Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département Informatique
Première année Ingénieurs

Année universitaire 2022-2023
Janvier 2023

Examen : Algèbre 1. Durée : 01h30.

Exercice n° 1. *(07,50 pts.)*

1. On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} : a^2 + 2b^2 = 3p.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.

2. Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 2x - 3. \end{array}$$

(a) Calculer $f^{-1}(\{-6\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

(b) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

(c) Déterminer l'intervalle J pour que l'application $g :]-\infty, -1] \longrightarrow J$ définie par $g(x) = f(x)$, soit bijective. Déterminer, dans ce cas, l'application réciproque g^{-1}.

Exercice n° 2. *(07,50 pts.)*

Soit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \{(a, b), \ a \neq 0\}$ muni de la multiplication définie comme suit :

$$(a, b) \times (a', b') = (aa', ab' + b).$$

1. Calculer $(2, 0) \times (1, 1)$ et $(1, 1) \times (2, 0)$. Que peut-on conclure ?
2. Montrer que $(E, \times)$ est un groupe non commutatif.
3. Soit $A = \{f_{a,b};\ (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ où

$$\begin{array}{rccl} f_{a,b}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_{a,b}(x) = ax + b. \end{array}$$

On munit A de la loi de composition des applications o et considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & (A, o) & \longrightarrow & (E, \times) \\ & f_{a,b} & \longmapsto & \varphi(f_{a,b}) = (a, b). \end{array}$$

(a) Montrer que φ est bijective.

(b) Vérifier que $\forall (a, b), (a', b') \in E, \varphi(f_{a,b} o f_{a',b'}) = \varphi(f_{a,b}) \times \varphi(f_{a',b'})$.

Exercice n° 3. *(05,00 pts.)*

1. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 4^{2n+2} - 15n - 16 = 225k.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de

$$A = X^{2n} + 3(X + 1)^n + 2 \ \text{ par } \ B = X(X + 1).$$

Bon courage