ESTIN	École supérieure en Sciences et Technologies de l'Informatique et du Numérique Durée: 40 minutes	2ème année Classe Préparatoire Année universitaire: 2022/2023 Module: Algèbre 3 Dr. ALKAMA.L

INTERROGATION 1

N.B: veuillez détailler vos réponses.

I). Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ donnée par: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible?
2) Pour $a = -1$, calculer A^{-1}.

II). Soit le système linéaire dépendant des paramètres réels a et b :

$$(S_{a,b}) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 2z = -b \\ ax + z = 1 \\ -x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

1) Discuter l'existence et l'unicité des solutions du système $(S_{a,b})$.
2) Pour $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 10$, résoudre $(S_{a,b})$ par la méthode de l'échelonnement par lignes.

Correction interrogation 1 d'Algèbre 3

I) Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Pour quelles valeurs de a, A est inversible

A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ 0.25

0.5

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2}{\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=}} \begin{vmatrix} 5 & 3 & -10 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -10 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -(5+10a)$$ 0.25

$$\det A \neq 0 \Rightarrow 5 + 10a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{-1}{2}$$

Alors $\boxed{A^{-1} \text{ existe pour } a \neq \frac{-1}{2}}$. 0.5

2) Inverse de A pour $a = -1$

$$\det A = -(5-10) = 5$$

Méthode 1 : Cofacteurs

on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \, Com_A^t$ 0.5

$$Com_A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -10 & 10 & -5 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Com_A^t = \begin{pmatrix} -1 & -10 & 3 \\ 3 & 10 & -4 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$ 0.5 0.5

Alors
$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -10 & 3 \\ 3 & 10 & -4 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & -2 & 3/5 \\ 3/5 & 2 & -4/5 \\ -1/5 & -1 & 3/5 \end{pmatrix}}$$ 0.5

Méthode 2: Pivot de Gauss

$$[A | I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ 0.5

$$\xrightarrow{l_1 \leftarrow \frac{1}{2} l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + l_1]{l_2 \leftarrow l_2 + l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 5 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ 0.5

$$\xrightarrow{l_2 \leftarrow \frac{2}{3} l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 5/2 & 5 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{5}{2}\ell_2]{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \frac{3}{2}\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right)$$ 0,5

$$\xrightarrow{\ell_3 \leftarrow \frac{3}{5}\ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{4}{3}\ell_3]{\ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & -2 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 2 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1 & 3/5 \end{array}\right)$$

D'où $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -2 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{-4}{5} \\ -1/5 & -1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$ 0,5

II) Soit

$$(S_{a,b}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 2z = -b \\ ax + z = 1 \\ -x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

0,25

$(S_{a,b}) \Leftrightarrow CX = B$ avec $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) L'existence et l'unicité des solutions :

On remarque que $C = A$ alors

$\det C = -(5 + 10a)$

0,5

- Si $a \neq -\frac{1}{2}$, le système est de Cramer, il a une unique solution
- Si $a = -\frac{1}{2}$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det M = 3 \neq 0 \Rightarrow r = 2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 3\ell_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -10 & -b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = b - 10$$ 0,5

Cas 1 : $\Delta \neq 0 \Rightarrow b \neq 10$

Le système est impossible 0,5

Cas 2 : $\Delta = 0 \Rightarrow b = 10$

Le système est compatible (admet une infinité de solutions)

0,5

2) Pour $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 10$. Résolution par l'echelonnement par lignes

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -10 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\ell_2 \leftarrow (-2)\ell_2]{\ell_1 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1 & -5 \\ 0 & -3/2 & -3 & 3 \\ 0 & 5/2 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{-2}{3}\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5/2 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{5}{2}\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 0,5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2}y + z = -5 & \ldots (1) \\ y + 2z = -2 & \ldots (2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De (2) : $y = -2 - 2z$ 0,25

En remplaçant dans (1), on trouve $x = -5 - \frac{3}{2}y - z = -2 + 2z$ 0,25

Alors

$$\boxed{S = \{(-2+2z, -2-2z, z), \forall z \in \mathbb{R}\}}$$ 0,25