Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module: Algèbre 2 ($\mathbf{S}_2$−$\mathbf{1}^{ère}$ Année LMD, MI) **Durée: 01**^{h}:30^m

Examen Final (2017 − 2018)

Exercice 01:(10pts)

Soit E la partie de $\mathbb{R}^4$ définie par $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z \text{ et } x + z = 0\}$
1) Montrer que E est un sous space vectoriel de $\mathbb{R}^4$ puis donner une base B de E.
2) Compléter B en une base de $\mathbb{R}^4$ (utiliser des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$)
3) Soit $u = (1, 1, 1, 1)$; $v = (1, 2, 3, 4)$; $w = (-1, 0, -1, 0)$ et soit le sous espace vectoriel G défini par $G = \langle u, v, w \rangle$.
3.1) Quelle est la dimension de G.
3.2) En admettant que $\dim (E \cap G) = 1$, montrer que $E + G = \mathbb{R}^4$.
3.2) Est ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de G? (Justifier)

Exercice 02:(10pts)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par: $f(x, y, z) = (3x, x + 2y - 2z, 3x - 3y + 3z)$
1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer une base de $\ker f$, puis calculer $\dim \ker f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.
3) Est ce que f est injective? Est-elle surjective?(Justifier)
4) Soit $E = \{v \in \mathbb{R}^3, f(v) = 3v\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis donner une base de E.
5) Y a-t-il: $E \oplus \ker f = \mathbb{R}^3$?

Bon courage.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module: Algèbre 2 (S_2−$1^{ère}$ Année LMD, MI)   Durée: 01^h:30^m

Corrigé de l'examen Final **(2017 − 2018)**

Exercice 02:(10pts)

1) On a $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$ et $0+0=0$ et $0+0=0$, alors $0_{\mathbb{R}^4} \in E$.....(0.5pt)
Soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z,t), (x',y',z',t') \in E$,
On a $\alpha(x,y,z,t)+\beta(x',y',z',t') = (\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z', \alpha t+\beta t')$,
$\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y' = \alpha(x+y)+\beta(x'+y') = \alpha z+\beta z'$
et $\alpha x+\beta x'+\alpha z+\beta z' = \alpha(x+z)+\beta(x'+z') = \alpha(0)+\beta(0)=0$,
alors $\alpha(x,y,z,t)+\beta(x',y',z',t') \in E$.
Par suite E est un sous space vectoriel de $\mathbb{R}^4$...................(01pt)
Soit $(x,y,z,t) \in E$, c-à-d: $y=2z$ et $x=-z$,
donc $(x,y,z,t) = (-z,2z,z,t) = (-z,2z,z,0)+(0,0,0,t) = z(-1,2,1,0)+t(0,0,0,1)$
Posons $b_1 = (-1,2,1,0) \in E$ et $b_2 = (0,0,0,1) \in E$.
Alors $B = \{b_1,b_2\}$ est une partie génératrice de E...................(01pt)
Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a:

$$\lambda_1(-1,2,1,0)+\lambda_2(0,0,0,1)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Alors $B = \{b_1,b_2\}$ est une partie libre de E.
Par suite $B = \{b_1,b_2\}$ est une base de E...................(01pt)
2) Soit $B' = \{b_1,b_2,e_1,e_2\}$ avec $e_1 = (1,0,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0,0)$ .....(0.5pt)
Soit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$, on a:

$$\lambda_1(-1,2,1,0)+\lambda_2(0,0,0,1)+\lambda_3(1,0,0,0)+\lambda_4(0,1,0,0)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Alors B'est une partie libre de $\mathbb{R}^4$...................(01pt)
Puisque $card(B') = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, alors B'est libre maximale,
par suite B' est une base de $\mathbb{R}^4$...................(01pt)
3) $u = (1,1,1,1)$; $v = (1,2,3,4)$; $w = (-1,0,-1,0)$ et $G = \langle u,v,w \rangle$.
3.1) Il est clair que $S = \{u,v,w\}$ est une partie génératrice de G.
Soit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a:

$$\lambda_1(1,1,1,1)+\lambda_2(1,2,3,4)+\lambda_3(-1,0,-1,0)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2=0 \\ \lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3=0 \\ \lambda_1+4\lambda_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \\ \lambda_1=-2\lambda_2=0 \\ \lambda_3=\lambda_1 \\ \lambda_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Alors S est une partie libre dans G..................(01pt)
Par suite S est une base de G et $\dim G=3$..................(0.5pt)
3.2) On a $\dim(E\cap G)=1$ et d'après ce qui précède $\dim E=2$, alors
$\dim(E+G)=\dim E+\dim G-\dim(E\cap G)=2+3-1=4$,....(01pt)
et comme $E+G$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, alors $E+G=\mathbb{R}^4$.....(0.5pt)
3.2) Non un vecteur de $\mathbb{R}^4$ ne s'écrit pas de façon unique comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de G, car la somme $E+G$ n'est pas directe, car $E\cap G\neq\{0\}$. ....(01pt)

Exercice 02:(10pts)

Soit $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ l'application définie par: $f(x,y,z)=(3x,x+2y-2z,3x-3y+3z)$
1) Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, (x,y,z), $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$, on a:
$f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z'))=f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')$
$=(3\alpha x+3\beta x',\alpha x+\beta x'+2\alpha y+2\beta y'-2\alpha z-2\beta z',3\alpha x+3\beta x'-3\alpha y-3\beta y'+3\alpha z+3\beta z')$
$=(3\alpha x,\alpha x+2\alpha y-2\alpha z,3\alpha x-3\alpha y+3\alpha z)+(3\beta x',\beta x'+2\beta y'-2\beta z',3\beta x'-3\beta y'+3\beta z')$
$=\alpha(3x,x+2y-2z,3x-3y+3z)+\beta(3x',x'+2y'-2z',3x'-3y'+3z')$
$=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')$
Alors f est linéaire..............(1.5pt)
2) Soit $(x,y,z)\in\ker f$, c-à-d: $f(x,y,z)=0$

$$f(x,y,z)=0 \quad\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ x+2y-2z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases},$$

donc $(x,y,z)=(0,z,z)=z(0,1,1)$
Posons $a=(0,1,1)\in\ker f$, alors $A=\{a\}$ est une partie génétrice de $\ker f$.....(01pt)
Comme $a\neq 0$, alors la prtie $\{a\}$ est libre.....(0.5pt)
Par suite A est une base de $\ker f$ et $\dim\ker f=1$.........(0.5pt)
On sait que: $\dim\mathbb{R}^3=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f$,
alors $\dim\operatorname{Im} f=\dim\mathbb{R}^3-\dim\ker f=3-1=2$.........(01pt)
3) $\dim\ker f=1$, alors $\ker f\neq\{0\}$, donc f n'est pas injective.....(0.5pt)
$\dim\operatorname{Im} f=2$, alors $\operatorname{Im} f\neq\mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective.....(0.5pt)

4) Soit $E=\{v\in\mathbb{R}^3, f(v)=3v\}$,
On a $f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=3\times 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $0_{\mathbb{R}^3}\in E$.......(0.5pt)
Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $v,v'\in E$, on a:
$f(\alpha v+\beta v')=\alpha f(v)+\beta f(v')=\alpha 3v+\beta 3v'=3(\alpha v+\beta v')$,
alors $\alpha v+\beta v'\in E$.
Par suite E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.......(01pt)
Soit $v=(x,y,z)\in E$, c-à-d: $f(v)=3v$.

$$f(v)=3v \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x=3x \\ x+2y-2z=3y \\ 3x-3y+3z=3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in\mathbb{R} \\ z=0 \\ y=x \end{array}\right. ,$$

alors $v=(x,x,0)=x(1,1,0)$,
Puisque $b=(1,1,0)\in E$, alors $E=\langle b\rangle$ ....(01pt)
Comme $b\neq 0$, alors $\{b\}$ est libre, par suite $\{b\}$ est une base de E et $\dim E=1$.....(0.5+0.5pt)
5) Déterminons $E\cap\ker f$.
$v\in E\cap\ker f\Leftrightarrow f(v)=3v$ et $f(v)=0\Leftrightarrow 3v=0$ et $f(v)=0\Leftrightarrow v=0$.
Alors $E\cap\ker f=\{0\}$ et $E+\ker f=E\oplus\ker f$.
Puisque $\dim(E+\ker f)=\dim E+\dim\ker f-\dim(E\cap\ker f)=1+1-0=2\neq\dim\mathbb{R}^3$,
alors $E\oplus\ker f\neq\mathbb{R}^3$....$(0.5+0.5pt)$