２０２３年度京大数学（文系）の解答

tt0801

2025 年 1 月 14 日

1　大問１

1.1　問題

次の各問に答えよ.

問 1　n を自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げるとき, 出た目の積が 5 で割り切れる確率を求めよ.

問 2　次の式の分母を有理化し, 分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ.

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$$

1.2　解答

問 1　出た目の積が 5 で割り切れる事象の余事象は, いずれの目も 5 でない事象であり, その確率は, $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ である. よって, 求める確率は, $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ である.

問 2　$a=2\sqrt[3]{9}$, $b=\sqrt[3]{3}$, $c=5$ とおく.

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) &= a^3+b^3+c^3-3abc\\ &= 72+3+125-90\\ &= 110\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= 12\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+25-6-5\sqrt[3]{3}-10\sqrt[3]{9}\\ &= -9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19\end{aligned}$$

を分母分子にかけて,

$$\begin{aligned}\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5} &= \frac{55(-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19)}{110}\\ &= \frac{-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19}{2}\end{aligned}$$

と有理化できる.

1.3 別解

問 2 x, y, z を実数とする.

$$(2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5)(x\sqrt[3]{9}+y\sqrt[3]{3}+z)=(5x+y+2z)\sqrt[3]{9}+(6x+5y+z)\sqrt[3]{3}+(3x+6y+5z)$$

である. $5x+y+2z=6x+5y+z=0$ を y, z について解くと,

$$y=-\frac{7}{9}x,\quad z=-\frac{19}{9}x$$

である. そこで, $(x, y, z)=(-9, 7, 19)$ とおけば,

$$\begin{aligned}(2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5)(-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19)&=3\cdot(-9)+6\cdot 7+5\cdot 19\\&=110\end{aligned}$$

である. 以上より,

$$\begin{aligned}\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}&=\frac{55(-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19)}{110}\\&=\frac{-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19}{2}\end{aligned}$$

と有理化できる.

1.4 解説

次の因数分解は導出できるようにしよう.

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

問 2 は, この因数分解を知らなくても別解のように有理化を導くことができる. しかも, 別解の方法は原理的に n 乗根の場合にも対応している.