２０２３年度京大数学（文系）の解答

tt0801

2025 年 1 月 20 日

1　大問１

1.1　問題

次の各問に答えよ.

問 1　n を自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げるとき, 出た目の積が 5 で割り切れる確率を求めよ.

問 2　次の式の分母を有理化し, 分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ.

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$$

1.2　解答

問 1　出た目の積が 5 で割り切れる事象の余事象は, いずれの目も 5 でない事象であり, その確率は, $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ である. よって, 求める確率は, $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ である.

問 2　$a=2\sqrt[3]{9}$, $b=\sqrt[3]{3}$, $c=5$ とおく.

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) &= a^3+b^3+c^3-3abc\\ &= 72+3+125-90\\ &= 110\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= 12\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+25-6-5\sqrt[3]{3}-10\sqrt[3]{9}\\ &= -9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19\end{aligned}$$

を分母分子にかけて,

$$\begin{aligned}\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5} &= \frac{55(-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19)}{110}\\ &= \frac{-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19}{2}\end{aligned}$$

と有理化できる.

1.3　別解

問 2 x, y, z を実数とする．

$$(2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5)(x\sqrt[3]{9}+y\sqrt[3]{3}+z)=(5x+y+2z)\sqrt[3]{9}+(6x+5y+z)\sqrt[3]{3}+(3x+6y+5z)$$

である．$5x+y+2z=6x+5y+z=0$ を y, z について解くと,

$$y=-\frac{7}{9}x, \quad z=-\frac{19}{9}x$$

である．そこで, $(x, y, z)=(-9, 7, 19)$ とおけば,

$$\begin{aligned}(2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5)(-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19)&=3\cdot(-9)+6\cdot 7+5\cdot 19\\&=110\end{aligned}$$

である．以上より,

$$\begin{aligned}\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}&=\frac{55(-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19)}{110}\\&=\frac{-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19}{2}\end{aligned}$$

と有理化できる．

1.4　解説

次の因数分解は導出できるようにしよう．

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

問 2 は, この因数分解を知らなくても別解のように有理化を導くことができる．しかも, 別解の方法は原理的に n 乗根の場合にも対応している．

2　大問 2

2.1　問題

空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする． 点 D, P, Q を次のように定める． 点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし, 点 P は線分 OA を 1 : 2 に内分し, 点 Q は線分 OB の中点である．さらに, 直線 OD 上の点 R を, 直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める．

このとき, 線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR : RD を求めよ．

2.2　解答

点 P は線分 OA を 1 : 2 に内分するので, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である．点 Q は線分 OB の中点なので, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．点 R は直線 OD 上にあるので, 実数 s を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3s\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

と表せる．直線 QR と直線 PC の交点 S は, 直線 QR 上にあるので実数 t を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OR}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &= st\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(2st - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3st\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

と表せる．また, 直線 PC 上にもあるので, 実数 u を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= u\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{1}{3}u\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

と表せる．

空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないので, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は一次独立だから, 上記の二通りの $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ の表記は一致する．すなわち,

$$st = \frac{1}{3}u, \quad 2st - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = 0, \quad 3st = 1 - u$$

である．一つ目と二つ目の等式より, $3st = u = 1 - u$ なので, $u = \frac{1}{2}$, $st = \frac{1}{6}$ である．これを二つの目の等式に代入して, $t = \frac{5}{3}$, $s = \frac{1}{10}$ を得る．

以上より, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるので, 点 R は辺 OD を 1:9 に内分する点である．すなわち, $\mathrm{OR} : \mathrm{RD} = 1 : 9$ である．

2.3　解説

一次独立なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に着目して表せばよい．

3　大問３

3.1　問題

(1) $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ．

(2) 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さが 1.15 より大きいか否かを理由を付けて判定せよ．

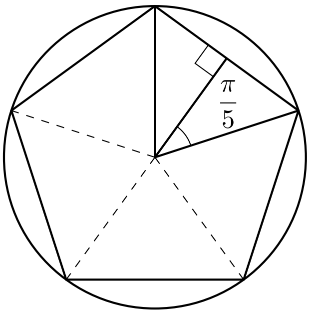
3.2　解答

(1) 二倍角の公式, 三倍角の公式より,

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

(2) 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さを h とすると, 図より

$$h = 2\sin\frac{\pi}{5}$$



である.

$$\begin{aligned}
\sin 5\theta &= \sin(2\theta + 3\theta) \\
&= \sin 2\theta\cos 3\theta + \cos 2\theta \sin 3\theta \\
&= 2\sin\theta\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + (2\cos^2\theta - 1)(-4\sin^3\theta + 3\sin\theta) \\
&= \sin\theta\left\{2\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3) + (2\cos^2\theta - 1)(-4\sin^2\theta + 3)\right\} \\
&= \sin\theta\left[2(1-\sin^2\theta)\left\{4(1-\sin^2\theta) - 3\right\} + \left\{2(1-\sin^2\theta) - 1\right\}(-4\sin^2\theta + 3)\right] \\
&= \sin\theta\left\{2(1-\sin^2\theta)(-4\sin^2\theta + 1) + (-2\sin^2\theta + 1)(-4\sin^2\theta + 3)\right\} \\
&= \sin\theta(16\sin^4\theta - 20\sin^2\theta + 5)
\end{aligned}$$

である. $\theta = \dfrac{\pi}{5}$ を代入すると, 左辺は $\sin 5\theta = \sin\pi = 0$ なので, $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0$ に注意すると,

$$16\sin^4\frac{\pi}{5} - 20\sin^2\frac{\pi}{5} + 5 = 0$$

である. すなわち, $\alpha = \sin\dfrac{\pi}{5}$ とおくと, α^2 は, $16x^2 - 20x + 5$ の根である. 同様にして, $\beta = \sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと, β^2 も $16x^2 - 20x + 5$ の根である. $0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$ より, $0 < \alpha < \beta$ に注意すると, $16x^2 - 20x + 5 = 0$ を解いて,

$$\alpha^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}, \quad \beta^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

を得る． $h=2\alpha$ より,

$$\begin{aligned} h^2-\left(\frac{23}{20}\right)^2 &= 4\alpha^2-\left(\frac{23}{20}\right)^2 \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{2}-\frac{529}{400} \\ &= \frac{471-200\sqrt{5}}{400} \\ &> 0 \end{aligned}$$

だから, $h>\dfrac{23}{20}=1.15$ である．
以上より, 半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さは, 1.15 よりも大きい．

3.3 解説

$\sin\dfrac{\pi}{5}$ の値を評価したいので, $\sin\dfrac{\pi}{5}$ が満たす方程式を考えたい．そのため 5 倍角の公式を導出した．チェビシェフの多項式などの背景知識があると, 解きやすかったかもしれない．

余談だが, 解と根の違いは次の通りである．

- 解は, 方程式や不等式を満たす答えである．すなわち, 何かしら等号 $(=)$ や不等式 $(>,<,\geq,\leq)$ で結ばれる式に対して使用される．
- 根は, 多項式に代入して 0 となるような値である．すなわち, 多項式 $P(x)$ について $x=\alpha$ が $P(x)=0$ の解であるならば, α は多項式 $P(x)$ の根である．

4 大問 4

4.1 問題

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしている．

$$a_1=3, \quad a_n=\frac{S_n}{n}+(n-1)\cdot 2^n \quad (n=2,3,4,\ldots)$$

ただし, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ である．このとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

4.2 解答

右の条件は, $n=1$ でも成立する．右の条件より, $n\geq 1$ で,

$$S_n=n\left\{a_n-(n-1)\cdot 2^n\right\}$$

である．よって, 任意の自然数 n に対して,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1}-S_n \\ &= (n+1)\left\{a_{n+1}-n\cdot 2^{n+1}\right\}-n\left\{a_n-(n-1)\cdot 2^n\right\} \\ &= (n+1)a_{n+1}-na_n-n(n+1)2^{n+1}+n(n-1)2^n \end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち,

$$na_{n+1} - na_n = n(n+1)2^{n+1} - n(n-1)2^n$$

なので, 両辺 n $(n > 0)$ で割って,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)2^{n+1} - (n-1)2^n \\ &= \{2(n+1) - (n-1)\} 2^n \\ &= (n+3)2^n \end{aligned}$$

を得る.

ゆえに, n が 2 以上の自然数の時,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+3)2^k \end{aligned}$$

$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+3)2^k$ とおくと,

$$\begin{aligned} b_n &= 2b_n - b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+3)2^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1}(k+3)2^k \\ &= \sum_{k=2}^{n}(k+2)2^k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+3)2^k \\ &= (n+2)2^n - \sum_{k=2}^{n-1} 2^k - (1+3)2^1 \\ &= (n+2)2^n - (2^n - 4) - 8 \\ &= (n+1)2^n - 4 \end{aligned}$$

である. ゆえに,

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + b_n \\ &= (n+1)2^n - 1 \end{aligned}$$

が $n \geq 2$ で成立する. これは $n = 1$ の時も両辺ともに 3 となり成立する.

以上より, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = (n+1)2^n - 1$$

である.

4.3 解説

とりあえず, a_n と S_n の関係式 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ に代入すると, 解ける漸化式が得られる.