２０２２年度京大数学（文系）の解答

tt0801

2025 年 1 月 11 日

1　大問１

1.1　問題

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

1.2　解答

$$\begin{aligned}\log_4 2022 &= \frac{\log_{10} 2022}{\log_{10} 4} \\ &= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} \ (= A \text{ とおく})\end{aligned}$$

である．ここで, $\log_{10} 1011 > \log_{10} 1000 = 3$ より,

$$\begin{aligned}A &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10} 2} \\ &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 0.3011} \ (\because \log_{10} 2 < 0.3011) \\ &= \frac{33011}{6022} \\ &> 5.4\end{aligned}$$

なので, $\log_4 2022 > 5.4$ である.

また, $\log_{10} 1011 < \log_{10} 1024 = 10\log_{10} 2$ なので,

$$\begin{aligned}A &< \frac{1}{2} + \frac{10\log_{10} 2}{2\log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{2} + 5 \\ &= 5.5\end{aligned}$$

である．よって, $\log_4 2022 < 5.5$ となる.

以上より, $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ が示された.

1.3 解説

$\log_{10} 2$ の評価式が与えられているので, $\log_{10} 2$ を作ることを意識して式変形をする.

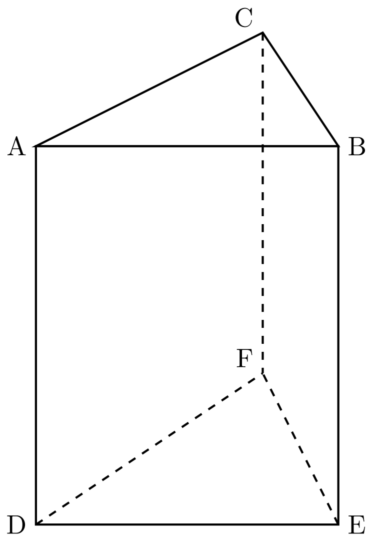
2 大問 2

2.1 問題

下図の三角柱 $\mathrm{ABC-DEF}$ において, A を始点として, 辺に沿って頂点を n 回移動する. すなわち, この移動経路

$$\mathrm{P_0 \to P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_{n-1} \to P_n} \quad (\text{ただし } \mathrm{P_0 = A})$$

において, $\mathrm{P_0P_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}P_n}$ はすべて辺であるとする. また, 同じ頂点を何度通ってもよいものとする. このような移動経路で, 終点 $\mathrm{P_n}$ が A, B, C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ.



2.2 解答

各頂点から隣接する他の頂点に移動する方法は, 3 通りである. よって, n 回移動した時の全ての経路の場合の数は, 3^n である. $b_n = 3^n - a_n$ とおくと, 終点 $\mathrm{P_n}$ が D, E, F のいずれかとなるものの総数である.

$\mathrm{P_n}$ が頂点 A, B, C のいずれかにいる時, $\mathrm{P_{n+1}}$ が再び頂点 A, B, C のいずれかにいる経路は 2 通りである. 一方で, $\mathrm{P_n}$ が頂点 D, E, F のいずれかにいる時, $\mathrm{P_{n+1}}$ が頂点 A, B, C のいずれかにいる経路は 1 通りである. 以上より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ &= 2a_n + (3^n - a_n) \\ &= a_n + 3^n \end{aligned}$$

を得る．$a_0 = 1$ とおけば, この漸化式は 0 以上の整数 n で成立する．$n \geq 1$ の場合は,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n + 1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ．これは, $n = 0$ の場合も成立.

以上より,

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

2.3 解説

$\mathrm{P_n}$ の位置について, 事象は次の 2 通りしかない.

- $\mathrm{P_n}$ は A, B, C のいずれか,
- $\mathrm{P_n}$ は D, E, F のいずれか.

図の対称性から, これらの事象について漸化式を立てられそうだと見通しがつく.

3 大問 3

3.1 問題

xy 平面上の 2 直線 L_1, L_2 は直交し, 交点の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ である．また, L_1, L_2 はともに曲線 $C : y = \dfrac{x^2}{4}$ に接している．このとき, L_1, L_2 および C で囲まれる図形の面積を求めよ.

3.2 解答

$f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ とおく．$f'(x) = \dfrac{x}{2}$ である．L_1 と C の接点の座標を $(p, f(p))$, L_2 と C の接点の座標を $(q, f(q))$ とおく．L_1 は $x = p$ における C の接線であるので, その方程式は $y - f(p) = f'(p)(x - p)$, すなわち,

$$y = \frac{p}{2}x - \frac{p^2}{4} \tag{1}$$

である．同様に L_2 の方程式は,

$$y = \frac{q}{2}x - \frac{q^2}{4} \tag{2}$$

で与えられる．L_1, L_2 は直交するので, 傾きの積 $\dfrac{p}{2} \cdot \dfrac{q}{2}$ が -1 に等しい．よって,

$$pq = -4. \tag{3}$$

特に $p \neq q$ である．また，L_1 と L_2 の交点の座標は，方程式 (1), (2) を連立して，$\left(\dfrac{p+q}{2}, \dfrac{pq}{4}\right)$ と分かる．問題文の条件より $\dfrac{p+q}{2} = \dfrac{3}{2}$，すなわち

$$p + q = 3 \tag{4}$$

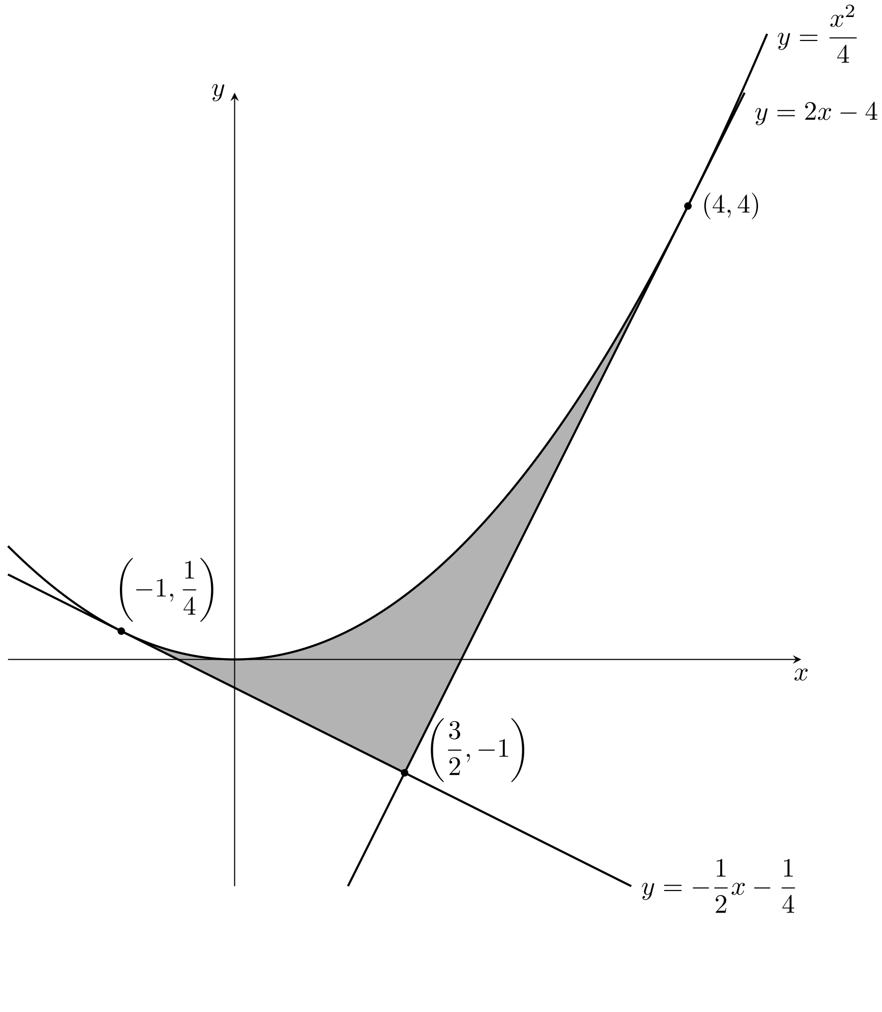
である． 式 (3),(4) より，p, q は t についての二次方程式 $t^2 - 3t - 4 = 0$ の解である． 因数分解して $(t-4)(t+1) = 0$ なので，

$$(p, q) = (-1, 4)$$

として一般性を失わない．この時，

$$\begin{aligned} L_1 &: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \\ L_2 &: y = 2x - 4. \end{aligned}$$

である．



求める面積 S は上図の色塗られた領域の面積であるから,

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{4} - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\ dx + \int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{x^2}{4} - (2x-4)\ dx \\
&= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4}(x+1)^2\ dx + \int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{1}{4}(x-4)^2\ dx \\
&= \left[\frac{1}{12}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{12}(x-4)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{4} \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{1}{12}\left(-\frac{5}{2}\right)^3 \\
&= \frac{125}{48}
\end{aligned}$$

と求まる.

以上より, 求める面積は $\dfrac{125}{48}$ である.

3.3 解説

覚える必要は全くないが, 問題の面積は, いわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式で求まる面積の半分なので, 知っていれば検算は容易である.

4 大問 4

4.1 問題

a, b を正の実数とする. 直線 $L : ax + by = 1$ と曲線 $y = -\dfrac{1}{x}$ との 2 つの交点のうち, y 座標が正のものを P, 負のものを Q とする. また, L と x 軸の交点を R とし, L と y 軸の交点を S とする. a, b が条件

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}} = \sqrt{2}$$

を満たしながら動くとき, 線分 PQ の中点の軌跡を求めよ.

4.2 解答

4 点 P,Q,R,S は全て直線 L 上にあるので PQ と RS の比は, 「2 点 P, Q の x 座標の差」と「2 点 R, S の x 座標の差」の比に一致する. R の座標は $\left(\dfrac{1}{a}, 0\right)$, S の座標は $\left(0, \dfrac{1}{b}\right)$ なので, 2 点 R, S の x 座標の差は $\dfrac{1}{a}$ である. $y = -\dfrac{1}{x}$ を $ax + by = 1$ に代入して, 式を整理すると

$$ax^2 - x - b = 0$$

を得る. 判別式 D は $D = 1 + 4ab > 0$ であるので, 正の実数 a, b の値によらず, 異なる二つの実数解 $x = p, q\ (p > q)$ を持つ. 二次方程式の解と係数の関係より,

$$p + q = \frac{1}{a}, \quad pq = -\frac{b}{a}$$

である．特に $pq<0$ なので, $p>0>q$ である．また, 2 点 P, Q の x 座標の差の 2 乗は,

$$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=\frac{1+4ab}{a^2}$$

である．よって,

$$\begin{aligned}
2&=\left(\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}\right)^2\\
&=\left(\frac{2\text{ 点 P},\text{Q の }x\text{ 座標の差}}{2\text{ 点 R},\text{S の }x\text{ 座標の差}}\right)^2\\
&=\frac{\dfrac{1+4ab}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2}}\\
&=4ab+1
\end{aligned}$$

である．ゆえに, $ab=\dfrac{1}{4}$.

P の座標は $\left(p,-\dfrac{1}{p}\right)$, Q の座標は $\left(q,-\dfrac{1}{q}\right)$ であるから, 線分 PQ の中点の座標 (X,Y) は,

$$X=\frac{p+q}{2},\quad Y=-\frac{p+q}{2pq}$$

を満たす．$p+q=\dfrac{1}{a}$, $pq=-\dfrac{b}{a}$ を代入して,

$$X=\frac{1}{2a},\quad Y=\frac{1}{2b}$$

である．a,b は正の実数なので, X,Y も正の実数であり,

$$a=\frac{1}{2X},\quad b=\frac{1}{2Y} \tag{5}$$

を $ab=\dfrac{1}{4}$ に代入して, $XY=1$ を得る．すなわち, 線分 PQ の中点は, 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 上に存在する．

逆に, 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ の上の点 (X,Y) に対して, (5) を満たす a,b を与えれば, a,b は正の実数であり, 確かに P,Q,R,S を考えることができて,

$$\left(\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}\right)^2=2$$

が成り立つ．すなわち, $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}=\sqrt{2}$ を満たす．そして, 線分 PQ の中点の座標は (X,Y) である．

以上より, 求める軌跡は双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ である．

4.3 解説

十分性の確認を忘れないこと．

5　大問 5

5.1　問題

四面体 OABC が

$$\mathrm{OA}=4,\ \mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=3,\ \mathrm{OC}=\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．点 P を辺 BC 上の点とし，$\triangle$OAP の重心を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

5.2　解答

(1) 一次独立なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に着目する．

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2}\\
&= \frac{16+9-9}{2}\\
&= 8,\\
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}{2}\\
&= \frac{9+12-9}{2}\\
&= 6,\\
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}{2}\\
&= \frac{16+12-12}{2}\\
&= 8.
\end{aligned}$$

点 P は辺 BC 上にあるので，0 以上 1 以下の実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表せる．点 G は $\triangle$OAP の重心なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}
\end{aligned}$$

である．特に, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の係数が全て 0 になることはないので, 2 点 P, G は一致しない．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \frac{1}{3}\cdot 16 - \frac{2}{3}t\cdot 8 - \frac{2}{3}(1-t)\cdot 8\\ &= 0\end{aligned}$$

で, $\mathrm{PG}>0$, $\mathrm{OA}=4>0$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が導けた．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2$ の最小値について考える．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PG}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= -\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}t\cdot 9 - \frac{2}{3}(1-t)\cdot 6\\ &= -2t - \frac{4}{3},\\ \overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\ &= \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}t\cdot 6 - \frac{2}{3}(1-t)\cdot 12\\ &= 4t - \frac{16}{3}\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2 &= -\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= -\frac{2}{3}t\left(-2t-\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3}(1-t)\left(4t-\frac{16}{3}\right)\\ &= 4t^2 - \frac{16}{3}t + \frac{32}{9}\\ &= 4\left(t-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{9}\\ &\geq \frac{16}{9}.\end{aligned}$$

等号成立条件は, $t=\dfrac{2}{3}$ であり，これは $0\leq t\leq 1$ を満たす．このとき, 点 P は辺 BC を 1:2 に内分する点である．また, $\mathrm{PG}=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2}=\dfrac{4}{3}$.

以上より, 点 P は辺 BC を 1:2 に内分する点である時, PG は最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる．

5.3 解説

ベクトルの問題では, 基底 (一次独立かつ, 空間の任意のベクトルが基底のベクトルの一次結合で表せる) に着目して式変形しよう．本問では例えば, $\left\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}$ が基底である．