Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

Département d'Informatique.

Module:Algèbre 1 ($\mathbf{S}_1 - \mathbf{1}^{ère}$ Année LMD, MI) **Durée: $\mathbf{01}^h$:30^m**

***Examen de Rattrapage* (2017 − 2018)**

Exercice 01:(06pts)

1) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. Ecrire la négation de: $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Longrightarrow x = y$.
Montrer par l'absurde que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Longrightarrow x = y$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par disjonction de cas que $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 02:(06pts)

1) Soient E, F et G trois ensembles. Soient $g : E \longrightarrow F$ et $f : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer que si $f \circ g$ est surjective et f est injective, alors g est surjective.
2) Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \frac{1}{x^2+2} \end{array}$.
2.1) Déterminer $f^{-1}\left\{0; \frac{1}{3}\right\}$.
2.2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.
2.3) En déduire que $f \circ f$ n'est pas surjective.

Exercice 03:(08pts)

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par :
$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : (x, y)\mathcal{R}(x', y') \Longleftrightarrow (\frac{x}{x'} \in \mathbb{N} \text{ et } y \geq y')$.
1) Etudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$.
2) Est-ce-que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence? (justifier).
3) Est-ce-que $\mathcal{R}$ est une relation d'order? (justifier).
4) Soit $P : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ (x^2, y^2)\mathcal{R}(x, y)$
Ecrir la négation de P, puis dire si est-elle vraie ou fausse.

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 (S_1−1ère Année LMD, MI) **Durée: 01^h:30^m**

***Corrigé de l'examen de Rattrapage* (2017 − 2018)**

Exercice 01:(06pts)

1) La négation de: $\frac{x}{1+y}=\frac{y}{1+x}\Longrightarrow x=y$ est $\frac{x}{1+y}=\frac{y}{1+x}\wedge x\neq y$.......**(1pt)**
Supposons que la négation $\frac{x}{1+y}=\frac{y}{1+x}\wedge x\neq y$ est vraie.
Donc $x+x^2-y-y^2=0\wedge x\neq y$, c-à-d: $(x-y)(1+x+y)=0\wedge x\neq y$,
d'où $x=y\wedge x\neq y$, car $x,y\in\mathbb{R}_+$ (Absurde).
Alors $\frac{x}{1+y}=\frac{y}{1+x}\Longrightarrow x=y$ est vraie. ......**(2pts)**
2) 1ercas: Si $x\geq 1$, c-à-d $|x-1|=x-1\geq 0$
On a $(x-1)\,x\geq(x-1)\,1$ donc $x-1\leq x^2-x\leq x^2-x+1$, c-à-d $|x-1|\leq x^2-x+1$..**(1.5pt)**
2emecas: Si $x<1$, c-à-d $|x-1|=1-x>0$
On a $0\leq x^2$, donc $1-x+0\leq x^2+1-x$, c-à-d $|x-1|\leq x^2-x+1$....**(1.5pt)**
Par suite $|x-1|\leq x^2-x+1$ est vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 02:(06pts)

1) Supposons que $f\circ g$ est surjective et f est injective et montrons que g est surjective.
Soit $y\in F$, alors $f(y)\in G$
et puisque $f\circ g$ est surjective, il existe $x\in E$ tel que $f(y)=f\circ g(x)$.
c-à-d $f(y)=f(g(x))$, et puisque f est injective, alors $y=g(x)$.
Donc il existe $x\in E$ tel que $y=g(x)$, c-à-d g est surjective....**(2pts)**
2)
2.1) $f^{-1}\left\{0;\frac{1}{3}\right\}=\{1\}$ ....**(1pt)**
2.2) f n'est pas surjective, car $y=0$ n'a pas d'antécédent dans x dans $\mathbb{R}_+$....**(1pt)**
Soit $x,x'\in\mathbb{R}_+$, on a:
$f(x)=f(x')\Longrightarrow\frac{1}{x^2+2}=\frac{1}{x'^2+2}\Longrightarrow x'^2=x^2\Longrightarrow x'=x$, car $x,x'\in\mathbb{R}_+$.
Alors f est injective....**(1pt)**
2.3) Supposons que $f\circ f$ est surjective et comme f est injective, alors d'après la 1^{ere} question, f est surjective, ce qui n'est pas le cas.
Alors $f\circ f$ n'est pas surjective....**(1pt)**

Exercice 03:(08pts)

1)
1.1) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, on a:

$(\frac{x}{x}=1\in\mathbb{N}$ et $y\geq y)$, c-à-d: $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$.
Alors $\mathcal{R}$ est réflexive....**(1pt)**
1.2) Il suffit de prendre $(x,y)=(2,3)$ et $(x',y')=(1,2)$, on a:
$(\frac{2}{1}\in\mathbb{N}$ et $3\geq 2)$, c-à-d $(2,3)\,\mathcal{R}\,(1,2)$,
mais $(\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$ ou $2\geq 3)$, c-à-d $(2,3)\,\not{\mathcal{R}}\,(1,2)$.
Alors $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique....**(1pt)**
1.3) Soit $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}(x,y)\mathcal{R}(x',y')\wedge(x',y')\mathcal{R}(x,y) &\Longrightarrow (\tfrac{x}{x'}\in\mathbb{N} \text{ et } y\geq y')\wedge(\tfrac{x'}{x}\in\mathbb{N} \text{ et } y'\geq y)\\ &\Longrightarrow (\tfrac{x}{x'}\in\mathbb{N} \text{ et } \tfrac{x'}{x}\in\mathbb{N})\wedge(y\geq y' \text{ et } y'\geq y)\\ &\Longrightarrow \tfrac{x}{x'}=1\wedge y=y'\Longrightarrow (x,y)=(x',y').\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique....**(1pt)**
1.4) Soit $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}(x,y)\mathcal{R}(x',y')\wedge(x',y')\mathcal{R}(x'',y'') &\Longrightarrow (\tfrac{x}{x'}\in\mathbb{N} \text{ et } y\geq y')\wedge(\tfrac{x'}{x''}\in\mathbb{N} \text{ et } y'\geq y'')\\ &\Longrightarrow (\tfrac{x}{x'}.\tfrac{x'}{x''}\in\mathbb{N})\wedge(y\geq y'')\\ &\Longrightarrow \tfrac{x}{x''}\in\mathbb{N}\wedge y\geq y''\Longrightarrow (x,y)\mathcal{R}(x'',y'').\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est transitive....**(1pt)**
2) $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence, car elle n'est pas symétrique....**(1pt)**
3) $\mathcal{R}$ est une relation d'order, car elle est réflexive, antisymétrique et transitive....**(1pt)**
4) $\overline{P}:\exists(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\ (x^2,y^2)\not{\mathcal{R}}(x,y)$....**(1pt)**
$\overline{P}$ est vraie, car il suffit de prendre $(x,y)=(-1,2)$, on a:
$(\frac{(-1)^2}{-1}\notin\mathbb{N}$ ou $2^2\geq 2)$, c-à-d: $((-1)^2,2^2)\not{\mathcal{R}}(-1,2)$....**(1pt)**