Université A. Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département Informatique – Tronc Commun Ingénieur

Année Universitaire 2022/2023
Session Normale
Durée : 01h30 mn

Examen d'Analyse 1

Exercice 1 : (05 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0\ ;\ u_1 = \frac{3}{2}\ et\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = u_{n+1} - u_n$; $b_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$

1. Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. Exprimer a_n en fonction de n ;
2. Montrer que (b_n) est une suite constante et déterminer sa valeur ;
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n (on cherchera tout d'abord u_n en fonction de a_n et b_n) ;
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$;
5. Calculer la somme suivante : $S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Exercice 1 : (07 points)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f ;
2. Etudier la parité de f et en déduire un intervalle d'étude ;
3. Calculer f' la dérivée de f.
4. Montrer que f n'est pas dérivable en $x = 1$. Que peut-on déduire sur le graphe de f au point d'abscisse $x = 1$?
5. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle d'études, avec les limites et les valeurs de f aux points remarquables.
6. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : (04 points)

1. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $u(x) = x^3$;
2. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $v(x) = e^{-3x}$;
3. En utilisant la formule de Leibnitz, déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction $f(x) = x^3e^{-3x}$.

Exercice 4 : (04 points)

Soit f la fonction pour tout $x \in \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$:

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 ;
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe ;
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $(+\infty)$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Bon Courage