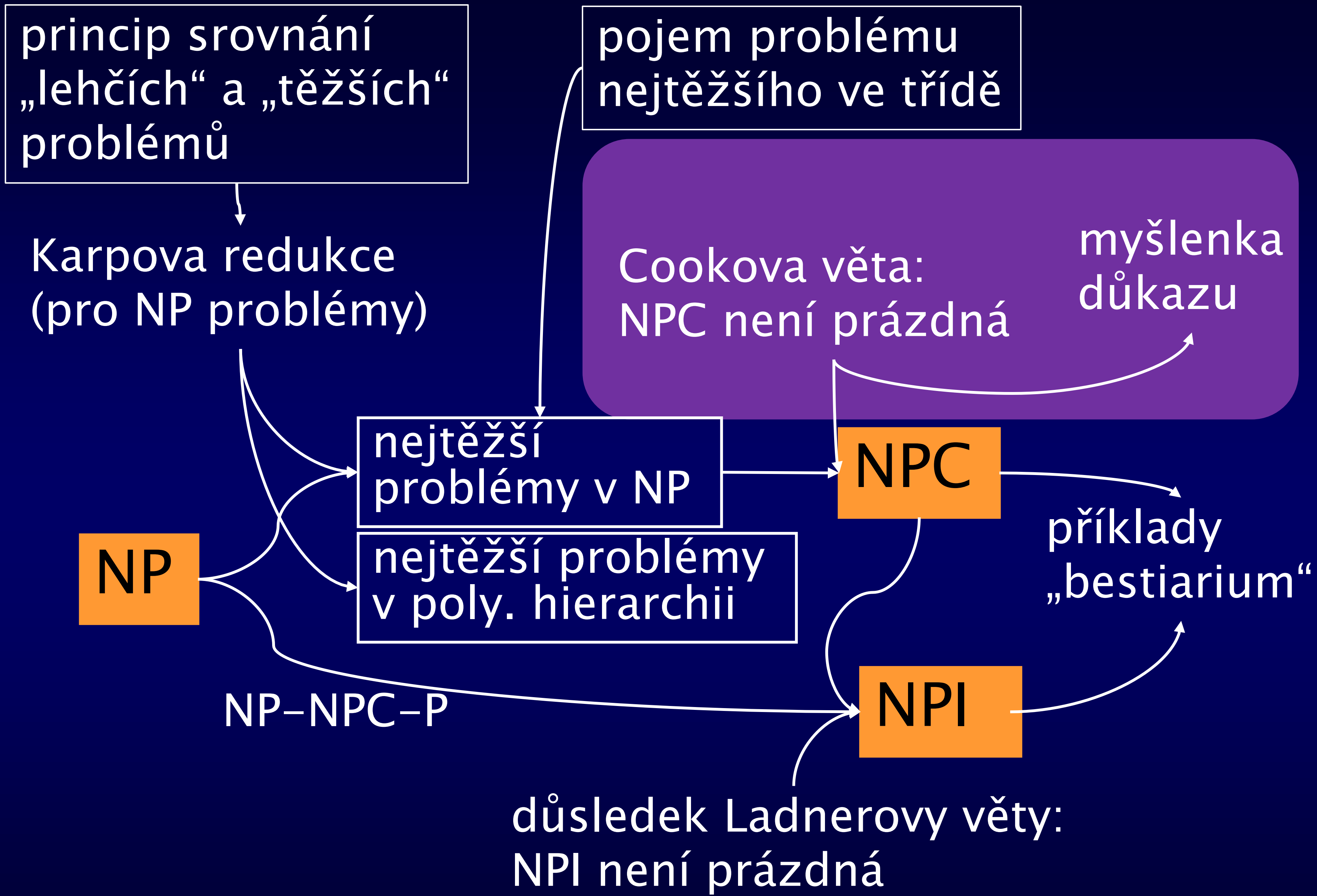
třídy: NPC, NPH, NPI

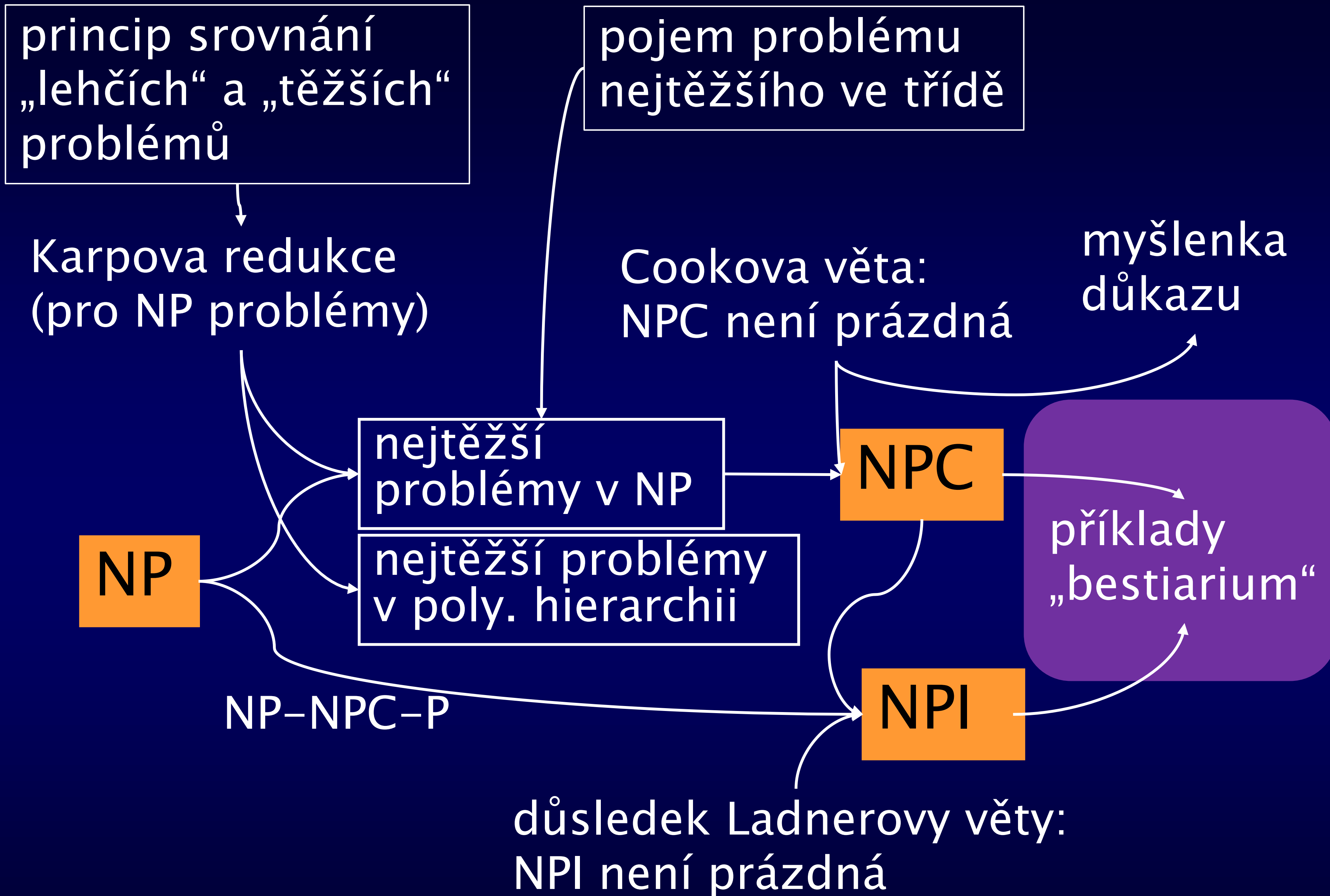

princip srovnání „lehčích“ a „těžších“ problémů
pojem problému nejtěžšího ve třídě
Karpova redukce (pro NP problémy)
Cookova věta: NPC není prázdná
myšlenka důkazu
nejtěžší problémy v NP
NPC
NP
nejtěžší problémy v poly. hierarchii
příklady „bestiarium“
NPI
NP–NPC–P
důsledek Ladnerovy věty: NPI není prázdná

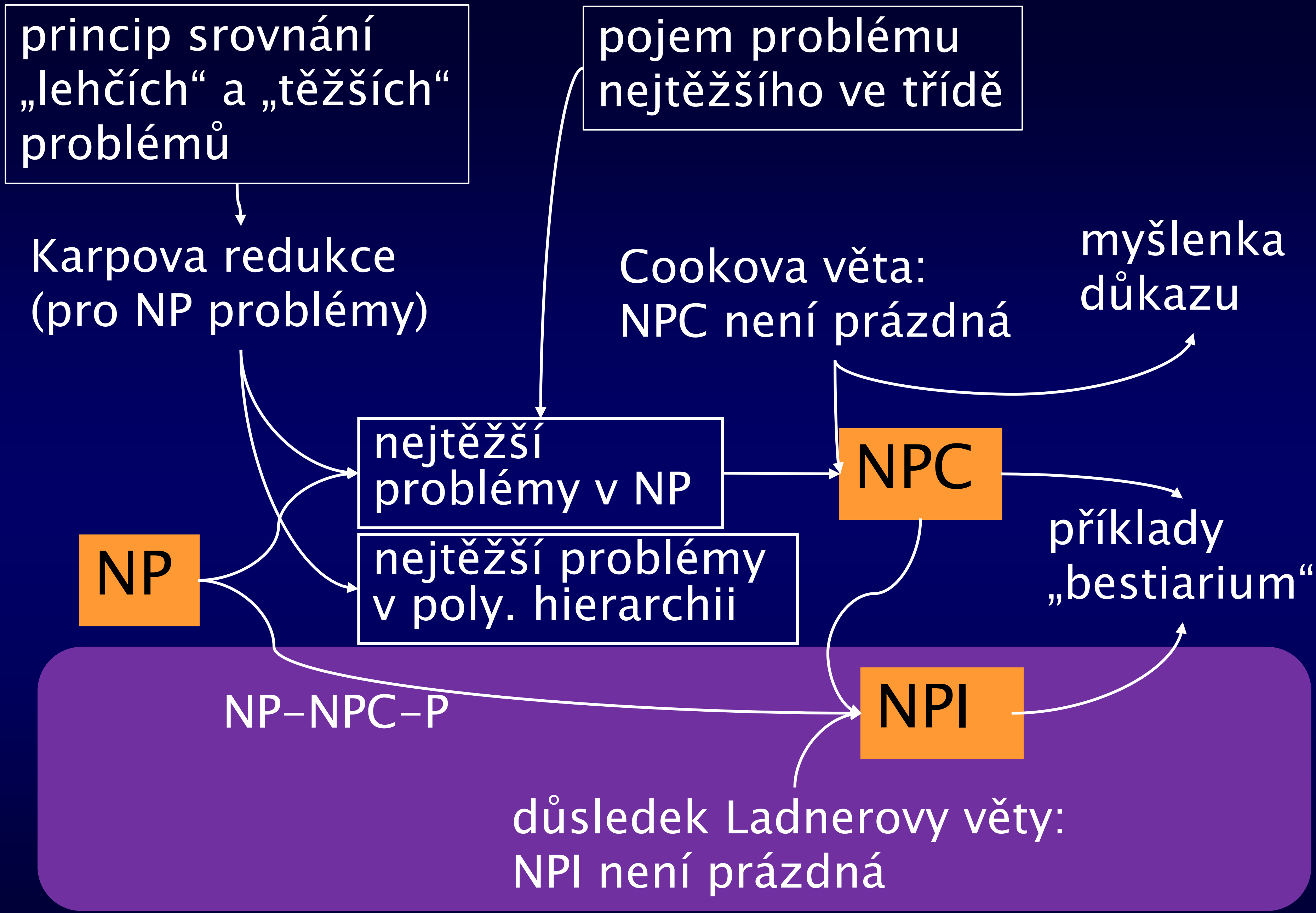

princip srovnání „lehčích“ a „těžších“ problémů
pojem problému nejtěžšího ve třídě
Karpova redukce (pro NP problémy)
Cookova věta: NPC není prázdná
myšlenka důkazu
nejtěžší problémy v NP
NPC
nejtěžší problémy v poly. hierarchii
příklady „bestiarium“
NP
NP–NPC–P
NPI
důsledek Ladnerovy věty: NPI není prázdná


princip srovnání „lehčích“ a „těžších“ problémů
Karpova redukce (pro NP problémy)
pojem problému nejtěžšího ve třídě
Cookova věta: NPC není prázdná
myšlenka důkazu
nejtěžší problémy v NP
nejtěžší problémy v poly. hierarchii
NP
NPC
příklady „bestiarium“
NPI
NP–NPC–P
důsledek Ladnerovy věty: NPI není prázdná


princip srovnání „lehčích“ a „těžších“ problémů
pojem problému nejtěžšího ve třídě
Karpova redukce (pro NP problémy)
Cookova věta: NPC není prázdná
myšlenka důkazu
nejtěžší problémy v NP
NPC
NP
nejtěžší problémy v poly. hierarchii
příklady „bestiarium“
NP–NPC–P
NPI
důsledek Ladnerovy věty: NPI není prázdná


princip srovnání „lehčích“ a „těžších“ problémů
pojem problému nejtěžšího ve třídě
Karpova redukce (pro NP problémy)
Cookova věta: NPC není prázdná
myšlenka důkazu
nejtěžší problémy v NP
nejtěžší problémy v poly. hierarchii
NP
NPC
NPI
příklady „bestiarium“
NP–NPC–P
důsledek Ladnerovy věty: NPI není prázdná


princip srovnání „lehčích“ a „těžších“ problémů
pojem problému nejtěžšího ve třídě
Karpova redukce (pro NP problémy)
Cookova věta: NPC není prázdná
myšlenka důkazu
nejtěžší problémy v NP
NPC
NP
nejtěžší problémy v poly. hierarchii
příklady „bestiarium“
NPI
NP–NPC–P
důsledek Ladnerovy věty: NPI není prázdná


princip srovnání „lehčích“ a „těžších“ problémů
pojem problému nejtěžšího ve třídě
Karpova redukce (pro NP problémy)
Cookova věta: NPC není prázdná
myšlenka důkazu
nejtěžší problémy v NP
NPC
příklady „bestiarium“
NP
nejtěžší problémy v poly. hierarchii
NP−NPC−P
NPI
důsledek Ladnerovy věty: NPI není prázdná