

2022年度京大数学（理系）の問題

tt0801

2025年1月12日

1 大問1

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

2 大問2

箱の中に1から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし、 $n \geq 5$ とし、同じ番号の札はないとする。この箱から3枚の札を同時に取り出し、札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。このとき、 $Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ となる確率を求めよ。

3 大問3

n を自然数とする。3つの整数 $n^2 + 2$, $n^4 + 2$, $n^6 + 2$ の最大公約数 A_n を求めよ。

4 大問4

四面体OABCが

$$OA = 4, OB = AB = BC = 3, OC = AC = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする。点Pを辺BC上の点とし、 $\triangle OAP$ の重心をGとする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{OA}$ を示せ。

(2) Pが辺BC上を動くとき、PGの最小値を求めよ。

5 大問5

曲線 $C: y = \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする。 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とし、 C 上の点 $Q(t, \cos^3 t)$ と原点 O および $P(t, 0)$, $R(0, \cos^3 t)$ を頂点に持つ長方形OPQRの面積を $f(t)$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) S を求めよ。

(2) $f(t)$ は最大値をただ1つの t でとることを示せ。そのときの t を α とすると、 $f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であるこ

とを示せ.
(3) $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$ を示せ.

6 大問 6

数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2 \cos \left(\frac{2\pi x_n}{3} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$y_{3m+1} = 3m, \quad y_{3m+2} = 3m + 2, \quad y_{3m+3} = 3m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

により定める. このとき, 数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ.