２０２２年度京大数学（理系）の解答

tt0801

2025 年 1 月 12 日

1　大問１

1.1　問題

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

1.2　解答

$$\begin{aligned}\log_4 2022 &= \frac{\log_{10} 2022}{\log_{10} 4}\\ &= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1011}{2\log_{10} 2}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} \ (= A \text{ とおく})\end{aligned}$$

である．ここで，$\log_{10} 1011 > \log_{10} 1000 = 3$ より，

$$\begin{aligned}A &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10} 2}\\ &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 0.3011} \ (\because \log_{10} 2 < 0.3011)\\ &= \frac{33011}{6022}\\ &> 5.4\end{aligned}$$

なので，$\log_4 2022 > 5.4$ である．

また，$\log_{10} 1011 < \log_{10} 1024 = 10\log_{10} 2$ なので，

$$\begin{aligned}A &< \frac{1}{2} + \frac{10\log_{10} 2}{2\log_{10} 2}\\ &= \frac{1}{2} + 5\\ &= 5.5\end{aligned}$$

である．よって，$\log_4 2022 < 5.5$ となる．

以上より，$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ が示された．

1.3 解説

$\log_{10} 2$ の評価式が与えられているので, $\log_{10} 2$ を作ることを意識して式変形をする.

2 大問 2

2.1 問題

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある. ただし, $n \geq 5$ とし, 同じ番号の札はないとする. この箱から 3 枚の札を同時に取り出し, 札の番号を小さい順に X, Y, Z とする. このとき, $Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ となる確率を求めよ.

2.2 解答

(X, Y, Z) の組は, 全部で ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りであり, どの場合が出る確率も等しい.

$Y - X = 1$ となる (X, Y, Z) の組の場合の数は, $2 \leq Y < Z \leq n$ であり, Y が定まれば, $X = Y - 1$ と定まるので, ${}_{n-1}\mathrm{C}_2$ 通りである.

同様に, $Z - Y = 1$ となる (X, Y, Z) の組の場合の数は, $1 \leq X < Y \leq n - 1$ であり, Y が定まれば, $Z = Y + 1$ と定まるので, ${}_{n-1}\mathrm{C}_2$ 通りである.

また, $Y - X = 1$ かつ $Z - Y = 1$ となる (X, Y, Z) の組の場合の数は, $1 \leq X \leq n - 2$ であり, X が定まれば, $Y = X + 1$, $Z = X + 2$ と定まるので, ${}_{n-2}\mathrm{C}_1$ 通りである.

以上より, $Y - X = 1$ または $Z - Y = 1$ となる (X, Y, Z) の組の場合の数は,

$$\begin{aligned} {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 - {}_{n-2}\mathrm{C}_1 &= 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2) \\ &= (n-2)^2 \end{aligned}$$

である.

これは, $Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ となる事象の余事象なので, 求める確率 P は,

$$\begin{aligned} P &= 1 - \frac{(n-2)^2}{{}_n\mathrm{C}_3} \\ &= 1 - \frac{(n-2)^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \\ &= 1 - \frac{6(n-2)}{n(n-1)} \\ &= \frac{n(n-1) - 6(n-2)}{n(n-1)} \\ &= \frac{n^2 - 7n + 12}{n(n-1)} \\ &= \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

である.

2.3 解説

$n = 3, 4$ を代入して, 求める確率が 0 であることから検算できる．また, $n = 5$ の時も $Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ となるのは, $(X, Y, Z) = (1, 3, 5)$ の組だけなので, 求める確率が $\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{10}$ になっているかでも検算可能.

3 大問３

3.1 問題

n を自然数とする．3 つの整数 $n^2 + 2$, $n^4 + 2$, $n^6 + 2$ の最大公約数 A_n を求めよ.

3.2 解答

$(n^4 + 2) - (n^2 + 2) = n^2(n^2 - 1)$ なので, $n^4 + 2$ と $n^2 + 2$ の最大公約数は, $n^2 + 2$ と $n^2(n^2 - 1)$ の最大公約数に一致する.

$n^2 + 2$ と n^2 の最大公約数について考える．$n^2 + 2$ と n^2 の公約数は, $(n^2 + 2) - n^2 = 2$ を割り切る．ゆえに, n が偶数の時は, $n^2 + 2$, n^2 はともに偶数なので, 最大公約数は 2 である．n が奇数の時は, $n^2 + 2$, n^2 はともに奇数なので, 最大公約数は 1 である.

$n^2 + 2$ と $n^2 - 1$ の最大公約数について考える．$n^2 + 2$ と $n^2 - 1$ の公約数は, $(n^2 + 2) - (n^2 - 1) = 3$ を割り切る．ゆえに, n が 3 の倍数の時は, $n^2 + 2$, $n^2 - 1$ はともに 3 の倍数ではないので, 最大公約数は 1 である. n が 3 の倍数でない時は, $n^2 + 2$, $n^2 - 1$ はともに 3 の倍数なので, 最大公約数は 3 である.

n^2 と $n^2 - 1$ は互いに素なので, $n^2 + 2$ と $n^2(n^2 - 1)$ の最大公約数は, $n^2 + 2$ と n^2 の最大公約数と $n^2 + 2$ と $n^2 - 1$ の最大公約数の積である.

以上より, $n^2 + 2$ と $n^2(n^2 - 1)$ の最大公約数 B_n は,

$$B_n = \begin{cases} 2 & (n \text{ は偶数かつ } 3 \text{ の倍数, すなわち } 6 \text{ の倍数}), \\ 6 & (n \text{ は偶数だが } 3 \text{ の倍数ではない, すなわち } 6 \text{ で割って } 2 \text{ または } 4 \text{ 余る}), \\ 1 & (n \text{ は奇数かつ } 3 \text{ の倍数, すなわち } 6 \text{ で割って } 3 \text{ 余る}), \\ 3 & (n \text{ は奇数だが } 3 \text{ の倍数ではない, すなわち } 6 \text{ で割って } 1 \text{ または } 5 \text{ 余る}) \end{cases}$$

で与えられる．これが $n^4 + 2$ と $n^2 + 2$ の最大公約数に一致するので, A_n は, B_n と $n^6 + 2$ の最大公約数である.

一方で, $n^6 + 2 = n^2 + 2 + (n^2 + 1) \cdot n^2(n^2 - 1)$ と表せるので, $n^6 + 2$ は, $n^2 + 2$ と $n^2(n^2 - 1)$ の最大公約数 B_n で割り切れる.

以上より, $A_n = B_n$ であるので,

$$A_n = \begin{cases} 2 & (n \text{ は } 6 \text{ の倍数}), \\ 6 & (n \text{ は } 6 \text{ で割って } 2 \text{ または } 4 \text{ 余る}), \\ 1 & (n \text{ は } 6 \text{ で割って } 3 \text{ 余る}), \\ 3 & (n \text{ は } 6 \text{ で割って } 1 \text{ または } 5 \text{ 余る}) \end{cases}$$

である.

3.3 解説

ユークリッドの互除法が背景にある問題である．整数 x, y, q, r について，$x = qy + r$ と表せる時，x, y の最大公約数は y, r の最大公約数と一致する．

4 大問 4

4.1 問題

四面体 OABC が

$$\mathrm{OA} = 4,\ \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 3,\ \mathrm{OC} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．点 P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

4.2 解答

(1) 一次独立なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に着目する．

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2} \\
&= \frac{16 + 9 - 9}{2} \\
&= 8, \\
\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}{2} \\
&= \frac{9 + 12 - 9}{2} \\
&= 6, \\
\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}{2} \\
&= \frac{16 + 12 - 12}{2} \\
&= 8.
\end{aligned}$$

点 P は辺 BC 上にあるので，0 以上 1 以下の実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1 - t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表せる．点 G は △OAP の重心なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

だから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

である. 特に, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の係数が全て 0 になることはないので, 2 点 P, G は一致しない.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 16 - \frac{2}{3}t \cdot 8 - \frac{2}{3}(1-t) \cdot 8 \\ &= 0\end{aligned}$$

で, $\mathrm{PG} > 0$, $\mathrm{OA} = 4 > 0$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が導けた.

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2$ の最小値について考える.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PG}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \\ &= -\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3}t \cdot 9 - \frac{2}{3}(1-t) \cdot 6 \\ &= -2t - \frac{4}{3}, \\ \overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3}t \cdot 6 - \frac{2}{3}(1-t) \cdot 12 \\ &= 4t - \frac{16}{3}\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2 &= -\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= -\frac{2}{3}t\left(-2t - \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3}(1-t)\left(4t - \frac{16}{3}\right) \\ &= 4t^2 - \frac{16}{3}t + \frac{32}{9} \\ &= 4\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{9} \\ &\geq \frac{16}{9}.\end{aligned}$$

等号成立条件は, $t=\dfrac{2}{3}$ であり, これは $0 \leq t \leq 1$ を満たす. このとき, 点 P は辺 BC を 1:2 に内分する点である. また, $\mathrm{PG}=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2}=\dfrac{4}{3}$.

以上より, 点 P は辺 BC を 1:2 に内分する点である時, PG は最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる.

4.3 解説

ベクトルの問題では, 基底 (一次独立かつ, 空間の任意のベクトルが基底のベクトルの一次結合で表せる) に着目して式変形しよう. 本問では例えば, $\left\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}$ が基底である.

5 大問 5

5.1 問題

曲線 $C: y=\cos^3 x \ \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$, x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする. $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ とし, C 上の点 $\mathrm{Q}(t, \cos^3 t)$ と原点 O および $\mathrm{P}(t,0)$, $\mathrm{R}(0,\cos^3 t)$ を頂点に持つ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) S を求めよ.

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ. そのときの t を α とすると, $f(\alpha)=\dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$ であることを示せ.

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S}<\dfrac{9}{16}$ を示せ.

5.2 解答

(1) 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x \ dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である.

(2) $f(t)=t\cos^3 t$ である.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \cos^3 t - 3t\cos^2 t\sin t \\ &= \cos^2 t(\cos t - 3t\sin t) \end{aligned}$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において, $\cos^2 t > 0$ なので, $f'(t)$ の 0 との大小関係は $g(t) := \cos t - 3t\sin t$ の 0 との大小関係と一致する.

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\sin t - 3\sin^2 t - 3t\cos t \\ &< 0 \end{aligned}$$

であるので, $g(t)$ は $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において単調減少である.

$$\lim_{t \to +0} g(t) = 1 > 0, \qquad \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} g(t) = -\frac{3}{2}\pi < 0$$

であるから中間値の定理より $g(\alpha) = 0$ となる $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ となる α が存在する. $f(t)$ の増減表をかくと,

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

だから, $f(t)$ は最大値を $t = \alpha$ でのみ取る. $g(\alpha) = 0$ すなわち,

$$\cos\alpha - 3\alpha\sin\alpha = 0$$

に注意すると, $\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}$ であるから,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha\cos^3\alpha \\ &= \alpha\cos^3\alpha \\ &= \frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha} \end{aligned}$$

となる.

(3)

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - \pi}{4} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから, $\dfrac{\pi}{6} < \alpha \ \left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$ である. ゆえに,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha} \\ &< \frac{\cos^4\frac{\pi}{6}}{3\sin\frac{\pi}{6}} \\ &< \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{3\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

である. 両辺 $S = \dfrac{2}{3}$ で割って,

$$\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$$

を得る.

5.3 解説

x, y についての有理関数 $Q(x, y)$ について, $Q(\cos x, \sin x)$ は原理的に高校数学の範囲で積分を計算できる. $Q(x, y)$ の形に応じて様々なテクニックがあるので, 復習しよう.

6 大問 6

6.1 問題

数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$y_{3m+1} = 3m, \quad y_{3m+2} = 3m + 2, \quad y_{3m+3} = 3m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

により定める. このとき, 数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ.

6.2 解答

任意の 0 以上の整数 m に対して, 次の命題 $P(m)$ が成立することを, 数学的帰納法で証明する.

$P(m):\quad x_{3m+1}, x_{3m+2}, x_{3m+3}$はいずれも整数で, 3 で割った余りはそれぞれ $0, 0, 1$ である.

(i) $m=0$ の時, $x_{3\cdot 0+1}=x_1=0$ は整数. 3 で割った余りは 0.

$$\begin{aligned} x_{3\cdot 0+2} &= x_2 \\ &= x_1+1+2\cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) \\ &= 0+1+2\cos 0 \\ &= 3. \end{aligned}$$

これは整数であり, 3 で割った余りは 0.

$$\begin{aligned} x_{3\cdot 0+3} &= x_3 \\ &= x_2+2+2\cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right) \\ &= 3+2+2\cos(2\pi) \\ &= 7. \end{aligned}$$

これは整数であり, 3 で割った余りは 1.

よって, $m=0$ では命題 $P(m)$ が成立.

(ii) ある 0 以上の整数 m に対して, $P(m)$ が真であると仮定する. この時,

$$\begin{aligned} x_{3(m+1)+1} &= x_{3m+4} \\ &= x_{3m+3}+(3m+3)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+3}}{3}\right) \\ &= x_{3m+3}+(3m+3)+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= x_{3m+3}+3m-1. \end{aligned}$$

x_{3m+3} は 3 で割って 1 余る整数なので, $x_{3(m+1)+1}$ は整数であり, 3 で割った余りは 0 である.

$$\begin{aligned} x_{3(m+1)+2} &= x_{3m+5} \\ &= x_{3m+4}+(3m+4)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+4}}{3}\right) \\ &= x_{3m+4}+(3m+4)+2\cos 0 \\ &= x_{3m+4}+3m+6. \end{aligned}$$

x_{3m+4} は 3 で割り切れる整数なので, $x_{3(m+1)+2}$ は整数であり, 3 で割った余りは 0 である.

$$\begin{aligned} x_{3(m+1)+3} &= x_{3m+6} \\ &= x_{3m+5}+(3m+5)+2\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+5}}{3}\right) \\ &= x_{3m+5}+(3m+5)+2\cos 0 \\ &= x_{3m+5}+3m+7. \end{aligned}$$

x_{3m+5} は 3 で割り切れる整数なので, $x_{3(m+1)+3}$ は整数であり, 3 で割った余りは 1 である.

以上より任意の 0 以上の整数 m に対して, 命題 $P(m)$ が成立する.

n が 2 以上の整数の時,

$$\begin{aligned}
x_n &= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x_k\right) \right\} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_k\right)
\end{aligned}$$

である. $z_n = 2\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_k\right)$ とおく. また, $z_1 = 0$ とおけば, 全ての自然数 n について, $x_n = \frac{n(n-1)}{2} + z_n$ が成立する.

m が自然数の時,

$$\begin{aligned}
z_{3m+1} &= 2\sum_{k=1}^{3m} \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_k\right) \\
&= 2\sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_{3k+1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_{3k+2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_{3k+3}\right) \right\} \\
&= 2\sum_{k=0}^{m-1} \left(1 + 1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 3m \\
&= y_{3m+1}, \\
z_{3m+2} &= z_{3m+1} + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x_{3m+1}\right) \\
&= 3m + 2 \\
&= y_{3m+2}, \\
z_{3m+3} &= z_{3m+2} + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x_{3m+2}\right) \\
&= 3m + 2 + 2 \\
&= 3m + 4 \\
&= y_{3m+3}
\end{aligned}$$

である. これは,

$$\begin{aligned}
&z_1 = 1 = y_1, \\
&z_2 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x_1\right) = 2 = y_2, \\
&z_3 = z_2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x_2\right) = 2 + 2 = 4 = y_3
\end{aligned}$$

なので, $m = 0$ に対しても成立する.

以上より, 全ての自然数 n に対して, $z_n = y_n$ なので,

$$x_n - y_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

が全ての自然数 n に対して, 成立する.

6.3 解説

いくつか x_n を具体的に計算すれば, x_n は整数であることが期待できる. この時, $2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)$ の取りうる値は x_n を 3 で割った余りによって 2 か-1 のいずれかなので, x_n の 3 の剰余に着目すれば周期的になっていることが見抜けるだろう.