

# 2022年度京大数学（文系）の解答

tt0801

2025年1月9日

## 1 大問1

### 1.1 問題

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

### 1.2 解答

$$\begin{aligned}\log_4 2022 &= \frac{\log_{10} 2022}{\log_{10} 4} \\ &= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1011}{2 \log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 1011}{2 \log_{10} 2} \quad (= A \text{ とおく})\end{aligned}$$

である。ここで、 $\log_{10} 1011 > \log_{10} 1000 = 3$  より、

$$\begin{aligned}A &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \log_{10} 2} \\ &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 0.3011} \quad (\because \log_{10} 2 < 0.3011) \\ &= \frac{33011}{6022} \\ &> 5.4\end{aligned}$$

なので、 $\log_4 2022 > 5.4$  である。

また、 $\log_{10} 1011 < \log_{10} 1024 = 10 \log_{10} 2$  なので、

$$\begin{aligned}A &< \frac{1}{2} + \frac{10 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{2} + 5 \\ &= 5.5\end{aligned}$$

である。よって、 $\log_4 2022 < 5.5$  となる。

以上より、 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$  が示された。

### 1.3 解説

$\log_{10} 2$  の評価式が与えられているので,  $\log_{10} 2$  を作ることを意識して式変形をする.

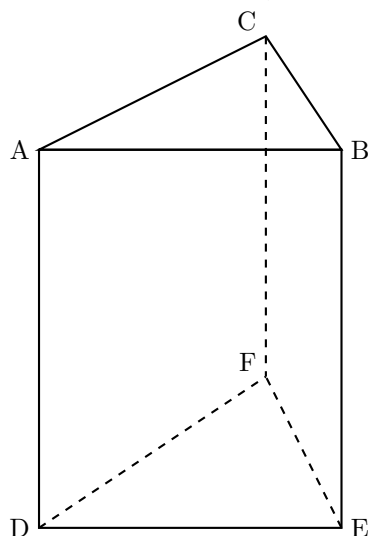
## 2 大問 2

### 2.1 問題

下図の三角柱  $ABC - DEF$  において,  $A$  を始点として, 辺に沿って頂点を  $n$  回移動する. すなわち, この移動経路

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \quad (\text{ただし } P_0 = A)$$

において,  $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$  はすべて辺であるとする. また, 同じ頂点を何度通ってもよいものとする. このような移動経路で, 終点  $P_n$  が  $A, B, C$  のいずれかとなるものの総数  $a_n$  を求めよ.



### 2.2 解答

各頂点から隣接する他の頂点に移動する方法は, 3 通りである. よって,  $n$  回移動した時の全ての経路の場合の数は,  $3^n$  である.  $b_n = 3^n - a_n$  とおくと, 終点  $P_n$  が  $D, E, F$  のいずれかとなるものの総数である.

$P_n$  が頂点  $A, B, C$  のいずれかにいる時,  $P_{n+1}$  が再び頂点  $A, B, C$  のいずれかにいる経路は 2 通りである. 一方で,  $P_n$  が頂点  $D, E, F$  のいずれかにいる時,  $P_{n+1}$  が頂点  $A, B, C$  のいずれかにいる経路は 1 通りである. 以上より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ &= 2a_n + (3^n - a_n) \\ &= a_n + 3^n \end{aligned}$$

を得る.  $a_0 = 1$  とおけば, この漸化式は 0 以上の整数  $n$  で成立する.  $n \geq 1$  の場合は,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n + 1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ. これは,  $n = 0$  の場合も成立.

以上より,

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

## 2.3 解説

$P_n$  の位置について, 事象は次の 2 通りしかない.

- $P_n$  は A, B, C のいずれか,
- $P_n$  は D, E, F のいずれか.

図の対称性から, これらの事象について漸化式を立てられそうだと見通しがつく.

## 3 大問 3

### 3.1 問題

$xy$  平面上の 2 直線  $L_1, L_2$  は直交し, 交点の  $x$  座標は  $\frac{3}{2}$  である. また,  $L_1, L_2$  はともに曲線  $C: y = \frac{x^2}{4}$  に接している. このとき,  $L_1, L_2$  および  $C$  で囲まれる図形の面積を求めよ.

### 3.2 解答

$f(x) = \frac{x^2}{4}$  とおく.  $f'(x) = \frac{x}{2}$  である.  $L_1$  と  $C$  の接点の座標を  $(p, f(p))$ ,  $L_2$  と  $C$  の接点の座標を  $(q, f(q))$  とおく.  $L_1$  は  $x = p$  における  $C$  の接線であるので, その方程式は  $y - f(p) = f'(p)(x - p)$ , すなわち,

$$y = \frac{p}{2}x - \frac{p^2}{4} \tag{1}$$

である. 同様に  $L_2$  の方程式は,

$$y = \frac{q}{2}x - \frac{q^2}{4} \tag{2}$$

で与えられる.  $L_1, L_2$  は直交するので, 傾きの積  $\frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}$  が  $-1$  に等しい. よって,

$$pq = -4. \tag{3}$$

特に  $p \neq q$  である. また,  $L_1$  と  $L_2$  の交点の座標は, 方程式 (1), (2) を連立して,  $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{pq}{4}\right)$  と分かる. 問題文の条件より  $\frac{p+q}{2} = \frac{3}{2}$ , すなわち

$$p+q=3 \quad (4)$$

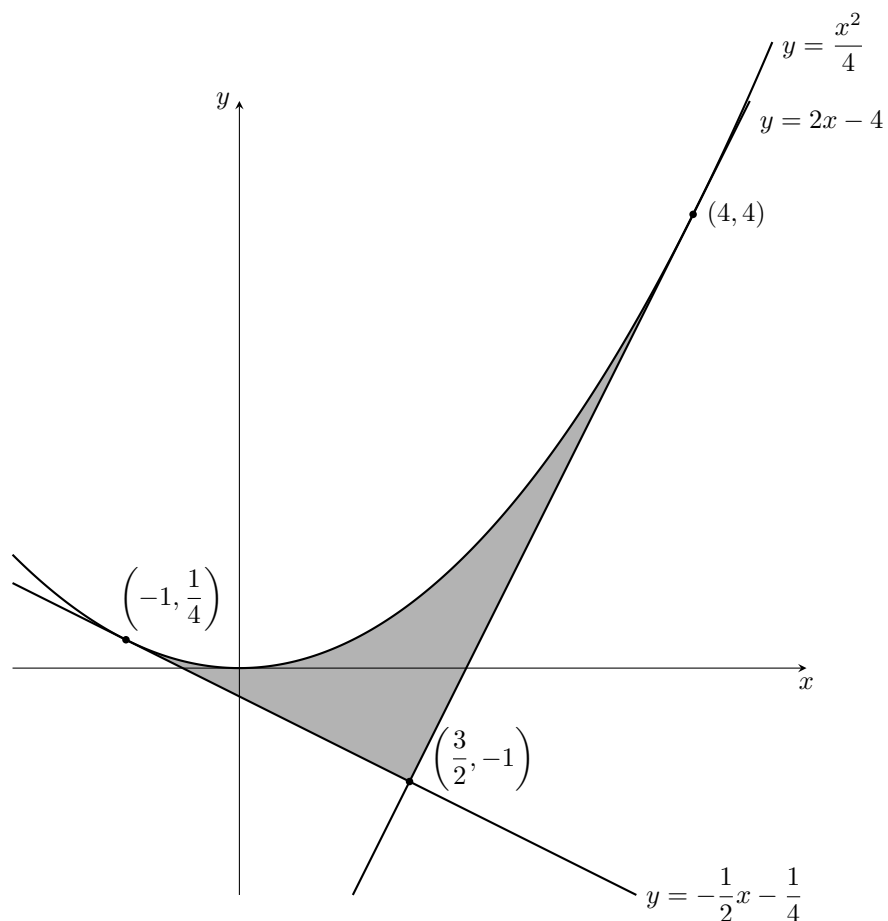
である. 式 (3),(4) より,  $p, q$  は  $t$  についての二次方程式  $t^2 - 3t - 4 = 0$  の解である. 因数分解して  $(t-4)(t+1) = 0$  なので,

$$(p, q) = (-1, 4)$$

として一般性を失わない. この時,

$$\begin{aligned} L_1 : y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \\ L_2 : y &= 2x - 4. \end{aligned}$$

である.



求める面積  $S$  は上図の色塗られた領域の面積であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{4} - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{x^2}{4} - (2x - 4) dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4} (x+1)^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{1}{4} (x-4)^2 dx \\ &= \left[ \frac{1}{12} (x+1)^3 \right]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \left[ \frac{1}{12} (x-4)^3 \right]_{\frac{3}{2}}^4 \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{1}{12} \left(-\frac{5}{2}\right)^3 \\ &= \frac{125}{48} \end{aligned}$$

と求まる.

以上より、求める面積は  $\frac{125}{48}$  である.

### 3.3 解説

覚える必要は全くないが、問題の面積は、いわゆる  $\frac{1}{6}$  公式で求まる面積の半分なので、知っていれば検算は容易である.

## 4 大問 4

### 4.1 問題

$a, b$  を正の実数とする. 直線  $L: ax + by = 1$  と曲線  $y = -\frac{1}{x}$  との 2 つの交点のうち、 $y$  座標が正のものを  $P$ 、負のものを  $Q$  とする. また、 $L$  と  $x$  軸の交点を  $R$  とし、 $L$  と  $y$  軸の交点を  $S$  とする.  $a, b$  が条件

$$\frac{PQ}{RS} = \sqrt{2}$$

を満たしながら動くとき、線分  $PQ$  の中点の軌跡を求めよ.

### 4.2 解答

4 点  $P, Q, R, S$  は全て直線  $L$  上にあるので  $PQ$  と  $RS$  の比は、「2 点  $P, Q$  の  $x$  座標の差」と「2 点  $R, S$  の  $x$  座標の差」の比に一致する.  $R$  の座標は  $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ ,  $S$  の座標は  $\left(0, \frac{1}{b}\right)$  なので、2 点  $R, S$  の  $x$  座標の差は  $\frac{1}{a}$  である.  $y = -\frac{1}{x}$  を  $ax + by = 1$  に代入して、式を整理すると

$$ax^2 - x - b = 0$$

を得る. 判別式  $D$  は  $D = 1 + 4ab > 0$  であるので、正の実数  $a, b$  の値によらず、異なる二つの実数解  $x = p, q$  ( $p > q$ ) を持つ. 二次方程式の解と係数の関係より、

$$p + q = \frac{1}{a}, \tag{5}$$

$$pq = -\frac{b}{a} \tag{6}$$

である. 特に  $pq < 0$  なので,  $p > 0 > q$  である. また, 2 点 P, Q の  $x$  座標の差の 2 乗は,

$$(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \frac{1 + 4ab}{a^2}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} 2 &= \left( \frac{PQ}{RS} \right)^2 \\ &= \left( \frac{2 \text{ 点 P, Q の } x \text{ 座標の差}}{2 \text{ 点 R, S の } x \text{ 座標の差}} \right)^2 \\ &= \frac{1 + 4ab}{a^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \\ &= 4ab + 1 \end{aligned}$$

である. ゆえに,  $ab = \frac{1}{4}$ .

P の座標は  $\left(p, -\frac{1}{p}\right)$ , Q の座標は  $\left(q, -\frac{1}{q}\right)$  であるから, 線分 PQ の中点の座標  $(X, Y)$  は,

$$X = \frac{p + q}{2}, \quad Y = -\frac{p + q}{2pq}$$

を満たす.  $p + q = \frac{1}{a}$ ,  $pq = -\frac{b}{a}$  を代入して,

$$X = \frac{1}{2a}, \quad Y = \frac{1}{2b}$$

である.  $a, b$  は正の実数なので,  $X, Y$  も正の実数であり,

$$a = \frac{1}{2X}, \quad b = \frac{1}{2Y} \tag{7}$$

を  $ab = \frac{1}{4}$  に代入して,  $XY = 1$  を得る. すなわち, 線分 PQ の中点は, 双曲線  $y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) 上に存在する.

逆に, 双曲線  $y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) の上の点  $(X, Y)$  に対して, (7) を満たす  $a, b$  を与えれば,  $a, b$  は正の実数であり, 確かに P, Q, R, S を考えることができ,

$$\left( \frac{PQ}{RS} \right)^2 = 2$$

が成り立つ. すなわち,  $\frac{PQ}{RS} = \sqrt{2}$  を満たす. そして, 線分 PQ の中点の座標は  $(X, Y)$  である.

以上より, 求める軌跡は双曲線  $y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) である.

### 4.3 解説

十分性の確認を忘れないこと.