ESTIN
2CPI, Logique mathématique

BEJAIA
Année 2020/2021
Le 04 juillet 2021

EMD
Durée : 2h

Exercice 1. (7 points)

Soit **If** (if then else) un nouveau connecteur logique, dont la sémantique est donnée par la fonction booléenne ternaire If telle que pour toutes variables propositionnelles X, A, B :
$If(X, A, B)$ vaut A si X est V, et vaut B sinon.

i. Donner la forme normale disjonctive (fnd) de If.
- Déduire sa fnd simplifiée n'utilisant que deux conjonctions de deux littéraux chacune.

ii. Donner la forme normale conjonctive (fnc) de If.
- Déduire sa fnc simplifiée n'utilisant que deux disjonctions de deux littéraux chacune.

iii. Étant donné le symbole $\perp$ qui désigne une constante propositionnelle toujours fausse, et le symbole $\top$ une constante propositionnelles toujours vraie.
L'ensemble $\{If, \top, \perp, \}$ forme-il un système complet de connecteurs, justifier votre réponse.

Exercice 2. (5 points)

i. En utilisant le système d'axiomes vu en cours et la règle de Modus Ponens, montrer que :

$$\{p, (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))\} \vdash q \Rightarrow r$$

- Déduire de la question précédente que :
$(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ est un théorème. Justifier.

ii. Montrer à l'aide de la résolution propositionnelle, que la formule :
$G \equiv q \Rightarrow (p \vee \neg s \vee t))$ est une conséquence logique de la formule :
$F \equiv (\neg p \wedge (r \Rightarrow \neg s)) \vee ((q \Rightarrow (r \vee t)) \wedge (s \Rightarrow \neg r))$.

Exercice 3. (4 points)

i. Donner pour chacune des formules les occurrences des variables liées et les occurrences libres :
a) $\forall x_3(\forall x_1 P(x_1, x_2) \Rightarrow P(x_3, a_1))$
b) $\forall x_2 P(x_3, x_2) \Rightarrow \forall x_3 P(x_3, x_2)$
c) $\forall x_2 \exists x_1 Q(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \vee \neg(\forall x_1 P(x_2, g(x_1)))$

ii. Pour les formules ci-dessous, quelles sont celles où $f(x_1, x_3)$ est libre pour x_2 ?
a) $\forall x_2(A(x_1, x_2) \Rightarrow A(x_2, a))$
b) $\forall x_1 \forall x_3(A(x_1, x_2) \Rightarrow B(x_3))$
c) $\forall x_2 A(f(x_2)) \Rightarrow \forall x_3 B(x_1, x_2, x_3)$
d) $\neg\neg A(x_2) \wedge \forall x_5 A(x_2)$
e) $\forall x_2 A(x_2)$

iii. Préciser si les formules suivantes sont valides ou non valides en justifiant vos réponses.
a) $\forall y P(y, y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$
b) $\forall y P(y, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

iv. Soit l'interprétation I de domaine $D = \{3, 5, 7, 9, 4\}$ et deux prédicats P et Q telle que :

$I(P)$:"...est premier"

$I(Q)$:"...est impair"

et soit la formule $\beta \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$

Est ce que $I \models \beta$? Justifier.

Exercice 4. (4 points)

i. Formaliser les énoncés $E1$, $E2$ et $E3$ ci-dessous en langage des prédicats du premier ordre en utilisant les prédicats :

$I(x)$: x est ingénieur ;

$D(x)$: x a un diplôme de l'enseignement supérieur ;

$P(x$:) x est pauvre.

$E1$: Tous les ingénieurs ont un diplôme de l'enseignement supérieur.

$E2$: Quelques ingénieurs sont pauvres.

$E3$: Quelques personnes ayant un diplôme de l'enseignement supérieur sont pauvres.

ii. Trouver un ensembles de clauses C équivalent à $\{E1, E2, \neg E3\}$

iii. Quel est le domaine de Herbrand correspondant à C.

iv. Est-ce que $\{E1, E2\} \models E3$? Justifier.

Bon courage