論理と計算：第 04 回演習問題

5419045 高林秀

- Latex を用いて作成し，PDF 形式で提出してください

1. SAT 問題とは何か，一言で端的に説明しなさい

   ■解答　モデルが存在するか否か（充足可能であるか否か）、すなわち命題論理式において、命題変数の真理値を定めることによって全体の論理式を真にできるかという問題。

2. SAT として定式化できる問題の具体例と，その問題における SAT 符号化の指針を示しなさい（※「簡単に調査してください」ということです）

   ■解答

   - 具体例：数独問題

★問題図

	6			2			9	
1			4		7			2
		5				8		
	7			4			5	
5			2		6			7
	8			3			1	
		7				9		
9			5		3			8
	2			6			3	

出典：`https://analytics-notty.tech/sudoku-rules/`

   - SAT 符号化の指針:以下のルールにおいて、順序符号化法と呼ばれる手法で SAT 符号化する。
     1 行 1 列のマスを $X_{1,1}$、1 行 2 列のマスを $X_{1,2}$ とする。このとき、$X_{1,1}$ に $x^1, x^2, x^3, ...x^8$、$X_{1,2}$ に $x^9, x^{10}, ..., x^{16}$ というように各マスに 8 個、合計で 648 個の命題変数を定める。
     - 1 つのマスに 1 〜 9 の数字が 1 つのみ入る。
       例えば、$X_{1,1}$ について割り当てた 8 個の変数を使用して次の節ができる。

       $$(\neg x^1 \vee x^2) \wedge (\neg x^2 \vee x^3) \wedge (\neg x^3 \vee x^4) \wedge (\neg x^4 \vee x^5) \wedge (\neg x^5 \vee x^6) \wedge (\neg x^6 \vee x^7) \wedge (\neg x_7 \vee x_8)$$

       この 7 節が各マスごとに存在するので、このルールは 567 節に符号化できる。

以下下記のルールも同様に、Tseitin 変換と呼ばれる手法を使用して SAT 符号化することができる。本稿では割愛する。

  - 縦 1 列には 1 〜 9 の数字が 1 つずつ入る。
  - 横 1 列には、 1 〜 9 の数字が 1 つずつ入る。
  - 3×3 で囲まれた 9 マスには 1 〜 9 の数字が 1 つずつ入る。
- 参考 URL：`https://www.ipsj-kyushu.jp/page/ronbun/hinokuni/1002/C-5/C-5-4.pdf`

3. 節集合 $\{(x_1 \vee x_2), (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4), (x_1 \vee x_4), (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)\}$ の充足可能性判定を対象とした場合の DPLL の動作過程を示しなさい.

4. SAT ソルバー clasp を用い，以下の節集合に対する充足可能性を判定しなさい（clasp への入力ファイルと実行方法，実行結果を示してください）

$$\{(x_1 \vee x_2), (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4), (x_1 \vee x_4), (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)\}$$

■解答

- 入力ファイル q4.cnf

```
p cnf 4 4
1 2 0
-2 -3 -4 0
1 4 0
-2 3 -4 0
```

- 実行方法:`https://github.com/potassco/clasp/releases` よりバイナリファイルをダウンロードし、以下コマンドを実行する。

```
clasp-3.3.2/clasp-3.3.2-x86_64-linux 0 q4.cnf
```

- 実行結果

```
c clasp version 3.3.2
c Reading from q4.cnf
c Solving...
c Answer: 1
v 1 -2 -3 4 0
c Answer: 2
v 1 -2 -3 -4 0
c Answer: 3
v 1 -2 3 4 0
c Answer: 4
v 1 -2 3 -4 0
c Answer: 5
```

```
v 1 2 -3 -4 0
c Answer: 6
v 1 2 3 -4 0
s SATISFIABLE
c
c Models         : 6
c Calls          : 1
c Time           : 0.000s (Solving: 0.00s 1st Model: 0.00s Unsat: 0.00s)
c CPU Time       : 0.000s
```

すなわち、$x_1, x_4 = True$、$x_2, x_3 = False$ のとき、$x_1 = True, x_2, x_3, x_4 = False$ のとき、$x_1, x_3, x_4 = True$、$x_2 = False$ のとき、$x_1, x_3 = True$、$x_2, x_4 = False$ のとき、$x_1, x_2 = True$ 、$x_3, x_4 = False$ のとき、$x_1, x_2, x_3 = True$、$x_4 = False$ のとき解釈は $True$ になる。したがって充足可能である。

5. SAT ソルバー clasp を用い，以下の関係が成り立つことを示しなさい（clasp への入力ファイルと実行方法，実行結果を示してください）

$$\{B_{11} \Leftrightarrow (P_{12} \vee P_{21}),\ \neg B_{11}\} \models \neg P_{12} \wedge \neg P_{21}$$

※ SAT ソルバーへ入力できる形式に変形しましょう

■解答

- 入力ファイル

```
p cnf 3 4
-1 2 3 0
1 -2 0
1 -3 0
-1 0
```

- 実行方法：以下のコマンドを入力する。

```
clasp-3.3.2/clasp-3.3.2-x86_64-linux 0 q5.cnf
```

- 結果

```
c clasp version 3.3.2
c Reading from q5.cnf
c Solving...
c Answer: 1
v -1 -2 -3 0
s SATISFIABLE
c
c Models         : 1
```

```
c Calls          : 1
c Time           : 0.000s (Solving: 0.00s 1st Model: 0.00s Unsat: 0.00s)
c CPU Time       : 0.000s
```

したがって、$B_11 = False, P_12 = False, P_21 = False$ のときに、節集合は充足可能である。このとき、$\neg p_12 \wedge \neg p_21$ は True になるので成立する。

6. 質問・コメント等がありましたらご記入ください（採点対象外です）