

2022年度京大数学（文系）の解答

tt0801

2025年1月8日

1 大問1

1.1 問題

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

1.2 解答

$$\begin{aligned}\log_4 2022 &= \frac{\log_{10} 2022}{\log_{10} 4} \\ &= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1011}{2 \log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 1011}{2 \log_{10} 2} \quad (= A \text{ とおく})\end{aligned}$$

である。ここで、 $\log_{10} 1011 > \log_{10} 1000 = 3$ より、

$$\begin{aligned}A &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \log_{10} 2} \\ &> \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 0.3011} \quad (\because \log_{10} 2 < 0.3011) \\ &= \frac{33011}{6022} \\ &> 5.4\end{aligned}$$

なので、 $\log_4 2022 > 5.4$ である。

また、 $\log_{10} 1011 < \log_{10} 1024 = 10 \log_{10} 2$ なので、

$$\begin{aligned}A &< \frac{1}{2} + \frac{10 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 2} \\ &= \frac{1}{2} + 5 \\ &= 5.5\end{aligned}$$

である。よって、 $\log_4 2022 < 5.5$ となる。

以上より、 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ が示された。

1.3 解説

$\log_{10} 2$ の評価式が与えられているので, $\log_{10} 2$ を作ることを意識して式変形をする.

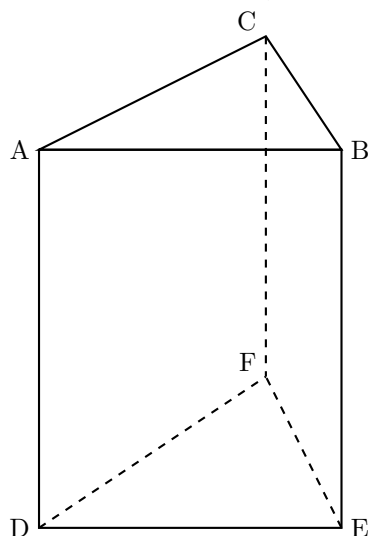
2 大問 2

2.1 問題

下図の三角柱 $ABC - DEF$ において, A を始点として, 辺に沿って頂点を n 回移動する. すなわち, この移動経路

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \quad (\text{ただし } P_0 = A)$$

において, $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ はすべて辺であるとする. また, 同じ頂点を何度通ってもよいものとする. このような移動経路で, 終点 P_n が A, B, C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ.



2.2 解答

各頂点から隣接する他の頂点に移動する方法は, 3 通りである. よって, n 回移動した時の全ての経路の場合の数は, 3^n である. $b_n = 3^n - a_n$ とおくと, 終点 P_n が D, E, F のいずれかとなるものの総数である.

P_n が頂点 A, B, C のいずれかにいる時, P_{n+1} が再び頂点 A, B, C のいずれかにいる経路は 2 通りである. 一方で, P_n が頂点 D, E, F のいずれかにいる時, P_{n+1} が頂点 A, B, C のいずれかにいる経路は 1 通りである. 以上より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ &= 2a_n + (3^n - a_n) \\ &= a_n + 3^n \end{aligned}$$

を得る. $a_0 = 1$ とおけば, この漸化式は 0 以上の整数 n で成立する. $n \geq 1$ の場合は,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n + 1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ. これは, $n = 0$ の場合も成立.

以上より,

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

2.3 解説

P_n の位置について, 事象は次の 2 通りしかない.

- P_n は A, B, C のいずれか,
- P_n は D, E, F のいずれか.

図の対称性から, これらの事象について漸化式を立てられそうだと見通しがつく.

3 大問 3

3.1 問題

xy 平面上の 2 直線 L_1, L_2 は直交し, 交点の x 座標は $\frac{3}{2}$ である. また, L_1, L_2 はともに曲線 $C: y = \frac{x^2}{4}$ に接している. このとき, L_1, L_2 および C で囲まれる図形の面積を求めよ.

3.2 解答

$f(x) = \frac{x^2}{4}$ とおく. $f'(x) = \frac{x}{2}$ である. L_1 と C の接点の座標を $(p, f(p))$, L_2 と C の接点の座標を $(q, f(q))$ とおく. L_1 は $x = p$ における C の接線であるので, その方程式は $y - f(p) = f'(p)(x - p)$, すなわち,

$$y = \frac{p}{2}x - \frac{p^2}{4} \tag{1}$$

である. 同様に L_2 の方程式は,

$$y = \frac{q}{2}x - \frac{q^2}{4} \tag{2}$$

で与えられる. L_1, L_2 は直交するので, 傾きの積 $\frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}$ が -1 に等しい. よって,

$$pq = -4. \tag{3}$$

特に $p \neq q$ である. また, L_1 と L_2 の交点の座標は, 方程式 (1), (2) を連立して, $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{pq}{4}\right)$ と分かる. 問題文の条件より $\frac{p+q}{2} = \frac{3}{2}$, すなわち

$$p+q=3 \quad (4)$$

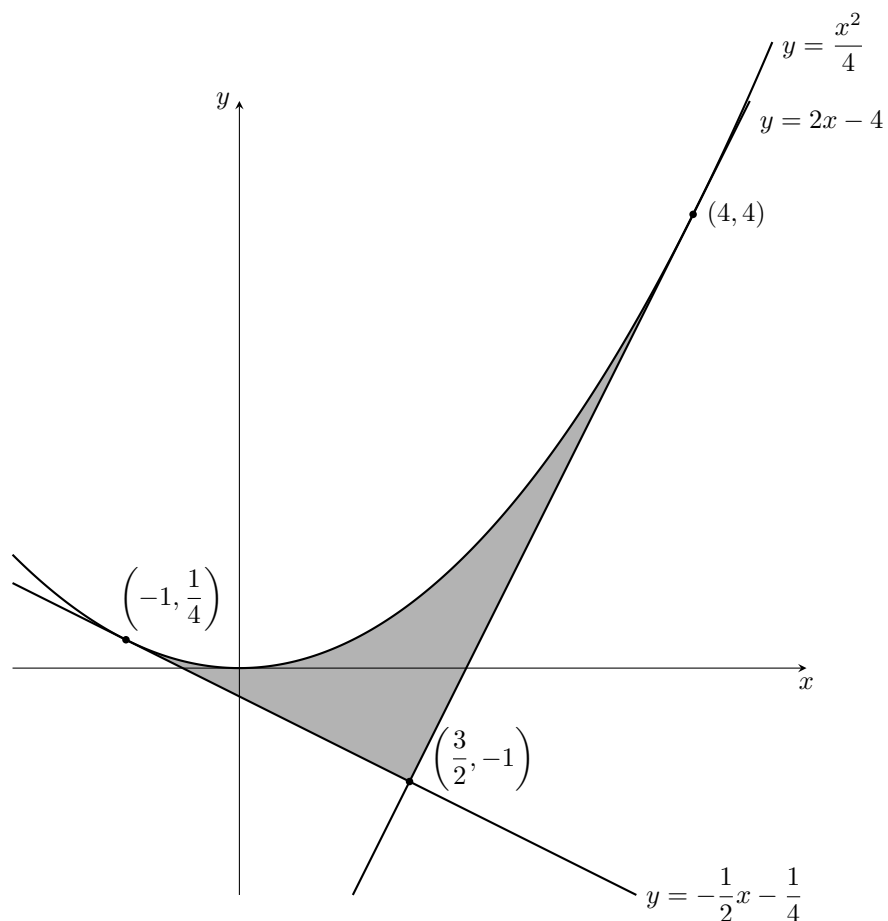
である. 式 (3),(4) より, p, q は t についての二次方程式 $t^2 - 3t - 4 = 0$ の解である. 因数分解して $(t-4)(t+1) = 0$ なので,

$$(p, q) = (-1, 4)$$

として一般性を失わない. この時,

$$\begin{aligned} L_1 : y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \\ L_2 : y &= 2x - 4. \end{aligned}$$

である.



求める面積 S は上図の色塗られた領域の面積であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{4} - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{x^2}{4} - (2x - 4) dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4} (x+1)^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 \frac{1}{4} (x-4)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{12} (x+1)^3 \right]_{-1}^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{12} (x-4)^3 \right]_{\frac{3}{2}}^4 \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{5}{2} \right)^3 - \frac{1}{12} \left(-\frac{5}{2} \right)^3 \\ &= \frac{125}{48} \end{aligned}$$

と求まる.

以上より、求める面積は $\frac{125}{48}$ である.

3.3 解説

覚える必要は全くないが、問題の面積は、いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式で求まる面積の半分なので、知っていれば検算は容易である.