第 1 章　行列とその計算 --

●行列

定義 1.1　行列 matrix

$m \times n$ 個の数$a_{i,j}$(i=1,2,…m,j=1,2,…,n)を

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

のように並べたものを $m \times n$ 型の行列という。

これを A とすると$a_{i,j}$を行列 A の(i,j)成分という。

また A は、$A = [a_{i,j}]_{m \times n}$などと略記することもある。

[注]

行列 A,B が等しい(A=B)とは

A と B が同じ $m \times n$ 型の行列で

同じ成分はどれも等しいことである。

例 1.2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$は______行列で

(1,2)成分は___,(2,1)成分は___。

●行列の計算

	国	数
A	30	100
B	60	80
C	80	70

テスト①

	国	数
A	50	90
B	60	30
C	60	50

テスト②

合計

平均

Q 和は______

Q スカラー倍は______

	国	数
A	30	100
B	60	80
C	80	70

	大学 U	大学 V
国	1	1
数	1	2

合計

定義 1.4	さまざまな行列

■零行列（zero matrix）

すべての成分が 0 の行列を零行列といい、$\boldsymbol{O}$ で表す。

例

■正方行列（square matrix）

$m \times n$ 行列を n 次正方行列という。

例

■対角行列（diagonal matrix）

対角成分以外が全て 0 の正方行列を対角行列という。

例

■単位行列（identity matrix）

対角成分が全て 1 の対角行列を単位行列といい、E で表す。

例

[注]

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1(i = j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$$

をクロネッカーのデルタという。

これを用いると、

$$E_n = \left(\delta_{i,j}\right)_{n \times n}$$

である。

●O と E の性質

定理 1.5

$\boldsymbol{O}$ は A と同じ型の行列とし

$$\boldsymbol{O} + A = A + \boldsymbol{O} = A$$

が成立。また A、 $\boldsymbol{O}$ を n 次正方行列とすれば

$$A\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}A = \boldsymbol{O}$$

が成立。

また、$\boldsymbol{O}$ を n 次正方行列とし

$$AE = EA = A$$

が成立。

●行列の計算法則

計算できる行列 A,B,C では

基本事項　行列の計算法則

$A + B = B + A$(和の交換律)

commutative law

$$\begin{cases} (A+B)+C = A+(B+C) \\ (AB)C = A(BC) \end{cases} \text{(結合律)}$$

associative law

a,b をスカラーとし

$$\begin{cases} a(A+B) = aA + aB \\ (a+b)A = aA + bA \\ A(B+C) = AB + AC \\ (A+B)C = AC + BC \end{cases} \text{(分配律)}$$

distributive law

※

例　以下をみたす 2 次正方行列 A,B の例を 1 つだせ。

(1) $AB \neq BA$

(2) $AB = BA$

例　A, B, E は n 次正方行列

(1)　$(A+2E)(A+3E)$

[注]

(2)　$(A+B)^2$

[注]

例

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdots ① \\ X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdots ② \end{cases}$$ のとき、X^2-Y^2 は？

＊$AB = \boldsymbol{O} \Rightarrow A = \boldsymbol{O}$または$B = \boldsymbol{O}$は偽

＊これから A、E を 2 次正方行列とし

$A^2 - 5A + 6E = \boldsymbol{O}$

●逆行列

定義 1.5	逆行列 inverse matrix

n 次正方行列 A に対し

n 次正方行列 X が

$$AX = XA = E$$

となるようにとれるとき、A に逆行列A^{-1}が存在するという。

このときの X がA^{-1}である。

例　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$の逆行列 A^{-1} が存在することを示し、A^{-1} を求めよ。

定理 1.6

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の逆行列は

$$ad - bc \neq 0$$

のときに存在し

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例　A に逆行列が存在するときは求め、なければ「ない」とこたえよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

定理 1.7

n 次正方行列 A に逆行列があるなら、それは 1 通り

第 2 章　連立 1 次方程式・逆行列①　------------------------------

●連立 1 次方程式

例$\begin{cases} 2x+5y=6 \\ 5x+12y=2 \end{cases}$を解け。

●係数行列、拡大係数行列

定義 2.1

$x_1, x_2, \cdots, x_n$についての連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と同値。

この連立方程式に対して

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を係数行列（coefficient matrix）と定義。

また

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

としたら、連立方程式は$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$で

$$(A \vdots b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_n \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列（expansion matrix）と定義。

例

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$ の係数行列、拡大係数行列を求めよ。

●行基本変形

基本事項

連立方程式の同値変形として k を定数とし

$$\begin{cases} f=0 \\ g=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=0 \\ kf+g=0 \end{cases}$$

がある。

[証明]

これを用いて

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 5x+3y=7 \end{cases}$$

定義 2.2　行基本変形

$$\begin{cases} \text{1. 1 つの行を 0 でない定数倍する。} \\ \text{2. 2 つの行を入れ替える。} \\ \text{3. ある行の定数倍を他の行に加える。} \end{cases}$$

を行基本変形と定義。

また A を（何度か）行基本変形し、行列 B になるとき$A \sim B$と書く。

例

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -7 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$を解け。

例

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$を解け。

[注]

定義 2.3　簡約な行列

ある行列が

（I）すべて 0 の行の下はすべて 0

（II）ある行の成分を左からみていくときにはじめてでてくる 0 でない数は 1

（III）第i行の主成分が$j(i)$列目にでてくるとき、$j(1) < j(2) < \cdots$が成立

（IV）主成分を含む列の主成分以外の成分は 0

の 4 つをみたすとき、それを簡約な行列という。

また、行列 A から行基本変形を用い、簡約な行列 B つくることを A を簡約化するといい、B を A の簡約化という。

例　簡約なら〇をつけ、そうでなければ簡約化

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 2.4

行列 A は行基本変形で簡約化でき、それは一意

定義 2.5　**階数（rank）**

行列 A の簡約化を B とするとき、行列 A の階数$\mathrm{rank}(A)$を

$$\mathrm{rank}(A) = (B\text{の主成分の個数})$$

と定義。

例　次の行列を簡約化し、階数を答えよ。

（1）　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

（2）　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

まとめ	簡約化の手法

できるだけ左に 1 をつくる

↓

その 1 で上下の行の数を 0 に

↓

階段になるよう、上にもってく。

→これを繰り返す。

●連立方程式の解法

例　次の方程式をとけ

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

定理 2.6

行列 A が$m \times n$行列のとき、$\begin{cases} \mathrm{rank}(A) \leqq m \\ \mathrm{rank}(A) \leqq n \end{cases}$

定理 2.7

A を$m \times n$行列とするとき、

1.$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の解が存在するのは

$$\mathrm{rank}(A \vdots \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}(A)$$

2.上の解が 1 つだけなのは

$$\mathrm{rank}(A \vdots \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}(A) = n$$

定理 2.8

A を$m \times n$行列とする。

同次型の連立 1 次方程式

$Ax = \boldsymbol{O}$の解が自明な解$(\boldsymbol{x} = \mathbf{0})$のみであるのは、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

第 3 章　連立 1 次方程式・逆行列②　------------------------------

＜復習＞

定義 1.6

A を n 次正方行列とする
n 次正方行列 X が

$$AX = XA = E$$

をみたすとき、X は A 逆行列といい、X を A^{-1} と表す。

●逆行列の求め方（方法のみ）

例　$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列があれば求めよ。

例　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ の逆行列があれば求めよ。

まとめ

n 次正方行列 A の逆行列を調べるとき、A の簡約化を B とし $(A|E)$ を考え

$$(A|E) \sim (B|\blacksquare)$$

と変形。

1. $B = E$ なら A^{-1} が存在し、$A^{-1} = \blacksquare$
2. $B \neq E$ なら A^{-1} が存在しない。

●正則（non-singular,regular）

定義 3.1　正則

A を n 次正方行列とする。

A が逆行列をもつとき、A を正則な行列と定義。

定理 3.2

A,B を n 次の正則な行列とするとき

① A^{-1}は正則で$(A^{-1})^{-1}=A$

② AB は正則で$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

[証明]

定理 3.3

A を n 次正方行列とする。

A のある行の成分が全て 0

⇒A は正則ではない。

[証明]

●基本行列（elementary matrix）

定義 3.4

以下の 3 種類の正方行列を基本行列という。

1．$P_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (c \neq 0)$

2．$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \square & \square & \vdots & \square & \square & \square & \vdots & \square & \square & \square \\ \square & \ddots & \square & \vdots & \square & \square & \square & \vdots & \square & \square & \square \\ \square & \square & 1 & \vdots & \square & \square & \square & \vdots & \square & \square & \square \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \square & \square & \square & \vdots & 1 & \square & \square & \vdots & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \vdots & \square & \ddots & \square & \vdots & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \vdots & \square & \square & 1 & \vdots & \square & \square & \square \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \square & \square & \square & \vdots & \square & \square & \square & \vdots & 1 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \vdots & \square & \square & \square & \vdots & \square & \ddots & \square \\ \square & \square & \square & \vdots & \square & \square & \square & \vdots & \square & \square & 1 \end{pmatrix}$

3．$R_{ij}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 1 & \square & \vdots & \square & \square & \vdots & \square & \square \\ \square & \ddots & \vdots & \square & \square & \vdots & \square & \square \\ \square & \square & 1 & \cdots & \cdots & c & \cdots & \cdots \\ \square & \square & \square & \ddots & \square & \vdots & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \ddots & \vdots & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & 1 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \vdots & \ddots & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \vdots & \square & 1 \end{pmatrix}$

行列 A にそれぞれ左からかけて、

まとめ

1. $P_i(c)$は A のi行目をc 倍$(c \neq 0)$
2. Q_{ij}は A のi, j行目を入れかえ
3. $R_{ij}(c)$は A のi行目にj行目の c 倍を加える

→基本行列を左からかけることが行基本変形と対応！

例

(1)2 行目を 4 倍したい。

(2)2、3 行目をいれかえたい。

(2)1 行目に、3 行目の 2 倍を加えたい。

定理 3.5

A の簡約化が B のとき、ある基本行列$P_1, P_2, \cdots, P_n$を用い

$$P_n P_{n-1} \cdots P_1 A = B$$

とかける。

[証明]

定理 3.6

基本行列は正則で、逆行列も基本行列

[証明]

※

まとめ

$P_{\mathrm{i}}(c) \cdots i$行目を$c$倍 $(c \neq 0)$

$Q_{\mathrm{ij}} \cdots i, j$行目を入れかえ

$R_{\mathrm{ij}(c)} \cdots i$行目に$j$行目の$c$倍をたす

定理 3.7

A を n 次正方行列とする。次の 3 つは同値

(1) A は正則

(2) $\mathrm{rank}(A) = n$

(3) A の簡約化は E

[証明]

定理 3.8

正則行列は基本行列の積でかける

[証明]

●逆行列の求め方（理論）

第 4 章　行列式①

●2 次・3 次の行列式

正方行列 A の行列式（determinant）を$\det A$や$|A|$とかく。

定義 4.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

（サラス（Sarus）の公式）

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

●4 次以上の行列式

●置換（permutation）

定義 4.2

$\{1,2,\cdots n\}$から$\{1,2,\cdots n\}$への全単射を、n 文字の置換という。（1 から n を並びかえる操作）

→n 文字の置換は n！通りある。

この置換の 1 つを σ とし

$$\begin{cases} 1 \to k_1(\sigma(1) = k_1) \\ 2 \to k_2(\sigma(2) = k_2) \\ \qquad \vdots \\ n \to k_n(\sigma(n) = k_n) \end{cases}$$

であるとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

とかく。また、n 文字の置換全体の集合をS_nとかく。

例

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 4.3

$\sigma, \tau \in S_n$とする。σとτの積στを$i \in \{1,2,\cdots n\}$とし、

$$(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

で定義。

例

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$のとき、

$\sigma\tau =$

定義 4.4

全ての文字が変化しない置換を単位置換（identity permutation）といい、εで表す。

$\varepsilon \in S_n$なら$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$である。

また、置換σは全単射ゆえ、σ^{-1}が存在し、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

のとき

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

となる。σ^{-1}をσの逆置換（inverse permutation）という。

例

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$のとき

$\sigma^{-1}=$

[注]S_nについて、積がどの2つの元どおしでも定義され

$$\begin{cases} \text{①結合律をもつ、つまり} \\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n \text{とし、} \\ (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3) \\ \text{②単位元が存在(これは}\ \varepsilon) \\ \text{③}\sigma\text{の逆元が存在(これは}\varepsilon^{-1}) \end{cases}$$

より、S_nはこの積を用い、群をなすとわかる。

定義 4.5

$\{1,2,\cdots n\}$のうち、$k_1,k_2,\cdots,k_r$以外はそのままで，$k_1,k_2,\cdots,k_r$を「ずらす」，つまり

$$k_1 \to k_2, k_2 \to k_3, \cdots, k_{r-1} \to k_r, k_r \to k_1$$

とする置換を巡回置換(cyclic permutation)といい

$$(k_1,k_2,\cdots,k_r)$$

とかく。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

定理 4.6

すべての置換は巡回置換の積でかける。

例

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

定義 4.7

2 文字の巡回置換(i,j)を互換（transposition）という。

例（1 2）は互換$\left((1\quad 2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right)$

定理 4.8

(1) $(k_1,k_2,\cdots,k_r)=(k_1k_r)(k_1k_{r-1})\cdots(k_1k_2)$

(2) 任意の置換は互換の積でかける

[証明]

定理 4.9

任意の置換を互換の積でかくとき一意性はないが、互換の個数の偶奇は一致

定義 4.10

$\varepsilon \in S_n$を互換の積で表したときの互換の個数がkコのとき$\mathrm{sgn}(\sigma)$を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

と定義。

また、このkが

$$\begin{cases} \text{偶数のとき、}\sigma\text{ は偶置換といい、}\mathrm{sgn}(\sigma) = 1 \\ \text{奇数のとき、}\sigma\text{ は奇置換といい、}\mathrm{sgn}(\sigma) = -1 \end{cases}$$

である。

[注]定理 4.9 より、写像

$$\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$$

は well-defined。

例

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 9 & 1 & 3 & 4 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

のとき$\mathrm{sgn}(\sigma)$は？

定理 4.11

$\varepsilon, \sigma, \tau \in S_n$とし

(1) $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1 \quad (n \geqq 2)$

(2) $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$

(3) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$

[証明]

定義 4.12　行列式(determinant)

n 次正方行列$A = \left(a_{ij}\right)$に対し、A の行列式$\mathrm{det}A$を

$$\mathrm{det}A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定義。

例

（１）　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & a_{22} \end{pmatrix}$では？

（２）$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$では？

第 5 章　行列式②

＜復習＞

$A=\left(a_{ij}\right)$に対し、A の行列式$\det A$を

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定義。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

定理 5.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \square & \vdots \\ \vdots & \vdots & \square & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \square & \vdots \\ \vdots & \square & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3×3で

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

例

（１）$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$

（２）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$

定理 5.2

上三角行列(upper triangular matrix)の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

定理 5.3　多重線型性 (multilinearity)

(1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[証明]

定理 5.4

(1) 2 つの行をいれかえると行列式は-1 倍、つまり

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \square & \square & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \square & \square & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \square & \square & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \square & \square & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \square & \square & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \square & \square & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 2 つの行が等しい行列の行列式は 0

(3) i行目にj行目のC倍を加えても行列式は同じ。つまり、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{i1} + Ca_{j1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} + Ca_{jn} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \square & \square & \square & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

定理 5.3,5.4 をまとめると

まとめ

(1) ある行をC倍$(C \neq 0)$したら、行列式は

(2) 行のいれかえを行うと行列式は

(3) ある行に他の行のC倍を加えたら、行列式は

となり、これで行基本変形し、上三角行列にすれば OK。

例

(1)$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

定理 5.5

A が正則⇔$\det A \neq 0$

[証明]

定理 5.6

(1) $P_i(c), Q_{ij}, R_{ij}(c)$を基本行列とし

$$\begin{cases} |P_i(c)| = c \\ |Q_{ij}| = -1 \\ |R_{ij}(c)| = 1 \end{cases}$$

(2) Pを基本行列、Aを行列とし

$$|PA| = |P||A|$$

(3) Pを正則行列、Aを行列とし

$$|PA| = |P||A|$$

[証明]

定理 5.7

$$|AB| = |A||B|$$

[証明]

定理 5.8

A が正則であるとき、

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

[証明]

定理 5.9

$$|AB| = |BA|$$

[証明]

例　A を正方行列とする。ある自然数nを用い

$$A^n = \boldsymbol{O}$$

となるならば、A は正則でないことを示せ。

第 6 章　行列式③

●転置行列と行列式

定義 6.1

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

とするとき、

$$^tA=(a_{ji})_{m\times n}$$

と定義。これを A の転置行列（transposed matrix）という。

例

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$なら $^tA=$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$なら $^tA=$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$なら $^tA=$

定理 6.2

A,Bを$l\times m$行列、Cを$m\times n$行列とし

1. $^t(^tA)=A$
2. $^t(^tA+B)={}^tA+{}^tB$
3. $^t(^tAC)={}^tC+{}^tA$

[証明]

定理 6.3

A が正則$\Leftrightarrow {}^{t}A$ が正則

[証明]

定理 6.4

P を基本行列とし、$\left|{}^{t}_{\square}A\right| = |P|$

[証明]

定理 6.5

$$\left|{}^{t}_{\square}A\right| = |A|$$

[証明]

例

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

転置して、行基本変形し、転置とることにより、列基本変形で、行列式は

まとめ

1. ある列を$C(\neq 0)$倍→行列式も C 倍
2. 2 つの列を入れかえ→行列式は-1 倍
3. ある列に他の列の定数倍をたす→行列式はわからない

とわかる。

定理 6.6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[証明]

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

●余因子展開（cofactor expansion）

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

定義 6.7

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$に対し、第$i$行と第$j$列を除いてできる行列を$A_{ij}$とする。

例

$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 4 & 0 & 5\\ 8 & -1 & 4\end{pmatrix}$のとき

A_{11}

A_{23}

定理 6.8

$A=\left(a_{ij}\right)$のi行目の成分が、(i,j)成分以外全て 0 のとき、

$$|A|=(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$$

また、j列目の成分が、(i,j)成分以外全て 0 のとき、

$$|A|=(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 5 & 7\\ 4 & 0 & 8 & 10\end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ddots & & a_{i1}\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

定理 6.9

$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$のとき、

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

これを第i行の余因子展開という。

また、

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

これを第j列の余因子展開という。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

定義 6.10

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$に対し、

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

と定義。これを A の第(i,j)余因子という。

これを用い、A の第i行の余因子展開は

$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\widetilde{a_{ij}}$とかける。

また、A の余因子行列$\tilde{A}$を

$$\tilde{A}={}^{t}(\tilde{a}_{ij})$$

定理 6.11

$$A\tilde{A}=\tilde{A}A=|AE|$$

特に A が正則なとき、

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

[証明]

定理 6.12	Cremer の公式

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$を正則行列、$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$とする。

未知数$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$についての方程式

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

の解は

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とし

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

[証明]

例

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$の解は

例

(1) ヴァンデルモンドの行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2 \\ & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i)$$

を示せ。

(2) a, b, cを相違なる実数とし

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとけ。

第 7 章　ベクトルの内積・外積と図形　---------------------

●ベクトルの内積 (inner product)

$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{a}|cos\theta$$

と定義し、（θ は$\vec{a},\vec{b}$のなす角）

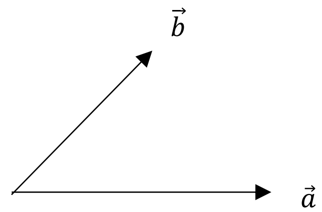
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

として

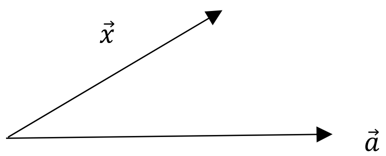
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

になることを学んだ。

＜図形的意味＞



●正射影 (orthogonal projection)



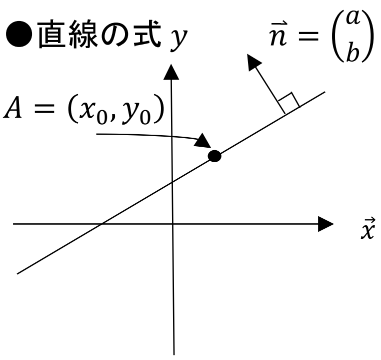
$\vec{a} \neq \vec{0}$とする。

$\vec{a}$に平行なベクトル$\overrightarrow{x'}$で$\left(\vec{x} - \overrightarrow{x'}\right) \perp \vec{a}$となるものを$\vec{x}$の$\vec{a}$への正射影という。

定理 7.1
$\overrightarrow{x'}$を$\vec{x}$の$\vec{a}$への正射影とするとき $$\overrightarrow{x'} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert^2}\vec{a}$$

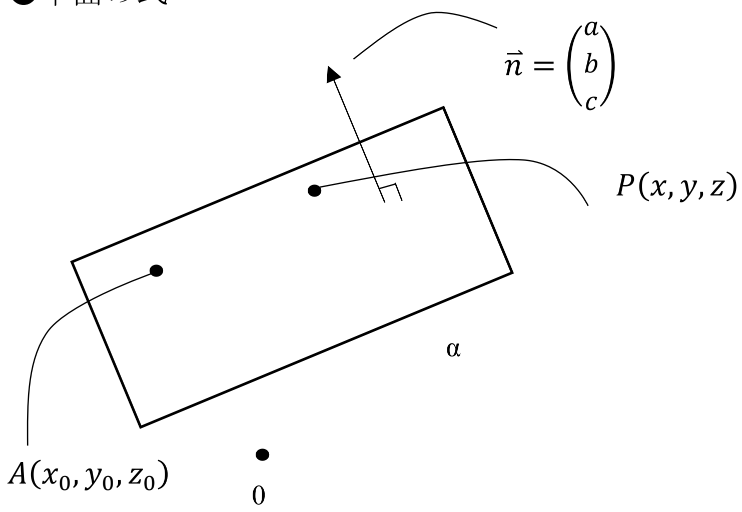
[証明]

●直線の式



xy平面上で点$A(x_0, y_0)$を通り、法線ベクトルが$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(\neq 0)$となると直線の式を考える。

●平面の式



xyz空間で$A(x_0,y_0,z_0)$を通る法線ベクトルが$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\quad(\neq 0)$

となる平面αを考える。

[注]

n次元空間内で、1 次式が表す図形はn次元の図形。

例

$A(1,0,2)$を通る法線ベクトルが、$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$の平面の式は？

●点と平面の距離

定理 7.2

点$A(p,q,r)$と平面$d: ax+by+cz+d=0$の距離hは、

$$h=\frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

※$A(p,q)$と$l: ax+by+c=0$の距離は

$$\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である。

[証明]

例

平面$d: x+2y+3z+5=0$に対し、点$A(1,2,1)$と対称な点Bを求めよ。

●外積（outer product）

定義 7.3

$\vec{a},\vec{b}$を 3 次元のベクトルとし、$\vec{a},\vec{b}$の外積$\vec{a}\times\vec{b}$を

(1) 大きさを$\vec{a},\vec{b}$で張られる平行四辺形の面積

$$\left(\vec{a}\parallel\vec{b} or \vec{a}=\vec{0} or \vec{b}=\vec{0}で大きさ 0\right)$$

(2) 向きを$\vec{a},\vec{b}$の両方と垂直で$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$で右手系をなす向き

の 2 つで定義。

定理 7.4

(1)$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2)$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(3)$(c\vec{a})\times\left(d\vec{b}\right)=(cd)\vec{a}\times\vec{b}$

(4)$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

[証明]

定理 7.5

$\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$とし

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

[証明]

定理 7.6

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$とし

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

〈覚え方〉

その１

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=$$

その２　余因子展開

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=$$

例 O を原点とするxyz空間上の点$A(1,2,1), B(3,4,5)$がある。

（１） $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$の両方に垂直なベクトルを１つ求めよ。

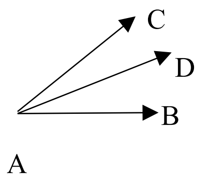
（２） $\triangle OAB$の面積を求めよ。

（３） $C(-2,1,c)$が平面OABに含まれるときのcの値は？

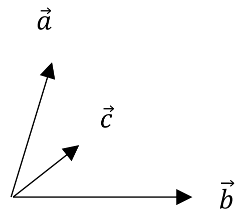
定理 7.7

４点A, B, C, Dが同一平面上にあるとき、

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=0$$



●スカラー三重積



$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$で張られる、平行六面体の体積を考える。

定義 7.8

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$のスカラー三重積を$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$で定義。

定理 7.9

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$として

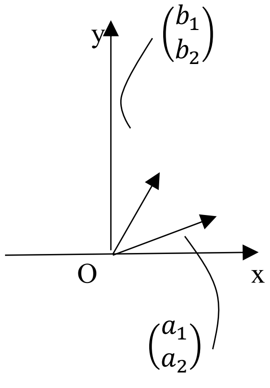
(1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

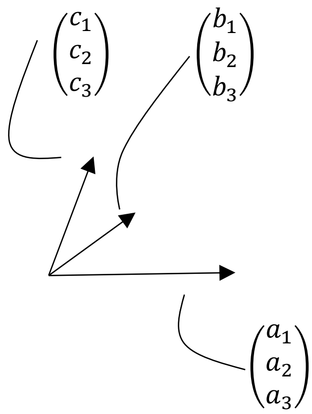
(2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$

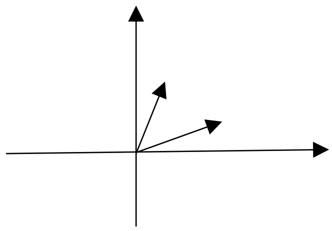
[証明]

すると、行列式は何かしらの体積量を表していそう！



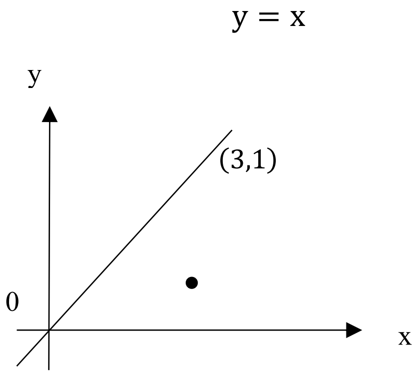


$\rightarrow\begin{cases}\text{ベクトルの関係性}\\ \text{体積のうつりかわり}\end{cases}$ を議論するのに、行列式は役に立つ。



第 8 章　2 次元での線形写像 ------------------------------

●$\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$での線形写像



$y = x$に関する対称移動を考える。

移動前の点を(x, y)、移動後の点を(X, Y)とおくと、

このような

$$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (X, Y)$$

なる写像fで、行列Aを用い、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とできるものを扱う。このときのfを線形写像、Aを表現行列という。

※行列で表せると、行列の性質を用い、議論できるから調べやすい。

例　$(x, y) \mapsto (X, Y)$なる以下の写像で、線形写像はどれか？

(1) $\begin{cases} X = x^2 \\ Y = x + y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} X = 2x + y \\ Y = x + \frac{1}{y} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} X = 2x + y \\ Y = x - 2y \end{cases}$

例　表現行列が$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$の線形写像で、次の点がうつる先はどこか？

(1) $(2,1)$

(2) $(-3,2)$

例　線形写像fで

$$\begin{cases}\text{点}(1,-2)\text{は点}(2,1)\text{にうつる}\\ \text{点}(-1,3)\text{は点}(4,5)\text{にうつる}\end{cases}$$

ときのfの表現行列Aは？

●合成写像・逆写像

定理 8.1

$$\begin{cases}\text{線形写像}f\text{の表現行列を}A\\ \text{線形写像}g\text{の表現行列を}B\end{cases}$$

としたら、

(1) $g_{\circ}f$は線形写像で表現行列はBA

(2) A^{-1}が存在するとき、f^{-1}が存在し、線形写像で表現行列はA^{-1}

[証明]

例

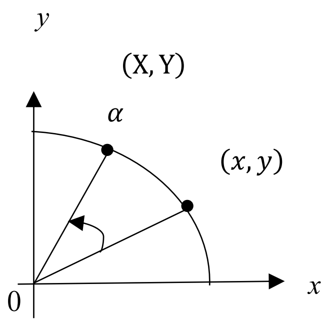
$$\begin{cases} \text{線形写像}f\text{の表現行列を}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{線形行列}g\text{の表現行列を}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(1) $f_{\circ}g$と$g_{\circ}f$の表現行列は？

(2) f^{-1}の表現行列は？

●回転移動（これも線形写像）

原点まわりに α だけ回転させる写像$f:(x,y)\mapsto(X,Y)$を考える。



定理 8.2　スカラー値関数$A(u)$の不定積分

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$は原点まわりに αだけ回転させる線形写像を表す表現行列

例　点(1,3)を原点まわりに60°回転させた点の座標は？

例　$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$を求めよ。

[注]
原点以外を中心とした回転移動を表す写像は線形写像ではない。

●対称移動

例

$$\begin{cases} x\text{軸対称} & \cdots \\ y\text{軸対称} & \cdots \\ \text{原点対称} & \cdots \end{cases}$$

xy平面で、$l: y = mx$で対称に移動させる写像$f: (x, y) \mapsto (X, Y)$を考える。

[注]
fが線形写像ってわかったら求める表現行列を A とし、

●線形写像の特徴

まとめ

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表される線形写像は座標をかえずに、基底を

「$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$」から「$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$」にかえる写像とみれる！

対称移動に注目したら、$(m=2$ とし$\cdots)$

例　$A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$とし、$A^n$を求めたい。

(1)　$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$となる$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$が存在するような$k$を α、β とする($\alpha<\beta$)。α、β を求めよ。

(2)　$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$となる$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$を 1 つずつ求めよ。

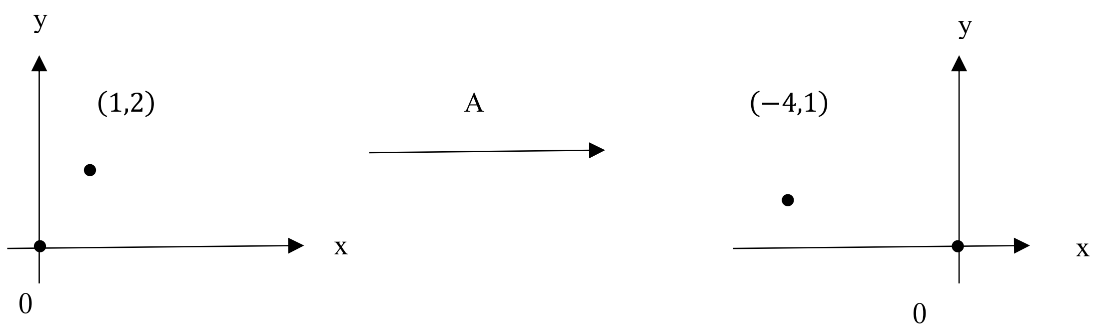
(3)　A^nを(2)を用い、求めよ。

Q.図形的考察

②より A は$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$方向に-1 倍

③より A は$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$方向に 2 倍

ベクトルを伸ばす写像



Q.すると、私たちは

1.対象となる空間は何か？

2.対象となる写像は何か？

3.行列の n 乗をどうだすか？

第9章　ベクトル空間

●ベクトル空間　(vector space)

定義 9.1

数の集合で、その中で四則演算が行えるものを体という。
（ただし、0 でわることは除く）

例

$$\left.\begin{cases}\text{実数の集合} & \boldsymbol{R} \\ \text{複素数の集合} & \boldsymbol{C} \\ \text{有理数の集合} & \boldsymbol{Q}\end{cases}\right.\text{は体}$$

$$\left.\begin{cases}\text{整数の集合} & \boldsymbol{Z} \\ \text{自然数の集合} & \boldsymbol{N}\end{cases}\right.\text{は体ではない}$$

※体はよく"$\boldsymbol{K}$"で表す(Körper)。この授業では、ほぼ$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R} or \boldsymbol{C}$

定義 9.2

以下をみたす集合 V を体 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間（vector space）と定義。

[1]$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$に対し、和$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$が V 内で定義され

(i)$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

(ii) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

(iii) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$となる$\boldsymbol{0} \in V$が存在（この $\boldsymbol{0}$ を零ベクトルという）

(iv) $\boldsymbol{a}$に対し、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = 0$となる$\boldsymbol{a} \in V$が存在（この$\boldsymbol{a}'$を$\boldsymbol{a}$の逆ベクトルといい、$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$とかく）

[1] $\boldsymbol{a} \in V \wedge k \in \boldsymbol{K}$に対し、スカラー倍$k\boldsymbol{a}$が V 内で定義され、

(v)$(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$

(vi) $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$

(vii)$(kl)\boldsymbol{a} = k(l\boldsymbol{a})$

(viii)$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

※V の元をベクトルという。

例　以下はベクトル空間

(1) 高校でやったベクトル（幾何ベクトル）の集合。

(2) $\boldsymbol{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| a_i \in \boldsymbol{R}\ (i = 1,2,\cdots,n) \right\}$

(3) $M_{m,n}(\boldsymbol{R}) = \left\{ (a_{ij})_{m\times n} \middle| a_{ij} \in \boldsymbol{R} \right\}$なる$m \times n$行列の集合。

(4) $P_n(\boldsymbol{R}) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | a_i \in \boldsymbol{R}\}$なる n 次以下の多項式の集合。

(5) $R = \{\{x_n\} | x_n \in \boldsymbol{R}\ (n = 1,2,\cdots)\}$なる実数列の集合。

ただし、

$$\begin{cases} \{x_n\},\{y_n\} \in R\text{で、}\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} \\ c \in \boldsymbol{K}, \{x_n\} \in R\text{で、}c\{x_n\} = \{cx_n\} \end{cases}$$

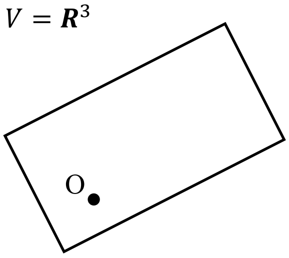
とする。

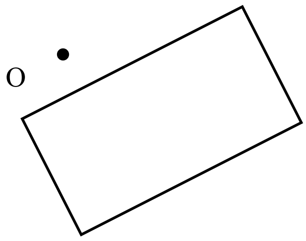
●部分空間　(subspace)

定義 9.3

ベクトル空間 V の部分集合 W が V の演算で、ベクトル空間となるとき、W を V の部分空間という。

$V = \boldsymbol{R}^3$





定理 9.4

Vをベクトル空間とし、$W \subset V$とする。

WがVの部分空間

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{i})\ \boldsymbol{0} \in W \\ (\mathrm{ii})\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W \\ (\mathrm{iii})\ k \in \boldsymbol{K}, \boldsymbol{a} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{a} \in W \end{cases}$$

[証明]

例 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$とし、

$$W = \{s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} | s, t \in \boldsymbol{R}\}$$

は$\boldsymbol{R}^3$の部分空間

定理 9.5

A を$m \times n$ 行列とする。

$$W = \{x \in \boldsymbol{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

は$\boldsymbol{R}^n$の部分空間。

[証明]

例　W が$\boldsymbol{R}^3$の部分空間か調べよ。

(1) $W = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \middle| \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$

(2) $W = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \middle| \begin{matrix} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1 \end{matrix} \right\}$

例　W が $P_2(\boldsymbol{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \boldsymbol{R}\}$ の部分空間か調べよ。

(1) $W = \left\{ f_{(x)} \in P_2(\boldsymbol{R}) \middle| f_{(2)} = 0 \right\}$

(2) $W = \left\{ f_{(x)} \in P_2(\boldsymbol{R}) \middle| f_{(1)} = 1 \right\}$

(3) $W = \left\{ f_{(x)} \in P_2(\boldsymbol{R}) \middle| x f'_{(x)} = f_{(x)} \right\}$

●1 次独立、1 次従属（linearly independent,linearly dependent）

定義 9.6

V をベクトル空間とし、$\boldsymbol{v} \in V$が、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$を用い

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \ (c_i \in \boldsymbol{R})$$

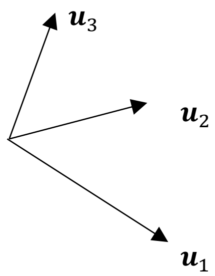
とかけるとき、$\boldsymbol{v}$は$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$の 1 次結合（linear combination）でかけるという。

また、

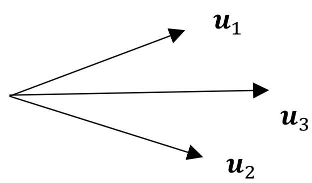
$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

$\Leftrightarrow c_i = 0 \ (i = 1,2,\cdots,n)$のとき、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$は 1 次独立といい、そうでないとき、1 次従属という。

<1 次独立>



<1 次従属>



例　$\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{R}^n \ (i = 1,2, \cdots n)$を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

としたら、$\boldsymbol{e}_1, \cdots \boldsymbol{e}_n$は 1 次独立

例　$1, x, x^2, \cdots, x^n \in P_n(\boldsymbol{R})$は 1 次独立

例　$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$は 1 次独立か？

定理 9.7

ベクトル空間 V のベクトル$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$が 1 次従属

$\Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$のうち、少なくとも 1 つのベクトルが他のベクトルの 1 次結合でかける。

[証明]

定理 9.8

ベクトル空間 Vのベクトル$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$について

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \text{は 1 次独立} \\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \text{は 1 次従属} \end{cases}$$

なら$\boldsymbol{u}$は$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$の 1 次結合でかける

[証明]

●1 次結合の記法

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$$

を

とかくことにする。

例$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = 5\boldsymbol{u}_1 + 4\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 \end{cases}$

定理 9.9

ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立で、A を $m \times n$ 行列とし、

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)A = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})$$

のとき、$A = \mathbf{O}$

[証明]

例　$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立で

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 = -5\boldsymbol{u}_1 - 5\boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \end{cases} \cdots (*)$$

のとき、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立か？

定理 9.10

ベクトル空間 Vのベクトル$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$と$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$があり、

(ⅰ)$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)A$とかける$\left(A\text{は}m \times n\text{行列}\right)$

(ⅱ)$n > m$ならば、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$は 1 次従属

第 10 章　次元と基底

● 1 次独立な最大個数

定義 10.1

V をベクトル空間、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in \boldsymbol{V}$とする。この$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$について

（1）　あるrコのベクトルは 1 次独立

（2）　どの$r+1$コのベクトルも 1 次従属

をみたす$r \in \boldsymbol{N}$は 1 つだけとれる。このrを、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$の 1 次独立な最大個数と定義

例

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

例

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について

(1) 1 次独立な最大個数を求めよ。

(2)rコの 1 次独立なベクトルを選べ。

(3) (2)の 1 次結合で残りのベクトルをかけ。

定理 10.2

A を$m \times n$行列とし

$$\mathrm{rank}(A) = \left(A\text{の列ベクトルの 1 次独立な最大個数}\right)$$

また A を n 次正方行列としたら

$$A\text{ が正則}\Leftrightarrow A\text{ の }n\text{ コの列ベクトルは 1 次独立}$$

例　A を$l \times m$行列、B を$m \times n$行列とし、$\mathrm{rank}(AB) \leqq \mathrm{rank}(A)$を示せ。

[証明]

＊これを用いると A を$m \times n$行列、B を$n \times m$行列とし、$m > n$なら AB は正則でないことがわかる。

次に数ベクトル以外のベクトル空間でも戦える準備を行う。

定理 10.3

V をベクトル空間とし$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m \in \boldsymbol{V}$は 1 次独立とする。

$\boldsymbol{v}_1,\cdots \boldsymbol{v}_n$は

$$(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n)=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m)A$$

とかけるとし、$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$とおく。

このとき、$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$の 1 次関係と$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$の 1 次関係は同じ。

例　$f,g,h,i \in P_3(R)$とし、

$$\begin{cases} f=1+x^3 \\ g=1+2x+2x^2+x^3 \\ h=1+4x^2+x^3 \\ i=1-4x+x^3 \end{cases}$$

とかけるとき、

(1)1 次独立な最大個数 r を求めよ。

(2)r コの 1 次独立なベクトルを選べ。

(3) (2)の 1 次結合で、他のベクトルをかけ。

●次元と基底

定義 10.4

V をベクトル空間とし、$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\in \boldsymbol{V}$とする。任意の$\boldsymbol{v}\in V$が$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$の 1 次結合でかけるとき、$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$は Vを生成するという。このときの$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$を生成元(generator)という。

例

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$は______を生成する。$\cdots$(A)

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$は______を生成する。$\cdots$(B)

定義 10.5

$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\in V$とする。これが

（１） $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$は 1 次独立

（２） $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$は Vを生成する

をみたすとき、$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$は Vの基底（basis）と定義。

例

上の(A)は

上の(B)は

※$\boldsymbol{R}_n$基本ベクトル$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$は$\boldsymbol{R}_n$の基底。これを標準基底という。

定理 10.6

Vの基底の個数は一定

定義 10.7

$$\mathrm{dim}V=(V\text{基底の個数})\text{と定義。}$$

(次元…dimension)

例$\begin{cases} dim\boldsymbol{R}_n = \\ dimP_n(\boldsymbol{R}) = \end{cases}$

定義 10.8

Vをベクトル空間$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$とし、

$$W = \{s_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_n\boldsymbol{v}_n | s_1, \cdots, s_n \in \boldsymbol{R}\}$$

を$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$で張られる($V$の)部分空間という。

これを

$$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

$$W = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$$

とかく。

例　次のベクトル空間の次元基底は？

(1) $W_1 = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

(2) $W_2 = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$

(3) $W_3 = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$

定理 10.9

$$\dim(\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}) = (\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}\text{の 1 次独立な最大個数})$$

(4) $W_4=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_5\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^5\,\middle|\,\begin{matrix}x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5=0\\x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0\end{matrix}\right\}$

定理 10.10

A を$m\times n$行列とし

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

とすれば

$$\mathrm{dim}W=n-\mathrm{rank}A$$

例 $W=\left\{f_{(x)}\in P_3(\boldsymbol{R})\middle|f_{(1)}=f_{(2)}=0\right\}$の次元、基底は？

定理 10.11

Vをベクトル空間で$\dim V = n$とする。$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$とし、次は同値

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$は$V$の基底

(2) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$は1次独立

(3) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$は$V$を生成する。

[証明]

第 11 章　線形写像

●線形写像とは…？

第 8 章で"行列で表せる写像"のことを線形写像といったが、これをベクトル空間で、一般に定義していく。

定義 11.1

U,V をベクトル空間とし、写像

$$T: U \to V$$

が次の 2 つをみたすとき、T を線形写像(linear map)という

(1) $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in U)$

(2) $T(c\boldsymbol{x}) = cT(\boldsymbol{x})$ $(c \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x} \in U)$

例

(1) $T: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ で $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m)$のとき、$T$ は線形写像。

(2) $n \in \boldsymbol{N}$とし、$T: P_n(\boldsymbol{R}) \to P_{n-1}(\boldsymbol{R})$が$T(f(x)) = f'(x)$ $(f(x) \in P_n(\boldsymbol{R}))$とすると、$T$ は線形写像。

(3) $T: P_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$が$T\big(f(x)\big) = \int_a^b f(x)dx$をみたすとすると、$T$ は線形写像。

(4) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$が$f(x) = x^2$ $(x \in \boldsymbol{R})$であるとすると、f は線形写像ではない。

定理 11.2

$T: U \to V$が線形写像⇒$T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$

[証明]

例 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2x + y + 1$は線形写像でない。

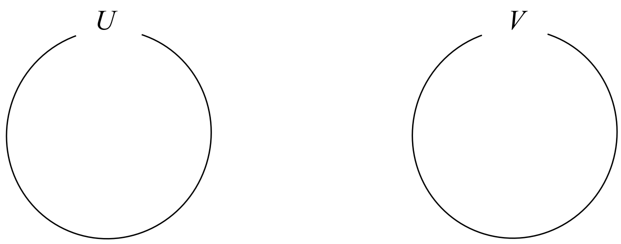
●線形写像の像(image)と核(kernel)

定義 11.3

線形写像$T: U \to V$に対し、

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in U\} \\ \ker(T) = \{\boldsymbol{x} \in U | T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_V\} \end{cases}$$

と定義。



定理 11.4

$\mathrm{Im}(T)$は V の、$\ker(T)$は U の部分空間

[証明]

＜復習＞

定理 9.5

A を$m\times n$ 行列とする。

$$W=\{x\in \boldsymbol{R}^n | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

は$\boldsymbol{R}^n$の部分空間。

例　次の線形写像 T の$\ker(T)$と$\mathrm{Im}(T)$の基底を求めよ。

$$T:\boldsymbol{R}^5\to\boldsymbol{R}^4$$

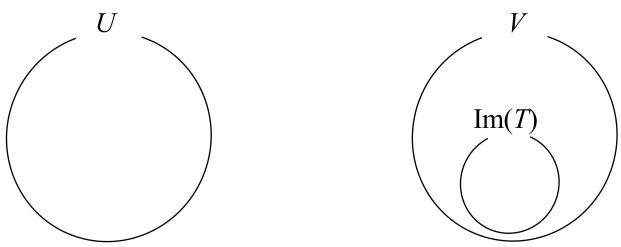
$$T(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -9 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 9 & 1 & -7 \\ -1 & 2 & 6 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

定理 11.5

$T: U \to V$なる線形写像とし

$$\dim(\ker(T)) + \dim\bigl(\mathrm{Im}(T)\bigr) = \dim U$$

※次元定理(dimension theorem)



[注] “行列で表せる写像”なら OK。他では…。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -9 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 9 & 1 & -7 \\ -1 & 2 & 6 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

＜復習＞

定理 10.10

A を$m \times n$行列とし

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とすれば

$$\mathrm{dim}W = n - \mathrm{rank}A$$

●基底のとりかえと表現行列

〈復習〉

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表される$\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$の線形写像は

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$を$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$を$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$に基底をかえてく写像とみれる。

→基底のかえ方を表現行列として定義していく。

定義 11.6

$T: U \to V$を線形写像とする。

$$\begin{cases} U\text{の基底を}\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} \\ V\text{の基底を}\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\} \end{cases}$$

としたら$T(\boldsymbol{u}_i) \in V (i = 1,2, \cdots, n)$

ゆえ、$T(\boldsymbol{u}_i)$は$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$の 1 次結合でかけるから、ある$m \times n$行列 A を用い、

$$\big(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)A$$

とかける。この A を

「Uの基底を$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$,$V$の基底を$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$としたときの$T: U \to V$の表現行列」と定義

例: $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3, T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$とし、標準基底をとり、$\boldsymbol{R}^2$の基底を$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\boldsymbol{R}^3$の基底を$\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$とする。
T の表現行列は？

例 $T: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3, T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$で$\begin{cases} \boldsymbol{R}^2\text{の基底を}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \\ \boldsymbol{R}^3\text{の基底を}\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\} \end{cases}$としておく。$T$ の表現行列は？

※このように、基底がちがうと表現行列もかわる。定義域側の基底は汚くてもやれそうだが終域側の基底が汚いとギリそう…。

例 $T: P_2(\boldsymbol{R}) \to P_2(\boldsymbol{R}), T\big(f(x)\big) = f''(x) + 2f'(x) + 3f(x)$は線形写像(変換)。$P_2(\boldsymbol{R})$の基底をそれぞれ$\{1, x, x^2\}$としたときの T の表現行列？

例 $T: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2, T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$とする。$\boldsymbol{R}^2$の基底を$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$としたとき、$T$の表現行列は？

定理 11.7

$T: U \to V$を線形写像とし

$$\begin{cases} U\text{の基底とし、}\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}, \{\boldsymbol{u}'{}_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\} \\ V\text{の基底とし、}\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}, \{\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m\} \end{cases}$$

をとるとP, Qを正方行列とし、

$$\begin{cases} \{\boldsymbol{u}'{}_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\} = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}P \\ \{\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m\} = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}Q \end{cases}$$

とかけ、PとQは正則(∵定理 10.3)

$$\begin{cases} \text{基底が}\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}, \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}\text{での}T\text{の表現行列を}A \\ \text{基底が}\{\boldsymbol{u}'{}_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}, \{\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m\}\text{での}T\text{の表現行列を}B \end{cases}$$

としたら

$$B = Q^{-1}AP$$

[証明]

例 $T:\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2, T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$とし、

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^3\text{の基底を}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \\ \boldsymbol{R}^2\text{の基底を}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\} \end{cases}$$

としたときの T の表現行列 B は？

例 $T: P_2(\boldsymbol{R}) \to P_2(\boldsymbol{R}), T\big(f(x)\big) = f''(x) + 2f'(x) + 3f(x)$とする。$P_2(\boldsymbol{R})$の基底をともに $\{1 + x, 1 + x^2, 1 + x + x^2\}$としたときの T の表現行列は？

定義 11.8

U と V をベクトル空間

$T: U \to V$を線形写像とする。

T が全単射のとき、T を U から V への同形写像(isomorphism)という。

また、U から V への同形写像が存在するとき、U と V は同形といい、$U \cong V$とかく。

定理 11.9

線形写像$T: U \to V$が全単射⇔Tの表現行列が正則

定理 11.10

U, Vをベクトル空間とし

(1) $\dim V = n \Rightarrow V \cong \boldsymbol{R}^n$

(2) $\dim U = \dim V \Rightarrow U \cong V$

(3) $m \neq n \Rightarrow \boldsymbol{R}^m \cong \boldsymbol{R}^n$

第 12 章　固有値・固有ベクトルと対角化 ------------------

〈復習〉線形写像の特徴

第 8 章の最後に$A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$で表される線形写像について、

$$\begin{cases}A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=-1\times\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{cases}$$

のよう
「ある方向だけ注目したら定数倍」となったりするので、そこから行列の考察ができたりする。

●固有値・固有ベクトル（行列で…）

定義 12.1

A を n 次正方行列とし、

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\ \ (\lambda\in\boldsymbol{R},x\in\boldsymbol{R}^n|\{\boldsymbol{0}\})$$

となるとき、

$$\begin{cases}\lambda\text{を}A\text{の固有値 (eigenvalue)}\\ x\text{を}(\text{固有値}\lambda\text{に属する})A\text{の固有ベクトル (eigenvector)}\end{cases}$$

と定義。

例 $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$としたとき

$$\begin{cases}A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=-1\times\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{cases}$$

よりAの固有値は________で

$$\begin{cases}\text{固有値\_\_\_に属する固有ベクトルは\_\_\_}\\ \text{固有値\_\_\_に属する固有ベクトルは\_\_\_}\end{cases}$$

である。

定義 12.2

n 次正方行列Aの固有値λに対し、

$$W_\lambda(A)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n|A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}$$

をAの固有値λの固有空間(eigenspace)
と定義。
(※行列 A のとすぐわかるとき$W_\lambda(A)$をW_λとかく。)

例　次の行列Aの固有値と、それぞれの固有値の固有空間を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

●対角化の手法

定義 12.3

n 次正方行列Aが対角化可能

⇔ある n 次正方行列 P と、対角化行列 B を用い

$$B = P^{-1}AP$$

とかける。

例　次の行列が対角化できれば行え。また、$n \in N$とし、A^nを求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

[解](やり方だけ…。)

(1)

①固有値をだす

②固有ベクトルをだす。(次元に合わせて)

③②から、P, Bをつくり、対角化

また、

基本事項

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}$$

がいえるので、

例　次の行列が対角化できれば行え。また、$n \in N$とし、A^nを求めよ。

(1)$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(2)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

[解]

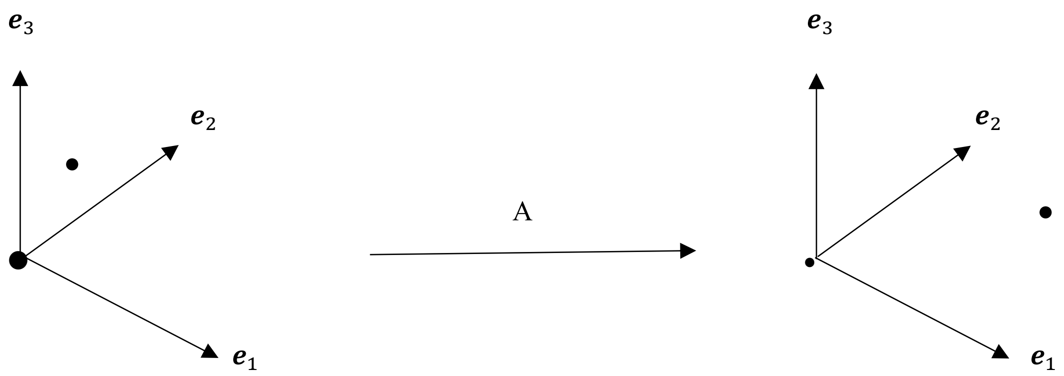
(2)

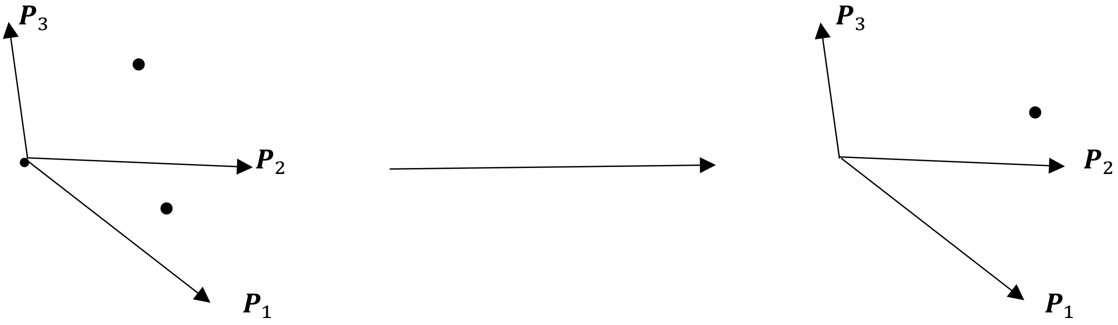
①固有値をだす。

②固有ベクトルをだす。(次元にあわせて)

③②から、P, Bをつくり、対角化。

<イメージ>





$$\begin{cases} A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=1\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \end{cases}$$

で、$P=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)$とおく。

●対角化可能性についての理論

定理 12.4

A が n 次正方行列のとき、固有値は、重複度込みで n コ。

[証明]

定理 12.5

A を n 次正方行列、P を正則な行列とするとき、

$$\lambda \text{が } A \text{ の固有値} \Leftrightarrow \lambda \text{が} P^{-1}AP \text{の固有値}$$

[証明]

定理 12.6

A を n 次正方行列とし

$$\begin{cases} \lambda_{\mathrm{i}}\ (1 \leqq i \leqq k) \text{を} A \text{の相違なる固有値} \\ \boldsymbol{v}_i \in W_{\lambda_i}\ (1 \leqq i \leqq k) \end{cases}$$

とする。このとき

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,} \cdots, \boldsymbol{v}_k \text{は 1 次独立}$$

[証明]

定理 12.7

A を n 次正方行列，A の固有値の重複度を$N(\lambda)$とする。このとき

$$A\text{が対角化可能}$$
$$\Leftrightarrow\text{すべての固有値}\lambda\text{について}$$
$$dimW_{\lambda}(A) = N(\lambda)$$

[証明]

第 13 章　内積

●内積 (inner product)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$では、よく内積$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$を

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \ (\text{行列の積})$$

として、定義した。

これがみたす性質を一般化し、ベクトル空間での内積を定義。

定義 13.1

Vを$\boldsymbol{R}$上のベクトル空間とする。

Vの 2 つの元から$\boldsymbol{R}$のある元へと対応させる写像

$$V: \langle I \rangle : V \times V \to \boldsymbol{R}$$

が次の 4 つをみたすとき、$\langle I \rangle$をVの内積という。

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, c \in \boldsymbol{R}$とし

(1) $\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{v} \rangle$

(2) $\langle c\boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = c \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$

(3) $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle$

(4) $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle > 0$

内積を持つベクトル空間を、内積空間という

例 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$とし$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = {}^t\boldsymbol{u}\mathbf{v}$ は$\boldsymbol{R}^n$の内積

例 $f(x), g(x) \in P_n(\boldsymbol{R})$とし

$$\langle f(x | g(x)) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{dx}$$

とするとき、これは$P_n(\boldsymbol{R})$の内積

定理 13.2

Vを内積空間とする。

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v} \in V, c \in \boldsymbol{R}$とし

(1)' $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_2 \rangle$

(2)' $\langle \boldsymbol{u} | c\boldsymbol{v} \rangle = c\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$

が成立。また

(5) $\langle \boldsymbol{0} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{0} \rangle = 0$

[証明]

定義 13.3

内積空間Vのノルム(norm)$\| \; \|$を$\boldsymbol{v} \in V$とし、

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \rangle}$$

と定義。

※ベクトルの”大きさ”を定義した。

定理 13.4

内積空間Vについて、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, c \in \boldsymbol{R}$とし

(1) $\|c\boldsymbol{u}\| = |c|\|\boldsymbol{u}\|$

(2) $|\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle| \leqq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$ (Cauchy − Schwarz の不等式)

(3) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (三角不等式)

[証明]

定義 13.5

内積空間 V のベクトル$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$で

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 0$$

のとき、$\boldsymbol{u}$と$\boldsymbol{v}$は直交するといい$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$とかく。

例 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は

例 $C([-\pi, \pi]) = \{f(x) | f(x)$は$[-\pi, \pi]$で連続$\}$

とし、$C([-\pi, \pi])$の内積を$f(x), g(x) \in C([-\pi, \pi])$とし、

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \mathrm{dx}$$

とする。このとき、$\cos x \perp \sin x$。

※一般に$m, n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$とし

$$\begin{cases} \cos mx \perp \sin nx \\ \cos mx \perp \cos nx \ \ (m \neq n) \\ \sin mx \perp \sin nx \ \ (m \neq n) \end{cases}$$

$\to 1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \sin x, \sin 2x, \cdots$が 1 次独立とわかる。

$\to$ Fourier級数展開へ。

定理 13.6

内積空間 V のベクトル、$\boldsymbol{v_1},\cdots \boldsymbol{v}_n$が

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0} \ \ (i=1,2,\cdots,n) \\ \boldsymbol{v}_i \perp \boldsymbol{v}_j \ \ (i \neq j) \end{cases}$$

をみたすとき、$\boldsymbol{v_1},\cdots \boldsymbol{v}_n$は 1 次独立

[証明]

定義 13.7

内積空間 V の基底$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots \boldsymbol{v}_n\}$が

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{v}_i\| = 1 \ (i=1,2\cdots,n) \\ \langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle = 0 \ \ (i \neq j) \end{cases} \cdots (*)$$

をみたすとき、$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots \boldsymbol{v}_n\}$を正規直交基底(orthonormal basis)という。

[注] $(*)$

例

(1) R^nの標準基底$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots \boldsymbol{e}_n\}$は正規直交基底

(2) $\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\}$は正規直交基底

定理 13.8

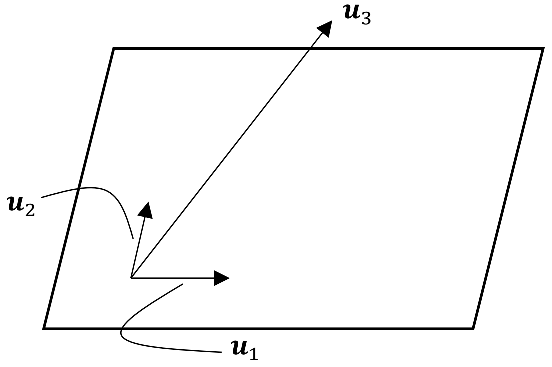
内積空間 V の 1 つの基底を$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_n\}$とする。すると、$V$ の正規直交基底$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_n\}$で

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_r \rangle_{\boldsymbol{R}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_r \rangle_{\boldsymbol{R}} \ (r = 1,2,\cdots,n)$$

となるものが存在する。

[証明]

$$\left(\begin{array}{c}\text{この証明で使用する、正規直交基底を求めていく手法を} \\ \text{グラムシュミットの正規直交化という。} \\ (\mathrm{Gram-Schmidt})\end{array}\right)$$



まとめ	グラムシュミットの正規直交化

基底$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_n\}$を正規直交基化して$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots \boldsymbol{u}_n\}$にする。

1. $\boldsymbol{u}_1 = {\boldsymbol{v}_1}/{\|\boldsymbol{v}_1\|}$

2. $\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{u}_1 \to \boldsymbol{u}_2 = {\boldsymbol{v}'_2}/{\|\boldsymbol{v}'_2\|}$

3. $\boldsymbol{v}'_3 = \boldsymbol{v}_3 - \langle \boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{u}_1 - \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{u}_2 \to \boldsymbol{u}_3 = {\boldsymbol{v}'_3}/{\|\boldsymbol{v}'_3\|}$

4. $\boldsymbol{v}'_4 = \boldsymbol{v}_4 - \sum_{i=1}^{3} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{u}_i \to \boldsymbol{u}_4 = {\boldsymbol{v}'_4}/{\|\boldsymbol{v}'_4\|}$

例 $\boldsymbol{R}^3$の基底$\left\{ \underset{=\boldsymbol{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{=\boldsymbol{v}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{=\boldsymbol{v}_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$を正規直交化。

例 $P_2(\boldsymbol{R})$の内積を$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{dx}\ \left(f(x), g(x) \in P_2(\boldsymbol{R})\right)$で定める。
$P_2(\boldsymbol{R})$の基底$\{1, x, x^2\}$を正規直交基化せよ。

第 14 章　直交変換・対称行列の対角化　-------------------

定義 14.1

Vを内積空間、$T: V \to V$を線形変換とする。

Tが直交変換(orthogonal transformation)⇔すべての$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$に対し、

$$\langle T(\boldsymbol{u}) | T(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$$

※線形変換で、内積が変化しない。

→線形変換で、長さ・角度が変化しない。

→Tは　　　　　　　変換？

定理 14.2

Vを内積空間とし$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$を$V$の正規直交基底とする。

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{u}_1 + b_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n \end{cases}$$

とかけるとき

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

[証明]

定理 14.3

Vを内積空間とし$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$を正規直交基底とする。

また、TをVの線形変換とし、Tが直交変換

⇔$\{T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$が$V$の正規直交基底

定理 14.4

V を内積空間とし、$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$を正規直交基底とする。
また、T を V の線形変換とする。
基底が$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$での T の表現行列を A とする。
(つまり、$\left(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\right) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)A$)
このとき、
T が直交変換⇔${}^{t}AA = \mathrm{E}$

定義 14.5

A を n 次正方行列とする。
A が直交行列⇔${}^{t}AA = \mathrm{E}$
と定義。

例 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$は直交行列。

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$は直交行列。

定理 14.6

A を直交行列とするとき

(1) A は正則で$A^{-1} = {}^{t}A$

(2)$\det A = \pm 1$

[証明]

定理 14.7

$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$なる n 次正方行列とするとき、

A が直交行列⇔$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$が$\boldsymbol{R}^n$の正規直交基底

[証明]

例 $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$は$\boldsymbol{R}^3$の正規直交基底。

$$\to A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$は直交行列。

定理 14.8

A を実対称行列とするとき、A の固有値は必ず実数である。

[証明]

定理 14.9

A を実対称行列とする。

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\text{を}A\text{の固有値}\lambda\text{に属する固有ベクトル} \\ \boldsymbol{v}\text{を}A\text{の固有値}\mu\text{に属する固有ベクトル} \end{cases}$$

とする。$\lambda \neq \mu$ならば$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$である。

[証明]

→すると、各固有空間で、正規直交基底をとることで、直交行列を利用し、対角化できる！

例　次の行列Aを直交行列で対角化せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

定理 14.10

A を実対称行列とする。このとき、ある直交行列 P を用い

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とできるならば、A は直交行列で対角化可能

[証明]

定理 14.11

A を n 次実正方行列とし、A の固有値は全て実数とする。

このとき A は上三角化可能である。

[証明]

第 15 章　ジョルダン標準形　--------------------------------

●対角化の復習（参照第 12 章）

例

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$を対角化せよ。

①　固有値をだす。

②　固有ベクトルを求める。

③　②から P,B をつくり，対角化

※なぜこれで OK?

固有値・固有ベクトルの定義から

$$\begin{cases} A\boldsymbol{P}_1 = 2\boldsymbol{P}_1 \\ A\boldsymbol{P}_2 = 2\boldsymbol{P}_2 \\ A\boldsymbol{P}_3 = 1\cdot\boldsymbol{P}_3 \end{cases}$$

⇔

[注]

(＊)の所で，ベクトルが足りない(固有空間が 1 枚)だと対角化不可。

→対角行列に似た，ジョルダン標準形を利用!

定義 15.1

行列 A が正方行列$A_1, A_2, \cdots, A_r$の直和(direct sum)　である

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

と定義。これを

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$$

とかく。

定義 15.2

$$J_n(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} n$$

を固有値λに属する，大きさ n のジョルダン細胞(Jordan cell)と定義。

定義 15.3

ジョルダン細胞のいくつかの直和をジョルダン行列(Jordan matrix)と定義。

例

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$はジョルダン行列。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$はジョルダン行列。

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$はジョルダン行列。

定理 15.4

任意の正方行列 A に対し，ある正則行列 P と，ジョルダン行列 B が

$$B = \mathrm{P}^{-1}AP$$

をみたすようにとれる。

※B を A のジョルダン標準形(Jordan normal form)という。

定理 15.5

n 次正方行列 A の固有値λのジョルダン細胞は

$$\dim W_\lambda(A)\big(= n - rank(A)\big)$$

コとれる。

この 2 つを認めて，具体的にジョルダン標準形をだす。

例

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

[注]

$(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$とし，

$$\left(\begin{array}{ccccc}2 & 3 & -1 & \vdots & b_1\\3 & -5 & -2 & \vdots & b_2\\-4 & 7 & 3 & \vdots & b_3\end{array}\right)$$

以上の例から固有値λの大きさ 2 以上のジョルダン細胞がでたら

$$\begin{cases}① \ (\mathrm{A}-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O} \ \rightarrow \boldsymbol{P_1} \text{ だす}\\② \ (\mathrm{A}-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P_1} \ \rightarrow \boldsymbol{P}_2 \text{ だす}\\③ \ (\mathrm{A}-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P_2} \ \rightarrow \boldsymbol{P}_3 \text{ だす}\\ \qquad\qquad\vdots\end{cases}$$

として，ジョルダン細胞の大きさ分だけ，ベクトルをだし，並べるのが基本

→上手くいかない例もある。

例

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

●ジョルダン標準形の応用

定理 15.6　ケーリー・ハミルトン(Cayley-Hamilton)の定理

A を n 次正方行列とし

$$f_A(x) = \det(xE - A)$$

とする。(これは n 次式で x^n の係数は 1)

このとき,

$$f_A(A) = O \left(零行列\right)$$

[証明]

例

n 次正方行列 A の固有値が全て 0 であるとする。このとき

$$A^n = \boldsymbol{O}$$

である。

[証明]