

2022年度京大数学（文系）の解答

tt0801

2025年1月7日

1 大問1

1.1 問題

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

1.2 解答

$$\begin{aligned}\log_4 2022 &= \frac{\log_{10} 2022}{\log_{10} 4} \\ &= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1011}{2 \log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 1011}{2 \log_{10} 2} \quad (= A \text{ とおく})\end{aligned}$$

である。ここで、 $\log_{10} 1011 > \log_{10} 1000 = 3$ より、

$$\begin{aligned}A &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \log_{10} 2} \\ &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 0.3011} \quad (\because \log_{10} 2 < 0.3011) \\ &= \frac{33011}{6022} \\ &> 5.4\end{aligned}$$

なので、 $\log_4 2022 > 5.4$ である。

また、 $\log_{10} 1011 < \log_{10} 1024 = 10 \log_{10} 2$ なので、

$$\begin{aligned}A &< \frac{1}{2} + \frac{10 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{2} + 5 \\ &= 5.5\end{aligned}$$

である。よって、 $\log_4 2022 < 5.5$ となる。

以上より、 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ が示された。

1.3 解説

$\log_{10} 2$ の評価式が与えられているので、 $\log_{10} 2$ を作ることを意識して式変形をする。

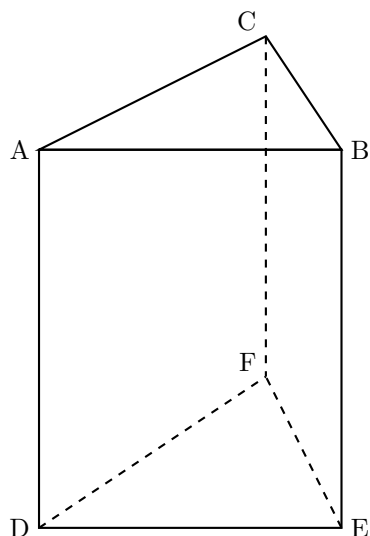
2 大問 2

2.1 問題

下図の三角柱 $ABC - DEF$ において、 A を始点として、辺に沿って頂点を n 回移動する。すなわち、この移動経路

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \quad (\text{ただし } P_0 = A)$$

において、 $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ はすべて辺であるとする。また、同じ頂点を何度通ってもよいものとする。このような移動経路で、終点 P_n が A, B, C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ。



2.2 解答

各頂点から隣接する他の頂点に移動する方法は、3 通りである。よって、 n 回移動した時の全ての経路の場合の数は、 3^n である。 $b_n = 3^n - a_n$ とおくと、終点 P_n が D, E, F のいずれかとなるものの総数である。

P_n が頂点 A, B, C のいずれかにいる時、 P_{n+1} が再び頂点 A, B, C のいずれかにいる経路は 2 通りである。一方で、 P_n が頂点 D, E, F のいずれかにいる時、 P_{n+1} が頂点 A, B, C のいずれかにいる経路は 1 通りである。以上より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ &= 2a_n + (3^n - a_n) \\ &= a_n + 3^n \end{aligned}$$

を得る。 $a_0 = 1$ とおけば、この漸化式は 0 以上の整数 n で成立する。 $n \geq 1$ の場合は、

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n + 1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。これは、 $n = 0$ の場合も成立。

以上より、

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

2.3 解説

P_n の位置について、事象は次の 2 通りしかない。

- P_n は A, B, C のいずれか、
- P_n は D, E, F のいずれか。

図の対称性から、これらの事象について漸化式を立てられそうだと見通しがつく。