第 1 講　逆三角関数と双曲線関数　--------------------------

1-1 写像と関数

ある集合Xの各元xに対して、ある集合Yの元yが 1 つずつ対応する対応関係があるとき、その対応関係を$X \to Y$の写像という。

このとき、$y = f(x)$のように書き、$X \to Y$の写像fと写像に名前を付けたとする。

(特に、Yが数からなるときはその写像を関数と呼ぶ)

(例)

$$F(a) = 12, F(b) = F(c) = 5$$

$$F(d) = F(e) = 6, F(f) = 0, F(g) = 8$$

(「対応」だが、「写像」でない例)

・$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

㊟ もちろん、$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$はあってもよい。

・定義域、値域

$$B = f(X)$$

・全射・単射・全単射

$Y = f(x)$のとき全射という(上への射像ともいう)。

XのxからYのyへの対応が「一対一対応」なとき、単射という。

・写像fが「全射かつ単射」なとき、fのことを全単射という。
☆fが全単射のとき、「fと逆の対応」もまた、「写像」となる。これを逆写像または、逆関数という。

・逆関数の求め方

$X \to Y$の関数fが全単射であったとき、fの逆関数f^{-1}がとれる。

$$y = f(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$f^{-1}(x) = x$$

時空の断絶

・そこで改めて、逆の function そのものを表すために、それを$f^{-1}(x)$とかくとする。(このxは同じとかあまり考えない。山田君と田中君の田のように…)

(例)

$$f(x) = 2x + 5$$

のとき、

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$\because\ y = 2x + 5$とおくと、

$$x = \frac{y-5}{2}$$

なので、改めて、

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} \quad \cdots \square$$

例題 1-1 非負実数全体で定まる

$$f(x) = x^2 + 1 \quad (x \geqq 0)$$

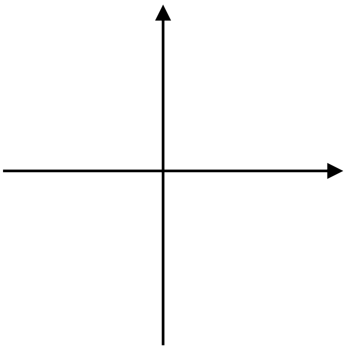
の値域を求め、そこで定まる$f^{-1}(x)$を求めよ。

(解答)

定理

連続かつ単調な関数は単射である。よって、その定義域と値域において、逆関数をもつ。

例 1-1 の場合



例題 1-2

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = A \Leftrightarrow f\colon \text{injection}$$

(証明)

1-3 三角関数と逆三角関数

・三角関数

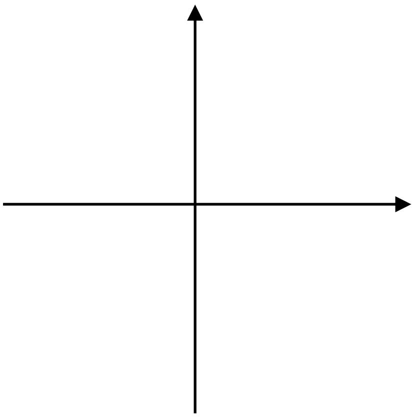
XY平面上の単位円$X^2+Y^2=1$上の動点$P(X,Y)$に対して、X軸正方向から$\overrightarrow{OP}$方向への反時計廻りの回転角をxとして、

$$\begin{cases}\cos x = X \\ \sin x = Y\end{cases}$$

とかくことにする。とくに$X \neq 0$のとき、

$$\tan x = \frac{Y}{X}$$

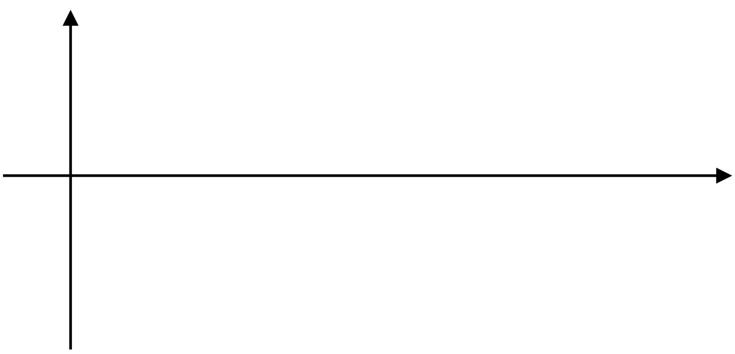
と定める。



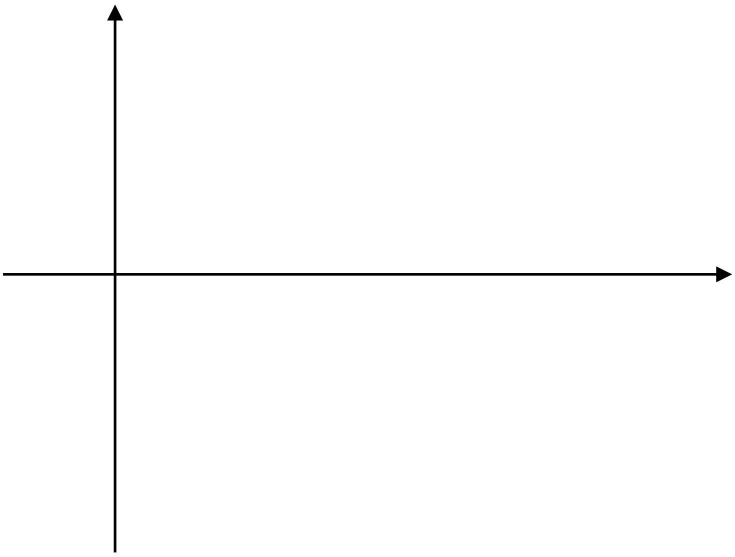
・三角関数のグラフ

① $y=\sin x$

② $y=\cos x$

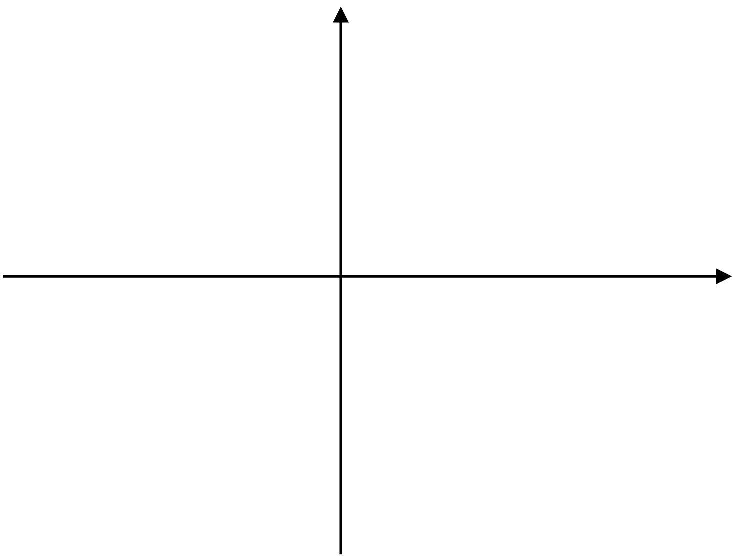


③ $y = \tan x$

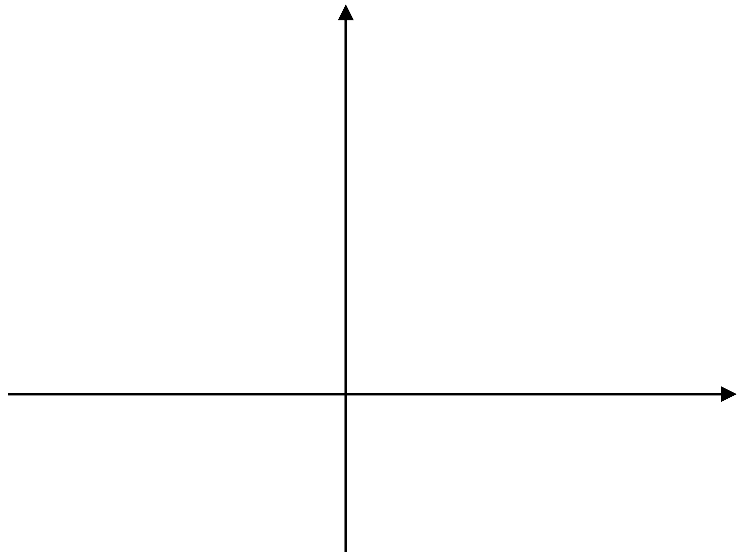


・逆三角関数

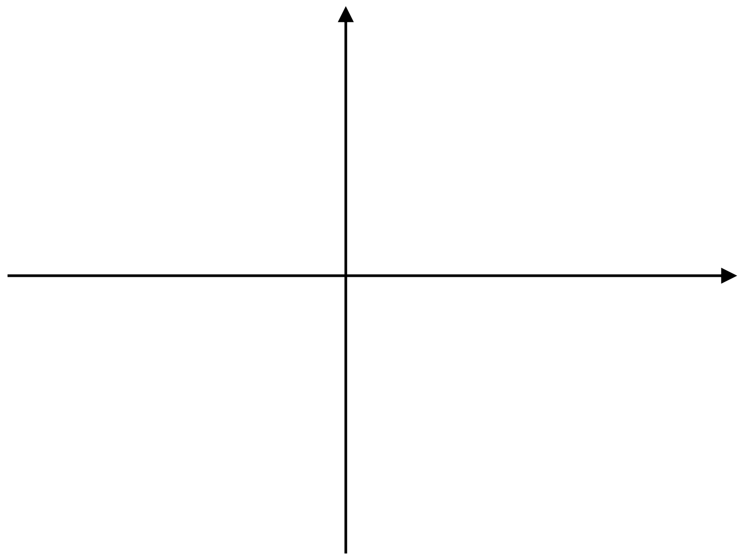
① $y = \sin^{-1} x$



② $y = \cos^{-1} x$



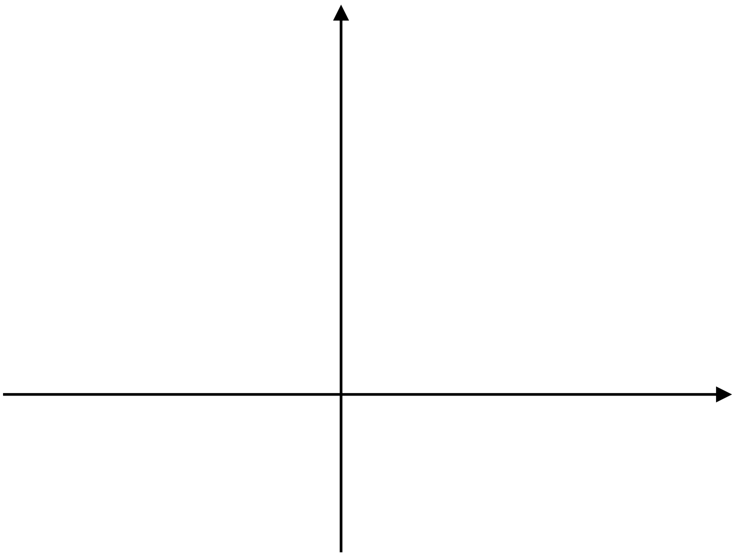
③ $y = \tan^{-1} x$

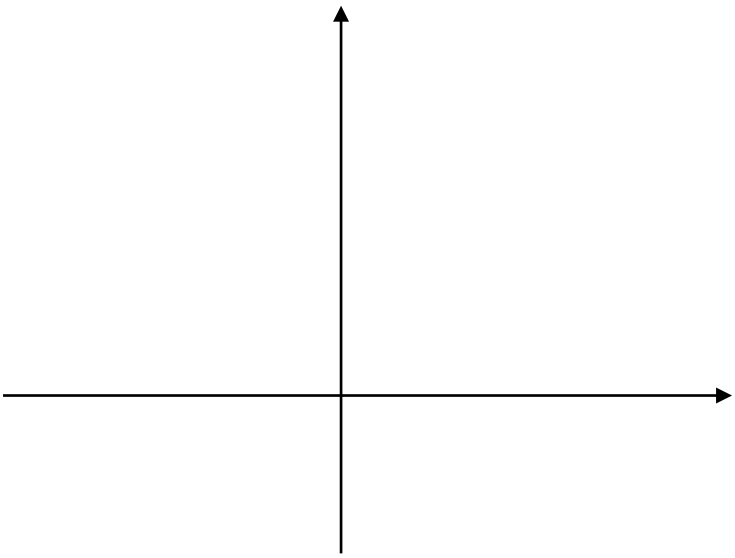


1-4 双曲線関数

・$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \fallingdotseq 2.718$とする。

$$\begin{cases} \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$





演習問題 1

1-1

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \mathrm{on}\boldsymbol{R}$$

について、値域$Y = f(\boldsymbol{R})$を求め、$f: \boldsymbol{R} \leftrightarrow Y$が bijection であることを示し、$f^{-1}(x)$を求めて、$y = f(x)$と$y = f^{-1}(x)$のグラフをかけ。

(解答)

1-2

$$f(A \cap \mathrm{B}) = f(A) \cap f(B) \Leftrightarrow f: \text{injection}$$

(証明)

1-3

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} x$$

(解答)

1-4

(1)

$$\alpha = \tan^{-1} 2 , \beta = \tan^{-1} 3$$

(2)

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}, \beta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3)

$$\alpha = \sin^{-1} x , \beta = \cos^{-1} x$$

(解答)

1-5

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (x \geqq 0)$$

(解答)

第 2 講　数列の極限と級数の収束性　-------------------------

2-1 数列の極限

定義 2.1

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = 0$$

・nを限りなく大きくしていけば、a_nとαとの距離が限りなく 0 へ近づく。

・どれ程 0 に近い誤差範囲を想定しても、nを十分大きくとれば、a_nとαの差をそれに収めることがかならずできる。

・ ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \boldsymbol{N}, n \geqq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$

・収束しないとき「発散する」と言ったり、a_nが限りなく大きくなるとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$とかくなど、数学Ⅲで学んだものはそのまま用いる。

定理 2.1

有界な単調列は収束する。

・すべての番号nに対して、nと無関係な数Mをとって、$|a_n| \leqq M$とかけるとき、$\{a_n\}$は有界であるという。

・$\{a_n\}$が、

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots$$

をみたすとき、「単調増加列」、

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq \cdots$$

をみたすとき、「単調減少列」といい、あわせて「単調列」という。(等号不成立のときには、「協議の単調列」という。)

(例)

数列

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

は単調に増加するが、すべての番号nに対して、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

をみたす。

よって、収束して極限値をもつ。$(x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots < x_n < \cdots < 3)$

定義 2.2

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

・eを「自然対数の底」とかネイピア数などと呼ぶ。

・$e \fallingdotseq 2.718\cdots$、$e$は無理数である。

・

$$(e^x)' = e^x$$

・

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

・特に、$\log_e x$を「自然対数」と呼び、

$$\ln x = \log x$$

とかくことにする。

(㊟ はさみうちの定理)

すべての自然数nで$a_n \leqq x_n \leqq b_n$であり、かつ$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$のとき、

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

となる。

(㊟ 定数数列cについては、$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$となる。)

例題 2-2 $r > 1$のとき、次を示せ。

①

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{r^n} = 0$$

②

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{r^n} = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{二項定理} \\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k} \\ = {}_nC_0 b^n + {}_nC_1 a b^{n-1} + {}_nC_2 a^2 b^{n-2} + \cdots + {}_nC_n a^n \end{array} \right)$$

(解答)

例題 2-3

$a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$のとき、$\lim_{n \to \infty} a_n$を求めよ。

(解答)

2-2 級数の収束

・数列$\{a_n\}$の和

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

を「a_nを項とする級数」という。

$\{S_n\}$が収束するとき、「級数$\sum a_n$は収束して和をもつ」という。

・特に、すべての項が正となる級数を「正項級数」という。

定理 2.2

正項級数$\sum a_n$の収束性は、次で判別できる(他にも多々ある)。

① 根号判定法(The root test)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

となるとき、$\sum a_n$は、

$$r < 1 \text{ ならば収束}$$
$$r > 1 \text{ ならば発散する。}$$

($r = 1$のときは、調べてみないとわからない。)

② 項比判定法(The ratio test)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

となるとき、$\sum a_n$は、

$$r < 1 \text{ ならば収束}$$
$$r > 1 \text{ ならば発散する。}$$

∵ ①について、(ⅰ) $\sqrt[n]{a_n} \to r < 1$のとき、

$$r < r^* < 1$$

となるr^*を1つ固定すると、十分大きなNをとって、$n \geqq N$ならいつでも$\sqrt[n]{a_n} < r^*$をみたすようにできる。

(∵ a_nはrに限りなく近づいていくので…)

よって、このようなnでは

$$0 < a_n < (r^*)^n$$

とかけるので、このnで、

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k \\ &< \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} (r^*)^k \\ &< \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} (r^*)^k \\ &= (\text{定数}) + \frac{(r^*)^N}{1 - r^*} \end{aligned}$$

とかけて、$\sum a_n$は上に有界といえて、各$a_k > 0$より、$\sum a_n$は単調増加するので、この和は収束する。

（ⅱ）$\sqrt[n]{a_n} \to r > 1$のとき、

$$1 < r^* < r$$

となるr^*を１つとると、十分大きなNをとって、$n \geqq N$なら常に、

$$r^* < \sqrt[n]{a_n}$$

とできる。

よて、(ｉ)と同様にして、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k \\ &> \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} (r^*)^k \\ &\to \ \infty \ \ (n \to \infty) \ \ (\because r > 1)\end{aligned}$$

となって、和は発散する。…(Q.E.D)

②について、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

に対し、

$r < 1$のとき、①同様、$r < r^* < 1$となるr^*をとれば、ある番号Nから先すべてのnで、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r^* \Leftrightarrow a_{n+1} < r^* a_n$$

とできる。

よって、$n \geqq N$なら、

$$a_n \leqq (r^*)^{n-N} a_N$$

とかけて、

$$\begin{aligned}0 < \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k \\ &\leqq \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} (r^*)^{N-n} a_N \\ \underset{(n\to\infty)}{\to} &\sum_{k=1}^{N-1} a_k + \frac{a_N}{1-r^*} = (\text{定数})\end{aligned}$$

①同様、$\sum a_n$は、上に有界な単調増加数列となり、和$\sum a_n$は収束する。

$r > 1$のとき、①同様、$r > r^* > 1$なるr^*を固定して、ある番号Nから先で常に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r^* \Leftrightarrow a_{n+1} > r^* a_n$$

とできる。

よって、$n \geqq N$なら、$a_n \geqq (r^*)^{n-N} a_N$とかけて、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k$$
$$\geqq \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} (r^*)^{n-N} \cdot a_N$$
$$\to \ +\infty \ \ (n \to \infty)$$

となって、和$\sum a_n$は発散する。…(Q.E.D)

・すべての自然数nで、$a_n a_{n+1} < 0$となる$\{a_n\}$　の級数を「交項級数」という(番号の偶奇で項の正・負がいれかわる)。

定理 2.4

各項の絶対値が単調減少して、0 へ収束する交項級数は収束して和をもつ。

∵

$$a_n \begin{cases} > 0 & (n: 奇数) \\ < 0 & (n: 偶数) \end{cases}$$

とし、$\alpha_n = |a_n|$とする。特に、すべてのnで$\alpha_{n+1} < \alpha_n$かつ$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$とすると、$a_n = (-1)^{n-1}\alpha_n$で、

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$$
$$= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 + \cdots + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{2k-1} - \alpha_{2k})$$

は単調増加する正項級数で、さらに、

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$$
$$= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \cdots - \alpha_{2n-2} + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}$$
$$= \alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_4 - \alpha_5) - \cdots - (\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1}) - \alpha_{2n} < \alpha_1$$

となって、S_{2n}は上に有界。

よって、S_{2n}は収束して$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$も収束。$S_n$は収束する。…(Q.E.D)

2-3 整級数の収束半径

・

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$
$$= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots\cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

とかける級数を、aを中心とする「整級数」又は「べき級数」という。

以後 0 を中心とするべき級数のみ考えるとする。

定理 2.5

べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が$x = x_0$で収束するならば、$|x| < |x_0|$なる xで絶対収束する。

(証明)

定義　**収束半径**

・実数xにおけるべき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

について、

$$|x| < \rho \text{ならば収束}$$

(このとき、$|x| < |x_0| < \rho$となるx_0がとれるので、定理 2.5 よりxで絶対収束する)

$$|x| > \rho \text{ならば発散}$$

するような定数ρを「収束半径」という。

(例)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

は、$|x| < 1$のとき、かつそのときに限り収束するので、このべき級数の収束半径は 1。

定理 2.6

べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

において、

① $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

又は、② $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ならば、収束半径は$\frac{1}{r}$となる。

(証明)

演習問題 2

2-1 $\sqrt[n]{n}$を求めよ。

(解答)

2-2

$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$のとき、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

を求めよ。

(解答)

2-3

$$0 < a_1 < b_1, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$となることを示せ。

(解答)

2-4 次の級数の、収束・発散を調べよ。

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot e^n$$

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(解答)

第 3 講　1 変数関数の極限と連続性

3-1 関数の極限

定義 3.1

$$\lim_{x\to a}|f(x)-\alpha|=0$$

のとき、

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$$

とかく。

㊟ どんなに 0 に近い正の数εを誤差範囲としても、xをうまくaに近づけて、

$$|f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

とできる。

・

$$^\forall\varepsilon>0,\ ^\exists\delta>0, |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

はさみうちの定理(squeeze theorem)

すべてのxで、常に$p(x)<f(x)<q(x)$であり、

$$\lim_{x\to a}p(x)=\lim_{x\to a}q(x)=\alpha$$

ならば、

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$$

・$\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$も同様に定める。

公式

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\because x\to\infty$のとき、十分大きなxに対して、$n=[x]$,すなわち、$n\leqq x<n+1$となる自然数nをとると、

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqq1+\frac{1}{n}$$

$$\therefore\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

$$\leqq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}\leqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ここで、$x\to\infty$とすると、$n\to\infty$で、

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \quad\to\quad e \quad (n\to\infty)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad\to\quad e \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$x'=-x$として、

$$\lim_{x\mp\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x'\to\infty}\left(1-\frac{1}{x'}\right)^{-x'}$$

$$=\lim_{x'\to\infty}\left(\frac{x'-1}{x'}\right)^{-x'}=\lim_{x'\to\infty}\left(\frac{x'}{x'-1}\right)^{x'}$$

$$=\lim_{x'\to\infty}\left(1+\frac{x'}{x'-1}\right)^{x'-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)=e$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e \quad \cdots(\mathrm{Q.E.D.})$$

公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$\because 0<x<\frac{\pi}{2}$で

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin x<\frac{1^2}{2}\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$-\frac{\pi}{2}<x<0$のときは、$0<-x<\frac{\pi}{2}$により、

$$1<\frac{-x}{\sin(-x)}<\frac{1}{\cos(-x)}$$

いずれにせよ、

$0<[x]<\frac{\pi}{2}$で、

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \to 1 \quad (x\to 0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \cdots(\mathrm{Q.E.D.})$$

・

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\because \frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2}\quad (x\to 0)\quad \cdots\square$$

公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\because \frac{\ln(1+x)}{x}=\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \log_e e=1 \quad \cdots\square$$

$t=e^x-1$とおくと、$x=\ln(1+t)$、$x\to 0$のとき、$t\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1 \quad \cdots$$

定義 3.2　Landom の記号

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$$

とする。

①

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

のとき、「$g(x)$は$f(x)$よりも高位の無限小」と言い、$g(x)=\mathrm{o}\big(f(x)\big)$とかく。

㊟ o…オミクロン。

②

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}==k,k\fallingdotseq 0$$

のとき、「$g(x)$は$f(x)$と同位の無限小」と言い、$g(x)=\mathrm{O}\big(f(x)\big)$とかく。

(例)　$\sin x=\mathrm{O}(x)\quad(x\to 0)$

(例) 二項定理より、$n\geqq 3$のとき、

$$(x+h)^n=x^n+nhx^{n-1}+{}_nC_2h^2x^{n-2}+\cdots+h^n$$

$$=x^n+nhx^{n-1}+\mathrm{o}(h)\quad\left(\text{又は }\mathrm{O}(h^2)\right)$$

よって、

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{\mathrm{o}(h)}{h} \quad \to \quad nx^{n-1} \quad (h \to 0)$$

定義 3.3

k: 正実数として、

$$f(x) = \mathrm{O}(x^k) \quad (x \to 0)$$

($x \to 0$のとき、$\frac{f(x)}{x^k}$が 0 でない値に収束)となるとき。「$f(x)$はk位の無限小」という。

例題 3-1 $x \to 0$のとき、次の各関数は、何位の無限小か。

(1) $x^3 - 3x^2 + x$

(2) $\tan x$

(3) $1 - \cos x$

(4) $\sin^{-1} x$

(解答)

例題 3-2 $x \to 0$のとき、次の各関数は、何位の無限小か。

(1) $e^x - 1$

(2) $\log_2(1 + x^3)$

(解答)

3-2 関数の連続性

定義 3.4

① 関数$f(x)$が$x=a$で定義されており、

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

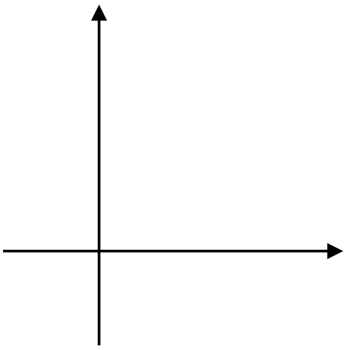
となるとき、「$f(x)$は$x=a$で連続である」という。

② 特に、$f(x)$がある区間Iの各点で連続であるときは、「$f(x)$はIで連続である」という。

㊟

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$$

であったことに注意。



定理 3.1

関数$f(x)$が連続なとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$$

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

例題 3-3 次の各関数は$x = 0$で連続か。

(1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

(2)

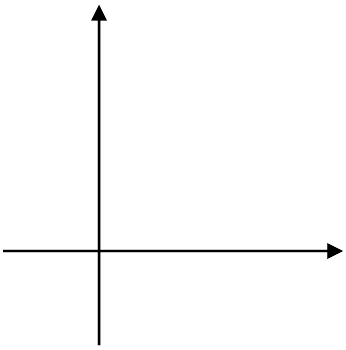
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

(解答)

・　ある区間Iにおいて、すべてのIの要素xに対して、

$$f(x) \underset{(\geqq)}{\leqq} f(a) = M$$

のとき、Mを$f(x)$のIにおける「最大値(最小値)」と呼ぶ。



定理 3.2

関数$f(x)$が、閉区間$[a,b]$で連続ならば、かならずそこで、最大値と最小値をもつ。

・　実数全体をある値aで上下に分けるとすると、「$x \leqq a$と$a < x$」となるか、「$x < a$と$a \leqq x$となるかのいずれかしかない。(Dedekind cut)

(定理の説明)

$[a,b]$で連続な$f(x)$は、すべての$x \in [a,b]$で、

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$$

となるので無限大に発散しない。

よって、ある定数Mをとって、常に$f(x) < M$であるとできるが、このようなMたちすべてを集めてできる集合をkとすると、最小値をもたない。

何故なら、もしm_0をkの最小値とすれば、すべての$f(x)$に対して、$f(x) < m_0$をみたすが、$f(x) < \varepsilon < m_0$となるεがとれて、$\varepsilon \in K$となってしまい、m_0の最小性に矛盾する。

よって、ある定数mをとって、$k = \{x | m < x\}$とかけるが、「すべてのxで$f(x) < m$となる訳ではない」ことにより、$m \leqq f(x_1)$となるx_1が存在しkの定め方から、$f(x_1) \notin K$ゆえ、$f(x_1) \leqq m$でもあって、$m = f(x_1)$

よって、すべてのxで$f(x) \leqq m = f(x_1)$となって、このmが$f(x)$の最大値である。最小値も同様。(Q.E.D)

定理 3.3	中間値の定理(intermediate value theorem)

$f(x)$が$[a,b]$で連続かつ

$$f(a)\times f(b)<0$$

ならば、方程式$f(x)=0$は$[a,b]$で少なくとも 1 つの解をもつ。

(説明)

もしも、$f(a)<0<f(b)$なのに、$[a,b]$で常に$f(x)\fallingdotseq 0$とすると、$[f(a),f(b)]$は 0 を含まないので、

$$0<f(a)\leqq f(b)$$

又は、

$$f(a)\leqq f(b)<0$$

となって、$f(a)\times f(b)<0$に矛盾。…(Q.E.D)

・ 連続関数$f(x)$について、($f(x)$は狭義単調)⇔($f(x)$は一対一対応)

∵ (⇐)のみを示す。

$a<b<c$なのに、$f(a)<f(c)<f(b)$となることがあったのなら、(fは全単射ゆえ、等号は成立しえない。)

$f(a)<f(c)<k<f(b)$というkがとれて、$g(x)=f(x)-k$と定めることで、連続な$g(x)$が、

$$\begin{cases} g(a)=f(a)-k<0<f(b)-k=g(b) \\ g(c)=f(c)-k<0<f(b)-k=g(b) \end{cases}$$

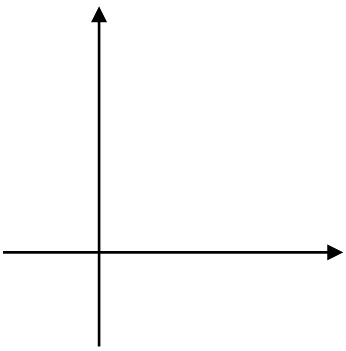
をみたすので、中間値の定理から、

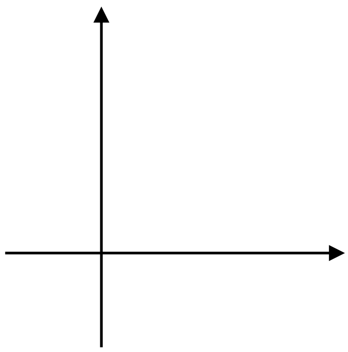
$$a<t<b<s<c$$

かつ

$$g(t)=g(s)=0$$

となるs,tがとれ、$f(t)=f(s)=k$となって、fの単射性に矛盾する。…(Q.E.D)





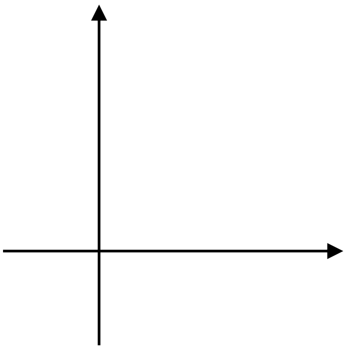
定理 3.4

連続関数$f(x)$が、逆関数$f^{-1}(x)$をもつならば$f^{-1}(x)$も連続である。

(目標)

$$X \to A \Rightarrow f^{-1}(X) \to f^{-1}(A)$$

任意の$\varepsilon > 0$に対して、$a - \varepsilon = f^{-1}(A) - \varepsilon < f^{-1}(A) < f^{-1}(A) + \varepsilon = a + \varepsilon$の中に、$x = f^{-1}(X)$をつっこめるか。



(証明)

演習問題 3

3-1 $x \to 0$のとき、次の各関数はxに対して、何位の無限小か。

(1) $\tan x - \sin x$

(2) $1 - \cos^3 x$

(3) $\tan^{-1} x$

(4) $x \ln(1 + x^2)$

$$\left(\begin{array}{c} \lim_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right)$$

(解答)

3-2 次の極限を求めよ。

(1)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$$

(2)

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

(3)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2)}{x}$$

(解答)

3-2 次の極限を求めよ。(続き)

(4)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

(5)

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{[2x]}{1+x}$$

(6)

$$\lim_{x \to \infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$$

(解答)

3-3 (Dirichlet 関数)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{m\to\infty}(\cos n!\,\pi x^{2m})\right\}$$

を簡単にせよ。

(解答)

3-4 次の各関数の連続性を調べよ。

(1)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan^{-1}x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

(2)

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & (x\neq 0)\\ e & (x=0)\end{cases}$$

(3)

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$$

(4)

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{n}+x^{-n}}\quad (x>0)$$

(解答)

3-5 $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$の連続関数$f(x)$に対し、閉区間$I = [a,b]$において、$f(I) \subset I$であるならば、かならず$I$内に、$\alpha = f(\alpha)$となる$\alpha$が存在することを示せ。

(縮小写像の不動点定理)

(解答)

第 4 講　微分係数 導関数と微分公式

4-1 微分係数と導関数

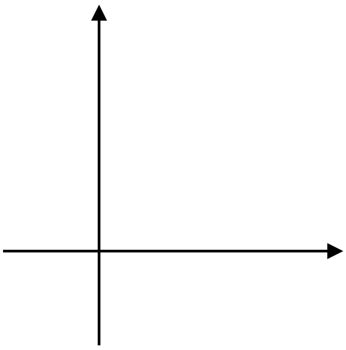
・関数$y = f(x)$について、xの微小変化Δxに伴う$y = f(x)$の変化をΔyを、Δxの比例に近似したときの比例係数を微分係数という。

定義 4.1

関数$f(x)$に対して、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が収束するとき、$f(x)$は$x = a$で微分可能と呼び、その極限値を微分係数$f'(a)$と呼ぶ。



$$\begin{cases} \Delta x = x - a \\ \Delta y = f(x) - f(a) \end{cases}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{z \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

・$y = f(x)$の$x = a$での「接線の傾き」が$f'(a)$

定義 4.2

各xに対して求まる$f'(x)$について、$x \to f'(x)$の対応を関数とみなして、導関数$f'(x)$と呼ぶ。

・$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)$などとかく。

・$y = f(x)$上の$\big(a, f(a)\big)$での接線は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

とかける。これは$f(x)$の$x = a$での「第 1 次近似」である。

(例)

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in N)$$

∵ 二項定理により、

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k h^k \cdot x^{n-k}$$

$$= x^n + n \cdot h \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \cdots + h^n$$

$$= x^n + nhx^{n-1} + 0(h)$$

よって、

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{0(h)}{h} \right) = nx^{n-1} \quad \cdots \square$$

(例)

$$(\ln|x|)' = (\log_e |x|)' = \frac{1}{x}$$

∵ $h \to 0$のとき、十分hが 0 に近いとして、$1 + \frac{h}{x} > 0$とできる。

よって、

$$(\ln|x|)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left|1 + \frac{h}{x}\right|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left|1 + \frac{h}{x}\right|}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \quad \cdots \square$$

(例)

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$$

∵

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

$$= \lim_{t \to 0} a^x \cdot \frac{t}{\log_a(1+t)}$$

$$\left(\because t = a^h - 1 \text{ として、} h = \log_a(1+t)\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} a^x \cdot \frac{1}{\log_a (1+t)^{\frac{1}{t}}} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \log_e a = a^x \ln a \quad \cdots \square$$

(例)

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\frac{\sin h}{h}-\sin x\frac{1-\cos h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{0(h)}{h}\right)$$

$$= \cos x \quad \cdots \square$$

$$\left(\begin{gathered}\frac{1-\cos h}{h^2}\to\frac{1}{2}\quad(h\to 0)\\ 1-\cos h = 0(h)\end{gathered}\right)$$

㊟

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$= 2\cos\alpha\sin\beta$$

なので、

$$\left(\begin{gathered}\begin{cases}\alpha+\beta = x+h\\ \alpha-\beta = x\end{cases}\\ \text{として}\end{gathered}\right)$$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x \quad \cdots \square$$

(例)

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\cos x\cdot\frac{1-\cos h}{h}-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{0(h)}{h}\right)$$

$$= -\sin x \quad \cdots \square$$

㊟

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$
$$=-2\sin\alpha\sin\beta$$

なので、

$$(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$
$$=-\sin x \quad \cdots\square$$

(例)

$$(c)'=0 \quad \left(c\text{: 定数}\right)$$
$$(c)'=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0 \quad \cdots\square$$

㊟ では、$f'(x)=0$のとき、

$$f(x)=c \quad \left(\text{定数}\right)$$

といえるか　…後述。
(平均値の定理 MVT を用いる。)

例題 4-1 $f(x)$が$x=a$で微分可能⇒$f(x)$が$x=a$で連続を示せ、逆が成り立たないことを反例を挙げて示せ。
(解答)

例題 4-2

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}+1} & (x\neq 0)\\ 0 \quad (x=0) \end{cases}$$

は、$x=0$で微分可能か。

(解答)

4-2 微分公式

公式

①

$$\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$$

②

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

③

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}'}$$

④ chain rule

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

又は$\{f(\varphi(x))\}'=f'(\varphi)\varphi'(x)$

・$y=\varphi(x), z=f(y)$であるとして

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(x+h))-f(\varphi(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(\varphi(x+h))-f(\varphi(x))}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right\}$$

$$=f'^{(\varphi)}\cdot f'(x)$$

とできるとよいのだが…

・hが 0 に十分近いとき常に、$\varphi(x+h)\neq\varphi(x)$とできることが必要(ちょっと実は大変)。

定理 4.1 **連鎖律(chain rule)**

$y = \varphi(x), z = f(y)$が微分可能なとき、合成関数$z = f(y) = f\big(\varphi(x)\big)$は$x$の関数として微分可能で、

$$\left\{f\big(\varphi(x)\big)\right\}' = f'(\varphi) \cdot \varphi'(x)$$

すなわち、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

(証明)

公式

⑤

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

(例) 陰関数の微分法

$$x^2-y^2=1\quad(|x|>1)$$

において、両辺をxで微分して、

$$2x-2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

(例) 逆関数の微分法

・$(\tan^{-1}x)'$について、

$$y=\tan^{-1}x\Leftrightarrow x=\tan y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

公式　対数微分法

・$y=\{f(x)\}^{u(x)}$において、

$$\ln y=u(x)\ln f(x)$$

より、

$$\frac{y'}{y}=u'\ln f+\frac{uf'}{f}$$

$$y'=y\cdot\left(u'\ln f+\frac{uf'}{f}\right)$$

公式

任意の実数aに対して、$(x^a)'=ax^{a-1}$

$\because y=x^a$として、

$$\log y=a\log x$$

$$\therefore\frac{y'}{y}=\frac{a}{x}$$

$$y'=\frac{a}{x}\cdot y=\frac{a}{x}\cdot x^a=ax^{a-1}$$

演習問題 4

4-1 次の関数は、$x = 0$で連続か。また、そのときは$x = 0$で微分可能か。

(1)

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(解答)

4-2 導関数を求めよ。

(1)

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)'$$

(2)

$$\left(\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)'$$

(3)

$$y=\sin^{-1}u$$

(4)

$$y=x^{\frac{1}{x}}$$

(解答)

4-3

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

を求めよ。

(解答)

4-4

$$\frac{dy}{dx}$$

を求めよ。

(1)

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

(解答)

(続き)

4-4

$$\frac{dy}{dx}$$

を求めよ。

(4)

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

(5)

$$\sin x + \sin y = 1$$

(6)

$$x^y = y^x$$

(解答)

4-5 任意の$x, y \in \boldsymbol{R}$で$f(x+y) = f(x) + f(y)$となり、$f(x)$が微分可能なら$f(x) = f'(0) \cdot x$となることを示せ。
(証明)

第 5 講　高次導関数とロピタルの定理

定義 5.1　**高次導関数**

区間Iにおいて、微分可能な関数$f(x)$の導関数$f'(x)$が、さらに微分可能なとき、「$f(x)$はIで 2 回微分可能」と言い、$\left(f'(x)\right)' = f''(x)$又は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

などとかき、これらを「第 2 次導関数」と呼ぶ。

同様にして、n回くりかえして微分できるとき、「n回微分可能」と言い、

$$\left(\left(\left(\left(\cdots\left(f'(x)\right)'\cdots\right)'\right)'\right)'\right)' = f^{(n)}(x)$$

あるいは、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdots\right)\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\cdots\right)\right) = \frac{d^ny}{dx^n}\left(f(x)\right)$$

などとかく。

定義 5.2

区間Iにおいて関数$f(x)$が、n回微分可能かつ、第n次導関数$f^{(n)}(x)$が連続なとき、「$f(x)$はIでC^n級」と言い、すべての自然数nでn回微分可能なときはC^∞級という。

㊟ $\frac{d}{dx}$は分数ではない。

・$\frac{dy}{dx} = f'(x)$より$dy = f'(x)dx$

・

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

・

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)}{x''(t)} \quad ?$$

例題 5-1

$x = u(t), y = v(t)$のとき、

例題 5-2

$x = \cos^3 t\,, y = \sin^3 t$とするとき、

定理 5.1	Leibniz の公式

$f(x), g(x)$がn回微分可能なとき、

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

(但し、$f^{(0)}(x) = f(x), g^{(0)}(x) = g(x)$)

(証明)

㊟

$$\begin{aligned}
&{}_nC_{k-1} + {}_nC_k \\
&= \frac{n!}{(k-1)!\,\big(n-(k-1)\big)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{n! \cdot k + n!\,(n+1-k)}{k!\,(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \\
&{}_nC_{k+1}
\end{aligned}$$

・パスカルの三角形

$$\begin{matrix}
{}_1C_0 \quad {}_1C_1 \\
{}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2 \\
{}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3 \\
{}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4 \\
{}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5
\end{matrix}$$

例題 5-2

$$f(x) = \sin^{-1} x \quad (|x| < 1)$$

について、次を示せ。

(1)

$$(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = 0$$

(2)

$$(1 - x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n + 1) x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

(解答)

5-2 平均値の定理 MVT

定理 5.1 Rolle の定理

$[a, b]$で連続、(a, b)で微分可能な関数$f(x)$について、
$f(a) = f(b) = 0$ならば、$f'(c) = 0, a < c < b$となるcがかならずとれる。

(証明)

定理 5.2 平均値の定理 MVT(The mean value theorem for derivatives)

$[a, b]$で連続、(a, b)で微分可能な関数$f(x)$に対して、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

となるcがかならずとれる。

(証明)

（Ⅰ）区間$I=(a,b)$で、$f'(x)>0$ならば、$f(x)$はIで、狭義単調増加。

$\because$　$a \leqq x < y \leqq b$となるすべてのx, yに対して、平均値の定理より、

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$$

となるc　$(a<c<b)$がとれて、$f'(c)>0, y-x>0$

$$\therefore x<y \Rightarrow f(x)<f(y) \quad \cdots \square$$

（Ⅱ）すべてのxで$f'(x)=0$ならば、$f(x)$は連続な定数値関数。

$\because$ aをある定数とし、$x \neq a$なる任意のxに対して、平均値の定理から、

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0$$

となるcがいつもとれるので、$(a$とcの間$)$任意のxで

$$f(x)=f(a) \ \ (\text{一定}) \ \ \cdots \square$$

例題 5-3

$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能な関数$f(x)$に対して、各$x_0 \in [a,b]$において、$x_0 + h \in [a,b]$となるhをとれば、

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h \quad (0 < \theta < 1)$$

をみたすθがとれる。

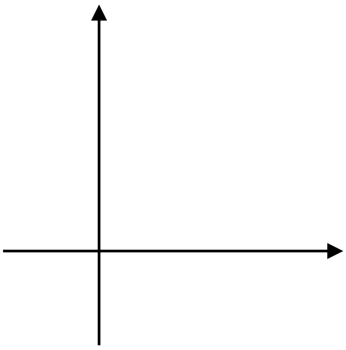
(解答)

例題 5-4

関数$f(x)$が、(a,b)において、$a < x_1 < x_2 < b$かつ$0 < t < 1$となるすべてのx_1, x_2, kに対して、

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) > f\big((1-t)x_1 + tx_2\big)$$

をみたすとき、$f(x)$は(a,b)で、狭義に下に凸という。



(a,b)で常に、$f''(x) > 0$ならば、$f(x)$がここで、狭義に下に凸であることを示せ。

(証明)

定理 5.3 Cauchy の平均値定理(Cauchy's mean value theorem)

$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能な$u(t),v(t)$に対して、(a,b)で常に$u'(t)\neq 0$ならば、$a<c<b$かつ

$$\frac{v(b)-v(a)}{u(b)-u(a)}=\frac{v'(c)}{u'(c)}$$

となるcがかならずとれる。

(証明)

定理 5.4 L'Hopital の定理(L'Hopital's theorem)

$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能な関数$f(x),g(x)$について、$f(c)=g(c)=0, a<c<b$かつcでない$x\in(a,b)$で$f'(x)\neq 0$のとき、$\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}$が$\infty$を含め存在するとき、

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

(証明)

・L'Hopital の定理のバリエーション

(1) $f(c)=g(c)=0$のとき

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}\quad (\because \text{定理 } 5.4)$$

(2) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$のとき、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\left(\begin{array}{c}\because F(t)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{t}\right) & (t\neq 0)\\ 0 & (t=0)\end{cases}\\ G(t)=\begin{cases}g\left(\dfrac{1}{t}\right) & (t\neq 0)\\ 0 & (t=0)\end{cases}\\ \text{とおいて、定理 5.4 を利用せよ。}\quad\cdots\square\end{array}\right)$$

(3) $\lim_{x\to c}f(x)=\pm\infty,\lim_{x\to c}g(x)=\pm\infty$のとき、

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$\because\ \lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}=k$とかけるとき、$^\forall\varepsilon_1>0$に対して、

$$c<x_1<c+\delta_1\Rightarrow\left|\frac{g'(x_1)}{f'(x_1)}-k\right|<\varepsilon_1$$

となるようにδ_1をとる。…①

三角不等式($|X+Y|\leqq|X|+|Y|$)により、

$$\left|\frac{g'(x_1)}{f'(x_1)}\right|=\left|\frac{g'(x_1)}{f'(x_1)}-k+k\right|\leqq\left|\frac{g'(x_1)}{f'(x_1)}-k\right|+|k|<\varepsilon_1+|k|\quad\cdots①'$$

このとき、Cauchy の平均値の定理から、

$$\frac{g(x_1)-g(x)}{f(x_1)-f(x)}=\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)},c<x<\xi<x_1$$

となるx,ξがとれる。

そこで

$$H(x)=\frac{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}{\dfrac{g(x_1)}{g(x)}-1}$$

とおくと、$H(x)\to 1\quad(x\to c+0)$となるので、$c<x<c+\delta\leqq c+\delta_1\Rightarrow[H(x)-1]<\varepsilon_1$となる$\delta$をとるとする。…②

この$H(x)$において、

$$\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}=\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{H(x)}$$

とかけて、①、①'、②により、

$$\left|\frac{g(x_1)}{f(x_1)}-k\right| = \left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}H(x)-k\right|$$

$$= \left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}\{H(x)-1\}+\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}-k\right|$$

$$\leqq \left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}\right||H(x)-1|+\left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}-k\right|$$

$$\leqq (\varepsilon_1+|k|)\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon_1+|k|+1) \quad \to 0 \quad (k\text{: 定数})$$

すなわち、$^\forall\varepsilon > 0$に対し、$\varepsilon_1(\varepsilon_1+|k|+1)<\varepsilon$となるまで、$\delta$を②でとることにすれば、

$$c<x<c+\delta \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{f(x)}-k\right|<\varepsilon$$

とかける。$c+\delta<x<c$のときも同様にできる。

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$\lim_{x\to c}\frac{g'(x)}{f'(x)}=\infty$のときも同様。　(Q.E.D)

(4) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty, \lim_{x\to\infty}g(x)=\pm\infty$のとき、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

∵ (2)と同様

$$F(t)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{t}\right) & (t\neq 0) \\ 0 & (t=0) \end{cases}$$

$$G(t)=\begin{cases} g\left(\frac{1}{t}\right) & (t\neq 0) \\ 0 & (t=0) \end{cases}$$

とおき、(3)を利用せよ。　…□

例題 5-5 次を平均値の定理を用いて示せ。

(1)

$$|\sin x - \sin y| \leqq |x - y|$$

(2)

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

(解答)

例題 5-6 次を L'Hopital の定理を用いて計算せよ。

(1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(2)

$$\lim_{x \to +0} x \ln x \quad \left(t = \frac{1}{x} \text{としてもよいが} \cdots \right)$$

(3)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)^{\frac{1}{x}}$$

(解答)

演習問題 5

5-1

(1) $u_n(x) = (x^2-1)^n$とする。

$$(x^2-1)u_n'(x) = 2nxu_n(x) \quad \cdots ①$$

を示せ。

(2)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

を Legendre の多項式という①の両辺を$n+1$回微分して、次を示せ。

$$(x^2-1)P_n(x) + 2xP'_n(x) - n(n+1)P_n(x) = 0 \quad \cdots (*)$$

(解答)

5-2 次の極限を計算せよ。

(1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$$

(2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^1 x}{x}$$

(3)

$$\lim_{x \to \infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

(4)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{\pi} \tan^1 x \right)^x$$

(5)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$$

5-3 n次の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

に対して、次を示せ。

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

(解答)

5-4 $f(x)$が$x = a$でn回微分可能であるとすると、

$$f(a+h) - \left\{ f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n \right\} = 0(h^n)$$

であることを示せ。

(証明)

5-5

(1) 関数$f(x)$がC^2級で、

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h$$

であるとする。$f''(x_0)\neq 0$ならば、$\lim_{h\to\infty}\theta=\frac{1}{2}$であることを示せ。

(2) 関数$f(x)$がC^{n+1}級で、

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n$$

であるとする。$f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ならば、$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$であることを示せ。

(証明)

第 6 講　Taylor 展開

6-1Taylor 展開

・C^{∞}級の$f(x)$が、十分 0 に近いxにおいて

$$f(x) \fallingdotseq a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots\cdots + a_nx^n$$

と近似できたとする。

この近似は「良い近似」なので、

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{x-1}$$
$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{x-2}$$
$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{x-3}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$$

とかけるとすれば、$x = 0$を代入して、

$$f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2, f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3, \cdots\cdots,$$
$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)\ \cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$$

といえるので、$f^{(k)}(0) = k!\,a_k$より

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

を得る。

そこで先に、

$$f_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

となる多項式$f_n(x)$を作り、これが$f(x)$の「良い近似」となっているか調べよう。

この$f_n(x)$をn次の Maclaurin 多項式という。

定理 6.1　**Maclaurin の定理**

0 を含む区間IでC^1級かつその内部でn回微分可能な関数$f(x)$に対して、$x \in I$のとき、次をみたす定数c_nが 0 とxとの間にとれる。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x) \quad \cdots(6.1.3)$$

但し、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}x^n$$

・(6.1.3)の左辺を有限 Maclaurin 級数という。

・

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}x^n$$

を、「Lagrange の剰余」という。

「$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$かつ$0 < \theta < 1$となる$\theta$がとれる」ともかける。

$$\left(\begin{array}{c} \text{他に、} \\ R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta' x)}{(n-1)!}(1-\theta')^{n-1}x^n \quad (0 < \theta' < 1) \\ \text{となる}\theta'\text{がとれるともいえる} \\ (\text{Cauchy の剰余}) \end{array}\right)$$

(証明)

定義 6.0

Maclaurin の定理で、$R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$となるとき、すなわち

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とかけるとき、$f(x)$は Maclaurin 展開可能という。

Maclaurin の展開はxが 0 近辺にあるときに限られたので、これを平行移動する形で一般化しよう。

定理 6.2　Taylor の定理

区間IでC^{n-1}級かつその内部でn回微分可能な関数$f(x)$に対し、$a \in I$とすると、次をみたすC_nがI内のxとaとの間にとれる。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x) \quad \cdots (6.1.4)$$

但し、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-a)^n$$

・

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-a)^n$$

を「Lagrange の剰余項」という。

・Taylor の定理で$a = 0$としたものが Maclaurin の定理。

定義 6.1　Taylor 多項式

IでC^{n-1}級かつその内部でn回微分可能な関数$f(x)$に対して

$$f_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

を、「$f(x)$のaにおけるn次の Taylor 多項式」という。

定義 6.2　Taylor 展開

区間IでC^∞級な関数$f(x)$に対し、各$x \in I$で、その Taylor 多項式が$f(x)$に収束する。
すなわち$R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$で、

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(x)$$

となるとき、$f(x)$は Taylor 展開可能という。

・Iの各点で Taylor 展開可能な$f(x)$を、そこで「解析的である」という。

(補助定理) 項別微分・積分定理

収束半径rが 0 でないべき級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

に対して、

①

$$|x| < r \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

②

$$-r < a < b < r \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{a=0}^{\infty} (a_n x^n)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\,dx$$

(補助定理)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

について、その収束半径の内部において、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k}$$

となるので、$x = a$として、

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{0!} a_k = k!\, a_k$$

よって、

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

がいえて、この展開のカタチは

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

に限られる。

㊟

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2\cdot 1\cdot a_2 + 3\cdot 2a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = k!\,a_k + (k+1)!\,(x-a) + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}(x-a)^2 + \cdots\cdots + \frac{n!}{(n-k)!}a_n(x-a)^{n-k} + \cdots \quad (n \geqq k)$$

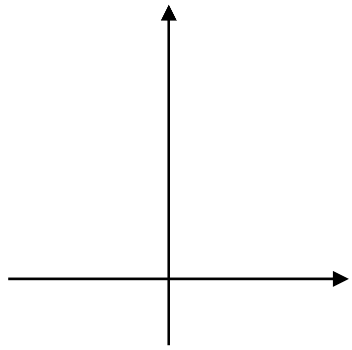
(補助定理)

任意の実数xに対し、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} \because k = [|x|] + 1 \text{ とおくと、} \\ |x|^n < k^n \text{なので、} n \text{を十分に大きくとり、} \\ 0 \leqq \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} < \frac{k^n}{n!} = \frac{k\cdot k\cdots k}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)\left(\frac{k}{k+2}\right)\cdots\left(\frac{k}{n}\right) \\ \leqq \frac{k^k}{k!}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n-k} \to 0 \quad (n\to\infty) \quad \cdots\square \end{array}\right)$$

（例VI）C^{∞}級なのに、Maclaurin 展開できない例



$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

とする。

これは無限回微分可能だが、すべての自然数nで$f^{(n)}(0)=0$　$*$
となり、Maclaurin 級数は 0 となって、$x\neq 0$で$f(x)>0$であることに一致できない。

よって、$x\neq 0$で Maclaurin 展開できない。

(*の証明)

(例題 6.1)

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (|x| < 1) \quad \cdots(6.2.6)$$

を用いて、次の関数の$|x| < 1$での Maclaurin 展開を求めよ。

(1)

$$\sqrt{1+x}$$

(2)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(解答)

例題 6-2

次の各関数を無限級数に展開せよ。

(1)

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

(2)

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

・被積分関数を級数展開してから項別に積分する。

・特に(2)は、$\sin t$を展開したのちtでわってから項別に積分する。

(解答)

例題 6-3 切り捨て誤差

関数$f(x)=\sqrt{1+x}$の$|x| \leqq 0{,}1$における、3 次の Maclaurin 多項式による近似の誤差を評価せよ。

(解答)

定理 6.4 **漸近展開(asymptotic expansion)**

0 を含む閉区間IでC^n級な$f(x)$に対して、$x \in I$とすると、$x \to 0$で

$$(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + 0(x^n)$$

とかける。これを$f(x)$の「漸近展開」という。

(㊟ 第 5 講 演習問題 5 − 4 (5.3.2)参照)

(証明)

（例）漸近展開の例$(x \to 0)$

①

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 0(x^2)$$

②

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)$$

③

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + 0(x^2)$$

④

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$$

⑤

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + 0(x^2)$$

これらから次は明らか。

①×②より、

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + 0(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + 0(x^3) + x^2 - \frac{x^4}{6} + x0(x^3) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^2}{2}0(x^3) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)\right) \cdot 0(x^2)$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0(x^3)$$

③×④で、

$$\ln(1+x)\cos x = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + 0(x^3)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + x0(x^3) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}0(x^3) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^3}{3}0(x^3) + 0(x^3)\left(1 - \frac{x^2}{2} + 0(x^3)\right)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 0(x^3)$$

演習問題 6

6-1 次の各関数の Maclaurin 級数を求めよ。

(1) $\cosh x$

(2) $\sinh x$

(3) $\cos x^2$

(4) $\cos^2 x$

(解答)

6-2Maclaurin 展開の例

(例Ⅰ)

$f(x)=e^x$とする、すべての自然数nで$f^{(n)}(x)=e^x$ゆえ、$f^{(n)}(0)=1$

よって(定理 6.1)により、

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

となる$\theta\ (0<\theta<1)$がとれる。

$$\left(\begin{array}{c}\text{(定理 6.1)での、0 と}x\text{の間にとれる}C^n\text{を}\\ \text{「}x\text{の縮小」として}\theta=\dfrac{c_n}{x}\text{を「縮小率」と考えて、}\end{array}\right)$$

実数xを固定すれば、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

となり、剰余項も

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n=0$$

と収束するので、e^xは各xで Maclaurin 展開可能で、

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{ここで}x=1\text{として}\\ e=1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots\text{を得る。}\end{array}\right)$$

(例Ⅱ)

$f(x)=\sin x$とする。

$$f'(x)=\cos x, f^{(3)}(x)=-\cos x, f^{(5)}(x)=\cos x,\cdots$$
$$f''(x)=-\sin x, f^{(4)}(x)=\sin x, f^{(6)}(x)=-\sin x,\cdots$$

により、

$$\begin{cases}f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x\\ f^{(2k-1)}(x)=(-1)^{k-1}\cos x\end{cases}$$

となるので、

$$f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}$$

Lagrange の剰余項を$R_n(x)$として、

$$\sin x=0+x-0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}-0-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cdots+\begin{cases}R_{2k}(x)\\ 0+R_{2k+1}(x)\end{cases}$$

とかけて、

$$\begin{cases} R_{2k}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{(2k)!}\sin\theta x \quad \to 0 \quad (k \to \infty) \\ R_{2k+1}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta' x \quad \to 0 \quad (k \to \infty) \end{cases}$$

$$\left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0 \text{ で} n = 2k, 2k+1 \text{ として}\right)$$

となるので、$\sin x$は各xで Maclaurin 展開可能で、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

(例Ⅲ) $f(x) = \cos x$とする

$$f'(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(5)}(x) = -\sin x, \cdots$$
$$f''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \cos x, f^{(6)}(x) = -\cos x, \cdots$$

により、

$$\begin{cases} f^{(2k)}(x) = (-1)^k\cos x \\ f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k\sin x \end{cases}$$

となるので、(例Ⅱ)同様、$\cos x$は Maclaurin 展開可能で、

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

(例IV) $f(x)=\ln(1+x)$とする

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}, f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}, f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{3\cdot 2}{(1+x)^4}, f^{(5)}(x)=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{(1+x)^5}, \cdots$$

よって、

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

で、(定理 6.1)により、

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n(x)$$

但し、

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{n!}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta x)^n}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

$0<x\leqq 1$なら、$0<\frac{x}{1+\theta x}<1$となって、$R_n(x)\to 0\quad(n\to\infty)$とかけるが、$-1<x\leqq 0$では、これを示すのは難しい(Cauchy の剰余を用いる手もある)。

そこで、

$$\{\ln(1+x)\}'=\frac{1}{1+x}$$

を無限等比級数の和とみて、

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

とみれば、項別積分定理より$|x|<1$で$1+x>0$で

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\,dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

となって、

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-x)^{n-1}}{n}+\cdots$$

(ここで$x=1$とすると、

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots=\ln 2$$

を得る。)

㊟

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$\left(\because \ \int_0^x f'(t)\,dt = [f(t)]_0^x\right)$$

(例Ⅴ) 拡張された二項定理

$f(x) = (1+x)^a$とおくと、

$f'(x) = a(1+x)^{a-1}, f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}, \cdots, f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)x^{a-n}, \cdots$

とかけるので、

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

とかくとして、$f(x)$のべき級数展開となりそうな無限級数

$$S(x) = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

を作る。

第2講における「項比判定法」により、収束半径をrとして、

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{n+1}{a}}{\binom{n}{a}} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n! \cdot a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(a-n)}{(n+1)! \cdot a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a-n}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{a}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} \right| = |-1| = 1$$

よって、

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

は、収束半径を1とし、$|x| < 1$で、

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{a}{n} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{a}{n+1} x^n$$

ここで、

$$(n+1)\binom{a}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)!} a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}(a-n) = (a-n)\binom{a}{n}$$

なので、

$$(n+1)\binom{a}{n+1}+n\binom{a}{n}=a\binom{a}{n}$$

よって、

$$(1+x)S'(x)=S'(x)+xS'(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{a}{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{a}{n}x^n$$

$$=1\cdot\binom{a}{n}\cdot x^0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+1)\binom{a}{n+1}+n\binom{a}{n}\right\}x^n$$

$$=a+\sum_{n=1}^{\infty}a\binom{a}{n}x^n=a\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n=aS(x)$$

結果、$|x|<1$で、

$$\frac{S'(x)}{\mathrm{S}(x)}=\frac{a}{1+x}$$

ゆえ、

$$\ln|S(x)|=a\ln|1+x|+C=\ln e^C|1+x|^a$$

$A=\pm e^C$として、$S(x)=A(1+x)^a$、$S(0)=1$だったので、$A=1$

$$\therefore (1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$

$$=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

6-2 次の各関数の$|x| < 1$での Maclaurin 展開を、無限等比級数の利用から求めよ。

(1) $\frac{1}{1-x}$

(2) $\frac{1}{(1-x)^2}$

(3) $\frac{1}{1+x^2}$

(4) $\tan^{-1} x$

(解答)

6-3 次の関数の漸近展開を$O(x^3)$によって表せ。

(1) $\sqrt{1+x}$

(2) $\sqrt[3]{1+x}$

(3) $e^{-x}\sin x$

(4) $\tan^{-1} x$

(解答)

6-4 次の極限を漸近展開して求めよ。

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

(解答)

6-5 関数$\ln\frac{1+x}{1-x}$の有限 Maclaurin 級数を求め、$2n+2$、次の剰余項$R_{2n+2}(x)$について、

$$\left|R_{2n+2}\left(\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{2}{2n+3}\left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}$$

となることを示せ。

さらに上で$n=4$の時を考えて、多項式から$\ln 2$の近似値を求め、その誤差を簡単に評価せよ。

(解答)

第 7 講　定積分、原始関数と不定積分 ---------------------

7-1 定積分のコンセプト

時刻xにおいて、位置$X = F(x)$にある動点Pの、各xでの瞬間速度が$f(x)$だったとする。

このとき、$x: a \to b$のときのPの位置の「総変化」を計算したい。$[a, b]$を微細に分割して、その各分割の幅をdx(秒)とすれば、各分点xからの、dx秒間の移動量dFは、

$$dF = f(x)dx$$

これを、$[a, b]$全域にわたって「総和」し「統合する」と、それが総変化$F(b) - F(a)$となるので、これを$F(x) = f(x)$のもとで

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

とかいて、$f(x)$の「定積分」と呼ぶ。

7-2 定積分の定義

定義 7.1

$[a, b]$をn個の区間に分割して、その分点を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = b$$

となるように、$(x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n)$をとる。

このとき、$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$について、

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqq k \leqq n} \Delta x_k = 0$$

となるように分割するとする。

このとき、$I_k = [x_{k-1}, x_k]$内の点を 1 つ任意に、$x = \xi_k \in I_k$ととるとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

と定め、これを「$f(x)$の定積分」と呼ぶ。

・$y=f(x)$のグラフと、$\int_a^b f(x)\,dx$の関係

$I_k=[x_{k-1},x_k]$において、$f(\xi_k)\Delta x$は、幅Δx_kの微小長方形と考えられる。
よって、その総和極限である

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

は、$y=f(x)$の$a\leqq x\leqq b$の部分とx軸とがはさむ領域の「面積」(負値も許して)と解釈できる。

定理 7.1

Ⅰ

$$\int_a^b \{\alpha f(x)+\beta g(x)\}\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Ⅱ

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$

Ⅲ

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$$

Ⅳ　$a\leqq x\leqq b$で常に$f(x)\leqq g(x)$ならば、

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx$$

(演習 7-6 参照)

7-3 微分積分学の基本定理

定理 7.2

連続関数$f(x)$に対して、

1. $F(x) = f(x)$ならば、(そうなる関数$F(x)$がとれるならば)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + F(a) \quad \cdots (7.3.1)$$

2.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \quad \cdots (7.3.2)$$

(各xに対して$\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ がとれれば)

(1.の証明)

(補助定理) 積分の平均値の定理

$a < b$のとき、$[a,b]$で連続な関数$f(x)$に対して、

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots (7.3.3)$$

をみたす$c \in [a,b]$がとれる。

㊟ $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$と考えよう。

(イメージ)

となるcがとれる。

(証明)

(2.の証明)

定義 7.2	原始関数と不定積分(primitive function and indefinite integral)

1. 微分して$f(x)$となる関数を「$f(x)$の原始関数」という。
2. $f(x)$の原始関数を 1 つとり、そこに任意定数Cを加えた
を、「$F(x)+C$を$f(x)$の不定積分」と呼び、$\int f(x)\,dx = F(x)+C$とかく。 …(7.3.6)

㊟ $f(x)$の原始関数は定数項の差異をのぞけば一意に定まる。

$$
\left(
\begin{array}{c}
\because \text{ もし} F'(x)=G'(x)=f(x) \text{とすると、} h(x)=F(x)-G(x) \text{に対して、常に} h'(x)=0 \\
a \text{を 1 つ固定して、} h(a)=c \text{とおく、} \\
a \text{でない任意の} x \text{に対して、MVT より} \\
\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(c) \text{となる} c \text{がとれて、} \\
h'(c)=0 \text{ なので } h(x)=h(a)=c \\
\text{すなわち任意の} x \text{で} F(x)=G(x)+c
\end{array}
\right)
$$

例題 7-1 Cauchy-Schwarz の不等式

連続関数$f(x), g(x)$に対して、すべての$x \geqq 0$で、次が成り立つことを示せ。

$$\left(\int_0^x f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqq \left(\int_0^x f(t)^2\,dt\right)\left(\int_0^x g(t)^2\,dt\right) \quad \cdots (7.3.7)$$

(解答)

7-3 積分公式

公　式	積分公式

1.

$$\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C \quad (p \neq 1)$$

2.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

3.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

4.

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

5.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

6.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

7.

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

8.

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

㊟

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(-\frac{1}{\tan x}\right)' = \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = \sec x \\ \dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x \\ \dfrac{1}{\tan x} = \cot x \end{cases}$$

(例)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = \left[-\frac{\cos x}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

㊟

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$((a^x)' = a^x \ln a)$$

$$\int \log_a x \, dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} dx$$

公　式	逆三角関数の積分表示

1.

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

2.

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

∵ 1.

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$$

∴

$$\cos y = \frac{dx}{dy}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\because \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{で考えて、} \cos y > 0\right)$$

$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$となって、

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dt = \sin^{-1} x - \sin^{-1} 0 = \sin^{-1} x \quad \cdots \square$$

$$\left(\begin{array}{l} ㊟\ F'(x) = f(x)\text{のとき、} \\ \int_a^x f(t)\, dt = \mathrm{F}(x) - F(a) \end{array}\right)$$

2.

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$$

∴

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{dx}{dy}$$

$$\left(1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

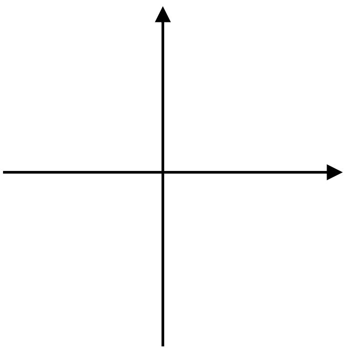
なので、

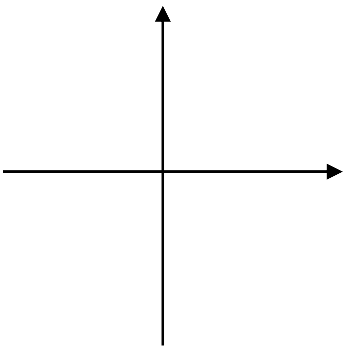
$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

となって、

$$\int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt = \tan^{-1} x - \tan^{-1} 0 = \tan^{-1} x \quad \cdots \square$$





例題 7-2

(1)

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x}}dx$$

(2)

$$\int_1^2 \left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

(3)

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$$

(4)

$$\int_1^2 \frac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}dx$$

例題 7-3

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \, dx$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \, dx$$

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos x \, dx$$

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 2x} dx$$

(5)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

(6)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \tan^2 x) \, dx$$

例題 7-4 $a > 0$とする。

(1)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

(2)

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

例題 7-5

(1)

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x-1}$$

(2)

$$\int_{0}^{2} \frac{dx}{3-x}$$

(3)

$$\int_{0}^{1} \ln(x+1)\,dx$$

(4)

$$\int_{1}^{2} \log_2 x\,dx$$

例題 7-6

$$\int_0^2 |x-1|\,dx$$

を求めよ。

(解答)

7-4 区分求積法の公式

公　式　**区分求積法の公式**

・$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + \Delta x$とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

特に$[a,b] = [0,1]$とすると、$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}$なので、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \cdots (7.4.1)$$

例題 7-7

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{3n}}{n\sqrt{n}}$$

例題 7-8

$[0,\pi]$における連続関数$f(x)$に対し、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx \quad \cdots (7.4.2)$$

(証明)

演習問題 7

7-1 $m, n \in \boldsymbol{N}$のとき、

$$J = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

を求めよ。

(解答)

7-2

(1)

$$\int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x}\right)^3 dx$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

(3)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^2}$$

7-3

(1)

$$\int_0^{\pi} \left(\cos x + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos x + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right) dx$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \, dx$$

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta \, d\theta$$

7-4

(1)

$$\int_0^1 (1 - 2^x)\, dx$$

(2)

$$\int_3^4 \ln(x^2 - 3x + 2)\, dx$$

7-5

(1)

$$\int_0^3 |x^2 - 3x + 2|\, dx$$

(2)

$$\int_1^{e^2} |\ln x - 1|\, dx$$

(3)

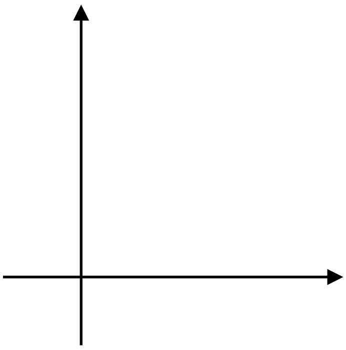
$$\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\, dx$$

7-6

$[a,b]$で連続な$f(x)$が、ここで$f(x) \geqq 0$ではあるが、$f(c) > 0$となる定数cが(a,b)の中にとれるとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \quad \cdots (*)$$

となることを示せ。



(証明)

第 8 講　置換積分法、部分積分法 -------------------------

8-1 置換積分法

「合成関数の微分法(連鎖律)」から次が成り立つ。

定理 8.1

$x(t)$を閉区間IでC^1級として、$x(I)$を含む閉区間で$f(x)$が連続であるとすると、

$$(\mathrm{I})\int f(x)\,dx=\int f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt$$

$$(\mathrm{II})\int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

但し、$\alpha,\beta\in I$かつ$a=x(\alpha),b=x(\beta)$

(証明)

ここで、「形式的に」

$x=x(t)$のとき、$\frac{dx}{dt}=x'(t)$ゆえ、$dx=x'(t)dt$とかけば、

$$\int f(x)\,dx=\int f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt$$

とかけて、大変都合がよろしい。

これを用いて、様々な積分計算ができる。

1. (消極型置換積分法)

被積分関数があるxの敷$u(x)$の関数と、$u'(x)$の積となっているとき、

(例)

$$\int \sin(x^2+1)\cdot 2x\,dx=\int \sin u\,du$$

$$\left(\begin{array}{c}\because u=x^2+1\text{ として、}\dfrac{du}{dx}=2x \\ \text{ゆえ }2xdx=du\text{とかける。}\end{array}\right)$$

・$u=u(x)$とおくと、$\frac{du}{dx}=u'(x)$より$u'(x)dx=du$

$$(\mathrm{I})\int f\big(u(x)\big)u'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

$$(\mathrm{II})\int_{\alpha}^{\beta} f\big(u(x)\big)u'(x)\,dx=\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(u)\,du$$

2. (積極型置換積分法)

被積分関数$f(x)$を、そのままxで積分するのが困難なとき、xを何かtの式$x(t)$におきかえて、すべてtで積分しなおす法。

(例) $u=\sqrt{x+1}$として、$x=u^2-1$ $\therefore dx=2udu$

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{(u^2-1)^2+1}{u}\cdot 2u\,du$$

$$=2\int (u^4-2u^2+2)\,du$$

・$x=x(t)$とおくと、$\frac{dx}{dt}=x'(t)$より$dx=x'(t)dt$

$$(\mathrm{I})\int f(x)\,dx=\int f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt$$

$$(\mathrm{II})\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt$$

但し、$a=x(\alpha),b=x(\beta)$

(例 1.消極型置換積分法)

(1)

$$\int 3x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^{x^3}(3x^2dx) = \int e^u\,du = e^u + C$$

$$\begin{pmatrix} \because x^3 = u\text{として、}3x^2 = \dfrac{du}{dx} \\ \therefore 3x^2dx = du \end{pmatrix}$$

(2)

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-du}{u}$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$\begin{pmatrix} \because \cos x = u\text{として、}-\sin x = \dfrac{du}{dx} \\ \therefore \sin x dx = -du \end{pmatrix}$$

公式

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

(3)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{2\cos^2 x\frac{x}{2}}$$

$$= \ln\left|\tan\tfrac{x}{2}\right| + C$$

$$\left(\because \tan\frac{x}{2} = u\text{として、}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{du}{dx}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \text{㊟}\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{-dt}{1-t^2} \\ \displaystyle = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\ \displaystyle = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C \end{pmatrix}$$

(4)

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \int_1^e (\ln x)^3\cdot\frac{1}{x}dx = \int_0^1 u^3\,du = \frac{1}{4}$$

$$\begin{pmatrix} \because \ln x = u\text{として、}\dfrac{1}{x} = \dfrac{du}{dx} \\ \therefore \dfrac{1}{x}dx = du \end{pmatrix}$$

$$\left(㊟\int_1^e (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}dx = \left[\frac{1}{4}(\ln x)^4\right]_1^e = \frac{1}{4}\right)$$

(5)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = [-\ln|e^{-x}+1|]_0^1$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{e}+1\right| + \ln 2 = \ln\frac{2e}{e+1}$$

(6)

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} x\ln(x^2+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\{(x^2+1)\ln(x^2+1)-(x^2+1)\}\right]_0^{\sqrt{e-1}}$$

$$\frac{1}{2}(e\ln e - e + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} ㊟\ u = x^2+1 \text{ として、} du = 2xdx \text{なので} \\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} x\ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} \ln u\,du \end{array}\right)$$

(7)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \mathrm{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^2 t)\cdot \sin t\,dt$$

$$= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-u^2)\,(-du)$$

$$= \left[-u+\frac{1}{3}u^3\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12}\sqrt{2}$$

(8)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^2(1-u^2)\,du = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (u^2-u^4)\,du$$

$$\left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{160} = \frac{11\sqrt{3}}{160}$$

(例 2.消極型置換積分法)

(定石 1) $\sqrt{ax+b}$を含む形⇒$u=\sqrt{ax+b}$とおけ。

(1)

$$\int_2^3 \sqrt{2x-3}\,dx=\int_2^3 u^2\,du=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

$$\left(\begin{gathered}\because u=\sqrt{2x-3}\text{として、}x=\frac{1}{2}(u^2+3)\\ \therefore dx=udu\end{gathered}\right)$$

(2)

$$\int_1^2 (x^2+x+1)\sqrt{x-1}\,dx$$

$$=\int_1^2 \left\{\left(u^2+1\right)^2+\left(u^2+1\right)+1\right\}\cdot u\cdot 2udu$$

$$=2\int_0^1 \left(u^6+3u^4+3u^2\right)du=\frac{122}{35}$$

$$\left(\begin{gathered}\because u=\sqrt{x-1}\text{として、}x=u^2+1\\ \text{ゆえ、}dx=2udu\end{gathered}\right)$$

(定石 2) $\sqrt{a^2-x^2}$を含む形⇒$x=a\sin\theta$とおけ。

(3)

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(4)

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-2x-x^2}\,dx=\int_{-1}^0 \sqrt{2-(x+1)^2}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\cos^2\theta}\,\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)\,dx$$

$$\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{4}$$

$$\left(\because x+1=\sqrt{2}\sin\theta\text{として、}dx=\sqrt{2}\cos\theta d\theta\right)$$

$$\left(\begin{gathered}x:-1\to 0\\ \sin\theta: 0\to\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \theta: 0\to\frac{\pi}{4}\end{gathered}\right)$$

(定石 3)

$$\frac{1}{a^2+x^2}\text{を含む形} \Rightarrow x = a\tan\theta\text{とおけ。}$$

(5)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\because x = \tan\theta\text{として、}dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x: 0 \to 1 \\ \tan\theta: 0 \to 1 \\ \theta: 0 \to \dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

(6)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+(x-1)^2}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\because x-1 = \tan\theta\text{として、}dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x: 0 \to 1 \\ \tan\theta: -1 \to 0 \\ \theta: -\dfrac{\pi}{4} \to 0 \end{pmatrix}$$

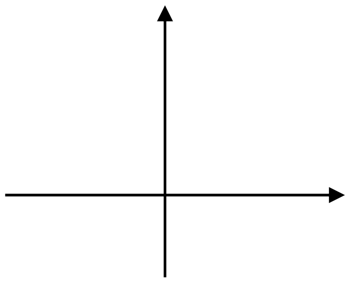
(定石 4)

$$\sqrt{x^2+a^2}\text{を含む形} \Rightarrow t = x + \sqrt{x^2+a^2}\text{とおけ。}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{㊟ } y = \sqrt{x^2+a^2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -a^2, y \geqq 0 \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{a^2}{t}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{a^2}{t}\right) \end{cases} \text{とかける。} \\ 2x = t - \dfrac{a^2}{t}\text{より}t^2 - 2xt - a^2 = 0 \\ t = x \pm \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right)$$

(参考)

$$\begin{cases} \cosh\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right) \\ \sinh\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) \end{cases}$$



(7)

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

について$(a>0)$

$t=x+\sqrt{x^2+a^2}$とおくと$t>0$で、$x^2+a^2=t^2-2xt+x^2$より、

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)$$

よって、

$$\sqrt{x^2+a^2}=t-x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)$$

また、

$$dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\int \frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t+a^4t^{-3}+\frac{2a^2}{t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{a^4}{2}\cdot\frac{1}{t^2}+2a^2\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)+C$$

$$\left(\begin{array}{c}㊟\ \sqrt{x^2+a^2}\geqq\sqrt{x^2}=|x|\geqq -x\\ \therefore x+\sqrt{x^2+a^2}\geqq x+|x|\geqq 0\end{array}\right)$$

(8)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)}dt$$

$$=\int\frac{\frac{t^2+a^2}{t^2}}{\frac{t^2+a^2}{t}}dt=\int\frac{dt}{t}$$

$$=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

$t=x+\sqrt{x^2+a^2}$として、

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right),dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$

$$=\sqrt{x^2+a^2}=t-x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)$$

(定石 5)

$$\sqrt{x^2-a^2}\text{を含む形} \Rightarrow t=x+\sqrt{x^2-a^2}\text{とおけ。}$$

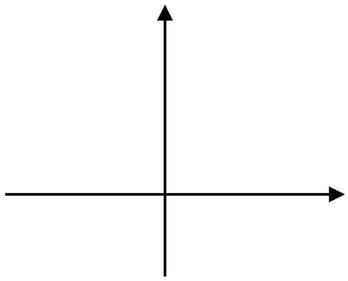
(9)

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

において、$(a>0)$

$t=x+\sqrt{x^2-a^2}$とおくと、$t\neq 0$で、$x^2-a^2=t^2-2xt+x^2$により、

$$x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)$$



よって、

$$\sqrt{x^2-a^2}=t-x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)$$

$$dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\int\left(t-\frac{a^2}{t}\right)\left(1-\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t+a^4t^{-3}-\frac{2a^2}{t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{a^4}{2}\frac{1}{t^2}-2a^2\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{1}{2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)-\frac{a^2}{2}\ln|t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)+C$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{注}\ |x|\geqq a\text{のもとで、}0\leqq\sqrt{x^2-a^2}<\sqrt{x^2}=|x|\\ \text{よって、}x\geqq a\text{で}t>0,x\leqq -a\text{で}t<0\end{array}\right)$$

(10) (9)と同様に$t=x+\sqrt{x^2-a^2}$として、$x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)$

$$\sqrt{x^2-a^2}=t-x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)$$

$$dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$

$$\therefore\ \int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)}{\frac{1}{2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)}dt$$

$$=\int\frac{\frac{t^2-a^2}{t^2}}{\frac{t^2-a^2}{t}}dt=\int\frac{1}{t}\mathrm{dt}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

(定石 6) $\sin x$と$\cos x$の有理式⇒ $t=\tan\frac{x}{2}$とおけ。

・$t=\tan\frac{x}{2}$とおくと、

$$1+t^2=1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

により、

$$\begin{cases}\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{2}{1+t^2}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$$

(11)

$t=\tan\frac{x}{2}$とおくと、$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$で、

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1+t^2}{2}$$

より、

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\therefore \int \sec x\,dx=\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{2}{1-t^2}dt=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|+C$$

$$=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

(12)

$t=\tan\frac{x}{2}$として、

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$$

で、

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1+t^2}{2}$$

により、

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int_0^1\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt$$

$$=\int_0^1\frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t}\,dt$$

$$=[\ln|1+t|]_0^1=\ln 2$$

8-2 部分積分法

定理 8.2

$I=[a,b]$で、連続な$f(x)$が原始関数$F(x)$をもち、かつ$g(x)$がここでC^1級のとき、

（Ⅰ）

$$\int f(x)g(x)\,dx=F(x)g(x)-\int F(x)\,g'(x)dx$$

（Ⅱ）

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=[F(x)g(x)]_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

(証明)

例題 8-1

(1)

$$\int x\cos x\,dx$$

(2)

$$\int x^2 e^x\,dx$$

(3)

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

(演習問題 8-8 参照)

公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=(-1)^n\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

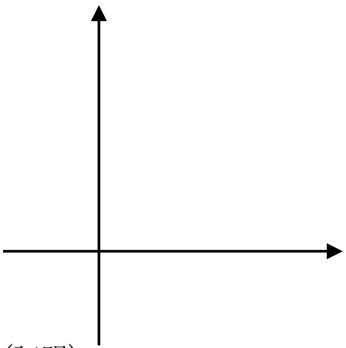
$\because$ 演 8-8 で、$u=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ とせよ。

公式

$I=[a,b]$で、狭義単調な連続関数$f(x)$に対して、

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(x)\,dx=bf(b)-af(a)$$

・(イメージ)



(証明)

（定石 7）xは微分側へまわすか、$u = \ln x$とおけ。($e^u = x$)

例題 8-2

(1)

$$\int \ln x \, dx$$

(2)

$$\int x \ln x \, dx$$

(定石 8) $\tan^{-1} x, \sin^{-1} x$は微分側へ回すか、$u = \tan^{-1} x, u = \sin^{-1} x$とおけ。

例題 8-3

(1)

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin^{-1} x \, dx$$

例題 8-4 nを自然数として、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mathrm{n}} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mathrm{n}} x\,dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n\text{: 偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n\text{: 奇数}) \end{cases}$$

を示せ。但し、

$$n!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots\cdots (n-2) \cdot n & (n\text{: 偶数}) \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots\cdots (n-2) \cdot n & (n\text{: 奇数}) \end{cases}$$

(解答)

定理 8.3　**Taylor の定理(2)**

IでC^{n+1}級な$f(x)$について、$a, x \in I$とすると、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

但し、

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$$

とかける。$\cdots$(8.2.5)

(証明)

演習問題 8

8-1

(1)

$$\int_0^1 (3x^2+1)\sqrt{x^3+x+2}\,dx$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin x}}\,dx$$

(解答)

8-2

(1)

$$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

(2)

$$\int x\sin^{-1}x\,dx$$

(3)

$$\int \sin(\ln x)\,dx$$

(解答)

8-3

(1)

$$\int_0^1 \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}dx$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{x^3+2x^2-6}{x^2-x-2}dx$$

(解答)

8-4

(1)

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

(2)

$$\int_0^{a^2} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

(3)

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(4)

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

(5)

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1 - 2x - x^2}\, dx$$

(6)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$$

8-5

(1)

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$$

(2)

$$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$$

(解答)

8-6

$t=x+\sqrt{x^2+1}$として、$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$

(1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2)

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$$

8-7 nを自然数とする。

(1)

$$\int_0^1 x^4 e^x \, dx$$

(2)

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$$

として、$I_n + nI_{n-1}$

(解答)

8-8 m, nを自然数とする。

(1)

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$$

(2)

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$$

(解答)

8-9

$f(x)$は$[0,\pi]$でC^1級とする。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\, dx = 0$$

(証明)