Université A.Mira de Bejaia
Faculté des Science Exactes
Département d'Informatique
1ère année Licence

Année universitaire 2020/2021

Corrigé de l'examen d'analyse 1

Exercice N°1 (7 points)

I) A$=\left\{\dfrac{n+2}{n-1},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2\right\}=\left\{4,\dfrac{5}{2},2,....,1\right\}=]1,4]$. [1 point]

(a) ***Détermination de sup A et inf A :***

- L'ensemble des majorants de A est $[4,+\infty[$.
- L'ensemble des minorants de A est $]-\infty,1]$.
- Le plus petit des majorants est 4, donc sup A$=4$. [1 point]
- Le plus grand des minorants est 1, donc inf A$=1$. [1 point]

(b) ***max A et min A existent-ils ?***

- max A$=4$ car sup A$=4\in]1,4]$. [0.5 point]
- min A n'existe pas car inf A$=1\notin]1,4]$. [0.5 point]

(c) ***Pour un entier naturel, on pose :***

B$=\left\{\dfrac{n+2}{n-1}+\dfrac{1}{4},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2\right\}$.
L'ensemble B dépend de l'ensemble A où

- sup B $=$ sup A $+\dfrac{1}{4}=4+\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{4}$. [0.5 point]
- inf B $=$ inf A $+\dfrac{1}{4}=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$. [0.5 point]

II) ***Pour tout couple (a,b) de nombres réels positifs, montrer que*** $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. [2 points]

On a

$$\begin{aligned}
(a-b)^2=a^2+b^2-2ab &\geq 0\\
\Longrightarrow\quad a^2+b^2 &\geq 2ab\\
\Longrightarrow\quad a^2+b^2+2ab &\geq 4ab\\
\Longrightarrow\quad (a+b)^2 &\geq 4ab\\
\Longrightarrow\quad \frac{(a+b)^2}{4} &\geq ab\\
\Longrightarrow\quad \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} &\geq \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Alors $$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Exercice N°2 (7 points)

I) ***Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :***

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{6+U_n},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) ***Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n < 3$.***

Démonstration par récurrence :

— La supposition est vraie pour $n = 0$. En effet, $0 \leq U_0 = 0 < 3$. [0.5 point]

— On suppose que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq U_n < 3$ et on montre que $0 \leq U_{n+1} < 3$: [0.5 point]

$$0 \leq U_n < 3 \Longrightarrow 6 \leq U_n + 6 < 9 \Longrightarrow \sqrt{6} \leq \sqrt{U_n+6} < 3 \Longrightarrow \sqrt{6} \leq U_{n+1} < 3$$

Et comme $\sqrt{6} > 0$, donc $0 \leq U_{n+1} < 3$.

Conclusion : $0 \leq U_n < 3$. [0.5 point]

(b) ***Montrer que $(U_n)_n$ converge et trouver sa limite.***

— ***Convergence de (U_n) :***

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n+6} - U_n = \left(\sqrt{U_n+6} - U_n\right)\frac{(\sqrt{U_n+6}+U_n)}{(\sqrt{U_n+6}+U_n)} = \frac{(U_n+6-U_n^2)}{(\sqrt{U_n+6}+U_n)}$$

Le signe de $U_{n+1} - U_n$:

- Le dénominateur : $(\sqrt{U_n+6}+U_n) > 0$

- Le numérateur :

$U_n + 6 - U_n^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 3 \quad \text{et} \quad u' = -2$

$U_n + 6 - U_n^2 = (U_n - 3)(U_n + 2) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq U_n < 3$

$U_{n+1} - U_n > 0$, donc (U_n) est croissante. [1 point]

(U_n) est majorée par 3 car $\forall n \in \mathbb{N},\ \ U_n < 3$. [0.5 point]

Puisque (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente. [0.5 point]

— ***Limite de (U_n) :*** [1 point]

Puisque la suite (U_n) est convergente alors sa limite existe et est finie. On note l sa limite, où $l \in [0,3]$.

$$l = \sqrt{l+6} \quad \Longrightarrow \quad l^2 = l + 6 \quad \Longrightarrow \quad -l^2 + l + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad l = 3 \quad \text{et} \quad l = -2.$$

On a $\ l = 3 \in [0,3]\ $ mais $\ l = -2 \notin [0,3]$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l = 3$.

II) ***Soit la suite $(V_n)_n$ définie par :***

$$V_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + ... + \frac{n^2}{4^n}$$

Montrer que $4^n > n^4,\ \forall\ n \geq 5$: [0.5 point]

On a : $\forall n \geq 5$

$$\begin{aligned}
& 4^n > n^4 \\
\Longrightarrow & \left(2^2\right)^n > \left(n^2\right)^2 \\
\Longrightarrow & \left(2^n\right)^2 > \left(n^2\right)^2 \\
\Longrightarrow & \quad 2^n > n^2
\end{aligned}$$

Démonstration par récurrence :

- La proposition est vraie pour $n = 5$. En effet, $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

- On suppose que pour $n \geq 5$, $2^n > n^2$ et on montre que $2^{n+1} > (n+1)^2$:

$$2^n > n^2 \Longrightarrow 2^{n+1} > 2n^2$$

La proposition est vraie pour $(n+1)$ si $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$.

$$\begin{aligned}
2n^2 &> (n+1)^2 \\
2n^2 - (n+1)^2 &> 0 \\
n^2 - 2n - 1 &> 0
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 5$, $n^2 - 2n - 1 > 0 \Longrightarrow 2n^2 > (n+1)^2 \Longrightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2$.
La proposition est vrai pour $(n+1)$.

Conclusion : $2^n > n^2 \Longrightarrow 4^n > n^4, \ \forall\ n \geq 5$.

Montrer que $(V_n)_n$ ***est de Cauchy, sachant que*** $4^n > n^4, \ \forall\ n \geq 5$ ***:*** [2 points]

Par définition d'un suite de Cauchy
$\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall\ p \in \mathbb{N}, \forall\ q \in \mathbb{N},\ p > n_0,\ q > n_0$ *tel que :* $|V_{p+q} - V_p| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
|V_{p+q} - V_p| &= \left| \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + ... + \frac{p^2}{4^p} + ... + \frac{(p+q)^2}{4^{p+q}}\right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + ... + \frac{p^2}{4^p}\right) \right| \\
&= \left| \frac{(p+1)^2}{4^{p+1}} + \frac{(p+2)^2}{4^{p+2}} + ... + \frac{(p+q)^2}{4^{p+q}} \right| \\
&= \sum_{k=1}^{q} \frac{(p+k)^2}{4^{p+k}}
\end{aligned}$$

Comme on a $\quad 4^{p+k} > (p+k)^4 \Longrightarrow \dfrac{(p+k)^2}{4^{p+k}} < \dfrac{(p+k)^2}{(p+k)^4}$.
Alors

$$\begin{aligned}
|V_{p+q} - V_p| &= \sum_{k=1}^{q} \frac{(p+k)^2}{4^{p+k}} \\
&< \sum_{k=1}^{q} \frac{(p+k)^2}{(p+k)^4} \\
&< \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(p+k)^2}
\end{aligned}$$

On a $\quad (p+k)^2 > (p+k)(p+k-1) \implies \dfrac{1}{(p+k)^2} < \dfrac{1}{(p+k)(p+k-1)}.$

Alors

$$\begin{aligned}
|V_{p+q} - V_p| &< \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(p+k)^2} \\
&< \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(p+k)(p+k-1)} \\
&< \frac{1}{(p+1)p} + \frac{1}{(p+2)(p+1)} + ... + \frac{1}{(p+q)(p+q-1)} \\
&< \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)} + \frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} + ... + \frac{1}{p+q-1} - \frac{1}{(p+q)} \\
&< \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+q)} \\
&< \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{1}{p}$ converge vers 0 quand $n \longmapsto \infty$ (sachant que $p > n$), alors $\forall \varepsilon > 0, \quad \left|\dfrac{1}{p} - 0\right| = \dfrac{1}{p} < \varepsilon.$

Par conséquent, $\left|V_{p+q} - V_p\right| < \varepsilon \implies$ la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Exercice N°3 (6 points)

I) ***En utilisant la définition de la limite, montrer que*** $\lim_{x\to 1}(2x-3) = -1$. [2 points]

D'après la définition de la limite :
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0$ tel que $\forall\ x \neq x_0 : |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$

on a $\left|(2x-3) - (-1)\right| = \left|2x - 2\right| = 2|x-1| < \varepsilon \quad \implies \quad |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$

Donc, si on choisit $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, on aura

$$|x-1| < \eta \implies \left|(2x-3) - (-1)\right| < \varepsilon$$

Ce qui revient à dire que $\lim_{x\to 1}(2x-3) = -1$

II) ***Soit la fonction f définie par :***

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ \sin\dfrac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

(a) ***Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.*** [2 points]

— Dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$: f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le produit de deux fonctions $x \longmapsto x^2$ (polynôme) et $x \longmapsto \sin\dfrac{1}{x}$ (composée des deux fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$) dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

— Dérivabilité au point 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$$

On a

$$\begin{array}{rrcrcl} & -1 & \leq & \sin\dfrac{1}{x} & \leq & 1 \\ \Longrightarrow & -x & \leq & x\sin\dfrac{1}{x} & \leq & x \\ \Longrightarrow & \lim\limits_{x\to 0}(-x) & \leq & \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} & \leq & \lim\limits_{x\to 0}(x) \\ \Longrightarrow & 0 & \leq & \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} & \leq & 0 \end{array}$$

Alors $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Donc, f est dérivable au point 0 et $f^{'}(0) = 0$

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) ***Montrer que $f^{'}$ n'est pas continue en 0.*** [2 points]

$$f^{'}(x) = \left(x^2 \ \sin\frac{1}{x}\right)^{'} = 2x \ \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ (2x^2)\ \cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} f^{'}(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f^{'}(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

On a $-1 \leq \cos\dfrac{1}{x} \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x} \leq 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ n'existe pas.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ n'existe pas , alors $f^{'}$ n'est pas continue au point 0.