Université A. Mira de Bejaia **Année Universitaire 2022/2023**
Faculté des Sciences Exactes **Session normale**
Département d'Informatique – 1ère Année TC Ingénieur **Durée : 01h30**

Examen d'Analyse 2

Exercice 1 : (04 points)

Soit l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

1. En utilisant l'intégration par parties, dans laquelle on pose $(1-x^2)^n = 1 \,.\, (1-x^2)^n$, trouver la relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} ;
2. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

N.B : $-x^2 = -1 + (1-x^2)$

Exercice 2 : (03 points)

Déterminer les valeurs de a $(a \neq 0)$pour que les intégrales impropres suivantes convergent :

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt \;\; ; \;\; J = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t} dt$$

Exercice 3 : (05 points)

1. Soit l'équation différentielle : $(2\cos x)y' - (2\sin x)\, y = y^2$ (1)
   - 1.1. Donner le type de cette équation ;
   - 1.2. Trouver la solution générale de (1)
2. Soit l'équation différentielle (de Riccati) suivante : $(2\cos x)y' = y^2 + 2\cos^2 x - \sin^2 x$ (2)
   - 2.1. Vérifier que $y_0 = \sin x$ est une solution particulière de (2) ;
   - 2.2. En utilisant le changement de variable $u = y - y_0$, montrer que l'équation (2) se réduit à l'équation (1) ;
   - 2.3. En déduire la solution générale de l'équation (2).

Exercice 4 : (05 points)

Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x^2+1)e^x + 2e^{2x} \quad (1)$$

1. Déterminer la solution générale $y_h(x)$ de l'équation homogène (sans second membre) associée à l'équation (1) ;
2. Déterminer les trois réels a, b et c tels que $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ soit solution de l'équation $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x^2+1)e^x$;
3. Déterminer le réel α tel que $y_2(x) = \alpha x^2 e^{2x}$ soit solution de l'équation $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x}$;
4. Montrer que $y_1(x) + y_2(x)$ est une solution particulière de (1). Déduire la solution générale de l'équation (1)

Exercice 5 : (03 points)

En utilisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + (2-x^2)y(x) = 0$$

Corrigé de l'examen d'Analyse 1

Exercice 1 :

Soit l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

1. La relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} :

$$u = (1-x^2)^n \rightarrow u' = -2nx(1-x^2)^{n-1}$$

$$v' = 1 \rightarrow v = x$$

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = [x(1-x^2)^n]_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1} = -2n\int_0^1 -x^2(1-x^2)^{n-1}$$

$$= -2n\int_0^1 (-1+1-x^2)(1-x^2)^{n-1} = 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx - 2n\int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2nI_{n-1} - 2nI_n$$

$$\rightarrow (2n+1)I_n = 2nI_{n-1} \rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

2. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2(n-1)}{2n-1}\frac{2(n-2)}{2n-3}I_{n-3}$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\frac{2(n-1)}{2n-1}\frac{2(n-2)}{2n-3}\frac{2(n-3)}{2n-5}\dots\dots\dots\dots\frac{2}{3}I_0$$

Sachant que $I_0 = \int_0^1 dx = 1$; il s'en suit que :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}\frac{2(n-1)}{2n-1}\frac{2(n-2)}{2n-3}\frac{2(n-3)}{2n-5}\dots\dots\dots\dots\frac{2}{3} = \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3}$$

Exercice 2 :

La fonction $\frac{e^{-at}}{1+e^t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle également positive. Il suffit de chercher son équivalent en $+\infty$ et $-\infty$:

$$\frac{e^{-at}}{1+e^t} \sim (+\infty) = \frac{e^{-at}}{e^t} = e^{-at-1}$$

Donc :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt \sim \int_0^{+\infty} e^{-at-1}dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-at-1}\right]_0^{+\infty}$$

Pour que l'intégrale converge (lorsque$t \rightarrow +\infty$), il est nécessaire que $-a < 0 \rightarrow a > 0$. Sa valeur est :

$$J = \frac{1}{a}e^{-1} = \frac{1}{ae}$$

De même :

$$\frac{e^{-at}}{1+e^t} \sim (-\infty) = e^{-at}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt \sim \int_{-\infty}^{0} e^{-at}dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_{-\infty}^{0}$$

Pour que l'intégrale converge (lorsque$t \to +\infty$), il est nécessaire que $-a > 0 \to a < 0$. Sa valeur est :

$$I = -\frac{1}{a}$$

Exercice 3 :

1. Soit l'équation différentielle : $(2\cos x)y' - (2\sin x)\, y = y^2$ (1)
   1.1. Le type de cette équation :

C'est une équation différentielle de type Bernoulli.

   1.2. La solution générale de (1) :

En divisons chaque terme par $(2\cos x)$ et y^2, l'équation (1) devient :

$$y^{-2}y' - (\tan x)\, y^{-1} = \frac{1}{2\cos x} \;(1')$$

Faisons le changement de variable :

$$y = z^{-1} = \frac{1}{z} \to \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

L'équation (1') devient :

$$\frac{dz}{dx} + (\tan x)z = -\frac{1}{2\cos x} \;(1'')$$

On obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre. Résolvons, tout d'abord, l'équation homogène associée à cette équation :

$$\frac{dz}{dx} + (\tan x)z = 0 \to \frac{dz}{z} = -\tan x \; dx \to \ln z = \ln(\cos x) + C_1 \to z = C_2 \cos x \;\; (C_2 = e^{C_1})$$

Variation de la constante $\big(C_2 = C_2(x)\big)$. Remplaçons dans (1'') :

$$C_2'(x) = -\frac{1}{2\cos^2 x} \to C_2(x) = -\frac{1}{2}\tan x + C$$

Donc :

$$z(x) = \cos x\left(-\frac{1}{2}\tan x + C\right) = -\frac{1}{2}\sin x + C\cos x$$

D'où :

$$y(x)=\frac{1}{z(x)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}\sin x+C\cos x}=\frac{2}{-\sin x+2C\cos x}$$

2. Soit l'équation différentielle (de Riccati) suivante : $(2\cos x)y'=y^2+2\cos^2 x-\sin^2 x$ (2)

2.1. Vérifier que $y_0=\sin x$ est une solution particulière de (2) :

$$2\cos x\,(\cos x)=2\cos^2 x=\sin^2 x+2\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x$$

2.2. En utilisant le changement de variable $u=y-y_0$, montrer que l'équation (2) se réduit à l'équation (1) :

$$u=y-\sin x\to y=u+\sin x\to y'=u'+\cos x$$

L'équation (2) devient :

$$(2\cos x)(u'+\cos x)=(u+\sin x)^2+2\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\to (2\cos x)u'-(2\sin x)u=u^2\quad (2')$$

2.3. En déduire la solution générale de l'équation (2) :

D'après la question (1), la solution de l'équation (2') est :

$$u(x)=\frac{2}{-\sin x+C\cos x}$$

Donc, la solution de l'équation (2) est :

$$y(x)=u(x)+\sin x=\frac{2}{-\sin x+C\cos x}+\sin x$$

Exercice 4 :

Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y''(x)-4y'(x)+4y(x)=(x^2+1)e^x+2e^{2x}\quad (1)$$

1. La solution générale $y_h(x)$ de l'équation homogène (sans second membre) associée à l'équation (1) :

$$y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0\to k^2-4k+4=0\to (k-2)^2=0\to k=2$$

$$y_h=(C_1t+C_2)e^{2x}$$

2. Les trois réels a, b et c tels que $y_1(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ est solution de l'équation $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=(x^2+1)e^x$ $(*)$:

$$y_1(x)=(ax^2+bx+c)e^x\to\begin{cases} y_1'(x)=(ax^2+(b+2a)x+c+b)e^x\\ y_1''(x)=(ax^2+(b+4a)x+2a+c+2b)e^x\end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (*), on trouve :

$$(ax^2+(b-4a)x+2a+c-2b)e^x=(x^2+1)e^x$$

Par identification :

$$\begin{cases} a=1\\ b-4a=0\\ 2a-2b+c=1\end{cases}\to\begin{cases} a=1\\ b=4a=4\\ c=2b-2a+1=7\end{cases}$$

Donc : $y_1(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$

3. Le réel αt c tel que $y_2(x) = \alpha x^2 e^{2x}$ est solution de l'équation $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$ $(**)$:

$$y_2(x) = \alpha x^2 e^{2x} \rightarrow \begin{cases} y_2(x)' = (2\alpha x + 2\alpha x^2)e^{2x} \\ y_2''(x) = (4\alpha x^2 + 8\alpha x + 2\alpha)e^{2x} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (**), on trouve :

$$(2\alpha)e^{2x}e^{2x} = 2e^{2x}$$

Par identification, il s'en suit que : $2\alpha = 2 \rightarrow \alpha = 1$

Donc : $y_2(x) = x^2 e^{2x}$

4. Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (1) :

D'après ce qui précède :

$$y_1''(x) - 4y_1'(x) + 4y_1(x) = (x^2 + 1)e^x$$

$$y_2''(x) - 4y_2'(x) + 4y_2(x) = 2e^{2x}$$

En faisant la somme de ces deux équations on trouve :

$$\left(y_1(x) + y_2(x)\right)'' - 4\left(y_1(x) + y_2(x)\right)' + 4\left(y_1(x) + y_2(x)\right) = (x^2 + 1)e^x + 2e^{2x}$$

Donc, $y_1(x) + y_2(x)$ est une solution particulière de (1). Par conséquent, la solution générale de (1) s'écrit :

$$y(x) = y_h(x) + y_1(x) + y_2(x) = (C_1 t + C_2)e^{2x} + (x^2 + 4x + 6)e^x + x^2 e^{2x}$$

<u>Exercice 5 :</u>

En utilisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0$$

$$y(x) = xz(x) \rightarrow \begin{cases} y'(x) = z(x) + xz'(x) \\ y''(x) = 2z'(x) + xz''(x) \end{cases}$$

On trouve :

$$x^2\left(2z'(x) + xz''(x)\right) - 2x\left(z(x) + xz'(x)\right) + (2 - x^2)xz(x) = 0$$

$$\rightarrow x^3(z'' - z) = 0 \rightarrow z'' - z = 0$$

On obtient une équation linéaire et homogène du second ordre :

$$z'' - z = 0 \rightarrow k^2 - 1 = 0 \rightarrow k = \pm 1 \rightarrow z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Par conséquent :

$$y(x) = xz(x) = x(C_1 e^x + C_2 e^{-x})$$