INTERROGATION N°1

Groupes : $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$; **Durée : 1h 30mn**

Exercice 1. Étudier la nature de chacune des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n\sqrt{n}+\log n}; \quad \sum_{n\geq 0} \{\log(e^n+1)-n\}\,; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(2n)!}; \quad \sum_{n\geq 1} \left\{e-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}.$$

Exercice 2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de fonctions définies par :

$$f_n(x) = x^n(1-x), \quad (\forall x \in [0,1])$$
$$g_n(x) = (\sin(x))^{2n}\cos^2(x), \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. (*On pourra utiliser la question 1*).

Exercice 3. Soit $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de φ.
   (*Indication : vous pouvez utiliser le théorème de Bertrand*).
2. Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{\log n}{n^x}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,b]$ où $b>a>1$.
3. Montrer que la fonction $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer $\zeta'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$.
4. Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{\log n}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

BON TRAVAIL

S.A. BOUSLA

Date : **Mardi, 14 décembre 2021.**