Ecole Supérieure en Sciences et Technologies
de l'Informatique et du Numérique.
2^{eme} Année Classe Préparatoire.
Durée : 2H

Année Universitaire 2021/2022

Examen du module probabilité et statistique 2

Exercice n° 1 : (5 pts)

I) Soit X_n une v.a. positive de densité $f_n(x) = ne^{-nx}$ pour $x > 0$. Montrer que la suite (X_n) converge en moyenne quadratique vers zéro.

II) Soit (U_n) des v.a. indépendantes et de même loi définie par $P(U_n = 1) = p$ et $P(U_n = -1) = q = 1-p$ avec $0 < p < 1$. Déterminer la loi exacte, puis la loi limite, de la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \prod_{i=1}^{n} U_n$$

$e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$

Exercice n° 2 : (5 pts)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon issu de $X \curvearrowright P(\lambda)$.

1. Tester au niveau de α, H_0 "$\lambda \geq \lambda_0$" *contre* H_1 "$\lambda < \lambda_0$", avec λ_0 donnée.
2. Tester au niveau de α, H_0 "$\lambda \leq \lambda_0$" *contre* H_1 "$\lambda > \lambda_0$", avec λ_0 donnée.

Application numérique : $\alpha = 0.01$, $\lambda_0 = 1.5$, $\sum_{i=1}^{10} X_i = 15$.

Exercice n° 3 : (10 pts)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon issu de $X \curvearrowright \exp(\lambda = \frac{1}{\theta})$. Pour $x \geq 0$ et avec $\theta > 0$. On considère les trois estimateurs suivants de $\theta > 0$:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\theta}_3 = n.\min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de $\hat{\theta}_1$ et de $\hat{\theta}_2$ ainsi que leur erreur quadratique moyenne (le risque associé).
2. De même pour $\hat{\theta}_3$. Comparer l'efficacité de ces trois estimateurs du point de vue de l'erreur quadratique moyenne.
   Indication : trouver la distribution de $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire calculer $P(Y < y)$. De quelle loi s'agit-il ?
3. Les estimateurs $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ et $\hat{\theta}_3$ sont-ils convergents ?
4. On définit l'intervalle de confiance suivant pour λ :

$$IC = [a/\min\{X_i\}, b/\min\{X_i\}]$$

Calculer le degré de confiance de cet intervalle en fonction de a, b et de n (c'est à dire la probabilité que λ soit dans l'intervalle IC).
Indication : montrer que $Z = \lambda.\min\{X_i\}$ est distribué selon la loi exponentielle de paramètre n et utiliser ce résultat.

Bon courage.

$P(Y=X)$

D.