Основы математического анализа I

Содержание

§1. Введение в математический анализ

1.1. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел

Понятие вещественных (действительных) чисел, их свойства, слушателю хорошо известны еще со школы. В то же время четкого определения такого объекта как число, скорее всего, не было. Оказывается, что многие результаты классического анализа опираются на так называемое свойство **полноты** множества вещественных чисел. Что это такое, откуда это свойство произрастает и чем оно мотивировано и будет обсуждаться в данном разделе.

Определение 1.1 (Понятие множества вещественных чисел). *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством вещественных (или действительных) чисел, а его элементы – вещественными (или действительными) числами, если выполнен набор аксиом, приведенный ниже.*

1. Аксиомы сложения

Определено отображение $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией сложения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y, обладающее свойствами:

(а) Операция $+$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x.$$

(б) Операция $+$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(в) Существует нейтральный элемент $0 \in \mathbb{R}$ (называемый нулем), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$
$$x + 0 = x.$$

(г) Для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$ существует противоположный элемент $-x$ такой, что
$$x + (-x) = 0.$$

Замечание 1.1. *Итак, первая группа аксиом устанавливает существование операции сложения, а также привычные для нас свойства этой операции. Подытоживая, приходим к тому, что $\mathbb{R}$ – коммутативная группа по сложению.*

2. Аксиомы умножения

Определено отображение $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией умножения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением элементов x и y, обладающее свойствами:

(а) Операция $\cdot$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$
$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(б) Операция $\cdot$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(в) Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (называемый единицей), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$
$$x \cdot 1 = x.$$

(г) Для каждого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что
$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Замечание 1.2. *Вторая группа аксиом вводит операцию умножения. Полезно отметить, что свойства операции умножения практически в точности вторят свойствам операции сложения, за исключением отсутствия элемента 0^{-1}. Последнее же вторит известному со школы тезису «на ноль делить нельзя». Итак, с точки зрения алгебраических структур, $\mathbb{R}$ – коммутативная группа по умножению.*

Замечание 1.3. *Условие, что $1 \neq 0$, чрезвычайно важно. Без него мы бы могли построить $\mathbb{R}$, состоящее лишь из одного элемента – из нуля.*

Замечание 1.4. *На данный момент введенные операции (сложения и умножения) никак не связаны. Интересующая нас связь – это правило раскрытия скобок, его-то мы и введем.*

3. Связь сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, то есть $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Замечание 1.5. *Первые три группы аксиом устанавливают, что $\mathbb{R}$ – поле. В то же время, введенные операции не исчерпывают ни наших, ни сугубо математических потребностей в свойствах множества $\mathbb{R}$. Например, мы так и не научились сравнивать элементы из $\mathbb{R}$.*

4. Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ введено отношение порядка $\leqslant$, то есть для элементов $x, y \in \mathbb{R}$ установлено: справедливо $x \leqslant y$, или нет. При этом выполняются следующие условия:

(а) Отношение $\leqslant$ рефлексивно, то есть

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x.$$

(б) Отношение $\leqslant$ антисимметрично, то есть

$$(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \ \Rightarrow \ (x = y).$$

(в) Отношение $\leqslant$ транзитивно, то есть

$$(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \ \Rightarrow \ (x \leqslant z).$$

(г) Для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$.

Замечание 1.6. *Само отношение, обозначенное нами как $\leqslant$, и первые три рассмотренных пункта устанавливают общее понятие «порядка» на множестве (конечно, лишь математического :)). Последний же пункт наделяет порядок на множестве $\mathbb{R}$ свойством полной (линейной) упорядоченности: любые два элемента из $\mathbb{R}$ сравнимы между собой.*

Замечание 1.7. *Отметим на наш взгляд не излишнее замечание. Рассмотрим множество натуральных чисел и отношение делимости на нем. Точнее, для натуральных чисел a, b будем писать*

$$a \,\vdots\, b$$

в случае, когда a делится на b нацело. Легко видеть, что введенное отношение – отношение порядка. Однако, таким образом введенный порядок не устанавливает полную (линейную) упорядоченность так как, например, числа 2 и 3 оказываются несравнимыми.

Все это должно наводить на мысль, что «порядок» — весьма общее понятие, впрочем, все равно пытающееся установить что-то вроде свойств больше-меньше и, вообще говоря, на множествах разной природы и структуры.

Замечание 1.8. *Введя новое отношение, его стоит «подружить» с объектами, введенными ранее.*

5. Связь сложения и порядка

Если $x, y, z \in \mathbb{R}$, то

$$(x \leqslant y) \;\Rightarrow\; (x + z \leqslant y + z).$$

Замечание 1.9. *Итак, перед нами постулируется хорошо известное со школы свойство: к обеим частям неравенства можно, с сохранением справедливости последнего, прибавлять одно и то же число.*

6. Связь умножения и порядка

Если $x, y \in \mathbb{R}$, то

$$(0 \leqslant x) \;\wedge\; (0 \leqslant y) \;\Rightarrow\; (0 \leqslant x \cdot y).$$

Замечание 1.10. *Введенный только что факт опять-таки известен: произведение неотрицательных чисел неотрицательно.*

Замечание 1.11. *Интересно задаться вопросом: все ли это? Хватает ли приведенного списка?*

И правда, мы умеем теперь складывать, умножать, сравнивать вещественные числа, а также как-то комбинировать эти операции и согласовывать их действия. Может быть, это все?

На самом деле нет. Если мы остановимся на введенной группе аксиом, то в качестве $\mathbb{R}$ прекрасно бы подошло множество рациональных чисел (дробей). Но мы-то со школы знаем, что среди вещественных чисел есть и еще какие-то загадочные иррациональные числа, которых, кстати, куда больше, чем рациональных.

Для тех, кто не помнит о чем мы говорим, тут же приведем соответствующее утверждение.

Лемма 1.1. *Если существует $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$, то c – не рациональное число*

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$c = \frac{m}{n},$$

n – натуральное, m – целое, и последняя дробь несократима. Тогда, если $c^2 = 2$, то

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \ \Rightarrow\ m^2 = 2n^2 \ \Rightarrow\ m \,\vdots\, 2 \ \Rightarrow\ m = 2k,$$

где k – натуральное. Но тогда

$$(2k)^2 = 2n^2 \ \Rightarrow\ 2k^2 = n^2 \ \Rightarrow\ n \,\vdots\, 2 \ \Rightarrow\ n = 2p,$$

где p – целое. Но тогда дробь, соответствующая числу c, сократима на 2, что противоречит предположению. $\square$

Замечание 1.12. *Последняя лемма показывает, что на данный момент в множестве $\mathbb{R}$ как будто бы есть дыры. Например, в нем явно не хватает элемента c из предыдущей леммы. Исправим это, введя в рассмотрение так называемую аксиому непрерывности.*

7. Аксиома непрерывности (полноты)

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, причем $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Тогда

$$(\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y) \ \Rightarrow\ (\exists c \in \mathbb{R}:\ x \leqslant c \leqslant y\ \forall x \in X\ \forall y \in Y).$$

Замечание 1.13. *Введенная аксиома, если думать геометрически, как будто бы нам подходит. Она утверждает, что если некоторое (непустое) подмножество $\mathbb{R}$ находится «левее» некоторого (непустого) подмножества $\mathbb{R}$, то между элементами этих подмножеств всегда существует элемент из $\mathbb{R}$.*

Покажем, что при помощи введенной аксиомы и правда можно доказать существование числа, квадрат которого равен 2.

Лемма 1.2.

$$\exists c \in \mathbb{R} : c^2 = 2.$$

Доказательство. Рассмотрим множества

$$X = \{x > 0 : x^2 < 2\}, \quad Y = \{y > 0 : y^2 > 2\}.$$

Рассматриваемые множества не пусты. И правда, $1 \in X$, ведь $1^2 < 2$ и $1 > 0$, а $2 \in Y$, так как $2^2 > 2$ и $2 > 0$. Кроме того, так как при $x, y > 0$

$$(x < y) \ \Leftrightarrow\ (x^2 < y^2),$$

то

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x < y.$$

На самом деле справедливость всех написанных высказываний (хорошо известных из школы) нужно доказывать. Все это можно сделать, используя следствия из аксиоматики множества $\mathbb{R}$, разговор о которых пойдет в следующем разделе.

Итак, мы попадаем в рамки аксиомы непрерывности. Согласно ее утверждению,

$$\exists c \in \mathbb{R}: \ x \leqslant c \leqslant y \ \forall x \in X \ \forall y \in Y.$$

Покажем, что $c \notin X$. От противного, если $c^2 < 2$, то число

$$c + \frac{2 - c^2}{3c},$$

большее c, тоже лежит в X. Действительно, так как $c > 1$, то и $c^2 > 1$, а значит $2 - c^2 \leqslant 1$ и

$$\left(c + \frac{2-c^2}{3c}\right)^2 = c^2 + 2 \cdot \frac{2-c^2}{3} + \left(\frac{2-c^2}{3c}\right)^2 < c^2 + 2 \cdot \frac{2-c^2}{3} + \frac{2-c^2}{3} = 2.$$

Но это приводит к противоречию, так как полученное неравенство несовместимо с тем, что

$$\forall x \in X \quad x \leqslant c.$$

Аналогичным образом показывается, что $c \notin Y$, откуда $c^2 = 2$. $\square$

Замечание 1.14. *Важно понять, что только что доказанная лемма 1.2 устанавливает существование числа $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$. То, что c оказывается не рациональным, или как мы дальше скажем, иррациональным, доказывалось отдельно в лемме 1.1*

Теперь перейдем к рассмотрению свойств элементов множества $\mathbb{R}$.

1.2. Следствия из аксиоматики $\mathbb{R}$

Полезно отметить, что все стандартные свойства, которые присущи операциям над числами, можно вывести из той аксиоматики, что была приведена нами в предыдущем пункте. Давайте это объясним, пройдя прямо по пунктам. Целью же будет установление такого, в общем-то известного факта, что $1 > 0$.

Замечание 1.15. *Предвосхищая некоторое недоумение, отметим, что ввести привычную нам геометрическую модель множества $\mathbb{R}$ как числовой прямой без установления факта $1 > 0$ невозожно.*

1. Следствия из аксиом сложения

Начнем с единственности нулевого элемента.

Лемма 1.3. *В множестве $\mathbb{R}$ ноль единственен.*

Доказательство. Пусть 0_1 и 0_2 – нули в $\mathbb{R}$. Тогда, используя свойство (a) в блоке аксиом 1 и определение нуля, имеем

$$0_1 \overset{1(c)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{1(a)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{1(c)}{=} 0_2.$$

$\square$

Теперь обсудим единственность противоположного элемента.

Лемма 1.4. *В множестве $\mathbb{R}$ каждый элемент имеет единственный противоположный.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – противоположные к $x \in \mathbb{R}$ элементы. Тогда,

$$x_1 \overset{1(c)}{=} x_1 + 0 \overset{1(d)}{=} x_1 + (x + x_2) \overset{1(b)}{=} (x_1 + x) + x_2 \overset{1(d)}{=} 0 + x_2 \overset{1(a)}{=} x_2 + 0 \overset{1(c)}{=} x_2.$$

$\square$

В заключение, обсудим решение уравнения $x + a = b$ относительно x.

Лемма 1.5. *В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x+a = b$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$.*

Доказательство. Добавляя к обеим частям равенства $-a$, получаем (проследите использование аксиом самостоятельно)

$$(x + a + (-a) = b + (-a)) \;\Leftrightarrow\; (x + 0 = b + (-a)) \;\Leftrightarrow\; (x = b + (-a)).$$

Единственность решения следует из (уже доказанной в предыдущей лемме) единственности противоположного элемента. $\square$

2. Следствия аксиом умножения

Следствия аксиом умножения, как и их доказательства, вторят (с естественными ограничениями) уже рассмотренным следствиям аксиом сложения. Ниже мы приводим их списком, доказательства остаются на откуп читателю.

Лемма 1.6. *В множестве $\mathbb{R}$ единица единственна.*

Лемма 1.7. *В множестве $\mathbb{R} \setminus 0$ каждый элемент имеет единственный обратный.*

Лемма 1.8. *В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $a \cdot x = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.*

3. Следствия аксиом связи сложения и умножения

Теперь выведем те факты, которые следуют из аксиомы связи сложения и умножения. Например, что $(-x) = (-1) \cdot x$. Впрочем, начнем с еще с нескольких известных, но любопытных моментов.

Лемма 1.9. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$x \cdot 0 = 0.$$

Доказательство.

$$(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)) \ \Leftrightarrow \ (x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) \ \Leftrightarrow \ 0 = x \cdot 0$$

□

Теперь покажем, что множество вещественных чисел является, как говорят, областью целостности.

Следствие 1.0.1.
$$(x \cdot y = 0) \ \Leftrightarrow \ (x = 0) \ \vee \ (y = 0).$$

Доказательство. Если и x, и y равны нулю, то утверждение следует из предыдущей леммы.

Если хотя бы одно из чисел x, y не равно нулю, то утверждение следует из предыдущей леммы и третьей леммы из следствий аксиом умножения. □

Теперь докажем, что противоположный элемент $(-x)$ к элементу x получается в результате умножения (-1) на x.

Лемма 1.10. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$-x = (-1) \cdot x.$$

Доказательство. Так как

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

то, в силу единственности противоположного элемента,

$$-x = (-1) \cdot x.$$

□

Из предыдущего следствия выводится и правило «двойного отрицания».

Следствие 1.0.2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(-1) \cdot (-x) = x.$$

Теперь легко получить и следующее следствие.

Следствие 1.0.3. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

Доказательство. Доказательство следует из следующей цепочки равенств:

$$(-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-x) = x \cdot (-1) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

□

4. Следствия аксиом порядка

Для начала договоримся об общепринятых обозначениях. Отношение $x \leqslant y$ на практике часто записывают как $y \geqslant x$. При этом условие, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$ записывают как $x < y$ или как $y > x$. Неравенства $\geqslant$ и $\leqslant$ называют нестрогими, а неравенства $<$ и $>$ – строгими. Отсюда сразу вытекает нижеуказанное следствие.

Следствие 1.0.4. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место ровно одно из соотношений:*

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Теперь отметим следствие о строгих неравенствах.

Лемма 1.11. *Для любых чисел $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(x < y) \ \wedge \ (y \leqslant z) \ \Rightarrow \ (x < z),$$

$$(x \leqslant y) \ \wedge \ (y < z) \ \Rightarrow \ (x < z).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из свойства транзитивности для отношения порядка получаем, что

$$(x < y) \ \wedge \ (y \leqslant z) \ \Rightarrow \ (x \leqslant z).$$

Покажем, что $x \neq z$. От противного, если $x = z$, то

$$(x < y) \ \wedge \ (y \leqslant z) \ \Leftrightarrow \ (z < y) \ \wedge \ (y \leqslant z) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (z \leqslant y) \ \wedge \ (y \leqslant z) \ \wedge \ (z \neq y) \ \Leftrightarrow \ (z = y) \ \wedge \ (z \neq y).$$

Второе утверждение доказывается аналогичным образом. □

5. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

Теперь отметим стандартные свойства, связанные с арифметическими операциями и неравенствами.

Лемма 1.12. *Для любых чисел $x, y, z, k \in \mathbb{R}$ справедливо*

$$(x < y) \ \Rightarrow \ (x + z) < (y + z),$$

$$(0 < x) \ \Rightarrow \ (-x < 0),$$

$$(x \leqslant y) \ \wedge \ (z \leqslant k) \ \Rightarrow \ (x+z) \leqslant (y+k),$$
$$(x < y) \ \wedge \ (z \leqslant k) \ \Rightarrow \ (x+z) < (y+k),$$
$$(0 < x) \ \wedge \ (0 < y) \ \Rightarrow \ (0 < xy),$$
$$(0 > x) \ \wedge \ (0 > y) \ \Rightarrow \ (0 < xy),$$
$$(0 > x) \ \wedge \ (0 < y) \ \Rightarrow \ (0 > xy),$$
$$(x < y) \ \wedge (z > 0) \ \Rightarrow \ (xz < yz),$$
$$(x < y) \ \wedge \ (z < 0) \ \Rightarrow \ (xz > yz).$$

Доказательство. Эти свойства предлагается доказать самостоятельно. □

Теперь докажем утверждение, к которому мы все это время шли.

Лемма 1.13.

$$0 < 1.$$

Доказательство. Согласно аксиоме умножения, $0 \neq 1$. Предположим, что $1 < 0$, тогда, по свойствам неравенств,

$$(1 < 0) \ \wedge \ (1 < 0) \ \Rightarrow \ (1 \cdot 1 > 0) \ \Rightarrow \ (1 > 0).$$

Так как одновременно не может выполняться $1 < 0$ и $1 > 0$, приходим к противоречию. □

Определение 1.2. *По традиции числа, которые больше нуля, называются положительными, а которые меньше нуля – отрицательными.*

Замечание. *Множество вещественных чисел удобно изображать в виде числовой прямой, а сами числа – точками на этой прямой. Поэтому числа часто еще называют точками.*

Замечание. *Следствия аксиомы непрерывности мы получим немного позже (принцип Архимеда и другие).*

1.3. Важнейшие типы подмножеств $\mathbb{R}$. Индукция

В этом разделе мы изучим важнейшие типы подмножеств $\mathbb{R}$, которые уже упоминали в дальнейшем, и дадим намек на то, как показать, что все операции с элементами этих подмножеств справедливы при введенной нами аксиоматике.

1.3.1 Натуральные числа

Всем известно, что числа вида 1, $(1+1)$, $((1+1)+1)$, и так далее обозначают $1, 2, 3$, и так далее, соответственно. Продолжение какого-то процесса далеко не всегда однозначно, поэтому слова «и так далее» нуждаются в пояснении. Для этого введем следующее определение.

Определение 1.3 (Понятие индуктивного множества). *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если*

$$\forall x \in X \quad (x+1) \in X.$$

Итак, индуктивное множество – это то, которое вместе с каждым элементом содержит «следующий» (с точки зрения натуральных чисел). Из опыта мы знаем, что множество натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел являются индуктивными. В то же время кажется, что множество натуральных чисел – это наименьшее из индуктивных множеств, содержащих 1.

Для того чтобы строго определить понятие множества натуральных чисел, докажем следующую лемму.

Лемма 1.14. *Пересечение*

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$$

любого семейства X_α, $\alpha \in A$, индуктивных множеств, если оно не пусто, является индуктивным множеством.

Доказательство. Действительно,

$$\left(x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) \Rightarrow (x \in X_\alpha \quad \forall \alpha \in A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((x+1) \in X_\alpha \quad \forall \alpha \in A) \Rightarrow \left((x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right),$$

где переход с первой на вторую строчку справедлив в силу индуктивности всех множеств семейства X_α. □

Теперь можно дать определение множеству натуральных чисел как наименьшему индуктивному множеству, содержащему 1.

Определение 1.4 (Понятие множества натуральных чисел). *Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число* 1. *Обозначается множество натуральных чисел, как $\mathbb{N}$.*

Еще раз отметим, что из этого определения, в частности, следует, что множество натуральных чисел – наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу. Наши обозначения для натуральных чисел

$$1, 2, \ ..., \ 100, \ 101, \ ...,$$

– это лишь договоренности.

1.3.2 Принцип математической индукции

Из определения множества натуральных чисел сразу следует важный принцип, называемый принципом математической индукции. Именно он часто обосновывает слова «и так далее».

Теорема 1.1 (Принцип математической индукции). *Если множество* $X \subset \mathbb{N}$ *таково, что* $1 \in X$ *и* $\forall x \in X \quad (x+1) \in X$, *то* $X = \mathbb{N}$.

Доказательство. Действительно, X – индуктивное множество. Так как $X \subset \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество, то $X = \mathbb{N}$. □

С помощью принципа математической индукции можно доказать, например, что сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, а также другие известные из школы свойства. Приведем пример.

Теорема 1.2. *Сумма натуральных чисел – натуральное число.*

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $m + n \in \mathbb{N}$. Пусть X – множество таких натуральных чисел k, что $m + k \in \mathbb{N}$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $1 \in X$, так как если $m \in \mathbb{N}$, то $(m + 1) \in \mathbb{N}$ в силу индуктивности множества натуральных чисел. Если теперь $k \in X$, то есть $m+k \in \mathbb{N}$, то и $(k+1) \in X$, так как $m+(k+1) = (m+k)+1 \in \mathbb{N}$. Согласно принципу индукции заключаем, что $X = \mathbb{N}$. □

Следующий пример показывает, как на практике часто применяется (и оформляется) метод математической индукции.

Лемма 1.15 (Неравенство Бернулли).

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx, \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. База индукции. Пусть $n = 1$, тогда

$$1 + x \geqslant 1 + x,$$

что верно при всех $x \in \mathbb{R}$. Допустим, что при $n = k$ выполнено

$$(1 + x)^k \geqslant 1 + kx.$$

Покажем, что при $n = k + 1$ выполняется

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x.$$

Действительно,

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k \geqslant (1 + x)(1 + kx) =$$

$$= 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2.$$

Так как $k \in \mathbb{N}$, то $kx^2 \geqslant 0$, а значит

$$1 + (k + 1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k + 1)x,$$

откуда и следует требуемое. $\square$

Отметим и следующее замечание.

Замечание 1.16. *Проверка всех условий теоремы 1.1 очень важна. Например, покажем, что без проверки «базы» результат «доказательства» может быть смешным.*

Итак, мы «докажем», что все натуральные числа равны между собой. Действительно, если при некотором k выполняется $k = k + 1$, то

$$k + 1 = (k + 1) + 1 = k + (1 + 1) = k + 2.$$

Проблема в рассуждении заключается в том, что мы не проверили, что существует k, для которого $k = k + 1$, а последнее, конечно, неверно ни при каких k.

1.3.3 Целые, рациональные и иррациональные числа

Теперь строго введем (или напомним) понятия целых, рациональных и иррациональных чисел.

Определение 1.5 (Понятие множества целых чисел). *Множеством целых чисел называется объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и нуля. Обозначается множество целых чисел, как $\mathbb{Z}$.*

Как было отмечено при построении множества натуральных чисел, сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное. В частности поэтому сумма и произведение целых чисел есть число целое.

Определение 1.6 (Понятие множества рациональных чисел). *Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, называются рациональными. Обозначается множество рациональны чисел, как $\mathbb{Q}$.*

Отметим и формальное, хорошо нам известное замечание.

Замечание 1.17. *Число $m \cdot n^{-1}$ как правило записывают в виде отношения $\dfrac{m}{n}$, которое называют рациональной дробью.*

Правила действий с рациональными дробями, подробно изученные в школе, сразу вытекают из соответствующих свойств и аксиом множества вещественных чисел.

Пример 1.1. *В качестве примера докажем, что*

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Действительно,

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \left(m_1 \cdot n_1^{-1}\right) \cdot \left(m_2 \cdot n_2^{-1}\right) = (m_1 \cdot m_2) \cdot (n_1 \cdot n_2)^{-1} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Предлагаем проследить использование аксиом читателю самостоятельно, а также вывести правило сложения рациональных дробей:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2},$$

или его аналог с наименьшим общим кратным знаменателей.

Замечание 1.18. *Снова отметим, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ удовлетворяет первым шести аксиомам множества вещественных чисел. Однако, именно седьмая аксиома, аксиома непрерывности, устанавливает, что кроме рациональных чисел существуют так называемые иррациональные.*

Определение 1.7 (Понятие множества иррациональных чисел). *Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Обозначается множество иррациональных чисел как $\mathbb{I}$.*

Замечание 1.19. *При обсуждении аксиомы непрерывности мы доказали существование иррациональных чисел. Оказывается, несмотря на то, что рациональными числами в жизни мы пользуемся значительно чаще, иррациональных чисел оказывается значительно больше, нежели рациональных. Заинтересованный читатель может обратиться к сторонней литературе и понятию мощности множества.*

1.4. Расширение множества вещественных чисел

Часто бывает удобным добавить к множеству $\mathbb{R}$ два формальных элемента: символы $+\infty$ и $-\infty$. Чтобы дальнейшая работа с этим множеством была разумной (кончено, с точки зрения дальнейшего использования внутри математики), требуется установить правила работы с добавленными элементами.

Определение 1.8. *Множество* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы* $-\infty, +\infty$ *– минус и плюс бесконечностями, соответственно, причем для вновь введенных символов постулируются следующие возможные операции:*

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & x > 0 \\ \mp\infty, & x < 0 \end{cases},$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Мотивировка написанных равенств, наверное, интуитивно понятна. В то же время, истинная природа именно таких равенств откроется нам в разделе теории пределов.

Замечание 1.20. *Важно отметить, что все свойства, указанные выше, постулируются, и никаких других «естественных» свойств множества* $\mathbb{R}$ *на множество* $\overline{\mathbb{R}}$ *не переносится. Более того, их перенесение оказалось бы вредным. Например, если допустить, что*

$$x = (+\infty) \cdot 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

то мы получаем «абсурдное» равенство, ведь слева – множество, а справа – как будто бы один элемент.

Сказанное выше объединим в еще одно, в некотором смысле обобщающее, замечание.

Замечание 1.21. *Выражениям*

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \cdot 0,$$

не приписывается никакого значения. Такие выражения называются неопределенностями.

Кроме данных неопределенностей, в дальнейшем нам встретятся неопределенности вида

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (\pm\infty)^0, \quad 0^0.$$

В теории пределов, как уже отмечалось, мы поймем, почему операции и правда называются неопределенностями. В то же время отметим (на уровне махания руками), что многие неопределенности сводятся друг к другу , например:

$$\frac{0}{0} = \frac{1/(+\infty)}{1/(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

или

$$1^{+\infty} = e^{(+\infty)\ln 1} = e^{(+\infty)\cdot 0},$$

и так далее. Конечно, к написанным «равенствам» нужно подходить со здравым багажом скептицизма :)

Отметим и еще одно техническое замечание.

Замечание 1.22. *Если не важен знак бесконечности, то часто пишут ∞ – бесконечность без знака.*

1.5. Модуль вещественного числа

В теории предела функции одной переменной модуль занимает особое положение. Причина в том, что именно модуль позволяет вычислить (привычное нам) расстояние между двумя точками. В этом разделе мы вспомним некоторые свойства модуля, а также докажем важнейшие для дальнейшего неравенства – неравенства треугольника.

Определение 1.9 (Понятие модуля). *Модулем вещественного числа x называется число, равное x, если оно положительно или равно нулю, и равное $-x$, если оно отрицательно. Иными словами,*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Теорема 1.3. *Справедливы следующие свойства:*

(а) $|x| \geqslant 0$, *причем* $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.

(б) $|x| = |-x|$.

(в) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

(г) $|x| = |y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$.

(д) $|xy| = |x||y|$.

(е) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.

(ж) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

(з) $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$.

Доказательство. Свойства 1 - 6 сразу следуют из определения и остаются в качестве упражнения.
7. Для доказательства этого свойства достаточно сложить неравенства

$$\pm x \leqslant |x| \quad \text{и} \quad \pm\, y \leqslant |y|,$$

верные для любых x, y. Тем самым, придем к неравенствам

$$\pm(x+y) \leqslant |x| + |y|,$$

которые совместно эквивалентны доказываемому.
8. Для доказательства данного пункта удобно воспользоваться свойством 7.

$$|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y| \ \Rightarrow \ |x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

Поменяв числа x и y местами, получим

$$|x - y| \geqslant |y| - |x|.$$

Совместно полученные неравенства эквивалентны доказываемому. □

Замечание 1.23. *Отметим, что два последних неравенства (7-ое – чаще) часто называют неравенствами треугольника. Они имеют простой геометрический смысл. Представим, что рассматривается два вектора x, y, а $|x|, |y|$ обозначают длины соответствующих векторов. Если сложить векторы x, y по правилу треугольника, то вектор $x + y$ будет отвечать третьей стороне этого треугольника. Обозначив через $|x + y|$ длину этой (третьей стороны), неравенство*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

– алгебраический аналог теоремы планиметрии: «длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других сторон».

Советуем провести толкование 8-ого свойства аналогичным образом.

1.6. Промежутки числовой прямой. Окрестности

В этом разделе мы обсудим важное понятие окрестности, именно на нем в дальнейшем будет строиться теория предела.

Определение 1.10 (Понятия промежутков). *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.*

Множество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

при $a \leqslant b$ называется отрезком.

Множество

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

при $a < b$ называется интервалом.

Множества

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

при $a < b$ называются полуинтервалами.

Множества

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}, \quad (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$[a,+\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \geqslant a\}, \quad (a,+\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > a\}$$

и

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}, \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$

$$[-\infty,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \leqslant b\}, \quad [-\infty,b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < b\},$$

называются лучами.

Еще одно популярное обозначение отметим в качестве замечания.

Замечание 1.24. *Часто множество $\mathbb{R}$ еще обозначают как $(-\infty,+\infty)$, а множество $\overline{\mathbb{R}}$ как $[-\infty,+\infty]$.*

Теперь дадим понятие окрестности точки x_0 – порции множества рядом (и даже с двух сторон) с точкой x_0.

Определение 1.11. *Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x_0.*

Еще одно важное понятие анализа – понятие ε-окрестности или просто-напросто симметричной окрестности точки x_0.

Определение 1.12. *Эпсилон-окрестностью (или ε-окрестностью) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется интервал*

$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Замечание 1.25. *Еще раз отметим, что ε-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$ – это симметричный интервал, ее содержащий. При помощи понятия модуля, он может быть записан следующим образом:*

$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} :\ |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Мы неоднократно будем пользоваться этим в дальнейшем.

Для элементов $\pm\infty, \infty$ понятия окрестности и ε-окрестности вводятся отдельно.

Определение 1.13. *Окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида*

$$(a,\ +\infty], \quad a \in \mathbb{R}.$$

ε-окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество

$$\left(\frac{1}{\varepsilon},\ +\infty\right], \quad \varepsilon > 0.$$

Окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида

$$[-\infty,\ a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

ε-окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида

$$\left[-\infty,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Замечание 1.26. *Полезно пояснить, почему при определении ε-окрестностей элементов $\pm\infty$ рассматривается величина $\dfrac{1}{\varepsilon}$.*

Если $x_0 \in \mathbb{R}$, то при уменьшении ε, окрестность $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ тоже уменьшается. Аналогично, при уменьшении ε величина $\dfrac{1}{\varepsilon}$ увеличивается, а значит окрестности элементов $\pm\infty$ уменьшаются.

В итоге приходим к полной аналогии: чем меньше ε, меньше и окрестность.

Замечание 1.27. *Обычно окрестности точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обозначаются заглавными латинскими буквами $U(x_0), V(x_0)$. Например,*

$$U(3) = (-7,\ 5), \quad V(+\infty) = (\pi,\ +\infty].$$

ε-окрестности точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с индексом ε, то есть $U_\varepsilon(x_0), V_\varepsilon(x_0)$. Например,

$$U_2(3) = (1,\ 5), \quad V_\pi(+\infty) = \left(\frac{1}{\pi},\ +\infty\right].$$

Кроме понятия окрестности точки x_0, вводят еще и понятие проколотой окрестности – окрестности без самой точки x_0. Это понятие будет мотивировано уже в понятии предела.

Определение 1.14. *Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $U(x_0) \setminus \{x_0\}$, то есть произвольная окрестность точки x_0 без самой этой точки.*

Аналогично, проколотой ε-окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Замечание 1.28. *Проколотая окрестность и ε-окрестность точек $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с кружочком наверху и индексом ε, соответственно, то есть $\overset{o}{U}(x_0), \overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)$. Например,*

$$\overset{o}{U}(3) = (-7,\ 3); (3, 5), \quad \overset{o}{V}_\pi(+\infty) = \left(\frac{1}{\pi},\ +\infty\right).$$

Отметим в заключение одно важное свойство окрестностей: у двух разных точек из $\overline{\mathbb{R}}$ всегда найдутся непересекающиеся окрестности.

Лемма 1.16. *Пусть $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда существуют окрестности $U(A_1)$, $U(A_2)$, что*

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Положим $\varepsilon = \dfrac{|A_1 - A_2|}{2}$, тогда, как легко проверить,

$$U_\varepsilon(A_1) \cap U_\varepsilon(A_2) = \varnothing.$$

Другие случаи остаются в качестве упражнения. □

1.7. Ограниченность числовых множеств. Супремум и инфимум

Одно из ключевых свойств, связанных с упорядоченными множествами – их ограниченность. Определим эти понятия лишь для $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$, то есть, на самом дле, для линейно упорядоченных множеств.

Определение 1.15 (Понятие границы множества). *Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным сверху, если*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \leqslant M.$$

Найденное число M называется верхней границей для X.
Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad x \geqslant m.$$

Найденное число m называется нижней границей для X.

Итак, верхняя граница множества X – это, во-первых, число, то есть элемент $\mathbb{R}$. Во-вторых, – это не абы какое число, а число, большее любого элемента из X. То же самое, с необходимыми изменениями, можно сказать про нижнюю границу.

Объединим два введенных понятия в одно.

Определение 1.16 (Понятие ограниченности множества). *Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу, то есть*

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad m \leqslant x \leqslant M.$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 1.2. *Рассмотрим множество*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leqslant x < 1\}.$$

Ясно, что это множество ограничено как сверху, например, числом 1*, так и снизу, например, числом* 0*.*

Множество

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leqslant 3\}$$

оказывается ограниченным сверху, например, числом 3. Ограниченным снизу это множество не является, что очевидно, ведь предположение, что m *– нижняя граница для* A*, сразу рушится, так как* $(m-1) \in A$*.*

Отметим следующую простую, но часто используемую в дальнейшем лемму.

Лемма 1.17. *Множество* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ *ограничено тогда и только тогда, когда*

$$\exists C \in \mathbb{R}, C \geqslant 0 : \forall x \in X \quad -C \leqslant x \leqslant C.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество X ограничено, то есть

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ \ m \leqslant x \leqslant M.$$

Положив $C = \max\{|m|, |M|\}$, согласно свойствам модуля приходим к тому, что

$$\forall x \in X \quad -C \leqslant x \leqslant C.$$

Достаточность очевидна, так как можно положить $m = -C$, $M = C$. □

Если множество ограничено, то разумно его границы как-то назвать. Оказывается, имеет смысл различать две качественно разные ситуации.

Определение 1.17 (Понятие максимального элемента). *Элемент* $M \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ *называется максимальным (наибольшим) элементом множества* X*, если*

$$\forall x \in X \ \ x \leqslant M.$$

Обозначают это так: $M = \max X$*.*
Элемент $m \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ *называется минимальным (наименьшим) элементом множества* X*, если*

$$\forall x \in X \ \ x \geqslant m.$$

Обозначают это так: $m = \min X$*.*

Замечание 1.29. *Отметим, и это очень важно, что как максимальный, так и минимальный элементы* X*, если только они существуют, принадлежат* X*.*

Сразу приведем пример.

Пример 1.3. *Пусть*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}.$$

Легко понять, что $\min A = 0$. *Однако, множество* A *не имеет максимального элемента, что легко доказывается, например, от противного. Если* $M = \max A$, *то* $M < 1$, *а значит*

$$M = \frac{M+M}{2} < \frac{M+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1,$$

что противоречит предположению.

Замечание 1.30. *Кажется, что положение дел в предыдущем примере просто какое-то «идиотическое». Ведь очень хочется связать максимум* A *с единицей, но беда в том, что* $1 \notin A$.

Сложившееся положение дел исправят понятия супремума и инфимума.

Определение 1.18 (Понятие точной грани). *Пусть* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ *ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется супремумом (или точной верхней гранью) множества* X *и обозначается* $\sup X$.

В свою очередь, наибольший элемент множества нижних границ называется инфимумом (или точной нижней гранью) множества X *и обозначается* $\inf X$.

Сразу же приведем пример.

Пример 1.4. *Пусть*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}.$$

Множество верхних границ A *– это множество* $[1, +\infty)$. *Значит,* $\sup A = 1$. *Множество нижних границ* $(-\infty, 0]$, *значит,* $\inf A = 0$.

Что мы видим? Конечно, мы видим, что если у множества существует максимум (минимум), то он и будет супремумом (инфимумом), но, как показывает приведенный пример, не наоборот. Зафиксируем сказанное в виде леммы.

Лемма 1.18. *Пусть существует* $\max X$, *тогда* $\sup X = \max X$. *Аналогично, если существует* $\min X$, *то* $\inf X = \min X$.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Пусть $M = \max X$, тогда M – верхняя граница множества X. Кроме того, M, очевидно, наименьшая верхняя граница. Значит, $M = \sup X$. Второе утверждение доказывается аналогичным образом. $\square$

А чего мы добивались? Добивались мы того, чтобы при рассмотрении (непустого) ограниченного множества, супремум и инфимум существовали всегда. Что же, добились, и об этом говорит следующая теорема.

Теорема 1.4 (Принцип точной грани). *Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный* $\sup X$ $(\inf X)$.

Доказательство. Пусть множество X ограничено сверху. Тогда множество его верхних границ B не пусто. В силу определения верхней границы,

$$\forall b \in B \ \forall x \in X \quad x \leqslant b.$$

Согласно аксиоме непрерывности,

$$\exists c : x \leqslant c \leqslant b, \quad \forall x \in X \ \forall b \in B.$$

Ясно, что $c \in B$. С другой стороны, в силу неравенства $c \leqslant b$ для всех $b \in B$, получается, что $c = \min B$. Тем самым, $c = \sup X$. Доказательство единственности остается в качестве упражнения.

Случай, когда множество X ограничено снизу, рассматривается аналогично. □

Замечание 1.31. *Полезно заметить, что для доказательства существования супремума у непустого ограниченного множества нам пришлось воспользоваться аксиомой непрерывности. Давайте вспомним и нашу возню с доказательством того, что существует $c \in \mathbb{R}$, что $c^2 = 2$ (лемма 1.2). Проводя доказательство, мы рассмотрели множества*

$$X = \{x > 0 : x^2 < 2\}, \quad Y = \{y > 0 : y^2 > 2\}.$$

Обратите внимание, рассматриваемые множества не имеют ни максимального, ни минимального элемента. При этом легко понять что c, даваемое нам аксиомой непрерывности, и есть $\sup X$ *и* $\inf Y$.

Можно доказать, что аксиома непрерывности эквивалентна сформулированному принципу точной грани. Мы ограничимся доказательством, проведенным в одну сторону.

Доопределим понятия супремума и инфимума и в случае, когда рассматриваемые множества не ограничены.

Замечание 1.32. *Если множество X не ограничено сверху (снизу), то полагают* $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$.

Тем самым, мы приходим к следующему следствию.

Следствие 1.4.1. *У любого непустого множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ существуют супремум и инфимум (может быть, равные $\pm\infty$).*

В теории часто бывает удобно использовать следующие равносильные определения супремума и инфимума.

Лемма 1.19. *Для супремума и инфимума можно дать следующие эквивалентные определения:*

$$s = \sup X \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in X \quad s \geqslant x) \;\wedge\; (\forall s' < s \;\exists x \in X : x > s'),$$

$$i = \inf X \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in X \quad i \leqslant x) \;\wedge\; (\forall i' > i \;\exists x \in X : x < i').$$

Доказательство. Доказательство остается в качестве упражнения. □

Замечание 1.33. *Полезно отметить, что написанные строчки ни в коем случае не нужно запоминать, а всего-навсего нужно понимать. Что такое супремум X?*

Во-первых, это элемент s, больший любого элемента из X. Во-вторых, это минимальный такой элемент, то есть если от s отойти немного «влево», то сразу найдется элемент множества X, находящийся правее.

1.8. Принцип Архимеда

Данный раздел вводит, с одной стороны, достаточно очевидные, но с другой стороны чрезвычайно важные свойства множества натуральных и целых чисел, связанные с ограниченностью.

Теорема 1.5. *Пусть $X \subset \mathbb{N}$ – непустое ограниченное множество. Тогда $\exists \max X$.*

Доказательство. Согласно принципу точной грани, существует $s = \sup X < +\infty$. Согласно эквивалентному определению супремума,

$$\exists k \in X : s - 1 < k \leqslant s,$$

что означает, что $k = \max X$. Действительно, во-первых $k \in X$. Во-вторых, так как любые натуральные числа, большие k, не меньше $(k+1)$, а по установленному неравенству (левая часть)

$$s < k + 1,$$

получаем, что k – верхняя грань для X. Эти два наблюдения устанавливают требуемое. □

Замечание 1.34. *Заметим, что установленное свойство – совсем не естественное. Например, как мы видели, у ограниченного подмножества множества рациональных или вещественных чисел, вообще говоря, может не существовать максимального элемента. Все дело в том, что точки множества натуральных чисел являются, как говорят, изолированными: существуют их окрестности, не содержащие других точек из $\mathbb{N}$. Такого нет ни у множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, ни у множества вещественных чисел $\mathbb{R}$.*

Из доказанной теоремы легко выводится следующее следствие.

Следствие 1.5.1. *Множество натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *не ограничено сверху.*

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве упражнения. $\square$

Из полученных результатов для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ можно сразу получить результаты как для подмножеств множества целых чисел $\mathbb{Z}$, так и для самого $\mathbb{Z}$.

Следствие 1.5.2.

(а) *Пусть* $X \subset \mathbb{Z}$ *— непустое ограниченное сверху множество. Тогда существует* $\max X$.

(б) *Пусть* $X \subset \mathbb{Z}$ *— непустое ограниченное снизу множество. Тогда существует* $\min X$.

(в) $\mathbb{Z}$ *– неограниченное ни сверху, ни снизу множество.*

Теперь установим важный для дальнейшего принцип Архимеда.

Теорема 1.6 (Принцип Архимеда). *Пусть* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. *Для любого* $y \in \mathbb{R}$ *существует единственное целое* $k \in \mathbb{Z}$ *такое, что*

$$(k-1)x \leqslant y < kx.$$

Доказательство. Пусть

$$T = \left\{ l \in \mathbb{Z} : \ \frac{y}{x} < l \right\}.$$

Это множество не пусто, так как множество $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху. Кроме того, T ограничено снизу. Тогда, по доказанному, существует $k = \min T$. Значит,

$$k - 1 \leqslant \frac{y}{x} < k$$

и, в силу положительности x, мы получаем требуемое. $\square$

Приведем и геометрическую трактовку принципа Архимеда.

Замечание 1.35. *Пусть, например,* $y > 0$. *Представим себе две «палки»: одну — длиной* x, *другую — длиной* y. *Принцип Архимеда говорит о том, что палку длиной игрек можно «замостить» палками длиной* x, *причем для этого потребуется не меньше* $(k-1)$*-ой палки, но меньше* k *палок.*

Получим и важные следствия из принципа Архимеда.

Следствие 1.6.1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует натуральное число* n *такое, что* $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Доказательство. Достаточно положить в принципе Архимеда $y = 1,\ x = \varepsilon$. $\square$

Еще одно следствие – признак нуля.

Следствие 1.6.2. *Пусть $x \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $0 \leqslant x < \varepsilon$, то $x = 0$.*

Доказательство. От противного, пусть $x > 0$. Тогда, по предыдущему следствию найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{1}{n} < x$. Но тогда, положив $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, получим, что $x > \varepsilon$, что противоречит условию. $\square$

Принцип Архимеда позволяет ввести понятие целой и дробной частей числа.

Следствие 1.6.3. *Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $k \leqslant x < k + 1$.*

Доказательство. Это сразу следует из принципа Архимеда, если положить в нем $x = 1$. $\square$

Определение 1.19. *Указанное в следствии число k называется целой частью числа x и обозначается $[x]$. Величина $\{x\} = x - [x]$ называется дробной частью числа x.*

Итак, целая часть числа x – это наибольшее целое число, не превосходящее x. Приведем какой-нибудь пример.

Пример 1.5. *Например,*

$$[5.7] = 5, \quad \{5.7\} = 0.7, \quad [-3.2] = -4, \quad \{-3.2\} = 0.8.$$

§2. Предел последовательности

В этом разделе мы подробно обсудим понятие предела последовательности.

2.1. Понятие предела последовательности

Для начала дадим определение тому, что такое последовательность.

Определение 2.1. *Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется последовательностью.*

Развернуто, но не менее точно можно сказать, что последовательность – это функция, областью определения которой является множество натуральных чисел.

Замечание 2.1. *Обычно последовательности обозначают маленькими латинскими буквами, например $x(n)$, $y(n)$, причем чаще всего аргумент n пишется снизу, например x_n, y_n.*

Приведем какие-нибудь примеры использования новых обозначений.

Пример 2.1. *Пусть, например,*

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1,\ x_5 = \frac{1}{5},\ x_{100} = \frac{1}{100}.$$

Если $x_n = (-1)^n$, *то*

$$x_1 = -1,\ x_{10} = 1,$$

и вообще

$$x_{2k} = 1,\ x_{2k-1} = -1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Как мы убедились, вычислить значение какого-либо члена последовательности – не очень сложная и захватывающая задача. Но как понять, есть ли у последовательности какая-то тенденция, какой-то тренд, возникающий при неограниченном увеличении n? Частично отвечая на этот вопрос, мы приходим к понятию предела последовательности.

Определение 2.2 (Предел последовательности через $\varepsilon - n$). *Число* $A \in \mathbb{R}$ *называется пределом последовательности* x_n, *если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A, \quad x_n \longrightarrow A.$$

Приведем и словесную формулировку того, что написано.

Замечание 2.2. *Число* A *называется пределом последовательности* x_n, *если для любого положительного числа* ε *существует натуральное число* n_0, *зависящее от* ε *такое, что какое бы ни взять натуральное число* n, *большее* n_0, *будет выполняться неравенство*

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

Определение предела – сложное понятие. Кажется важным уяснить ту геометрию, что за ним прячется.

Замечание 2.3. *Геометрически (рисунок 1) определение предела последовательности означает, что какую бы полосу шириной* 2ε *вокруг точки* A *ни взять, найдется номер* n_0, *что все члены последовательности с номерами, большими* n_0, *лежат в этой полосе. Ясно, что при уменьшении* ε, *уменьшается ширина полосы и номер* n_0, *вообще говоря, увеличивается.*

Тем самым, предел – это то, к чему «неограниченно приближаются» члены нашей последовательности с ростом их номеров.

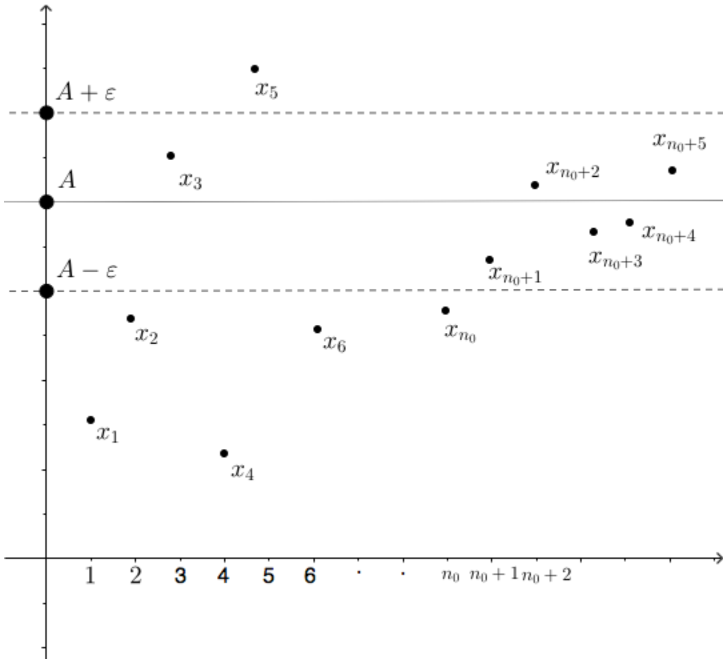

Рис. 1. Предел последовательности

Отметим и следующее, чисто техническое замечание.

Замечание 2.4. *Используя понятие ε-окрестности, определение предела 2.2 можно переписать в следующем виде:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Теперь можно дать и такую трактовку понятию предела. Число A – предел последовательности x_n, если какую бы ни выбрать (сколь угодно малую) окрестность точки A, начиная с какого-то момента, все члены последовательности лежат в этой окрестности.

Приведем пример.

Пример 2.2. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно определению, нужно найти такое натуральное число n_0, что при всех натуральных $n > n_0$ будет выполняться

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство относительно n, получаем

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит, если положить

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

то при $n > n_0$ заведомо выполняется

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

В силу произвольности числа ε утверждение доказано.

Замечание 2.5. *Еще раз отметим несколько важных моментов. Во-первых, номер n_0 из определения должен найтись для каждого ε, а не для какого-то конкретного. Во-вторых, если нашелся какой-то номер n_0, то любой больший номер тоже годится, тем самым $n_0 = n_0(\varepsilon)$ можно считать функцией от ε. В-третьих, никто не просит нас найти наименьший из возможных номеров n_0, начиная с которого $x_n \in U_\varepsilon(A)$. Последнее дает нам право не решать неравенство на номер точно.*

Приведем пример.

Пример 2.3. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} = \frac{3}{2}.$$

Выполним предварительные преобразования:

$$\left|\frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{4n - 12}{2(2n^2 + 4)}\right|.$$

Легко видеть, что решать «в лоб» неравенство из определения предела несколько громоздко. Поступим иначе. Можно считать, что $n > 3$, тогда

$$\left|\frac{4n - 12}{2(2n^2 + 4)}\right| < \left|\frac{4n}{4n^2}\right| = \frac{1}{n}.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Положив

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

получим, что при

$$n > n_0 = \max\left(3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$$

будет выполнено

$$\left|\frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Последовательность не обязана иметь предел. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.4. *Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.*

Запишем отрицание того факта, что число A является пределом последовательности x_n:

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |x_n - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Положим $\varepsilon_0 = 1$ и $n_0 \in \mathbb{N}$. Если $A < 0$, то возьмем $n = 2n_0$. Если же $A \geqslant 0$, то возьмем $n = 2n_0 + 1$. Тогда в любом случае

$$|x_n - A| = |(-1)^n - A| \geqslant 1,$$

то есть никакое число A пределом последовательности x_n не является.

Понятно, что рассмотрение ε-окрестности в определении предела – весьма несущественная деталь. Дадим, тем самым, следующее определение.

Определение 2.3 (Предел последовательности через окрестности). *Число A называется пределом последовательности x_n, если*

$$\forall U(A)\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\quad x_n \in U(A).$$

Естественно, было бы странно называть разные вещи одним и тем же именем, так что следующая лемма вряд ли вызовет удивление.

Лемма 2.1. *Определения 2.2 и 2.3 эквиваленты.*

Доказательство. Сначала докажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 2.2, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и в смысле определения 2.3.

Пусть $U(A) = (\alpha, \beta)$ – произвольная окрестность точки A. Положим $\varepsilon = \min(A-\alpha, \beta-A)$, тогда $U_\varepsilon(A) \subset U(A)$. Согласно определению 2.2, по выбранному ε

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\quad x_n \in U_\varepsilon(A) \subset U(A),$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 2.3.
Тот факт, что из определения 2.3 следует определение 2.2, моментально следует из того, что ε-окрестность является частным случаем окрестности. □

Введем часто используемое понятие сходящейся последовательности.

Определение 2.4 (Понятие сходящейся последовательности). *Если последовательность x_n имеет предел $A \in \mathbb{R}$ (число!), то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.*

Определение предела последовательности оказывается полезным расширить на случай «бесконечных пределов». Понятно, что алгебраически достаточно поменять выражения для окрестностей, что мы и сделаем.

Определение 2.5 (Понятия бесконечных пределов). *Элемент $+\infty$ называется пределом последовательности x_n, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент $-\infty$ называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \ x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty, \quad x_n \longrightarrow \pm\infty.$$

Замечание 2.6. *Введенные определения можно переписать через ε-окрестности $U_\varepsilon(\pm\infty)$ и через окрестности $U(\pm\infty)$ ровно также, как это сделано в определениях 2.2 и 2.3. Утверждение леммы 2.1 сохраняется и в этом случае. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.*

Отметим следующее важное замечание.

Замечание 2.7. *Последовательности, имеющие пределом $+\infty$, $-\infty$, все равно называются расходящимися.*

Приведем пример.

Пример 2.5. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{2n+4} = +\infty.$$

При $n \in \mathbb{N}$ справедлива цепочка преобразований

$$\left|\frac{3n^2-5}{2n+4}\right| \geqslant \left|\frac{3n^2-5n}{2n+4n}\right| = \left|\frac{3n-5}{6}\right|.$$

При $n > 1$ выражение под модулем положительно и

$$\frac{3n-5}{6} > \frac{1}{\varepsilon} \ \Leftrightarrow \ n > \frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}.$$

Положив

$$n_0 = \left[\frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}\right],$$

получим, что при $n > \max(n_0, 1) = n_0$ выполняется

$$\left|\frac{3n-5}{6}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

а значит и

$$\left|\frac{3n^2-5}{2n+4}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

что доказывает требуемое.

В заключение, отметим еще несколько важных замечаний.

Замечание 2.8. *Запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ будет всегда снабжена уточнением: либо $A \in \mathbb{R}$, либо $A \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Замечание 2.9. *При записи определения предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что $n_0 = n_0(\varepsilon)$, а так же то, что $n_0 \in \mathbb{N}$.*

2.2. Свойства последовательностей, имеющих предел

Введя понятие предела последовательности, хочется узнать свойства, которыми обладают имеющие предел последовательности. Часть из этих (локальных) свойств совершенно не удивительна.

Например, как вы думаете, может ли у последовательности быть два различных предела? Вряд ли, ведь тогда члены последовательности одновременно должны быть сколь угодно близки как к одному числу, так и к другому, но если числа разные, то такого, конечно, быть не может.

А что можно сказать про сходящуюся последовательность? Например то, что она обязательно ограничена, ведь с какого-то момента все члены этой последовательности находятся внутри полосы конечной ширины, окружающей предел, а до этого «момента» всего-навсего конечное число членов.

Все эти соображения мы сформулируем в виде леммы, а словесные наметки доказательств переложим на математический язык. Обратите внимание, и это важно: мы все уже доказали, теперь же просто аккуратно это оформим.

Лемма 2.2 (Свойства последовательностей, имеющих предел). *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, тогда:*

(а) При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.

(б) При $A \in \mathbb{R}$ последовательность x_n ограничена.

(в) В любой окрестности $A \in \overline{\mathbb{R}}$ содержатся все элементы последовательности x_n, за исключением не более чем конечного числа.

Доказательство. 1. Будем доказывать от противного. Пусть A_1 и A_2 – пределы последовательности x_n, причем $A_1 \neq A_2$. Пусть $U(A_1), U(A_2)$ – окрестности точек A_1 и A_2 такие, что

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing,$$

см. лемму 1.16. По определению предела, для окрестности $U(A_1)$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n \in U(A_1),$$

а для окрестности $U(A_2)$

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad x_n \in U(A_2).$$

Пусть $n_2 = \max(n_0, n_1)$, тогда

$$\forall n > n_2 \quad (x_n \in U(A_1)) \wedge (x_n \in U(A_2)) \;\Leftrightarrow\; x_n \in U(A_1) \cap U(A_2),$$

что невозможно, так как последнее пересечение пусто.
2. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |x_n - A| < 1 \;\Leftrightarrow\; (A-1) < x_n < (A+1)$$

и все элементы последовательности, начиная с номера $n_0 + 1$, ограничены по модулю числом

$$\max(|A+1|, |A-1|).$$

До члена последовательности с номером $n_0 + 1$ имеется ровно n_0 членов последовательности, а значит, положив

$$C = \max(|x_0|, |x_1|, \ \ldots, |x_{n_0}|, |A+1|, |A-1|),$$

приходим к тому, что

$$|x_n| \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то есть к тому, что x_n ограничена.
3. Пусть $U(A)$ – произвольная окрестность точки A. Согласно определению предела,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \quad x_n \in U(A),$$

а значит вне окрестности $U(A)$ содержится не более n_0 членов.

□

2.3. Арифметические свойства пределов в $\mathbb{R}$

Теперь обсудим арифметические операции над последовательностями, имеющими предел. Следующая теорема, скорее всего, напрашивается.

Теорема 2.1 (Арифметические свойства пределов). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$, *тогда:*

(а) *Предел суммы равен сумме пределов, то есть*

$$x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A + B.$$

(б) *Предел произведения равен произведению пределов, то есть*

$$x_n y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} AB.$$

(в) *Предел частного равен (при естественных ограничениях) частному пределов, то есть*

$$\frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{A}{B}, \quad y_n \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника и свойства модуля (теорема 1.3), при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ имеем

$$|x_n + y_n - (A + B)| = |(x_n - A) + (y_n - B))| \leqslant |x_n - A| + |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, то y_n ограничена (лемма 2.2), а значит

$$\exists C > 0 : |y_n| \leqslant C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника (теорема 1.3), при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ имеем

$$|x_n y_n - AB| = |x_n y_n + Ay_n - Ay_n - AB| \leqslant |x_n y_n - Ay_n| + |Ay_n - AB| =$$

$$= |y_n| \cdot |x_n - A| + |A| \cdot |y_n - B| \leqslant C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{|A|\varepsilon}{2(|A|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{B},$$

так как тогда, по доказанному в пункте 2,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ |y_n - B| < \frac{|B|}{2},$$

откуда

$$B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}.$$

Если положить

$$C = \min\left(\left|B - \frac{|B|}{2}\right|, \left|B + \frac{|B|}{2}\right|\right),$$

то

$$|y_n| \geqslant C \ \Rightarrow \ 0 < \frac{1}{|y_n|} \leqslant \frac{1}{C}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, пользуясь определением предела,

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ |y_n - B| < \varepsilon C B.$$

Значит, при $n > \max(n_0, n_1)$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - y_n}{B y_n}\right| \leqslant \frac{|B - y_n|}{C|B|} < \varepsilon.$$

$\square$

Замечание 2.10. *Обсудим более детально приведенное доказательство, особенно обратив внимание на те «подгоны», которые сделаны при выборе «эпсилонов».*

Сначала прокомментируем то, почему справедлива хотя бы первая строчка в доказателстве первого пункта. Вот она.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда взялось значение $\frac{\varepsilon}{2}$? А ниоткуда, оно просто нам удобно. Согласно определению предела, начиная с некоторого момента значение $|x_n - A|$ может *быть сделано меньше любого положительного числа. Значит, и меньше* $\dfrac{\varepsilon}{2}$, *если* $\varepsilon > 0$. *Удобно же такое число нам потому, что все «эпсилоны» в итоге сложились в определение предела. Обязательно ли это? Вовсе нет.*

Замечание 2.11. *Давайте приведем менее искусственное доказательство, например, второго пункта теоремы.*

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \in \mathbb{R}$, *то* y_n *ограничена (лемма 2.2), а значит*

$$\exists C > 0 : |y_n| \leqslant C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. *Так как* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, *то*

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ |x_n - A| < \varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, *то*

$$\exists n_1 : \ \forall n > n_1 \ \ |y_n - B| < \varepsilon.$$

Тогда, так как при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ *выполняются все выведенные выше соотношения, используя неравенство треугольника, получаем:*

$$|x_n y_n - AB| = |x_n y_n + Ay_n - Ay_n - AB| \leqslant |x_n y_n - Ay_n| + |Ay_n - AB| =$$

$$= |y_n||x_n - A| + |A||y_n - B| \leqslant C\varepsilon + |A|\varepsilon = (C + |A|)\varepsilon.$$

Можно ли считать доказательство законченным, или нет? Конечно, можно. Обратите внимание на то, что ни C, *ни* A *от* n *не зависят. Это значит, что, в силу произвольности положительного числа* ε, *число* $(C + |A|)\varepsilon$ *тоже произвольно и положительно. Обозвав его, например,* $\widetilde{\varepsilon}$, *приходим к определению предела.*

Пример ниже иллюстрирует, как с помощью доказанной теоремы можно вычислять некоторые пределы.

Пример 2.6. *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1}.$$

Обратим внимание, что применить теорему «в лоб» не получится: и числитель, и знаменатель имеют пределом $+\infty$, *а значит мы получаем уже упомянутую ранее неопределенность. Раскроем ее. Вынося в числителе и знаменателе старшие степени за скобку, получается*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{4}{n^2}}{2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}.$$

Пределы последовательностей

$$\frac{5}{n},\ \frac{4}{n^2},\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2}$$

равны нулю, что легко показать по определению предела, значит предел числителя равен 3, а предел знаменателя равен 2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{2n^2+n+1}=\frac{3}{2}.$$

На самом деле, справедлива более общая теорема, чем теорема 2.1. Сформулируем ее.

Теорема 2.2 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, *тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в* $\overline{\mathbb{R}}$, *то:*

(а) *Предел суммы равен сумме пределов, то есть*

$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B.$$

(б) *Предел произведения равен произведению пределов, то есть*

$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB.$$

(в) *Предел частного равен частному пределов, то есть*

$$\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{A}{B}, \quad y_n \neq 0.$$

Доказательство. Докажем, например, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \neq 0$, $B \in \mathbb{R}$, то

$$x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty, & B > 0 \\ -\infty, & B < 0 \end{cases}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ x_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

и

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \ \ B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}.$$

Значит, при $n > \max(n_0, n_1)$

$$\begin{cases} x_n y_n > \dfrac{1}{\varepsilon}\left(B - \dfrac{|B|}{2}\right), & B > 0 \\ x_n y_n < \dfrac{1}{\varepsilon}\left(B + \dfrac{|B|}{2}\right), & B < 0 \end{cases},$$

что и доказывает утверждение.

Остальные случаи остаются в качестве упражнения. $\square$

Замечание 2.12. *Справедливость именно этой, только что сформулированной теоремы, и мотивирует введенные нами ранее операции в расширенном множестве вещественных чисел* $\overline{\mathbb{R}}$.

2.4. Предельный переход в неравенствах

Обсудим теперь вопросы, которые связывают предельный переход и порядок. Сначала докажем, что если есть неравенство для пределов, то это же неравенство с какого-то момента справедливо и для членов последовательностей.

Теорема 2.3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A < B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n < y_n.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$. Тогда, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad |x_n - A| < \frac{B-A}{2} \ \Rightarrow \ x_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |y_n - B| < \frac{B-A}{2} \ \Rightarrow \ y_n > B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Значит, при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняется

$$x_n < \frac{A+B}{2} < y_n,$$

откуда и следует требуемое.

Остальные случаи остаются в качестве упражнения. □

Замечание 2.13. *Важно отметить геометрический смысл приведенного доказательства: мы строим вокруг пределов, опять-таки, непересекающиеся «полосы» (окрестности), и дальше пользуемся тем, что с какого-то момента все члены каждой из рассматриваемых последовательностей оказываются в «своей полосе». Так как одна из «полос» находится над другой, то мы приходим к утверждению теоремы.*

Из доказанной теоремы выведем следствие, часто называемое «предельный переход в неравенствах». Смысл его прост: неравенство для последовательностей переносится на неравенство для пределов в случае существования последних.

Следствие 2.3.1 (Предельный переход в неравенствах). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

(а) *Если $x_n > y_n$ начиная с какого-либо номера n_0, то $A \geqslant B$.*

(б) *Если $x_n \geqslant y_n$ начиная с какого-либо номера n_0, то $A \geqslant B$.*

Доказательство. 1. От противного, пусть $A < B$. Согласно теореме 2.3

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n < y_n.$$

Это противоречит условию.
2. Второй пункт доказывается аналогично и остается в качестве упражнения. □

Отметим и следующее замечание.

Замечание 2.14. *Важно отметить, что в 1 пункте следствия 2.3.1 нельзя написать строгое неравенство $A > B$. Например, для последовательностей $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = 0$ выполняется неравенство $x_n > y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.*

2.5. Теорема о сжатой переменной

Теорема о сжатой переменной – теорема, устанавливающая существование предела последовательности, зажатой между двумя другими.

Теорема 2.4 (О сжатой переменной). *Пусть начиная с какого-то номера n_0 выполняется $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \quad |x_n - A| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

$$\exists n_2 : \forall n > n_2 \quad |y_n - A| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Тогда при $n > n_2 = \max(n_0, n_1, n_2)$ выполняется

$$A - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < A + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |z_n - A| < \varepsilon.$$

Случаи $A = \pm\infty$ остаются в качестве упражнения. □

Замечание 2.15. *Отметим, что доказать эту теорему, опираясь на предельный переход в неравенствах (2.3.1), нельзя, так как по условию про наличие предела последовательности z_n ничего неизвестно.*

Замечание 2.16. *В случае, когда $A = \pm\infty$, условия теоремы можно ослабить, «подпирая» z_n лишь с одной стороны.*

2.6. Теорема Вейерштрасса

Некоторое достаточное условие существования предела последовательности было только что получено в теореме 2.4 о сжатой переменной. В этом разделе мы установим критерий сходимости так называемой монотонной последовательности. Для начала введем понятие монотонности.

Определение 2.6. *Говорят, что последовательность x_n возрастает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} \geqslant x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n строго возрастает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} > x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} \leqslant x_{n_2}.$$

Говорят, что последовательность x_n строго убывает, если

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \quad x_{n_1} < x_{n_2}.$$

Определение 2.7. *Про возрастающую (не убывающую, убывающую, не возрастающую) последовательность также говорят, что она монотонна.*

Замечание 2.17. *Отметим, что на практике мы часто используем другие, но равносильные введенным выше определения. Например, строгое возрастание последовательности означает, что*

$$x_n < x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

а убывание последовательности, что

$$x_{n+1} \leqslant x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и так далее.

Из геометрических соображений понятно, что у монотонной последовательности всегда есть предел. Теорема Вейерштрасса говорит о том, что для сходимости монотонной последовательности не только необходима (лемма 2.2), но и достаточна ограниченность этой последовательности.

Теорема 2.5 (Вейерштрасса). *Возрастающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Доказательство. Пусть последовательность возрастает.
Как уже отмечалось, необходимость следует из того факта, что сходящаяся последовательность ограничена (лемма 2.2).
Докажем достаточность. Так как x_n ограничена сверху, то существует $A = \sup x_n < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. По свойству супремума (лемма 1.19),

$$\exists n_0 : A - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant A.$$

Так как последовательность x_n возрастает, то

$$\forall n > n_0 \quad A - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant A < A + \varepsilon \;\Rightarrow\; A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Случай убывающей последовательности рассматривается аналогично. □

Теорема Вейерштрасса может быть дополнена следующим образом.

Лемма 2.3 (Дополнение к теореме Вейерштрасса). *Если последовательность x_n возрастает и не ограничена сверху, то ее предел равен $+\infty$, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Если последовательность x_n убывает и не ограничена снизу, то ее предел равен $-\infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Доказательство. Докажем первый пункт. Так как последовательность не ограничена сверху, то по $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такой, что

$$x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как последовательность возрастает, то при $n > n_0$ выполнено

$$x_n \geqslant x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тем самым установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Второй пункт доказывается аналогично. □

Объединяя полученные факты, приходим к такой «обобщенной теореме Вейерштрасса.

Теорема 2.6 (Обобщенная теорема Вейерштрасса). *Возрастающая последовательность x_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Убывающая последовательность x_n имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

2.7. Второй замечательный предел

Пришла пора поговорить о таинственной неопределенности вида 1^∞. Бороться с ней помогает так называемый второй замечательный предел. Значение же этого предела нельзя переоценить – именно сейчас мы и определим число e – хорошо известное из школы, но непонятно откуда берущееся, иррациональное число.

Начнем сразу с основного утверждения.

Теорема 2.7. *Существует предел (в $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

и докажем, что она строго убывает. Действительно, используя неравенство Бернулли (1.15) в последнем переходе, при $n\geqslant 2$ имеем:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\geqslant\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

откуда, в силу положительности y_n при всех n,

$$y_{n-1}>y_n\quad\forall n\geqslant 2,$$

что и означает строгое убывание y_n.

Поскольку члены последовательности y_n положительны и последовательность строго убывает то, согласно теореме Вейерштрасса (2.5), существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где предел в правой части цепочки равенств существует по только что доказанному. Это доказывает и существование предела в левой части, что и требуется. □

Теперь можно определить число e.

Определение 2.8 (Понятие второго замечательного предела). *Рассмотренный выше предел называют вторым замечательным пределом, а его значение – числом e, то есть*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Замечание 2.18. *Как уже было вскользь отмечено, число $e \approx 2.71828182845$ оказывается иррациональным. Доказательство этого факта не сложно, но весьма бесполезно для дальнейшего в курсе, поэтому мы его не приводим.*

Отметим и следующие обобщения написанного равенства, которые мы докажем позже.

Замечание 2.19. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = +\infty$, тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e.$$

Понятно, что одно соотношение переводится в другое практически моментально, если учесть теорему о расширенных арифметических свойствах пределов.

Приведем пример использования полученных знаний для раскрытия неопределенностей.

Пример 2.7. *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2}\right)^{2n+3}.$$

Легко заметить, что перед нами неопределенность вида 1^∞. Преобразуем основание следующим образом:

$$\frac{n^2-3n+1}{n^2+2} = 1 + \frac{n^2-3n+1}{n^2+2} - 1 = 1 - \frac{3n+1}{n^2+2}.$$

Пусть

$$x_n = -\frac{3n+1}{n^2+2},$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, *а значит, согласно озвученному выше обобщению,*

$$\lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = e.$$

В то же время, используя свойства степеней,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \left\{(1+x_n)^{1/x_n}\right\}^{(2n+3)x_n},$$

где фигурные скобки стоят «для красоты». Так как

$$\lim_{n\to\infty} (2n+3)x_n = -\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(3n+1)}{n^2+2} = -6,$$

то хочется сказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+2}\right)^{2n+3} = e^{-6}.$$

В общем-то, так и есть, но последний переход мы пока что объяснить не в силах.

2.8. Сравнение скорости роста некоторых функций

При вычислении пределов часто оказывается полезным сравнивать скорости роста функций разной природы. В этом разделе мы попробуем разобраться в том, какие функции быстрее растут, а также в том: а что значит — «быстрее»?

Замечание 2.20. *Данный пункт, как окажется, опережает «свое время», а точнее — наше развитие на текущий момент. Мы пока не ввели ни понятия корня, ни понятие показательной или логарифмической функций. Однако, эти понятия (как и функции, и правила работы с ними) нам хорошо знакомы из школы. На данный момент мы будем пользоваться школьным пониманием происходящего, что, впрочем, не помешает в дальнейшем вернуться к строгим определениям.*

Сравним между собой поведение показательной функции и факториала. Оказывается, факториал растет «быстрее», и вот что это значит.

Лемма 2.4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \geqslant 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Понятно, что при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{a}{n} x_{n-1}.$$

Так как $\frac{a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то, взяв $\varepsilon = 1$,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \frac{a}{n} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Так как к тому же $x_n > 0$, то, согласно теореме Вейерштрасса (2.5), существует предел x_n. Назовем его A. Переходя к пределу в равенстве

$$x_n = \frac{a}{n} x_{n-1}$$

получаем, что

$$A = 0 \cdot A \ \Rightarrow \ A = 0,$$

что и требовалось. □

Естественно, справедливо и вот какое следствие.

Следствие 2.7.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Данное утверждение вытекает из теоремы 2.4 о сжатой переменной и неравенства

$$-\frac{|a|^n}{n!} \leqslant \frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{|a|^n}{n!},$$

верного в силу свойств модуля (теорема 1.3). □

Следующая в иерархии по скорости роста (известная) функция – степенная. Результат дается следующей теоремой.

Лемма 2.5.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{a^n} = 0, \quad |a| > 1, \ s \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n^s}{a^n}$$

при $a > 1$. Понятно, что при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{n^s}{(n-1)^s a} x_{n-1}.$$

Так как $\dfrac{n^s}{(n-1)^s a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{a} < 1$, то (лемма 2.3)

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \frac{n^s}{(n-1)^s a} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Так как к тому же $x_n > 0$, то, согласно теореме Вейерштрасса (2.5), существует предел x_n. Назовем его A. Переходя к пределу в равенстве

$$x_n = \frac{n^s}{(n-1)^s a} x_{n-1}$$

получаем, что

$$A = \frac{1}{a} \cdot A \ \Rightarrow \ A = 0,$$

что и требовалось.

Случай, когда $a < -1$ рассматривается также, как и в доказанном ранее следствии. $\square$

Итак, мы получили, что любая степенная функция растет медленнее, чем любая (растущая) показательная.

Для степенной функции n^s характерной особенностью является то, что s — это число. В других случаях теорема, вообще говоря, может носить и противоположный характер.

Лемма 2.6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^n} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{a^n}{n^n}.$$

Понятно, что при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$x_n = \frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} x_{n-1}.$$

Так как

$$\frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{a}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \cdot e^{-1} = 0,$$

то (лемма 2.3)

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \frac{a(n-1)^{n-1}}{n^n} < 1.$$

Значит, при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, и, тем самым, последовательность строго убывает. Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что проводились в предыдущих доказательствах, и остаются в качестве упражнения. $\square$

Теперь сравним логарифмическую и степенную функции.

Лемма 2.7.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a^\alpha n}{n^s} = 0, \quad s > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Этот факт, на самом деле, почти эквивалентен предыдущему (например, можно сделать что-то вроде замены переменной). Однако, чтобы не зарываться в сугубо технические детали, строгое его доказательство мы отложим до будущих времен. □

Итак, сделаем важный вывод: из рассмотренных (семейств) функций быстрее всего «растет» факториал. Затем, конечно, показательная функция с показателем большим 1, затем любая степенная функция и, в конце концов, логарифм.

Докажем также следующую полезную для практики теорему, касающуюся корней n-ой степени.

Теорема 2.8. *Справедливы следующие утверждения:*

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *при* $a > 0.$

(в) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$, *где* $\alpha_n > 0$ *и* $A > 0$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1.$

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как, по доказанному в лемме 2.5,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0,$$
то
$$\exists n_0 :\ \forall n > n_0 \quad \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \ \Rightarrow\ n < (1+\varepsilon)^n.$$
В частности, при $n > n_0$
$$1 \leqslant n < (1+\varepsilon)^n \ \Leftrightarrow\ 1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon,$$
что и доказывает утверждение.

2. Докажем второй пункт. Пусть $a \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$. Так как
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\varepsilon)^n} = 0,$$
то
$$\exists n_0 :\ \forall n > n_0 \quad \frac{a}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \ \Rightarrow\ a < (1+\varepsilon)^n.$$
В частности, при $n > n_0$
$$1 \leqslant a < (1+\varepsilon)^n \ \Leftrightarrow\ 1 \leqslant \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Если $a \in (0,1)$, то утверждение следует из следующих выкладок:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Последнее равенство верно в силу уже доказанного и того, что если $a \in (0,1)$, то $\frac{1}{a} > 1$.

3. Докажем третий пункт. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$ и $A > 0$, то по $\varepsilon = \frac{A}{2}$

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ |\alpha_n - A| < \frac{A}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{A}{2} < \alpha_n < \frac{3A}{2}.$$

Тогда, при $n > n_0$

$$\sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{\frac{3A}{2}},$$

и утверждение теоремы следует из теоремы 2.4 о сжатой переменной и результата предыдущего пункта. □

2.9. Подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы

Все это время мы занимаемся, по сути, теоремами, обеспечивающими существование предела при тех или иных условиях: арифметические свойства, теорема о сжатой переменной, теорема Вейерштрасса. Между тем, например, издавна знакомая нам последовательность $x_n = (-1)^n$ предела не имеет. А почему? Все потому, что в ней как будто бы переплетены две сходящиеся к совершенно разным числам последовательности: из единиц и из минус единиц. Обсудим это формально.

Определение 2.9 (Понятие подпоследовательности). *Пусть дана последовательность x_n и возрастающая последовательность*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$$

натуральных чисел.

Последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.

Замечание 2.21. *Отметим отдельно, что при формировании подпоследовательности мы вольны вычеркивать какие-то члены исходной последовательности, но не вольны менять их порядок. Последнее диктуется требованием в определении: последовательность номеров n_k должна быть возрастающей.*

Приведем пример.

Пример 2.8. *Пусть рассматривается последовательность $x_n = (-1)^n$. Тогда из нее можно выделить, например, такие подпоследовательности:*

$$x_{2k} = (-1)^{2k} \equiv 1, \quad x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} \equiv -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Выделенные в примере подпоследовательности являются сходящимися. Введем следующее определение.

Определение 2.10. *Пределы (имеющих предел) подпоследовательностей последовательности x_n называются частичными пределами этой последовательности.*

Рассмотрим примеры.

Пример 2.9. *Множество частичных пределов уже рассмотренной последовательности $x_n = (-1)^n$ состоит из двух элементов: ± 1.*

Множество частичных пределов последовательности $x_n = n^{(-1)^n}$ тоже состоит из двух элментов: 0 и $+\infty$.

Множество частичных пределов последовательности не всегда конечно. Легко проверить, что множество частичных пределов последовательности

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ \ldots\}$$

совпадает с множеством $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Более того, множество частичных пределов может быть даже очень бесконечным. Например, можно показать, что множество частичных пределов последовательности $x_n = \sin n$ – это отрезок $[-1, 1]$.

Естественно задаться следующими вопросами: во-первых, каково множество частичных пределов последовательности, имеющей предел; во-вторых, правда ли, что из каждой последовательности можно выделить имеющие предел подпоследовательности?

На первый вопрос ответить не сложно.

Лемма 2.8. *Пусть последовательность x_n имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательности имеет тот же самый предел.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Пусть теперь x_{n_k} – подпоследовательность x_n. Так как $n_k \to +\infty$ (кстати, почему?), то

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \ n_k > n_0,$$

а значит $x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$, что и доказывает утверждение. $\square$

Замечание 2.22. *Итак, предыдущая лемма и ее доказательство не должны шокировать. Действительно, в случае наличия предела все члены последовательности, начиная с какого-то момента, лежат в произвольно выбранной окрестности вокруг предела. Значит, это же верно и с какого-то момента, но уже в подпоследовательности.*

Интересно, что в отличие от первого вопроса, второй оказывается намного более хитрым. Все потому, что ответ на второй вопрос не решается без аксиомы непрерывности и, на самом деле, эквивалентен ей.

Теорема 2.9 (Теорема Больцано–Вейерштрасса). *У любой ограниченной последовательности x_n существует сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < x_n \text{ для бесконечного числа членов } x_n\}.$$

Так как последовательность x_n ограничена, то S непусто и ограничено сверху, а значит, согласно принципу точной грани (1.4), существует $s = \sup S$. Согласно свойству супремума (1.19), если $k \in \mathbb{N}$, то

$$\exists s' \in S: \; s - \frac{1}{k} < s' \leqslant s.$$

В частности, в силу транзитивности отношения $<$, справедливо высказывание

$$s - \frac{1}{k} < x_n \text{ для бесконечного числа членов } x_n.$$

Так как

$$s + \frac{1}{k} \notin S,$$

то аналогичным образом устанавливается справедливость высказывания

$$s + \frac{1}{k} < x_n \text{ для конечного числа членов } x_n,$$

а значит для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо высказывание

$$s - \frac{1}{k} < x_n < s + \frac{1}{k} \text{ для бесконечного числа членов } x_n.$$

Теперь будем строить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $k = 1$, выберем

$$x_{n_1} \in \{x_n : \; s - 1 < x_n < s + 1\}.$$

Далее, пусть построены члены с номерами $n_1, n_2, \ldots, n_p$. В качестве n_{p+1}-ого члена подпоследовательности выберем

$$x_{n_{p+1}} \in \left\{x_n : \; s - \frac{1}{p+1} < x_n < s + \frac{1}{p+1}\right\}$$

так, чтобы $n_{p+1} > n_p$. Последнее всегда возможно в силу доказанной бесконечности множества членов последовательности, удовлетворяющих выписанному неравенству. Продолжая по индукции, получаем подпоследовательность x_{n_p}, причем для всех $p \in \mathbb{N}$

$$s - \frac{1}{p+1} < x_{n_p} < s + \frac{1}{p+1}.$$

Согласно теореме 2.4 о сжатой переменной, $x_{n_p} \xrightarrow[p\to\infty]{} s$. □

Итак, теорема Вейерштрасса устанавливает непустоту множества частичных пределов (в $\mathbb{R}$) в случае, когда рассматриваемая последовательность ограничена. Эту теорему можно расширить и на случай неограниченности, причем абсолютно естественно.

Лемма 2.9 (Дополнение теоремы Больцано–Вейерштрасса). *Если последовательность x_n не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить сходящуюся к $+\infty$ $(-\infty)$ подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность не ограничена сверху. Тогда найдется номер n_1 такой, что $x_{n_1} > 1$. Далее будем действовать по индукции. Если уже выбран номер $n_k > n_{k-1}$ такой, что $x_{n_k} > k$, то выбирается номер $n_{k+1} > n_k$ так, что $x_{n_{k+1}} > k+1$. Такое построение возможно, так как иначе последовательность x_n была бы ограничена сверху числом $\max(x_1, \ \ldots, x_{n_k}, k+1)$. Тем самым, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Для неограниченной снизу последовательности доказательство аналогично. □

Отметим некоторый итог в следующем замечании.

Замечание 2.23. *У любой последовательности существует подпоследовательность, имеющая предел в $\overline{\mathbb{R}}$. Для существования сходящейся (то есть имеющей предел в $\mathbb{R}$) подпоследовательности приходится накладывать какие-то дополнительные условия на исходную последовательность, например, ограниченность последней.*

Говоря о множестве частичных пределов, важным оказывается выделить два: наибольший и наименьший из множества частичных пределов. Их мы будем называть верхним и нижними пределами. В этом пункте мы займемся изучением свойств этих объектов.

Определение 2.11 (Понятия верхнего и нижнего пределов). *Пусть E — (непустое) множество частичных пределов последовательности x_n.*

Верхним пределом последовательности x_n называется $\sup E$ и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ или $\limsup\limits_{n} x_n$.

Нижним пределом последовательности x_n называется $\inf E$ и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ или $\liminf\limits_{n} x_n$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 2.10. *Найдем верхний и нижний пределы у уже рассматриваемых ранее последовательностей.*

Так как множество частичных пределов последовательности $x_n = (-1)^n$ *состоит из двух элементов* – ± 1, *то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

Так как множество частичных пределов последовательности

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ \ldots\}$$

совпадает с множеством $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Так как множество частичных пределов последовательности $x_n = \sin n$ – *это отрезок* $[-1, 1]$, *то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

Хорошо бы теперь ответить на вопрос: всегда ли верхний или нижний предел последовательности являются ее частичными пределами, ведь супремум или инфимум не обязаны принадлежать рассматриваемому множеству. Оказывается, ответ положителен.

Лемма 2.10. *Верхний и нижний пределы последовательности* x_n *являются ее частичными пределами.*

Доказательство. Проведем доказательство конструктивно, например, для верхнего предела. Сначала рассмотрим случай, когда x_n ограничена сверху. Пусть

$$y_k = \sup_n \{x_n, \ n \geqslant k\}.$$

Легко понять, что y_k – убывающая последовательность. Значит, по обобщенной теореме Вейерштрасса (2.6), она имеет предел. Кроме того, если x_{n_k} – подпоследовательность последовательности x_n, имеющая предел, то

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ x_{n_k} \leqslant y_{n_k} \ \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

где последнее равенство верно в силу леммы (2.8). Если мы построим подпоследовательность x_n, сходящуюся к $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то теорема будет доказана. Для чисел $n \in \mathbb{N}$, используя свойства (1.19) верхней грани, подберем числа k_n так, что

$$y_n - \frac{1}{n} < x_{k_n} \leqslant y_n, \quad k_n > k_{n-1}.$$

Теперь утверждение следует из теоремы о сжатой переменной.

Если x_n не ограничена сверху, то доказательство вытекает из дополнения к теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9). $\square$

Замечание 2.24. *Отметим, что в доказательстве есть пояснение к тому, почему верхний предел часто обозначают как* $\limsup$*, а нижний как* $\liminf$*. Мы показали, что, например, в случае ограниченности* x_n *сверху*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \sup_n \{x_n,\ n \geqslant k\},$$

что и есть верхний предел. Даже больше, можно написать в этом случае, опираясь на убывание y_k*, что*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \{x_n,\ n \geqslant k\} = \inf_k \sup_n \{x_n,\ n \geqslant k\}.$$

Такие же формулы (с естественными изменениями) можно написать и в случае ограниченности x_n *снизу, проделайте это самостоятельно.*

Замечание 2.25. *В качестве заключительного замечания отметим без доказательства, наверное, интуитивно понятный, но не потребующийся нам в дальнейшем критерий существования предела последовательности.*

Последовательность x_n *имеет предел (может быть, равный* $\pm\infty$*) тогда и только тогда, когда* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Заинтересованные читатели могут попробовать доказать этот критерий самостоятельно.

2.10. Критерий Коши

В этом, заключительном разделе, касающемся предела последовательности, мы обсудим важнейший критерий существования конечного предела – критерий Коши. В тех или иных нотациях он будет встречаться нам во время всего курса анализа.

Сначала разберемся с интуицией. Что можно сказать про сходящуюся последовательность? Согласно определению предела, задавшись произвольной окрестностью предела, начиная с какого-то момента все члены последовательности находятся внутри этой окрестности, то есть все они находятся равномерно близко друг к другу. Дадим этому формальное определение.

Определение 2.12 (Понятие фундаментальной последовательности). *Последовательность* x_n *называется фундаментальной, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Итак, вроде бы понятно, что сходящаяся последовательность оказывается фундаментальной, а наоборот? А наоборот, как оказывается, нет.

Пример 2.11. *Рассмотрим последовательность*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Мы знаем, что ее пределом является число e, а значит (это пока не доказано, но все же) рассматриваемая последовательность фундаментальна. Однако, e – иррациональное число, хотя рассматриваемая последовательность – это последовательность рациональных чисел.

Значит, с тем же успехом мы могли бы рассматривать не множество $\mathbb{R}$, а множество $\mathbb{Q}$. И в последнем множестве наша последовательность бы тоже была фундаментальной, но предела, из-за дырявости, не имела бы.

Итак, мы снова натыкаемся на то, что многое завязано на аксиоме непрерывности (полноты) множества $\mathbb{R}$.

Теорема 2.10 (Критерий Коши). *Последовательность x_n сходится (в $\mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \;\; |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $n + p > n_0$ и

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - A) + (A - x_n)| \leqslant |x_{n+p} - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

то есть x_n – фундаментальная последовательность.

Достаточность. Пусть x_n – фундаментальная последовательность, $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \; \forall p \in \mathbb{N} \;\; |x_{n+p} - x_n| < 1.$$

В частности, при $n = n_0 + 1$

$$-1 + x_{n_0+1} < x_{n_0+p+1} < 1 + x_{n_0+1},$$

откуда члены последовательности x_n при $n > n_0 + 1$ ограничены числом

$$\max(|-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|).$$

Тогда, положив

$$C = \max(|x_1|, |x_2|, \;\ldots, |x_{n_0+1}|, |-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|)$$

получаем, что

$$|x_n| \leqslant C,$$

то есть фундаментальная последовательность ограничена. По теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9) из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит

$$\exists x_{n_k} : \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = A.$$

Докажем, что пределом последовательности x_n является число A. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу фундаментальности x_n,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$, то

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \ \ |x_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $k_1 > k_0$ таково, что $n_{k_1} > n_0$, тогда при $n > n_0$ имеем

$$|x_n - A| = |(x_n - x_{n_{k_1}}) + (x_{n_{k_1}} - A)| \leqslant |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение. □

Замечание 2.26. *Как полезно проследить, в доказательстве необходимости мы не пользовались никакими отсылками к аксиоме непрерывности. Наши нестрогие рассуждения ранее полностью подтвердились.*

Что касается доказательства достаточности, то мы явно воспользовались теоремой Больцано–Вейерштрасса, которая, как обсуждалось ранее, эквивалентна аксиоме непрерывности.

На практике Критерий Коши часто используется для доказательства того, что предела не существует. Приведем соответствующие примеры.

Пример 2.12. *Важную роль в математическом анализе играет последовательность*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Оказывается, что она не имеет конечного предела. Согласно отрицанию критерия Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n > n_0 \ \exists p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $p = n$, тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} \cdot n\right| = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что для $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ выполнено отрицание критерия Коши, откуда следует, что последовательность предела не имеет.

Можно заметить, что данная последовательность монотонна и имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, равный $+\infty$.

Вернемся к уже обсуждаемому ранее примеру.

Пример 2.13. *Докажем, что последовательность* $x_n = \sin n$ *не имеет предела. Предположим противное, пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = A \in \mathbb{R}$. *Так как*

$$|\sin(n+2) - \sin n| = 2|\sin 1 \cdot \cos(n+1)|$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = A$ *(лемма 2.8), а также так как* $\sin 1 \neq 0$, *то, переходя к пределу в полученном равенстве получаем, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0$. *Значит, аналогично,*

$$\lim_{n\to\infty} \cos n = \lim_{n\to\infty} \cos(n+2) = 0.$$

Так как

$$|\cos(n+2) - \cos n| = 2|\sin 1 \cdot \sin(n+1)|,$$

то, аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0$, *а значит* $A = 0$. *Но это невозможно, ведь*

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1.$$

§3. Предел и непрерывность функции

В этом разделе мы обобщим все то, что получено в предыдущем разделе для последовательности, на произвольные функции, а также разовьем полученный аппарат, применив его к изучению понятия непрерывности функции.

3.1. Определение предела функции по Коши

Перед тем как дать определение предела функции, нам потребуется ввести понятие предельной точки – точки, в которой мы сможем выяснять что-то про предел. Точки, «рядом» с которой есть еще много точек.

Определение 3.1 (Понятие предельной точки). *Точка* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется предельной для множества* $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, *если в любой окрестности* x_0 *содержится бесконечное число элементов множества* E, *то есть*

$$\forall U(x_0) \quad U(x_0) \cap E \quad \textit{бесконечно.}$$

Приведем примеры.

Пример 3.1. *Пусть* $E = [a, b]$. *Множество предельных точек* E *– это весь отрезок* $[a, b]$.

Пусть $E = (a, b)$. *Множество предельных точек* E *– это снова отрезок* $[a, b]$.

Пусть $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. *Множество предельных точек* E *– это множество, состоящее лишь из одного элемента – нуля.*

Замечание 3.1. *Из примеров видно, что предельная точка может как принадлежать рассматриваемому множеству, так и не принадлежать. Более того, без рассмотрения конкретного множества понятие предельной точки бессмысленно. Для нас множеством E как правило будет выступать область определения рассматриваемой функции.*

Теперь наша цель – научиться характеризовать поведение функции сколь угодно близко к интересующей нас точке. Дадим основное определение.

Определение 3.2 (ε–δ определение предела функции). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для E. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A.$$

Снова попробуем пояснить геометрическую подоплеку происходящего.

Замечание 3.2. *Геометрически (рисунок* **??***) определение предела функции означает, что какую бы полосу шириной 2ε ни взять, найдется δ, что при всех x из области определения функции, лежащих в проколотой окрестности $(x_0 - \delta, \ x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, значения функции $f(x)$ лежат в этой полосе. При уменьшении ε ширина рассматриваемой полосы тоже уменьшается, а значение δ, вообще говоря, уменьшается.*

Итак, предел – это то значение, к которому «неограниченно приближаются» значения функции при «неограниченном приближении» аргумента к x_0.

Замечание 3.3. *Здесь же отметим, почему важно, чтобы x_0 была предельной точкой для E. Если это не так, то значение δ можно взять настолько малым, что множество $\{x \in E : \ 0 < |x - x_0| < \delta\}$ будет пустым, а значит никакого «сравнения» значения функции $f(x)$ и A и просто не может быть. Кроме того, это рушит и всю идеологию понятия предела: изучать поведение функции сколь угодно близко к интересующей точке.*

Отметим еще один момент, достойный отдельного замечания.

Замечание 3.4. *Обратите внимание, что при изучении предела само значение $f(x_0)$ никак не участвует, ведь сама точка x_0 в функцию «не подставляется». В частности, значение $f(x_0)$ может и вовсе быть не определено.*

Перед тем, как рассмотреть примеры, приведем уже, в некотором смысле, знакомое нам замечание.

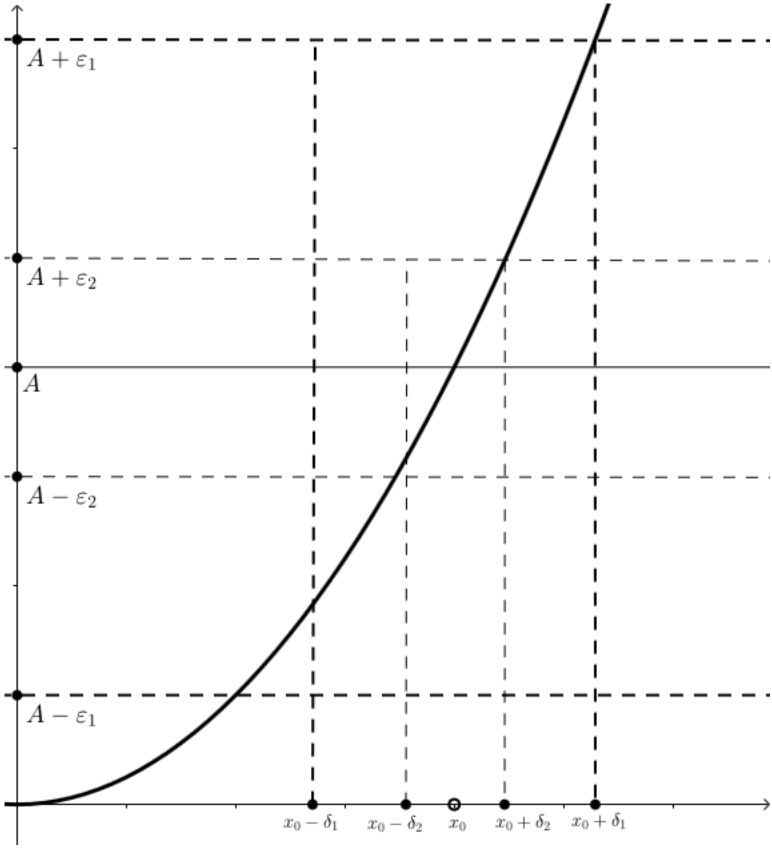

Рис. 2. Предел функции

Замечание 3.5. *Используя понятия окрестности и проколотой окрестности, введенное определение предела можно переписать следующим образом:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Теперь можно дать и такую трактовку понятию предела. Число A – предел функции f в точке x_0, если какую бы ни выбрать (сколь угодно малую) окрестность точки A, найдется проколотая окрестность точки x_0, что все (допустимые) значения функции в точках этой окрестности лежат в окрестности A.

Начнем со стандартного примера.

Пример 3.2. *Доказать, что*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

Пусть $\varepsilon>0$. *Нужно найти те* x, *при которых выполняется неравенство*

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon.$$

Так как $x\neq 2$, *то*

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|<\varepsilon.$$

Значит, если положить $\delta=\varepsilon$, *то при* $0<|x-2|<\delta$ *выполняется*

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon.$$

Замечание 3.6. *Снова отметим несколько важных моментов. Во-первых,* δ *должна найтись для каждого наперед заданного числа* ε, *а не для какого-то конкретного. Во-вторых, если нашлась какая-то* $\delta(\varepsilon)$, *то меньшее значение тоже подойдет в качестве* δ. *Ну и в-третьих, нам не нужно находить максимально возможное число* δ, *нам достаточно найти какое-нибудь.*

Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 3.3. *Доказать, что*

$$\lim_{x\to 3}(x^2-x)=6.$$

Пусть $\varepsilon>0$. *Заметим, что*

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2).$$

Можно предполагать, что $x\in(2,4)$, $x\neq 3$. *Тогда*

$$|(x-3)(x+2)|\leqslant 6|x-3|.$$

Если теперь потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$6|x-3|<\varepsilon,$$

то, выбрав $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{6}\right)$, *при всех* x *таких, что* $0<|x-3|<\delta$, *будет выполняться*

$$|x^2-x-6|\leqslant 6|x-3|<\varepsilon.$$

Конечно, не каждая функция имеет предел.

Пример 3.4. *Рассмотрим функцию*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Докажем, что у этой функции нет предела в точке 0. *Запишем отрицание того факта, что число* A *является пределом введенной функции в нуле:*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in E : 0 < |x - 0| < \delta \quad |\operatorname{sign} x - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$ *и* $x_\delta = -\dfrac{\delta}{2}$, *если* $A \geqslant 0$, *и* $x_\delta = \dfrac{\delta}{2}$, *если* $A < 0$. *Тогда, в любом из двух случаев,*

$$|\operatorname{sign} x - A| \geqslant 1.$$

В то же время легко показать, что, например,

$$\lim_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1.$$

Еще раз обратите внимание на то, что значение предела функции оказалось никак не связанным со значением функции в точке, где вычисляется предел.

Аналогично тому, как было в последовательностях, введем топологическое определение предела или определение через окрестности.

Определение 3.3 (Определение предела через окрестности). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – *предельная точка для* E. *Число* $A \in \mathbb{R}$ *называется пределом функции* f *в точке* x_0, *если*

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A),$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A).$$

Конечно, как и при рассмотрении предела последовательности, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1. *Определения 3.2 и 3.3 эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство вторит доказательству леммы 2.1 и остается в качестве упражнения. □

Конечно, определение предела функции необходимо расширить: как на случай бесконечных пределов, так и на случай бесконечной точки. Все это, конечно, делается также, как делалось ранее: определение через окрестности не меняется, а определение через $\varepsilon - \delta$ переписывается лишь с оговоркой на «правильные» алгебраические выражения для окрестностей бесконечности. Приведем лишь некоторые варианты, остальные введите самостоятельно.

Определение 3.4 (Понятие бесконечных пределов). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E.*

Элемент $-\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Элемент $+\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 = -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x < -\frac{1}{\delta} \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Число A называется пределом функции f в точке $x_0 = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x > \frac{1}{\delta} \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это, соответственно, так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} A.$$

Как и ранее, отметим следующее замечание.

Замечание 3.7. *Введенные определения можно переписать через ε-окрестности $U_\varepsilon(\pm\infty)$ и через окрестности $U(\pm\infty)$, в том числе проколотые, ровно также, как это сделано в определениях 3.2 и 3.3. Утверждение леммы 3.1 сохраняется и в этом случае. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.*

Вместо того, чтобы приводить очередной счетный пример, отметим вот такое связующее замечание.

Замечание 3.8. *Важно понимать, что определение предела последовательности – это частный случай определения предела функции. Так как для последовательности $E = \mathbb{N}$, а элемент $+\infty$ – единственная предельная точка для E, то*

$$\left\{x \in E : x > \frac{1}{\delta}\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\delta}\right\} = \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\},$$

где $n_0 = \min\left(\left\{n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\delta}\right\}\right) - 1$, а последний существует в силу следствия 1.5.2.

В заключение, отметим еще несколько важных замечаний.

Замечание 3.9. *Запись* $\lim\limits_{x \to x_0} x_n = A$ *будет всегда снабжена уточнением: либо* $A \in \mathbb{R}$, *либо* $A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Замечание 3.10. *При записи определения предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что* $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Замечание 3.11. $\varepsilon - \delta$ *определение предела 3.2 часто называют определением «по Коши», отсюда и название пункта*

3.2. Определение предела по Гейне

Несмотря на то, что, как мы выяснили в предыдущем пункте, определение предела последовательности – это частный случай определения предела функции, оказывается, что предел функции можно определить через предел последовательности. Такой подход называется определением предела по Гейне.

Определение 3.5 (Определение предела по Гейне). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *— предельная точка для* E. *Элемент* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *называется пределом функции* f *в точке* x_0, *если* ***для любой*** *последовательности* x_n *такой, что:*

(а) $x_n \in E$.

(б) $x_n \neq x_0$.

(в) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Конечно, было бы неловко называть разные вещи одним и тем же именем, поэтому докажем следующую теорему.

Теорема 3.1 (Об эквивалентности определений предела). *Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Остановимся подробно на случае, когда $x_0, A \in \mathbb{R}$, остальные случаи оставим в качестве упражнения.

Сначала докажем, что если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и в смысле определения по Гейне. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно определению по Коши,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(A).$$

Пусть последовательность x_n из условия. Тогда, по ранее найденному числу $\delta > 0$,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0).$$

Значит, при $n > n_0$
$$f(x_n) \in V_\varepsilon(A),$$
что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. В силу произвольности x_n, утверждение доказано.

Теперь докажем, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Гейне, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Пойдем от противного, пусть не выполнено определение по Коши, то есть
$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E : |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$
Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Тогда, согласно написанному выше, для каждого δ_n
$$\exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_n}(x_0) \cap E : |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$
Построенная последовательность x_n удовлетворяет (по построению) всем условиям, озвученным в теореме. В то же время, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако, так как
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0,$$
то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, то есть не выполнено определение по Гейне. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Определение предела по Гейне часто применяется на практике для доказательства того, что предела не существует. Приведем пример.

Пример 3.5. *Докажем, что не существует предела* $\sin x$ *при* $x \to +\infty$. *Рассмотрим две последовательности:*
$$x_n^1 = 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad x_n^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Обе они удовлетворяют требованиям определения предела по Гейне. В то же время,
$$f(x_n^1) = \sin(2\pi n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad f(x_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$
и, так как пределы между собой не равны, мы делаем вывод, что предела не существует.

3.3. Свойства функций, имеющих предел

Для функций, конечно, справедливы теоремы, аналогичные теоремам для последовательностей. Начнем с локальных свойств: единственность предела, ограниченность в случае конечного предела (правда, теперь лишь в окрестности точки) и сохранение знака. Геометрические подводки остаются ровно такими же, как и в случае последовательностей.

Теорема 3.2 (Локальные свойства функций, имеющих предел). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *тогда:*

(а) *При* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *предел единственен.*

(б) *При* $A \in \mathbb{R}$ *существует окрестность* $\overset{o}{U}(x_0)$ *такая, что в* $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ *функция* $f(x)$ *ограничена.*

(в) *Если* $A \neq 0$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, *то существует окрестность* $\overset{o}{U}(x_0)$ *такая, что в* $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ *знаки* $f(x)$ *и* A *совпадают.*

Доказательство. Докажем первый пункт. От противного, пусть существует два предела $A_1 \neq A_2$ и пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A_1$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A_2$. Однако, в силу единственности предела последовательности (теорема 2.2) $A_1 = A_2$. Приходим к противоречию.

Докажем второй пункт. Пусть $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела функции,

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \;\; |f(x) - A| < 1 \;\Leftrightarrow\; (A - 1) < f(x) < (A + 1),$$

что и означает ограниченность.

Докажем третий пункт. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{|A|}{2}$. Тогда, согласно определению предела,

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \;\; |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \;\Leftrightarrow\; A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда и следует требуемое. Случай $A \in \overline{\mathbb{R}}$ остается в качестве упражнения. □

Отметим одно замечание.

Замечание 3.12. *В рамках условий доказанной теоремы, в пункте б) можно выдвинуть и следующее утверждение:*

При $A \in \mathbb{R}$ *существует окрестность* $U(x_0)$ *такая, что в* $U(x_0) \cap E$ *функция* $f(x)$ *ограничена.*

Справедливость этого высказывания предлагается проверить самостоятельно.

3.4. Арифметические свойства пределов

Теорема об арифметических свойствах пределов и мотивируется, и поясняется ровно также, как это было сделано в последовательностях. Приведем сразу ее расширенный вариант.

Теорема 3.3 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$). *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, *тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в* $\overline{\mathbb{R}}$, *то:*

(а) *Предел суммы равен сумме пределов, то есть*

$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$

(б) *Предел произведения равен произведению пределов, то есть*

$$f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} AB.$$

(в) *Если* $g(x) \neq 0$ *в некоторой* $\overset{o}{U}(x_0)$, *то предел частного равен частному пределов, то есть*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Используя определение предела по Гейне, доказательство этой теоремы сводится к применению соответствующей теоремы (2.2) для последовательностей.

Докажем первое утверждение. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения предела по Гейне. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Значит, по уже упомянутой теореме (2.2) для последовательностей,

$$f(x_n) + g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + B.$$

В силу произвольности x_n это означает, что

$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$

Доказательство остальных пунктов остается в качестве упражнения. □

3.5. Предельный переход в неравенствах

Аналогично тому, как было сделано в случае последовательностей, изучим двусторонние связи: как неравенство между функциями влияет на неравенство между пределами, и наоборот. Следуя уже известной логике, сначала разберемся со вторым вопросом.

Теорема 3.4. *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $A < B$. *Тогда*

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) < g(x).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы (2.3) для последовательностей и остается в качестве упражнения. $\square$

Из этой теоремы моментально получается интересующее нас следствие – предельных переход в неравенствах.

Следствие 3.4.1 (Предельный переход в неравенствах). *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

(а) *Если* $f(x) > g(x)$ *на* E, *то* $A \geqslant B$.

(б) *Если* $f(x) \geqslant g(x)$ *на* E, *то* $A \geqslant B$.

Доказательство. Доказательство этого следствия можно либо провести непосредственно, как в случае последовательностей (следствие 2.3.1), либо воспользоваться тем же самым следствием и определением предела по Гейне. $\square$

Конечно, нельзя не отметить следующее замечание.

Замечание 3.13. *В первом пункте следствия нельзя утверждать, что* $A > B$. *Например, для функций* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *и* $g(x) = 0$ *при* $x > 0$ *выполняется* $f(x) > g(x)$, *однако* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3.6. Теорема о сжатой переменной

Теорема о сжатой переменной – удобное достаточное условие существование предела. Естественно, оно переносится и на функции.

Теорема 3.5 (О сжатой переменной). *Пусть* $f, g, h : E \to \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ *на* E *и* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Доказательство. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Согласно последнему, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$. По теореме о сжатой переменной для последовательностей (2.4) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = A.$$

В силу произвольности последовательности x_n, теорема доказана. $\square$

3.7. Предел монотонной функции

Аналогично теореме Вейерштрасса для последовательностей и всему вокруг нее (см. соответствующий пункт), можно доказать аналогичную теорему и для функций. Перед этим, однако, введем необходимые определения.

Определение 3.6 (Понятия возрастания и убывания функции). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция f возрастает на E, если*

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Говорят, что что функция f убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Говорят, что функция f строго убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Определение 3.7. *Про возрастающую (строго возрастающую, убывающую, строго убывающую) функцию также говорят, что она монотонна.*

Теперь докажем теорему о пределе монотонной функции. Так как рассматривая предел функции в точке x_0 нам, вообще говоря, можно по-разному подбираться к x_0 (в отличие от предела последовательности на бесконечности), формулировка теоремы станет более тяжеловесной, но не менее геометричной.

Теорема 3.6 (О пределе монотонной функции). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ – возрастающая (на E) функция, $s = \sup E$ – предельная для E. Тогда*

$$\lim_{x \to s} f(x) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Конечность последнего предела равносильна ограниченности f (на E) сверху.

Доказательство. Пусть написанный предел конечен. Согласно локальным свойствам функций, имеющих предел (3.2), f ограничена в $U(s) \cap E$. Поскольку f – возрастающая на E функция, то это влечет ограниченность f сверху (на E).

Пусть теперь f ограничена сверху и $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно свойству (1.19) супремума,

$$\exists x_0 \in E : \ A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant A.$$

В силу неубывания f на E, при $x > x_0$, $x \in E$, имеем

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant A,$$

что и доказывает утверждение (сравните с доказательством теоремы Вейерштрасса 2.5).

Случай, когда f не ограничена сверху, остается в качестве упражнения. ☐

Замечание 3.14. *Понятно, что аналогичная теорема справедлива для убывающей функции при $x \to i$, где $i = \inf E$ – предельная для E. Настоятельно советуем эту теорему аккуратно сформулировать и доказать.*

Закинем якорь и немного на будущее.

Замечание 3.15. *Разговоры о супремуме и инфимуме E можно заменить на разговоры об одностороннем пределе в любой точке E. Уже сейчас полезно подумать, что значат эти слова. Мы же к этому понятию вернемся через несколько пунктов.*

3.8. Критерий Коши

В этом пункте все, опять-таки, аналогично соответствующему пункту про последовательности. Мы докажем, как и ранее, что существование конечного предела функции в точке равносильно тому, что значения функции в малой окрестности интересующей этой точки лежат очень близко друг к другу. Сформулируем это строго.

Теорема 3.7 (Критерий Коши). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка для E. Тогда*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь $x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, тогда, используя неравенство треугольника,

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Пусть x_n – последовательность, удовлетворяющая условиям определения предела по Гейне. Тогда, в частности,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E.$$

Значит при $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ тем более

$$x_{n+p} \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E,$$

а значит
$$|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon,$$
что означает, что последовательность $f(x_n)$ фундаментальна и, тем самым, согласно критерию Коши для последовательностей (2.10), имеет конечный предел. Тем самым доказано, что для любой последовательности, удовлетворяющей условиям определения предела по Гейне, последовательность $f(x_n)$ сходится.

Осталось показать, что все эти пределы одинаковы. От противного, пусть есть две последовательности x_n^1 и x_n^2, удовлетворяющие условиям определения предела по Гейне, но такие, что
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = A_1 \neq A_2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n^2).$$
Составим смешанную последовательность
$$x_n^3 = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \ \ldots, x_n^1, x_n^2, \ \ldots\},$$
которая, как легко понять, тоже удовлетворяет условиям определения предела по Гейне. С одной стороны, по только что доказанному выше, последовательность $f(x_n^3)$ сходится, а с другой стороны
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{2k-1}^3) = A_1 \neq A_2 = \lim_{k\to\infty} f(x_{2k}^3).$$
Это противоречит утверждению леммы 2.8. Тем самым, теорема доказана полностью. □

3.9. Односторонние пределы

В этом разделе мы обсудим понятие односторонних пределов. Косвенно эти понятия мы уже затрагивали, обсуждая пределы на бесконечностях или теорему о пределе монотонной функции (3.6), но теперь мы коснемся их намного детальнее.

Мотивация к введению понятия предела была такой: хотелось узнать поведение функции в окрестности той или иной точки. Односторонние пределы в некотором смысле обобщают и уточняют это желание. Приведем пример.

Пример 3.6. *Рассмотрим уже обсуждаемую ранее функцию*
$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$
Понятно (пример 3.4), что у нее нет предела в точке ноль. Однако, если мы рассмотрим эту функцию лишь при $x > 0$, либо при $x < 0$, то ситуация изменится радикально: пределы будут 1 и -1, соответственно. Наверное, сложно

не согласиться, что такая характеристика поведения функции куда более информативна, чем вывод, что предела в нуле нет. Аналогичные рассуждения применимы и к функции $\frac{1}{x}$, опять-таки, в нуле. Подумайте, что там так или не так.

Обозначив проблему, предложим и ее решение, введя понятия односторонних пределов.

Определение 3.8 (Понятие правостороннего предела). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для множества $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$.*

Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 справа, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$.

Определение 3.9 (Понятие левостороннего предела). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$.*

Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 слева, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$.

Отметим и следующее замечание.

Замечание 3.16. *Мы видим, что здесь мы требуем, чтобы x_0 была «односторонней» предельной точкой для области определения функции. Это мотивируется теми же соображениями, что были выдвинуты нами ранее при рассмотрении понятия предела.*

Более того, мы допускаем, что A может быть элементом расширенного множества вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}}$, но требуем, чтобы точка x_0 была числом, то есть элементом $\mathbb{R}$. Все дело в том, что понятие предела при $x \to \pm\infty$ и так, по сути, является понятием одностороннего предела (вспомните, как там определяется окрестность!).

Кроме того, понятия односторонних пределов могут быть переписаны и через произвольные окрестности, и через определение по Гейне (с необходимыми изменениями), и все это приведет к эквивалентным понятиям. Мы не будем останавливаться на этом детально, но предлагаем читателю восстановить канву и понять, что за необходимые изменения надо провести, чтобы все утверждения и определения были четкими.

Отметим и еще одно замечание, касающееся, скорее, жаргона, а не сути.

Замечание 3.17. *На практике и в текстах часто применяют следующие обозначения:*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0).$$

Более того, иногда пишут $x \to x_0\pm$ *вместо* $x \to x_0 \pm 0$.

Приведем примеры.

Пример 3.7. *Рассмотрим функцию*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Ясно, что

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1, \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Пример 3.8. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x}}.$$

Так как при $x \to 0+0$ *имеет место равенство*

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

то легко понять (из школьных соображений), что

$$\lim_{x\to 0+0} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Аналогично, так как

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

то легко понять, что

$$\lim_{x\to 0-0} 5^{\frac{1}{x}} = 0.$$

В терминах односторонних пределов можно привести и следующий, напрашивающийся, критерий существования предела функции в точке.

Теорема 3.8 (Критерий существования предела через односторонние). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}$ *— предельная точка для множеств*

$$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

В частности,

$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то есть $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. Аналогично,

$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Докажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta_1 \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Аналогично,

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta_2 \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда выполнены оба неравенства, а значит

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

что и доказывает утверждение. □

Отметим и такое необременительное замечание.

Замечание 3.18. *Если x_0 – не предельная точка ровно для одного из множеств U_- или U_+, то теорема тоже остается верной. В этом случае понятие предела в точке x_0 само по себе становится понятием одностороннего предела. Это касается и пределов на бесконечностях.*

Если x_0 – не предельная точка ни для иножества U_-, ни для множества U_+, то понятия предела в точке x_0, ровно как и понятий односторонних пределов, не существует и вовсе.

3.10. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

В этом пункте мы не обсудим ничего нового, но введем некоторую порцию новых, полезных для дальнейшего понятий, а так же свойств, связанных с этими понятиями.

Начнем с понятия бесконечно малой функции.

Определение 3.10 (Понятие бесконечно малой функции). *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Итак, бесконечно малая в точке x_0 функция – это та функция, предел которой (а не значение!) в этой точке равен нулю. Почти аналогичным образом вводится понятие бесконечно большой функции.

Определение 3.11 (Понятие бесконечно большой функции). *Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} |\beta(x)| = +\infty.$$

Естественно задаться вопросом о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций. Он решается легко, при помощи следующей леммы.

Лемма 3.2 (О связи бесконечно большой и бесконечно малой функций). *Пусть $\beta(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда*

$$\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$$

– бесконечно малая при $x \to x_0$.

Обратно, пусть $\alpha : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \alpha(x) \neq 0.$$

Тогда

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

— бесконечно большая при $x \to x_0$.

Доказательство. Доказательство этих соотношений можно провести непосредственно (сделайте это!), а можно воспользоваться теоремой 3.3. □

Отметим теперь свойства бесконечно малых функций.

Лемма 3.3. *Пусть $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые при $x \to x_0$, тогда:*

(а) Функция $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

(б) Функция $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

(в) Если функция $\theta : E \to \mathbb{R}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, то функция $\alpha(x)\theta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство. В силу арифметических свойств пределов (2.2), в доказательстве нуждается только третий пункт приведенной леммы.

Согласно условию,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |\theta(x)| \leqslant C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 < \delta : \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap E \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C+1}.$$

Тогда, при $x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap E$ выполняется

$$|\theta(x)\alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. $\square$

Приведем пример.

Пример 3.9. *Вычислить предел*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$*, как мы знаем, не существует. В то же время,* $|\sin x| \leqslant 1$ *при* $x \in \mathbb{R}$*, а значит функция* $\sin x$ *является ограниченной. Кроме того,* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$*, значит функция* $\dfrac{1}{x}$ *является бесконечно малой при* $x \to +\infty$*. Тогда, согласно доказанной лемме,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Отметим еще и один критерий существования конечного предела функции, полезный для нас в дальнейшем.

Теорема 3.9 (Критерий существования конечного предела в терминах б.м.). *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$*,* x_0 *— предельная для* E*, тогда*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ *— бесконечно малая при* $x \to x_0$*.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$ приходим к определению того, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ и, в то же время, представление $f(x) = A + \alpha(x)$.

Докажем достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

$\square$

3.11. Понятие непрерывности функции

Понятие предела позволило понять что-то о поведении функции рядом с интересующей нас точкой. А что, если это поведение сравнить со значением функции в самой точке? Казалось бы, если рядом с точкой происходит то же самое, что в точке, то график функции можно рисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Такое свойство называется свойством непрерывности, на нем основывается огромное количество наших дальнейших построений.

Дадим общее «топологическое» определение непрерывности.

Определение 3.12 (Понятие непрерывности функции). *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если*

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

Прежде чем пояснить данное определение еще раз, приведем следующее замечание.

Замечание 3.19. *Естественно, приведенное определение может быть переписано и на языке $\varepsilon - \delta$, и на языке соответствующих окрестностей.*

Предполагая, что $E \subset \mathbb{R}$, факт непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0 записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Или так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(f(x_0))$$

Или, наконец, так:

$$\forall V_\varepsilon(f(x_0))\ \exists U_\delta(x_0) : f\left(U_\delta(x_0) \cap E\right) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$$

Эквивалентность этих определений проверяется так же, как эквивалентность различных определений предела, и остается в качестве упражнения.

Теперь перейдем к пояснению введенного понятия.

Замечание 3.20. *Мы не зря в конце предыдущего определения уже заговорили про предел. Ведь то, что написано – ну очень на него похоже. И правда, мы хотим, чтобы, взяв сколь угодно малую окрестность вокруг значения $f(x_0)$ функции f в точке x_0, нашлась окрестность точки x_0, что все значения функции в (допустимых) точках из этой окрестности лежали в выбранной окрестности $f(x_0)$.*

Чем это отличается от предела? И мало, и много чем. Во-первых, теперь мы не требуем того, чтобы точка x_0 была предельной для области определения E. Это, как легко понять, дает нам автоматическую непрерывность функции во всех непредельных точках ее области определения. Во-вторых, окрестность точки x_0 теперь не проколотая. Но это не удивительно, ведь мы сравниваем значения f рядом с точкой x_0 со значением в точке x_0.

Итак, важно понять, что теперь, в отличие от наших предыдущих разговоров про предел, решается несколько иная задача. Правда, понятие предела здесь очень даже при чем.

Зафиксируем уже анонсированную ранее связь понятий предела и непрерывности.

Лемма 3.4 (Связь непрерывности и предела). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.*

Для того чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ была непрерывной в точке x_0, предельной для E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если точка x_0 не является предельной для E, то f непрерывна в x_0.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим первое утверждение. Докажем необходимость. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, предельной для E, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

В частности,

$$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

Тем самым, мы пришли к тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Докажем достаточность. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

Так $f(x_0) \in V(f(x_0))$, то на самом деле выполняется и то, что

$$\forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)),$$

и мы приходим к факту непрерывности $f(x)$ в точке x_0.

2. Теперь докажем второе утверждение. Если x_0 не является предельной точкой для множества E, то существует окрестность $U(x_0)$, не содержащая других, кроме x_0, точек из E. А тогда если $\varepsilon > 0$, то

$$x \in U(x_0) \cap E \ \Rightarrow (x = x_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. $\square$

Приведем примеры.

Пример 3.10. *Рассмотрим в качестве функции тождественную константу, то есть $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Докажем, что она непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда неравенство*

$$|c - c| < \varepsilon$$

справедливо для любого $\delta > 0$ и любой точки x_0, что и завершает доказательство.

Аналогичным образом можно показать, что функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, ведь неравенство

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

верно как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Обобщим теперь непрерывность функции в точке на непрерывность на множестве.

Определение 3.13 (Понятие функции, непрерывной на множестве). *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $D \subset E$, если она непрерывна в каждой точке множества D.*

Обозначается это так: $f \in C(D)$.

Поясним введенное определение.

Замечание 3.21. *С точки зрения геометрии, непрерывность функции, например, на отрезке $[a, b]$ может трактоваться так: график функции на этом отрезке можно нарисовать не отрывая ручки от бумаги.*

Кстати, непрерывные функции, и только они перестановочны с операцией взятия предела, ведь только для них

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0),$$

где последний переход справедлив в силу доказанной выше непрерывности функции x.

Буква C в обозначении непрерывной функции идет от слова «continuous».

Конечно, не все функции являются непрерывными. Примерам и обсуждению «проблемных» функций и будет посвящен следующий блок.

3.12. Классификация точек разрыва

Рассмотрим ситуации, которые возможны в случае, когда функция не непрерывна. Для начала дадим «разумное» определение точке разрыва.

Определение 3.14. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная для E и f не непрерывна в точке x_0, то точка x_0 называется точкой разрыва для функции f.*

Итак, точками разрыва функции $f : E \to \mathbb{R}$ мы будем называть даже те точки, в которых функция не определена, но только если они являются предельными для области определения E. Точки, в которых функция не определена «вообще» к точкам разрыва, конечно, не относятся.

Если в точке x_0 произошел разрыв, то интересным оказывается выяснить его причину, то есть посмотреть на то, что происходит слева и справа от x_0, конечно, по возможности. Значит, классификация разрывов опирается на поведение односторонних пределов. Чтобы дальнейший рассказ был логичным, сначала охарактеризуем непрерывность в терминах односторонних пределов.

Лемма 3.5 (Характеристика непрерывности в терминах односторонних пределов). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная для E. Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству*

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0).$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

Доказательство. Эта лемма – комбинация леммы 3.4 и теоремы 3.8. □

Замечание 3.22. *Хочется прокомментировать слова «в смысле определения» в формулировке предыдущей леммы. Напомним, что для того, чтобы можно было рассматривать, скажем, левосторонний предел функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке x_0, необходимо, чтобы x_0 была предельной для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : \ x < x_0\}$. Последнее же выполнено не всегда.*

Например, область определения функции $f(x) = \ln x$ – это интервал $(0, +\infty)$, и левосторонний предел в точке 0 не существует не как предел, а как объект как таковой. Правосторонний же предел как объект существует, хотя и равен $-\infty$ и не существует в $\mathbb{R}$, но уже как предел.

В то же время, если x_0 – предельная для E, то она предельная и хотя бы для одного из множеств: $U_-(x_0)$ или $U_+(x_0) = \{x \in E : \ x > x_0\}$.

Приведенная лемма позволяет нам шаг за шагом ухудшать ситуацию с односторонними пределами, а значит и «увеличивать» градус (род) разрыва. Начнем с самой приятной ситуации, которую легко «исправить».

Определение 3.15 (Понятие устранимого разрыва). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке x_0 либо не определено, либо отличается от A, то x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f.*

Приведем пример.

Пример 3.11. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

и точку $x = 3$. Ясно, что $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$, но функция не определена в точке $x = 3$. Тем самым, точка $x = 3$ – это точка устранимого разрыва функции f.

Рассмотрим функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

и точку 0. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1$ и, так как $|\operatorname{sign} 0| = 0$, то точка 0 – точка устранимого разрыва функции $|\operatorname{sign} x|$.

Замечание 3.23. *Понятно, что устранимым разрыв называется не просто так. Переопределив, или определив в условиях данного выше определения функцию f в точке x_0 значением $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ мы добьемся того, что f станет непрерывной в x_0.*

Ухудшим ситуацию и введем следующее определение.

Определение 3.16 (Понятие разрыва 1-ого рода (скачка)). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$, но*

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода или скачком.

Приведем пример.

Пример 3.12. *Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$. Точка $x_0 = 0$, очевидно, является точкой разрыва первого рода функции f, ведь, как мы знаем,*

$$\lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1, \qquad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = 1.$$

Замечание 3.24. *Понятно, что скачком точка x_0 в предыдущем определении названа не просто так. Геометрически, при переходе через точку x_0 значение функции меняется скачкообразно со значения $f(x_0 - 0)$ на значение $f(x_0 + 0)$. Естественно, для этого оба односторонних предела во-первых должны существовать как объекты, а во-вторых быть числами. Исправить разрыв первого рода, не меняя сильно функцию, нельзя. Само значение функции в точке x_0 ни на что не влияет.*

Максимально ухудшим ситуацию и введем теперь уже финальное определение.

Определение 3.17 (Понятие разрыва 2-ого рода). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в $\mathbb{R}$, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.*

Приведем порцию примеров.

Пример 3.13. *Пусть $f(x) = \ln x$. Точка $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = -\infty$.*

Пусть $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$. Точка $x_0 = 0$, опять-таки, точка разрыва второго рода, ведь

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

Во всех приведенных примерах односторонние пределы существуют в $\overline{\mathbb{R}}$. Это, конечно, не всегда так. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

Нетрудно понять, что односторонние пределы в нуле у этой функции не существуют вовсе, а значит $x_0 = 0$ – точка разрыва второго рода функции f.

Отметим следующее замечание.

Замечание 3.25. *Итак, разрыв второго рода – это либо уход функции на бесконечность, либо несуществование хотя бы одного из односторонних пределов даже в $\overline{\mathbb{R}}$. Конечно же, разрыв второго рода просто так не исправить.*

Дадим и еще такое непонятное, но далеко идущее замечание.

Замечание 3.26 (О непрерывности элементарных функций). *А что можно вообще-то сказать про непрерывность функций? Неужели ее надо проверять в каждой точке? Заглянем немного вперед.*

Синус, экспонента, аркфункции и все те стандартные функции, изучаемые в школе, часто называют простейшими. Их сумму, произведение, частное и композицию (в конечном числе) – элементарными. Так вот оказывается верной следующая теорема: все элементарные функции непрерывны на своей области определения. Тем самым, при исследовании функции на непрерывность, имеет смысл рассматривать только те точки, где либо рвется область определения (первый пример в примере 3.11), либо функция теряет элементарность (первый пример в примере 3.12).

Более строго обозначенные факты мы обсудим позже.

3.13. Локальные свойства непрерывных функций

В этом пункте мы снова обсудим локальные свойства. Только теперь не функций, имеющих предел, а непрерывных функций. Так как определение непрерывности функции в точке, предельной для области определения, опирается на понятие предела, то «глобально» ничего нового мы не узнаем, а просто переформулируем уже известные и доказанные факты.

Теорема 3.10 (Локальные свойства непрерывных функций). *Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0, тогда:*

(а) Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности x_0.

(б) Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и $f(x_0)$ совпадают.

Пусть, кроме того, $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0, тогда:

(в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в x_0.

(г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в x_0.

(д) Функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в x_0, если $g(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Первые два пункта доказывается также как соответствующие пункты в локальных свойствах (3.2) функций, имеющих предел, и остаются в качестве упражнения.

Докажем, например, третий пункт. Если x_0 – не предельная точка для E, то функция $f(x) + g(x)$, чья область определения – это множество E, автоматически непрерывна в точке x_0. Если же точка x_0 – предельная точка для E, то, используя определение непрерывности через предел, а также арифметические свойства пределов (3.3), имеем

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0) + g(x_0),$$

что и доказывает непрерывность суммы. Остальные пункты доказываются аналогично и остаются в качестве упражнения. $\square$

Богатейший источник функций – операция композиции. И здесь-то нас ждет что-то новое, но вряд ли удивительное. Коротко, но не совсем строго факт можно сформулировать так: композиция непрерывных функций – непрерывная функция. Приведем соответсвующую теорему.

Теорема 3.11 (О непрерывности композиции). *Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\forall V(g(y_0))\ \exists U(y_0) : \forall y \in U(y_0) \cap E_2 \ \ g(y) \in V(g(y_0)).$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x_0) = y_0$, то по $U(y_0)$

$$\exists W(x_0) : \forall x \in W(x_0) \cap E_1 \ \ f(x) \in U(y_0),$$

и, так как $f : E_1 \to E_2$, то $f(x) \in U(y_0) \cap E_2$, откуда

$$\forall x \in W(x_0) \cap E_1 \ \ g(f(x)) \in V(g(f(x_0))),$$

что и доказывает непрерывность $g(f(x))$ в точке x_0. □

Интересно, что подобной теоремы о, например, пределе композиции, у нас не было. Более того, такой теоремы «напрямую» и не получится.

Замечание 3.27. *Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$, функция $f(x)$ имеет предел в точке $x_0 \in E_1$, равный y_0, а функция $g(y)$ имеет предел в точке y_0. Верно ли, что функция $g(f(x))$ имеет предел в точке x_0?*

Оказывается, что требования только существования предела функции $g(y)$ в точке y_0 недостаточно. Приведем пример. Пусть

$$g(y) = |\operatorname{sign} y|, \quad f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ как произведение бесконечно малой на ограниченную (3.3), а $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$. В то же время, предела $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ не существует. Действительно, пусть

$$x_n^1 = \frac{1}{2\pi n}, \ x_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n^1)) = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n^2)) = 1$, что противоречит определению предела по Гейне.

Исправить сложившуюся ситуацию можно, потребовав, чтобы функция $g(y)$ была непрерывна в точке y_0, при этом дополнительных ограничений на функцию f можно не накладывать. Мы не будем останавливаться на этом подробнее, предложив доказать этот несложный факт в качестве упражнения.

3.14. Глобальные свойства непрерывных функций

Данный пункт будет посвящен не локальным, точечным свойствам непрерывных функций, а глобальным. Эти свойства целиком и полностью опираются, опять-таки, на аксиому непрерывности, и мы постараемся понять почему.

Пример 3.14. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

На множестве $(0, 1)$ *эта функция, будучи непрерывной, не ограничена и не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений. При этом эта функция ограничена в окрестности каждой точки множества* $(0, 1)$ *согласно локальным свойствам непрерывных функций (3.10).*

На множестве $(0.5, 1)$ *эта функция, опять-таки, непрерывна, теперь и ограничена, но все равно не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений.*

На множестве $[0.5, 1]$ *эта функция все также непрерывна, но теперь не только ограничена, но и достигает наибольшего и наименьшего значений.*

Отметим какие-то выводы.

Замечание 3.28. *Мы видим, что непрерывность – не достаточное условие для «хорошего» поведения функции. Кроме как о функции, нужно думать и о множестве, на котором она задана. Чем так сильно, спросите вы, отличается отрезок от интервала? Тем, что он, как говорят, компактен, а именно:*

(а) Он ограничен как подмножество $\mathbb{R}$*.*

(б) Если $x_n \in [a, b]$ *– сходящаяся к* x_0 *последовательность, то* $x_0 \in [a, b]$*.*

В итоге, отрезок «удерживает» в себе предел сходящейся последовательности его элементов. Это снова отсылает нас к вопросу полноты, который мы обсуждали при рассмотрении критерия Коши для последовательности, а значит и к аксиоме непрерывности.

У интервала ни того, ни другого свойства, вообще говоря, нет: интервал может быть неограниченным, но это ладно. Последовательность элементов интервала может сходиться к точке, не лежащей в интервале. Например, для интервала $(0, 2)$ *такой последовательностью будет последовательность* $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Давайте сначала формально обоснуем наши слова про «удержание» отрезком предела сходящейся последовательности его элементов.

Лемма 3.6 (О замкнутости отрезка). *Пусть* $x_n \in [a, b]$ *– сходящаяся последовательность. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b].$$

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Допустим противное, пусть $A \notin [a, b]$. Тогда при $\varepsilon = \min(|a - A|, |b - A|)$ в ε-окрестности точки A нет точек из отрезка $[a, b]$, а значит и членов последовательности x_n, что невозможно согласно, например, пункту 3 леммы 2.2. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса.

Теорема 3.12 (Вейерштрасса). *Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда:*

(а) f ограничена на $[a,b]$.

(б) f достигает на $[a,b]$ наибольшего и наименьшего значений.

Доказательство. Докажем первый пункт. От противного, пусть f, например, не ограничена сверху. Тогда существует (сродни доказательству леммы 2.9) последовательность $x_n \in [a,b]$, что

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Так как x_n ограничена, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9),

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

Согласно лемме 3.6, $x_0 \in [a,b]$. Теперь мы приходим к противоречию с непрерывностью f в точке $x_0 \in [a,b]$: с одной стороны, из непрерывности следует, что

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \in \mathbb{R},$$

а с другой стороны, из леммы 2.8,

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Случай, когда f не ограничена снизу, рассматривается аналогично и остается в качестве упражнения.

Докажем второй пункт. Снова будем доказывать от противного. Пусть, например, супремум не достигается:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x) \neq M \ \text{ при } \ x \in [a,b].$$

Тогда функция

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

положительна на $[a,b]$ и, кроме того, по теореме 3.10, непрерывна на $[a,b]$. Значит, по доказанному в первом пункте, функция $g(x)$ ограничена. Тогда существует число $M_1 > 0$, что $g(x) < M_1$ на $[a,b]$. В то же время, при $x \in [a,b]$

$$\frac{1}{M - f(x)} < M_1 \ \Leftrightarrow \ M - f(x) > \frac{1}{M_1} \ \Leftrightarrow \ f(x) < M - \frac{1}{M_1},$$

что противоречит тому, что $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. $\square$

Замечание 3.29. *Не обойтись и без комментариев, конечно, к первому пункту. Если вдуматься в доказательство, то мы воспользовались всеми теми бонусами отрезка, о которых говорили. Ограниченность отрезка как подмножества $\mathbb{R}$ дает нам возможность воспользоваться теоремой Больцано–Вейерштрасса (2.9) и выделить сходящуюся подпоследовательность. Свойство «удержания» предела, присущее отрезку, позволило воспользоваться непрерывностью функции на отрезке, так как точка x_0 осталась в нем, а не «сбежала».*

Теперь обсудим еще одно важное свойство непрерывных на отрезке функций: принимая на отрезке два любых значения, они принимают на этом отрезке и все промежуточные значения. Однако, сначала обсудим геометрически понятную теорему о корне: непрерывная на отрезке функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, должна в какой-то точке отрезка обратиться в ноль.

Теорема 3.13 (Первая теорема Больцано–Коши). *Пусть $f \in C[a,b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда*

$$\exists c \in (a,b) : f(c) = 0.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Обозначим $a_1 = a$, $b_1 = b$. Разделим отрезок $I_1 = [a_1, b_1]$ пополам точкой

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Если $f(c_1) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_1) \neq 0$, то либо $f(c_1) > 0$, либо $f(c_1) < 0$. Из получившихся двух отрезков выберем тот, на концах которого значения функции все также имеют разный знак. Это значит, что в первом случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[c_1, b]$, а во втором случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[a, c_1]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_2 и b_2.

Продолжаем по индукции. Если построен отрезок $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$, то на шаге $n \geqslant 2$ разделим отрезок I_{n-1} пополам точкой

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Если $f(c_{n-1}) = 0$, то доказательство закончено. Если $f(c_{n-1}) \neq 0$, то либо $f(c_{n-1}) > 0$, либо $f(c_{n-1}) < 0$. В первом случае в качестве отрезка I_n выберем отрезок $[c_{n-1}, b_{n-1}]$, а во втором случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[a_{n-1}, c_{n-1}]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_n и b_n.

Так как $a_n, b_n \in [a,b]$, то по теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9)

$$\exists a_{n_k} : a_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} a_0, \quad \exists b_{n_k} : b_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} b_0,$$

причем $a_0, b_0 \in [a, b]$, что следует из леммы 3.6. Так как длина отрезка I_1 на каждой итерации уменьшается в два раза, то

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

откуда $a_0 = b_0 = x_0 \in [a, b]$. Пользуясь непрерывностью f на $[a, b]$, имеем:

$$f(a_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0), \quad f(b_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0).$$

Так как, по построению, $f(a_{n_k}) > 0$, $f(b_{n_k}) < 0$, то, по теореме о предельном переходе в неравенствах (3.4.1),

$$(f(x_0) \geqslant 0) \ \wedge \ (f(x_0) \leqslant 0) \ \Rightarrow \ f(x_0) = 0,$$

и теорема доказана. □

Замечание 3.30. *Обратите внимание, как мы снова использовали все свойства, присущие отрезку, речь о которых велась в самом начале данного пункта.*

Полезно отметить и следующее. Доказательство теоремы оказалось весьма конструктивным. Предложенный метод поиска корня уравнения $f(x) = 0$ называется дихотомией или методом половинного деления.

Из доказанной теоремы легко получается интересующий нас, упомянутый ранее, факт – теорема о промежуточных значениях.

Теорема 3.14 (Вторая теорема Больцано–Коши). *Пусть $f \in C[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$. Тогда*

$$\forall C \in (A, B) \ \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

Доказательство. Пусть $C \in (A, B)$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - C.$$

Во-первых, эта функция непрерывна на $[a, b]$ как разность непрерывных функций. Во-вторых,

$$g(a) = A - C < 0, \quad g(b) = B - C > 0.$$

Значит, согласно первой теореме Больцано–Коши (3.13),

$$\exists c \in (a, b) : g(c) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) - C = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) = C,$$

что и доказывает теорему. □

Снова повторим, что доказанный нами факт говорит о том, что непрерывная функция, принимая на отрезке какие-то два значения, принимает на этом же отрезке и все промежуточные значения.

Еще одна характерная особенность непрерывных функций – способность сохранять промежуток. Для начала разберемся с понятием последнего.

Определение 3.18 (Понятие промежутка). *Отрезок, интервал, полуинтервал или луч с концами $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ называется промежутком и обозначается $\langle a, b \rangle$.*

Оказывается, на прямой промежуток характеризуется следующим образом: вместе с любыми двумя точками он содержит и отрезок с концами в этих точках. Иными словами – промежуток, и только он – выпуклое в $\overline{\mathbb{R}}$ множество.

Лемма 3.7 (Характеристика промежутка). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ – промежуток.

(б) Если $a, b \in E$, $a < b$, то $[a, b] \subset E$.

Доказательство. Второе утверждение моментально следует из первого, если только вспомнить определение промежутка. Докажем встречное утверждение.

Пусть $M = \sup E$, $m = \inf E$. Ясно, что $E \subset [m, M]$. Покажем, что $(m, M) \subset E$. Действительно, если $z \in (m, M)$, то, согласно свойству точных граней (см., например, лемму 1.19),

$$\exists x, y \in E : \quad x < z < y.$$

Тогда, по условию, $[x, y] \subset E$, а значит $z \in E$, что и доказывает утверждение. □

Полезно отметить, что непрерывные функции обладают свойством «сохранения» промежутков. Точнее это свойство может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 3.15 (О сохранении промежутка). *Пусть $f \in C(\langle a, b \rangle)$. Тогда*

$$f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle, \quad m = \inf_{\langle a,b \rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b \rangle} f.$$

Доказательство. Пусть $E = f(\langle a, b \rangle)$. Согласно второй теореме Больцано–Коши (3.14), если $y_1, y_2 \in E$, $y_1 \leqslant y_2$, то $[y_1, y_2] \subset E$. Тем самым, по только что доказанной лемме, E – промежуток, что завершает доказательство. □

Замечание 3.31. *Заметим, что тип промежутка при непрерывном отображении, вообще говоря, может не сохраняться. Так, например, непрерывная функция $y = \sin x$ отображает что интервал $(0, 3\pi)$, что полуинтервал $(0, 2\pi]$, в отрезок $[-1, 1]$. Впрочем, совсем уж «всяких» вариантов быть не может.*

Отрезки множества $\mathbb{R}$ обладают особым свойством.

Лемма 3.8 (Непрерывный образ отрезка). *Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$. Тогда*

$$f([a, b]) = [m, M], \quad m = \min_{\langle a,b \rangle} f, \quad M = \max_{\langle a,b \rangle} f.$$

Доказательство. Согласно теореме о сохранении промежутка (3.15),

$$f([a,b]) = \langle m, M\rangle, \quad m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f$$

В то же время, согласно теореме Вейерштрасса (3.12), образ отрезка содержит максимальный и минимальный элементы. Эти рассуждения завершают доказательство. ☐

Заметим вскользь, что упомянутые в доказательстве наибольшее и наименьшее значения функции вовсе не обязаны достигаться на концах отрезка. В то же время, следующее, на наш взгляд идейное замечание, выделим отдельно.

Замечание 3.32. *Теорема о сохранении промежутка не допускает прямого обращения. Например, разрывная в точке $x = 1$ функция*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in (1,2] \end{cases}$$

образом области определения имеет отрезок $[0,1]$.

В то же время, если наложить на функцию требование монотонности, то теорема о сохранении промежутка обращается. И правда, если и только если монотонная функция не непрерывна, то ее образ не является промежутком.

Теорема 3.16 (Критерий непрерывности монотонной функции). *Пусть f – монотонная на $\langle a,b\rangle$ функция. Тогда:*

(а) f не может иметь разрывов второго рода.

(б) Непрерывность f равносильна тому, что множество ее значений – промежуток.

Доказательство. Пусть, например, f возрастает.

1. Докажем первый пункт. Пусть $x_0 \in (a,b\rangle$, $x_1 \in \langle a, x_0)$. В силу возрастания f, имеем

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0), \quad x \in (x_1, x_0).$$

По теореме Вейерштрасса (3.6), f имеет предел при $x \to x_0 - 0$. Согласно теореме о предельном переходе в неравенствах (3.4.1),

$$f(x_1) \leqslant f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0).$$

Аналогично доказывается, что для $x_0 \in \langle a,b)$, $x_1 \in (x_0, b\rangle$

$$f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0) \leqslant f(x_1).$$

Тем самым, установлено существование (в $\mathbb{R}$) односторонних пределов, что и доказывает утверждение.

2. Докажем второй пункт. В силу теоремы о сохранении промежутка (3.15), в доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть $f(\langle a, b\rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность f в любой точке $x_0 \in (a, b\rangle$ слева. Если это не так, то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0).$$

Пусть $y \in (f(x_0 - 0), f(x_0))$. Тогда, если $x_1 \in (a, x_0)$, то

$$y \in [f(x_1), f(x_0)] \subset f(\langle a, b\rangle),$$

а значит y – значение функции. Но, как показано в доказательстве первого пункта,

$$f(x) \leqslant f(x_0 - 0) < y, \quad x \in (a, x_0),$$
$$f(x) \geqslant f(x_0) > y, \quad x \in [x_0, b\rangle,$$

а значит f не принимает значение y, что приводит к противоречию. Аналогичным образом доказывается непрерывность f в каждой точке множества $\langle a, b)$ справа. □

Теперь мы готовы доказать теорему об обратной функции. Для обратимости функции важна ее биективность, а простой способ удовлетворить биективности – потребовать строгую монотонность. В этом случае обратная функция, конечно, окажется тоже строго монотонной, с тем же характером монотонности. Если же исходная функция, к тому же, непрерывна, то это свойство унаследует и обратная функция.

Теорема 3.17 (Об обратной функции). *Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и строго монотонна,*

$$m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Справедливы следующие утверждения:

(а) $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ – биекция.

(б) f^{-1} строго монотонна и имеет тот же характер монотонности, что и f.

(в) $f^{-1} \in C(\langle m, M\rangle)$.

Доказательство. Будем считать, что f строго возрастает.

1. Докажем первый пункт. В силу строгого возрастания f,

$$(x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \wedge (x_1 < x_2) \;\Rightarrow\; (f(x_1) < f(x_2)),$$

откуда f – инъекция. То, что $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$ следует из теоремы о сохранении промежутка (3.15). Итого, f – биекция между указанными множествами.

2. Докажем второй пункт. Пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, $y_1 < y_2$. Тогда, так как $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, то $x_1 < x_2$ в силу строгого возрастания f.

3. Докажем третий пункт. Его утверждение следует из теоремы 3.16. □

3.15. Первый замечательный предел

В этом пункте мы докажем равенство, которое называется первым замечательным пределом. Будем пользоваться школьным (наивным) определением синуса. Подробнее о возникающих проблемах поговорим в разделе про построение простейших функций.

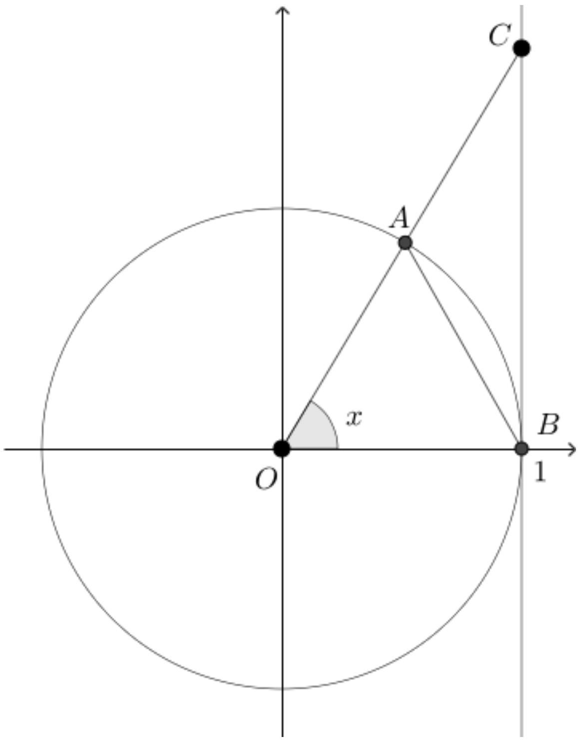

Рис. 3. Первый замечательный предел

Теорема 3.18 (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. Пусть $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Построим (рисунок 3) единичную окружность с центром в начале координат, а также ось тангенса – ось CB. Из геометрических соображений очевидно неравенство

$$S_{\triangle OAB}<S_{\text{сект. } OAB}<S_{\triangle OCB}.$$

Вычислив все эти площади, придем к соотношениям

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_{\text{сект. } OAB} = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{x}{2},$$

$$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot OB = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

которые приводят к цепочке неравенств

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \;\Leftrightarrow\; \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Замечание 3.33. *Прямо здесь, внутри доказательства, отметим попутно установленное неравенство*

$$\sin x < x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

или, учитывая нечетность функций x *и* $\sin x$, *то, что* $\sin 0 = 0$, *и область значений синуса,*

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поделив упомянутую ранее цепочку на $\sin x$, и приняв во внимание четность входящих в нее функций, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Перейдем к пределу в этом неравенстве при $x \to 0$ и докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$|\cos x - 1| = |\cos x - \cos 0| = \left|2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}\right| \leqslant \left|2 \sin \frac{x}{2}\right| < 2 \left|\frac{x}{2}\right| = |x| < \varepsilon.$$

Взяв $\delta = \varepsilon$, приходим к определению предела. Тем самым, по теореме о сжатой переменной (3.5),

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

откуда и следует утверждение. □

В доказательстве попутно был установлен следующий важный факт. Вынесем его отдельно.

Следствие 3.18.1. *Справедливо неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.16. Непрерывность элементарных функций

До сих пор мы обсуждали свойства непрерывных функций, но так толком и не обсудили непрерывность функций, которыми на практике пользуемся мы: степенная, тригонометрические, и другие. В этом достаточно объемном и трудоемком разделе мы определим так называемые простейшие функции. Начнем с формальности.

Определение 3.19 (Понятие простейших функций). *Основными элементарными функциями, или простейшими функциями, называются следующие функции:*

(а) Постоянная или

$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(б) Степенная или

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(в) Показательная или

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

(г) Логарифмическая или

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

(д) Тригонометрические или

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = \operatorname{ctg}(x).$$

(е) Обратные тригонометрические или

$$f(x) = \arcsin x, \quad f(x) = \arccos x, \quad f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f(x) = \operatorname{arcctg} x.$$

По сути, нам надо построить каждую из функций, описать ее область определения, и, в итоге, исследовать на непрерывность.

3.16.1 Постоянная функция

Областью определения постоянной функции

$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

является множество $\mathbb{R}$. При этом, как уже было установлено в примере 3.10, она непрерывна на $\mathbb{R}$.

3.16.2 Степенная функция: начало

Целью этого и еще одного последующего пункта будет определить и исследовать степенную функцию – функцию вида

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Будем постепенно усложнять вид степени α.

В случае, когда $\alpha = 1$, функция $f(x) = x$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$ (пример 3.10).

Для $\alpha \in \mathbb{N}$ по определению положим

$$x^n = x \cdot \ldots \cdot x.$$

Согласно теореме о локальных свойствах непрерывных функций (3.10), построенная функция определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Для $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, по определению положим

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Эта функция непрерывна на своей области определения, опять-таки, согласно теореме 3.10.

При $\alpha = 0$ положим $x^0 = 1$, если $x \neq 0$. Однако, удобным бывает доопределить функцию в нуле по непрерывности и считать $0^0 = 1$.

Замечание 3.34. *Отметим в замечании несколько свойств построенной функции.*

При нечетном $n \in \mathbb{N}$ функция x^n возрастает, причем

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} x^n = -\infty, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} x^n = +\infty.$$

Значит, по теореме 3.15, область значений функции x^n в рассматриваемом случае – это $\mathbb{R}$.

При четном $n \in \mathbb{N}$ функция x^n возрастает при $x \geqslant 0$, причем

$$\inf_{x \geqslant 0} x^n = 0, \quad \sup_{x \geqslant 0} x^n = +\infty.$$

Значит, по теореме 3.15, область значений функции x^n в рассматриваемом случае – это $[0, +\infty)$.

Замечание делалось, чтобы определить функцию $x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, как обратную к функции x^n. Итак,

$$x^{1/n} = (x^n)^{-1}.$$

Тем самым,

$$x^{1/n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad n \text{ нечетно},$$
$$x^{1/n} : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad n \text{ четно}.$$

Согласно теореме об обратной функции (3.17), рассматриваемая функция $x^{1/n}$ непрерывна и возрастает на своей области определения.

Замечание 3.35. *Вместе с обозначением $x^{1/n}$ для только что введенной функции, мы часто будем использовать и обозначение $\sqrt[n]{x}$. Обозначения будем считать эквивалентными. В частности, обозначения мотивируют и несколько «жаргонное» название введенной функции – корень n-ой степени.*

Отметим следующие важные свойства корня.

Лемма 3.9 (О свойствах корня). *Пусть $x, y \geqslant 0$ и $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда:*

(а) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$.

(б) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$.

(в) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.

(г) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$, $y \neq 0$.

Доказательство. Все свойства немедленно следуют из определения. Докажем, например, первое из них. Пусть $z = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$, тогда $z^n = \sqrt[m]{x}$ и $z^{nm} = x$, откуда $z = \sqrt[nm]{x}$.

Доказательство остальных свойств предлагается в качестве упражнения. □

Замечание 3.36. *Понятно, что предыдущая лемма справедлива и при $x, y < 0$ лишь только написанные корни существуют.*

Теперь введем рациональную степень. Пусть $p/q \in \mathbb{Q}$ – несократимая дробь. Определим функцию

$$x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$$

для всех таких x, для которых правая часть имеет смысл. Итого, областью определения введенной функции является:

(а) При нечетном q – множество $\mathbb{R}$.

(б) При $p/q > 0$ – множество $[0, +\infty)$.

(в) При $p/q \geqslant 0$ – множество $(0, +\infty)$.

Легко понять, что по теореме о непрерывности композиции (3.11), введенная функция непрерывна на области определения. Кроме того, она возрастает на $[0, +\infty)$ при $p/q \geqslant 0$ и убывает на $(0, +\infty)$ при $p/q < 0$.

Замечание 3.37. *Число p/q часто называется показателем степени.*

Отметим следующие свойства введенной функции, хорошо известные, но не факт, что обоснованные в школе.

Лемма 3.10 (О свойствах степени с рациональным показателем). *Пусть $x, y \geqslant 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Тогда:*

(а) $x^{-r_1} = \dfrac{1}{x^{r_1}}$.

(б) $x^{r_1}x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$.

(в) $(x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$.

(г) $x^{r_1}y^{r_1} = (xy)^{r_1}$.

Доказательство. Доказательство этих свойств происходит сразу из определений. Например, если $r_1 = p_1/q_1$, то, пользуясь свойствами корней (лемма 3.9),

$$x^{-r_1} = x^{-p_1/q_1} = \left(x^{-p_1}\right)^{1/q_1} = \sqrt[q_1]{x^{-p_1}} = \sqrt[q_1]{\frac{1}{x^{p_1}}} = \frac{1}{\sqrt[q_1]{x^{p_1}}} = \frac{1}{x^{r_1}}.$$

Если $r_2 = p_2/q_2$, то, аналогично,

$$x^{r_1}x^{r_2} = \sqrt[q_1]{x^{p_1}}\,\sqrt[q_2]{x^{p_2}} = \sqrt[q_1 q_2]{x^{p_1 q_2}}\,\sqrt[q_1 q_2]{x^{p_2 q_1}} =$$

$$= \sqrt[q_1 q_2]{x^{p_1 q_2 + p_2 q_1}} = x^{\frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}} = x^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}} = x^{r_1+r_2}.$$

Доказательство остальных свойств предлагается в качестве упражнения. □

Замечание 3.38. *Понятно, что только что доказанная лемма справедлива и при $x, y < 0$ лишь только написанные функции определены.*

Для случая иррационального показателя степени построение проведем несколько позже.

3.16.3 Показательная функция

Пусть $0^x = 0$ для $x > 0$. Пусть $a > 0$. Цель данного пункта — определить a^x для $x \in \mathbb{R}$. Пока что значение a^x определено лишь при $x \in \mathbb{Q}$.

Начнем со следующих, во многом уже известных, свойств.

Лемма 3.11 (О свойствах почти показательной функции). *Пусть $r, s \in \mathbb{Q}$, $a, b > 0$. Тогда*

(а) $a^{r+s} = a^r a^s$.

(б) $(a^r)^s = a^{rs}$.

(в) $(ab)^r = a^r b^r$.

(г) Если $r < s$, то $a^r < a^s$ при $a > 1$ и $a^s < a^r$ при $0 < a < 1$.

Доказательство. Первые 3 свойства уже доказаны в лемме 3.10. Докажем последнее свойство. Пусть $x, y > 0$, $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^n < y^n), \quad (x = y) \Leftrightarrow (x^n = y^n).$$

Значит, если $a > 1$, то и $a^{1/n} > 1$. Действительно, допустив, что $a^{1/n} \leqslant 1$, согласно только что проведенным рассуждениям получим, что $a = (a^{1/n})^n \leqslant 1^n = 1$. Аналогично, если $m \in \mathbb{N}$, то $a^{m/n} > 1$, а тогда, если $r < s$, то

$$a^s = a^{s-r}a^r > a^r.$$

Случай $a \in (0,1)$ рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения. $\square$

Дадим основное определение.

Определение 3.20 (Понятие показательной функции). *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. По определению положим*

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

При $a > 0$, $a \neq 1$, полученная функция называется показательной функцией с основанием a.

Замечание 3.39. *Описанная в определении последовательность рациональных чисел существует. Например, можно рассмотреть последовательность*

$$r_n = \frac{[10^n x]}{10^n}.$$

Она, кстати, обладает и еще одним свойством – она возрастающая.

Конечно, введенное определение пока что носит совершенно неправомерный характер. Для того, чтобы обосновать его корректность, необходимо доказать, что написанный предел существует, не зависит от последовательности r_n, и что для рациональных x новое определение совпадает со старым. Начнем осуществлять намеченный план с доказательства следующей леммы.

Лемма 3.12. *Пусть $a > 0$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1.$$

Доказательство. В лемме 2.8 было доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, \quad a > 0.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{1/n}} = 1, \quad a > 0.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$, $a > 1$. Тогда, используя монотонность (лемма 3.11) и сказанное выше, найдется номер n_0, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Так как $r_n \in Q$ – сходящаяся к нулю последовательность, но, начиная с некоторого номера n_1,

$$-\frac{1}{n_0} < r_n < \frac{1}{n_0},$$

а значит, снова пользуясь монотонностью, для $n > n_1$

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{r_n} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Если $a \in (0, 1)$, то $1/a > 1$ и, по доказанному,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/a)^{r_n}} = 1.$$

Случай $a = 1$ очевиден, так как $1^{r_n} = 1$. □

Итак, мы доказали корректность определения функции a^x в нуле. Воспользуемся этим для доказательства корректности определения и в других точках $\mathbb{R}$.

Лемма 3.13. *Пусть $a > 0$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность a^{r_n} сходится.*

Доказательство. Пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$ и s_n — возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x (существование такой последовательности обосновано в замечании 3.39). Тогда, согласно лемме 3.11, последовательность a^{s_n} возрастает и ограничена сверху, например, числом $a^{[x]+1}$, а значит, по теореме Вейерштрасса (2.5), имеет предел.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = A$ и r_n – последовательность из условия. Тогда, так как $a^{r_n - s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (это следует из леммы 3.12), получим

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} A.$$

Если $a \in (0, 1)$, то $1/a > 1$ и, по доказанному,

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{A}.$$

Случай $a = 1$ очевиден, так как $1^{r_n} = 1$. □

Суммаризируем наши результаты в следующее замечание.

Замечание 3.40. *Доказанная лемма устанавливает корректность определения функции a^x. Во-первых, так как для любой последовательности рациональных чисел предел существует, то он один и тот же (докажите это, посмотрев, в качестве подсказки, на конец доказательства критерия Коши (3.7)). Если же $x \in \mathbb{Q}$, то, положив $r_n = x$, получим, что вновь введенное определение совпадает с ранее введенным.*

Теперь обсудим свойства введенной функции. По сути, будем вторить лемме 3.11 и обобщать ее на вещественный аргумент. Начнем, однако, с монотонности.

Лемма 3.14 (О монотонности a^x). *Если $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, то $a^x < a^y$ при $a > 1$ и $a^y < a^x$ при $0 < a < 1$.*

Доказательство. Пусть $a > 1$, $x < y$. Нужно показать, что $a^x < a^y$. Пусть числа $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ таковы, что

$$x < r_1 < r_2 < y.$$

Рассмотрим последовательности $r_n^1, r_n^2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $r_n^1 < x$, $r_n^2 > y$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^1 = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = y$ (докажите, что такие последовательности существуют, используя, например, замечание 3.39). В силу монотонности функции a^x при рациональном аргументе (лемма 3.11),

$$a^{r_n^1} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_n^2}.$$

Тогда, по теореме о предельном переходе в неравенствах (2.3.1),

$$a^x \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant a^y,$$

что и доказывает утверждение. Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогичным образом и остается в качестве упражнения. $\square$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 3.15. *Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда:*

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

Доказательство. Пусть $r_n^1, r_n^2 \in \mathbb{Q}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^1 = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = y$. Так как (лемма 3.11)

$$a^{r_n^1 + r_n^2} = a^{r_n^1} a^{r_n^2},$$

то, переходя к пределу в этом равенстве, получаем требуемое. $\square$

Теперь докажем непрерывность функции a^x на области определения.

Теорема 3.19 (О непрерывности a^x на $\mathbb{R}$).

$$a^x \in C(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Мы знаем, что согласно лемме 3.12,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$$

Докажем сначала непрерывность в нуле. Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть, кроме того, $a > 1$, а x_n – произвольная последовательность, стремящаяся к нулю. Тогда можно выбрать номер n_0 такой, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Так как $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то найдется номер n_1, что при $n > n_1$

$$-\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}.$$

В силу возрастания функции a^x (лемма 3.14),

$$1-\varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{x_n} < a^{1/n_0} < 1+\varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/a)^{x_n}} = 1.$$

Если $a = 1$, то непрерывность очевидна, так как $1^{x_n} = 1$.

Непрерывность в произвольной точке x_0 следует из непрерывности в нуле, так как

$$a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0.$$

$\square$

Продолжим изучение свойств функции a^x в следующей лемме.

Лемма 3.16. *Пусть* $x, y \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Доказательство. Пусть $r_n^1, r_n^2 \in \mathbb{Q}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^1 = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = y$. Согласно лемме 3.11,

$$(a^{r_n^1})^{r_m^2} = a^{r_n^1 r_m^2}.$$

Пусть m фиксировано, а $n\to\infty$. По определению функции a^x,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n^1} = a^x, \quad \lim_{n\to\infty} a^{r_n^1 r_m^2} = a^{x r_m^2}$$

В силу непрерывности степенной функции с рациональным показателем,

$$\lim_{n\to\infty} (a^{r_n^1})^{r_m^2} = a^{x r_m^2}.$$

Остается устремить $m\to\infty$ и воспользоваться непрерывностью функции a^x. $\square$

Отметим замечание, которое разрешит вопросы корректности вычисления пределов, в которых возникает неопределенность вида 1^∞.

Замечание 3.41. *Рассуждения, которые приведены в доказательстве предыдущей леммы позволяют обосновать переход, который часто совершается на практике при использовании второго замечательного предела. Переход такой: если* $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\alpha_n \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}\left((1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}\right)^{\alpha_n\beta_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n}.$$

Заключительное алгебраическое свойство введенной функции отметим в следующей лемме.

Лемма 3.17. *Пусть* $a, b > 0$ *и* $x \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогичным предыдущему образом и остается в качестве упражнения. $\square$

Теперь отметим заключительное свойство показательной функции – отметим ее область значений.

Лемма 3.18 (О биективности показательной функции). *Показательная функция – биекция между* $\mathbb{R}$ *и* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Функция a^x строго возрастает, причем $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Действительно, эти пределы существуют в силу строгого возрастания функции a^x, а заявленные равенства следуют из того, что ($a = 1+\alpha$, $\alpha > 0$), согласно неравенству Бернулли,

$$a^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

По теореме о сохранении промежутка (3.15), область значений – это промежуток $\langle 0, +\infty)$. В то же время, значение 0 не принимается, так как, в силу строгого возрастания (лемма 3.14), если $a^{x_0} = 0$, то при $x < x_0$ должно быть $a^x < 0$, что невозможно.

Случай $a \in (0, 1)$ рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения. $\square$

3.16.4 Логарифмическая функция

В этом пункте мы введем понятие и изучим свойства логарифмической функции. Конечно, опираться мы будем на построенную и вдоль и поперек изученную показательную функцию.

Определение 3.21 (Понятие логарифмической функции). *Функция, обратная к показательной функции* $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, *называется логарифмом с основанием* a *и обозначается* $\log_a x$.

Сразу отметим следующее замечание.

Замечание 3.42. *Введенное определение корректно в силу леммы 3.18. Мы видим, что область определения логарифма – промежуток* $(0, +\infty)$*, а основание логарифма может принимать значения* $a > 0$*,* $a \neq 1$*, в силу определения показательной функции. Логарифм осуществляет биекцию между* $(0, +\infty)$ *и* $\mathbb{R}$.

Следующая теорема освещает основные качественные свойства логарифмической функции.

Теорема 3.20 (О непрерывности логарифмической функции). *Функция* $\log_a x$ *непрерывна на области определения, строго возрастает при* $a > 1$ *и строго убывает при* $a \in (0, 1)$*. Кроме того,*

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}, \quad \lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из теоремы об обратной функции (3.17) и свойств показательной функции. □

Конечно, те соотношения, которые давались в школе, теперь можно не просто сформулировать, но и обосновать.

Лемма 3.19 (Некоторые свойства логарифмов). *Пусть* $x, y > 0$*,* $p \in \mathbb{R}$*. Тогда:*

(а) $a^{\log_a x} = x$.

(б) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

(в) $\log_a x^p = p \log_a x$.

(г) $\log_{a^p} x = \dfrac{1}{p} \log_a x$, $p \neq 0$.

(д) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Доказательство. Все сформулированные свойства доказываются одинаково, используя свойства показательной функции. Например, так как

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy,$$

то $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Доказательство остальных свойств остается в качестве упражнения. □

Отметим такое вот внезапное, но концептуальное замечание.

Замечание 3.43. *Посмотрите, например, на третье соотношение. В нем присутствует выражение x^p, где $x > 0$, $p \in \mathbb{R}$. Не то ли это в точности, что мы ищем? Не так ли мы будем определять степенную функцию с вещественным показателем степени? На самом деле, именно так, и сделаем мы это уже в следующем пункте.*

Чтобы как-то логично завершить данный пункт, дадим следующее определение.

Определение 3.22. *Логарифм по основанию e часто называют натуральным логарифмом и обозначают $\ln x$. Логарифм по основанию 10 иногда называют десятичным логарифмом и обозначают $\lg x$.*

3.16.5 Степенная функция: окончание

Перед нами остался незакрытым вопрос определения функции x^α при $\alpha \in \mathbb{I}$. Так как при всех $x > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо представление (оно установлено в предыдущем пункте, лемма 3.19)

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

то это и логично принять за определение степенной функции с вещественным показателем. Из этого определения сразу следует, что x^α непрерывна при $x > 0$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $\alpha \in \mathbb{I}$, то

$$x^\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad \alpha > 0,$$

$$x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty), \quad \alpha < 0.$$

Отметим, что при $\alpha > 0$ непрерывность x^α в нуле сохраняется, ведь

$$\lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 0+0} e^{\alpha \ln x} = 0.$$

Замечание 3.44. *Отдельно подчеркнем, что нет какого-то единого соглашения, связанного с определением степенной функции. Некоторые авторы считают, что функция x^α определена только при $x > 0$, чтобы избежать ситуаций вроде*

$$1 = ((-1)^2)^{1/4} = (-1)^{2/4} = (-1)^{1/2}.$$

Некоторые оговаривают ситуацию, когда α – целое, отдельно. Некоторые различают символы $x^{1/n}$ и $\sqrt[n]{x}$, считая, что первый определен при $x > 0$, а второй – при всех. Мы тоже «возились» с определением в начале нашего рассказа, но избрали другой подход – определять степень на максимально возможном множестве, и не делать лишних различий.

3.16.6 Тригонометрические функции

Здесь, ранее и далее мы пользовались и будем пользоваться «школьным» определением косинуса и синуса как абсциссы и ординаты точки на единичной окружности, а также всеми выведенными тригонометрическими формулами. Полнота такого определения зависит от строгости введения понятия соответствия между точками числовой прямой и точками единичной окружности (углы, повороты, и проч.). Не пытаясь закрыть этот пробел сейчас, отметим, что формальное определение дать, конечно, возможно, и один из вариантов сделать это в вещественном случае – привлечь теорию интегралов или теорию рядов.

Приведем основные результаты.

Теорема 3.21 (О непрерывности синуса и косинуса). *Функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *непрерывны при* $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем непрерывность синуса. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant |x-x_0| < \varepsilon$$

как только $\delta = \varepsilon$. Предпоследний переход справедлив в силу следствия 3.18.1.

Непрерывность косинуса можно доказать аналогичным образом, а можно воспользоваться представлением

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

и теоремой о непрерывности композиции (3.11). □

Из доказанной теоремы немедленно вытекает следующее следствие.

Следствие 3.21.1. *Функции*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

непрерывны на своей области определения.

Доказательство. Доказательство сразу следует из теоремы о локальных свойствах непрерывных функций (3.10). □

3.16.7 Обратные тригонометрические функции

Несмотря на то, что обратные тригонометрические функции обычно изучаются в школе, студенты часто путают области определений, области значений, характер поведения этих функций. Поэтому в этом разделе мы не просто проговорим про непрерывность этих функций, но и дадим этим функциям определение.

Функция $\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не является обратимой, так как каждое свое значение она принимает более одного раза (даже бесконечное число раз). Однако, функция $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, возрастает, а поэтому обратима.

Определение 3.23 (Понятие арксинуса). *Пусть* $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. *Обратная к данной функции функция называется арксинусом и обозначается* $\arcsin x$, *то есть*

$$\arcsin x = \alpha \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \sin \alpha = x, \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Сразу же отметим свойства рассматриваемой функции.

Теорема 3.22 (О непрерывности акрсинуса). *Функция* $\arcsin x$ *возрастает и непрерывна на своей области определения.*

Доказательство. Доказательство немедленно следует из непрерывности синуса и теоремы 3.17. □

Функция $\cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не является обратимой, однако функция $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, убывает, а поэтому обратима.

Определение 3.24 (Понятие арккосинуса). *Пусть* $\cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. *Обратная к данной функции функция называется арккосинусом и обозначается* $\arccos x$, *то есть*

$$\arccos x = \alpha \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \cos \alpha = x, \\ \alpha \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Сразу же отметим свойства рассматриваемой функции.

Теорема 3.23 (О непрерывности арккосинуса). *Функция* $\arccos x$ *убывает и непрерывна на своей области определения.*

Доказательство. Доказательство немедленно следует из непрерывности косинуса и теоремы 3.17. □

Функция $\operatorname{tg} x$ не является обратимой, однако функция $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, возрастает, а поэтому обратима.

Определение 3.25 (Понятие арктангенса). *Пусть* $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$. *Обратная к данной функции функция называется арктангенсом и обозначается* $\operatorname{arctg} x$, *то есть*

$$\operatorname{arctg} x = \alpha \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = x, \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Сразу же отметим свойства рассматриваемой функции.

Теорема 3.24 (О непрерывности арктангенса). *Функция* $\operatorname{arctg} x$ *возрастает и непрерывна на своей области определения.*

Функция $\operatorname{ctg} x$ не является обратимой, однако функция $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, убывает, а поэтому обратима.

Определение 3.26 (Понятие арккоттангенса). *Пусть* $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$. *Обратная к данной функции функция называется арккоттангенсом и обозначается* $\operatorname{arcctg} x$*, то есть*

$$\operatorname{arcctg} x = \alpha \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha = x, \\ \alpha \in (0, \pi) \end{cases}.$$

Сразу же отметим свойства рассматриваемой функции.

Теорема 3.25 (О непрерывности арккотангенса). *Функция* $\operatorname{arcctg} x$ *убывает и непрерывна на своей области определения.*

3.16.8 Непрерывность элементарных функций

Теперь дадим понятие элементарной функции.

Определение 3.27. *Функция, получающаяся в результате конечного числа применений операций сложения, умножения, деления и композиции к простейшим функциям, называется элементарной.*

Важнейшим следствием всего того, что проделано в этом пункте, является следующая теорема.

Теорема 3.26 (О непрерывности элементарных функций). *Элементарные функции непрерывны на своей области определения.*

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием теоремы о локальных свойствах непрерывных функций 3.10, теоремы о непрерывности композиции 3.11, а также свойств построенных в этом пункте простейших функций. $\square$

3.17. Второй замечательный предел

Обобщим введенный ранее второй замечательный предел с последовательности на функции.

Теорема 3.27 (Второй замечательный предел).

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Функция

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

определена при $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Пусть $x_n \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$, $|x_n| \to +\infty$. Достаточно показать, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = e$.

1. Пусть, сначала, $x_n \in \mathbb{N}$ и пусть $\varepsilon > 0$. Используя определение числа e, имеем:

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \ |f(k) - e| < \varepsilon.$$

Так как $x_n \in \mathbb{N}$, то $x_n \to +\infty$ и

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ x_n > k_0,$$

а значит для тех же n

$$|f(x_n) - e| < \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

2. Пусть теперь $x_n \to +\infty$. Тогда, начиная с некоторого номера, $x_n > 1$. Не нарушая общности можно считать, что x_n всегда больше 1. Очевидна цепочка неравенств

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1},$$

которая переписывается в виде

$$\frac{f([x_n]+1)}{1 + \dfrac{1}{[x_n]+1}} \leqslant f(x_n) \leqslant f([x_n])\left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right).$$

Так как $[x_n] + 1$ и $[x_n]$ – последовательности натуральных чисел, стремящиеся к $+\infty$, то, по доказанному в предыдущем пункте, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f([x_n]+1) = e, \quad \lim_{n\to\infty} f([x_n]) = e,$$

а значит, по теореме о сжатой переменной (2.4), $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

3. Пусть $x_n \to -\infty$. Можно считать, что $x_n < -2$. Если положить $y_n = -x_n$, то $y_n \to +\infty$. Так как

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right) f(y_n - 1)$$

и, по доказанному в предыдущем пункте, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n - 1) = e$, приходим к требуемому.

4. Наконец, пусть $|x_n| \to +\infty$, $x_n \in \mathbb{R}\backslash[-1, 0]$. Если число отрицательных (положительных) членов последовательности x_n конечно, то $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$). Если же количество положительных и отрицательных членов последовательности бесконечно, то натуральный ряд разбивается на две подпоследовательности n_k и n_p так, что $x_{n_k} \geqslant 0$, $x_{n_p} < 0$. По доказанному,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}) = e.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда
$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad |f(x_{n_k}) - e| < \varepsilon,$$

$$\exists p_0 : \forall p > p_0 \quad |f(x_{n_p}) - e| < \varepsilon.$$

Положим $n_0 = \max(n_{k_0}, n_{p_0})$. Тогда при $n > n_0$ либо $n = n_k$ при $k > k_0$, либо $n = n_p$ при $p > p_0$, а тогда
$$|f(x_n) - e| < \varepsilon,$$
то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$. □

По своей сути, доказанная теорема – это наш давний долг из замечания 2.19 – далеко идущее обобщение 2 замечательного предела в классическом (для последовательностей) понимании.

3.18. Следствия из замечательных пределов

В этом пункте мы обсудим важные следствия из первого и второго замечательных пределов. Приведем эти следствия как список лемм и начнем со следствий из первого замечательного предела.

Лемма 3.20.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Доказательство. Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

где в последнем равенстве используется первый замечательный предел и непрерывность функции $\cos x$. □

Лемма 3.21.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Доказательство. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Так как $x \to 0$ и функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна, то $y \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = 1$$

по только что доказанному. □

Отметим следующее замечание, касающееся проведенной замены.

Замечание 3.45. *Замена, проведенная в доказательстве выше, требует обоснования. Пусть* $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*,* $x_n \neq 0$*. Нужно вычислить*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}.$$

Обозначим $y_n = \operatorname{arctg} x_n$*. В силу непрерывности функции* $\operatorname{arctg} x$*, последовательность* y_n *стремится к* 0*. Кроме того, так как* $x_n \neq 0$*, то и* $y_n \neq 0$*. Тогда*

$$\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}.$$

Последний предел, как показано выше, равен 1*, а значит для любой последовательности* y_n *такой, что* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$*,* $y_n \neq 0$ *выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n} = 1.$$

Тем самым, выполнено определение по Гейне и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Аналогичный результат получим, если заменить $\operatorname{arctg} x$ на $\arcsin x$.

Лемма 3.22.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Пусть $y = \sin x$. Так как $x \to 0$ и функция $\sin x$ непрерывна, то и $y \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$

Обоснование замены проводится аналогичным замечанию 3.45 образом. □

Еще одну популярную неопределенность показывает следующий предел.

Лемма 3.23.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Домножив числитель и знаменатель на $(1+\cos x)$ и воспользовавшись первым замечательным пределом и непрерывностью функций x^2 и $\cos x$, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

□

Теперь обсудим следствия из второго замечательного предела.

Лемма 3.24.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Доказательство. Пусть $y = \dfrac{1}{x}$, тогда $|y| \to +\infty$ и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{|y|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 3.45. □

Лемма 3.25.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Доказательство. В силу соотношения, позволяющего заменить основание логарифма (лемма 3.19), достаточно доказать второе равенство. Так как логарифм непрерывен на своей области определения, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

□

Лемма 3.26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{sx} = 1, \quad s\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $y = (1+x)^s - 1$. В силу непрерывности степенной функции, если $x\to 0$, то и $y\to 0$. Кроме того, $\ln(1+y) = s\ln(1+x)$, а значит

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{sx} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{s\ln(1+y)}\,\frac{s\ln(1+x)}{x}\right) = 1.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 3.45. □

Лемма 3.27.
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$
В частности,
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Доказательство. Пусть $y=a^x-1$, откуда $x=\log_a(1+y)$ и при $x\to 0$ выполняется и $y\to 0$. Тогда
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\log_a(1+y)}{y}}=\ln a.$$

Замена обосновывается так же, как и в замечании 3.45. □

Конечно, хочется примеров применения написанных лемм. Но для эффективного использования доказанных фактов нам потребуется понятие эквивалентности. К этому понятию, как и к понятиям локального сравнения функций, мы и переходим.

3.19. Асимптотическое сравнение функций

Цель данного пункта – научиться сравнивать функции локально, в окрестности некоторой точки. Конечно, это хочется делать с использованием изученных понятий, например, понятия предела.

Замечание 3.46. *Наверное, имеет смысл обсудить, что в общем и целом, глобально (хоть и локально :)) может получаться, если мы зададимся целью сравнить поведение двух функций.*

Первое, что напрашивается, наверное, – это желание сказать, что функции «очень похожи». Что это значит? Видимо, что предел их отношения равен 1*. Конечно, к такому смелому выводу нужно подходить с должной аккуратностью, поглядев, например, на функции*
$$f(x)=x+\sin x,\quad g(x)=x,\quad x\to+\infty.$$

Далее, что тоже может оказаться интересным – это сказать, что функции имеют один порядок или отличаются в $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *раз. По сути, это можно интерпретировать так: предел отношения этих двух функций равен числу, отличному от нуля.*

Ну и, конечно, а что же мы можем сказать в случае, когда предел отношения равен 0*? Видимо, что функция в числителе зануляет (имеет больший порядок малости) функцию в знаменателе.*

Вроде бы все так замечательно, но. Функция 0 *– она же очень похожа на* 0*? Вроде бы да. Но отношение нуля к нулю мы, к сожалению, составить не можем. Именно поэтому вводимые определения будут несколько отличаться от того, что мы только что проговорили.*

Итак, введем следующее определение.

Определение 3.28. *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная для E, и существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$ при $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$.*

(а) Если $\alpha(x)$ ограничена на множестве $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «О большое» от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$

(б) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «о малое» от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ бесконечно малая по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

(в) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0.$$

Конечно, такое запутанное определение нельзя оставить без подробных пояснений.

Замечание 3.47. *Первое определение говорит несколько больше, чем фразу «отличаться в α раз». Действительно, оно говорит, что на множестве $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$*

$$|\alpha(x)| \leqslant C \;\Rightarrow\; -Cg(x) \leqslant f(x) \leqslant Cg(x),$$

то есть f лежит в «полосе», образованной функциями $\pm Cg(x)$. Внутри этой «полосы» f может вести себя по-разному, и может не быть в точности α-копией g.

Второе определение говорит, что f «убывает» быстрее, чем g, или что f «растет» медленнее, чем g. К этому «или» надо относиться скептически, ведь, например,

$$\frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to 0,$$

и модули обеих функций идут к $+\infty$.

Третье же определение позволяет, и правда, сравнить даже 0 с 0, сказав, например, что они друг другу эквивалентны.

Теперь мы готовы привести аккуратное соображение, касающееся того, как определить то или иное «отношение» между функциями, используя аппарат пределов. Иными словами, ровно тем способом, с которого мы начали обсуждение данного пункта.

Лемма 3.28. *В обозначениях предыдущего определения, если на множестве* $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ *выполняется* $g(x) \neq 0$, *то:*

(а) $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to x_0$ *равносильно тому, что*

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C, \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E.$$

В частности, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R},$$

то $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to x_0$.

(б) $f(x) = o(g(x))$ *при* $x \to x_0$ *равносильно тому, что*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(в) $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to x_0$ *равносильно тому, что*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Доказательство. 1. Докажем первое утверждение. Пусть $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$. Тогда

$$f(x) = \alpha(x) g(x), \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E,$$

причем $|\alpha(x)| \leqslant C$ при тех же x. Отсюда, в силу возможности «разделить»,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |\alpha(x)| \leqslant C, \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E.$$

Обратное утверждение сразу следует из условия, если обозначить

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Остальные утверждения, как и часть первого утверждения, остаются в качестве упражнения. □

Приведем какой-нибудь пример. Мы помним (лемма 2.5), что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0,\quad a>1.$$

В новых обозначениях это может быть записано так: $n=o(a^n)$, $n\to\infty$, $a>1$. А что можно сказать, если натуральные аргументы заменить вещественными?

Пример 3.15. *Доказать, что*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0,\quad a>1.$$

Действительно, считая, что $x>0$, справедливы неравенства

$$0<\frac{x}{a^x}\leqslant\frac{[x]+1}{a^{[x]+1}}\cdot a.$$

Как мы уже вспомнили (лемма 2.5),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0,\quad a>1.$$

Значит, если $\varepsilon>0$, то найдется номер n_0, что при $n>n_0$ выполняется

$$0<\frac{n}{a^n}<\varepsilon.$$

Так как $x\to+\infty$, то найдется δ, что

$$x>\frac{1}{\delta}\ \Rightarrow\ [x]>n_0,$$

а значит

$$0<\frac{[x]+1}{a^{[x]+1}}\cdot a<a\varepsilon,$$

что и доказывает требуемое.

Конечно, справедливо следующее замечание.

Замечание 3.48. *Используя предыдущий пример, не сложно показать, что $x^s=o(a^x)$ при $x\to+\infty$, $a>1$, $s\in\mathbb{R}$.*

Приведем и еще один пример, закрыв наш давний долг (лемма 2.7).

Пример 3.16. *Доказать, что $\log_a^\alpha x=o(x^s)$ при $x\to+\infty$, $s>0$.*

Пусть $a>1$, тогда достаточно вычислить

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a^\alpha x}{x^s}.$$

Пусть $t=\log_a x$. Ясно, что $t\to+\infty$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a^\alpha x}{x^s}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\alpha}{a^{ts}}=0$$

по только что доказанному. Замена обосновывается так же, как и в замечании (3.45). Случай $0<a<1$ остается в качестве упражнения.

Приведем еще несколько часто встречающихся определений, касающихся классификации бесконечно малых и бесконечно больших. В такой классификации ранее приведенная терминология: «растет быстрее» или «убывает к нулю быстрее» уже становится оправданной.

Определение 3.29. *Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ и функция $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция $g(x)$ при $x \to x_0$.*

Определение 3.30. *Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ и функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то функция $g(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка, чем функция $f(x)$ при $x \to x_0$.*

Теперь обсудим правила обращения с введенными символами o и O. Отметим, что сами по себе они обозначают классы функций, а не конкретные функции, поэтому толкование равенств должно быть максимально осторожным, а точнее – вдумчивым.

Замечание 3.49. *Мы привыкли трактовать равенства так: если справедливо, что «a равно b», то справедливо и что «b равно a». В то же время, с введенными символами такой аналогии не получается. То, что $\sin x = O(x)$, $x \in \mathbb{R}$, вовсе не означает, что $O(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, ведь не всякая функция из $O(x)$ – это $\sin x$.*

Аналогично, так как $x = O(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = O(x)$, $x \in \mathbb{R}$, весьма нелепо заключать, что $x = \sin x$. Отсюда, скажем, следует, что равенства

$$o(x) - o(x) = 0, \quad O(x) - O(x) = 0, \quad x \to x_0,$$

в общем случае просто-напросто неверны. Верными будут, например, такие равенства:

$$o(x) - o(x) = o(x), \quad O(x) - O(x) = O(x), \quad x \to x_0.$$

Описанные «парадоксы» на самом деле связаны лишь только с принятыми обозначениями. Эти обозначения оправданы тем, что они оказываются удобными при написании асимптотических равенств (перенос O- и o-членов через знак равно, и прочее). В то же время, такие договоренности могут (на первый взгляд) сбивать с толку.

Приведем некоторые правила обращения с символами O и o.

Лемма 3.29. *При $x \to x_0$ справедливы равенства:*

(а) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.

(б) $O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$.

(в) $o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$.

(г) $o(f(x))$ является и $O(f(x))$, но не наоборот.

(д) $g(x)o(f(x)) = o(f(x)g(x))$ и $g(x)O(f(x)) = O(f(x)g(x))$.

Доказательство. 1. Докажем первое равенство (точнее – включение). Слева стоит функция вида

$$\alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x),$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые при $x \to x_0$. В силу равенства

$$\alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x) = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))f(x)$$

и того, что $\alpha_1 + \alpha_2$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, приходим к требуемому.

2–5. Данные пункты доказываются аналогичным образом. В пункте 4 имеет смысл воспользоваться тем фактом, что функция, имеющая конечный предел в точке x_0, ограничена в некоторой окрестности этой точки (теорема 3.2) $\square$

Вернемся к понятию эквивалентности функций. В связи с пунктом про следствия замечательных пределов, оформим следующую таблицу.

Замечание 3.50. *При $x \to 0$ справедливы следующие соотношения:*

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+x)^s - 1 \sim sx.$$

На самом деле на практике часто используется следующее обобщение приведенной таблицы.

Теорема 3.28. *Пусть $\beta : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$. Тогда при $x \to x_0$ справедливы следующие соотношения:*

$$\sin \beta(x) \sim \operatorname{tg} \beta(x) \sim \arcsin \beta(x) \sim \operatorname{arctg} \beta(x) \sim \beta(x),$$

$$1 - \cos \beta(x) \sim \frac{\beta^2(x)}{2}, \quad \log_a(1 + \beta(x)) \sim \frac{\beta(x)}{\ln a},$$

$$a^{\beta(x)} - 1 \sim \beta(x) \ln a, \quad (1 + \beta(x))^s - 1 \sim s\beta(x).$$

Доказательство. Докажем, например, что

$$\sin \beta(x) \sim \beta(x), \quad x \to x_0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x = \alpha(x)x$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}(0)$, причем $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 1$. Доопределим функцию $\alpha(x)$ по непрерывности в нуле значением 1. Тогда

$$\sin x = \alpha(x)x, \quad x \in U(0).$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$, то

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad \beta(x) \in U(0).$$

Тогда можно записать равенство

$$\sin \beta(x) = \alpha(\beta(x))\beta(x),$$

справедливое в $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Осталось проверить, что $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(\beta(x)) = 1$. Это немедленно следует из упражнения в замечании 3.27.

Остальные равенства доказываются аналогично. $\square$

Конечно, было бы странно, если бы мы не могли «заменять» одну эквивалентную функцию на другую, например, при вычислении предела. «Заменять» мы можем, конечно, далеко не всегда, и лишь вот в в каком смысле.

Теорема 3.29 (О замене на эквивалентную). *Пусть $f, g, \widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$, $f \sim \widetilde{f}$ при $x \to x_0$. Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} fg = \lim_{x\to x_0} \widetilde{f}g.$$

Доказательство. Так как при $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$ выполняется $f(x) = \alpha(x)\widetilde{f}(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$, то

$$\lim_{x\to x_0} fg = \lim_{x\to x_0} \alpha\widetilde{f}g = \lim_{x\to x_0} \alpha \lim_{x\to x_0} \widetilde{f}g = \lim_{x\to x_0} \widetilde{f}g.$$

$\square$

Приведем примеры использования этой теоремы.

Пример 3.17. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(3x)}{\sqrt{1-x^2}-1}.$$

Логарифм может быть переписан в виде

$$\ln\cos(3x) = \ln(1 + \cos(3x) - 1).$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(3x) - 1) = 0$, то (при $x \to 0$)

$$\ln\cos(3x) \sim \cos(3x) - 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$, то (при $x \to 0$)

$$\cos(3x) - 1 \sim -\frac{9x^2}{2}.$$

Кроме того, так как $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, *то (при* $x \to 0$*)*

$$(1-x^2)^{1/2} - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Согласно теореме о замене на эквивалентную,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(3x)}{\sqrt{1-x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{-\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{9x^2}{2}}{-\dfrac{x^2}{2}} = 9.$$

Покажем, что замена на эквиалентную в сумме может привести к неверному результату.

Пример 3.18. *Пусть требуется вычислить предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

Так как при $x \to 0$ *выполняются соотношения*

$$\ln(1+3x+x^2) \sim (3x+x^2), \quad \ln(1-3x+x^2) \sim (-3x+x^2),$$

то ошибочная выкладка дает

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x+x^2+(-3x+x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Проведем вычисление исходного предела иначе, выполнив следующие преобразования

$$\ln\big((1+3x+x^2)(1-3x+x^2)\big) = \ln(1-7x^2+x^4) \sim (-7x^2+x^4), \quad x \to 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-7x^2+x^4}{x^2} = -7.$$

Причину ошибки мы раскроем ниже.

Отметим следующую важную, сразу следующую из определений, теорему.

Теорема 3.30 (Необходимое и достаточное условие замены на эквивалентную). *Функции* f, g *эквивалентны при* $x \to x_0$ *тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо равенство

$$f(x) = \alpha(x)g(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$. Тогда

$$f(x) - g(x) = g(x)(\alpha(x) - 1),$$

откуда, так как $\lim\limits_{x \to x_0}(\alpha(x) - 1) = 0$, приходим к тому, что $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$.

Докажем достаточность. Пусть $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to x_0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется

$$f(x) - g(x) = \beta(x)g(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$. Отсюда $f(x) = g(x)(1 + \beta(x))$ или $f(x) = g(x)\alpha(x)$, где $\alpha(x) = 1 + \beta(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$. А следовательно, $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. $\square$

Используя доказанную теорему, таблицу эквивалентностей можно переписать следующим образом.

Замечание 3.51. *Пусть* $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$*. Тогда (при* $x \to x_0$*)*

$$\sin\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x)), \quad \operatorname{tg}\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x)),$$

$$\arcsin\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x), \quad \operatorname{arctg}\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x)),$$

$$1 - \cos\beta(x) = \frac{\beta(x)^2}{2} + o(\beta^2(x)), \quad \log_a(1 + \beta(x)) = \frac{\beta(x)}{\ln a} + o(\beta(x)),$$

$$a^{\beta(x)} - 1 = \beta(x)\ln a + o(\beta(x)), \quad (1 + \beta(x))^s - 1 = s\beta(x) + o(\beta(x))$$

Приведем пример использования разработанной техники, например, для вычисления пределов.

Пример 3.19. *Вычислить предел*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} + e^{5x}\operatorname{tg} 3x - 1}{\ln(1 + 3x)}.$$

Используя выведенные соотношения,

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2),$$

откуда

$$\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1 - 2x^2 + o(x^2)} = \left(1 + (-2x^2 + o(x^2))\right)^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-2x^2 + o(x^2)) + o(-2x^2 + o(x^2)) = 1 - x^2 + o(x^2).$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg} 3x = 3x + o(x),$$

$$e^{5x} = 1 + 5x + o(x).$$

Тогда

$$\sqrt{\cos 2x} + e^{5x} \operatorname{tg} 3x - 1 = 1 - x^2 + o(x^2) + (3x + o(x))(1 + 5x + o(x)) - 1 =$$

$$= 3x + o(x).$$

Так как

$$\ln(1 + 3x) \sim 3x,$$

то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} + \operatorname{tg} 3x \cdot e^{5x} - 1}{\ln(1 + 3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x + o(x)}{3x} = 1.$$

Разберем теперь ранее рассмотренный пример.

Пример 3.20. *Вычислить предел*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{x^2}.$$

Мы знаем, что (при $x \to 0$)

$$\ln(1 + 3x + x^2) = (3x + x^2) + o(3x + x^2) = 3x + x^2 + o(x) = 3x + o(x).$$

Аналогично (при $x \to 0$),

$$\ln(1 - 3x + x^2) = -3x + o(x).$$

Итого,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^2},$$

где последний предел неизвестно чему равен. В итоге, точность при расписывании числителя у нас лишь порядка $o(x)$, и оставление каких-то комбинаций x^2 – это не ошибка, но бессмыслица. Подробнее об этом мы будем говорить в разделе, связанным с формулой Тейлора.

3.20. Равномерная непрерывность функции

Наряду с понятием непрерывности функции, в теории часто оказывается полезным понятие равномерной непрерывности функции. Сразу же перейдем к определению.

Определение 3.31 (Понятие равномерной непрерывности). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве $D \subset E$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x, x' \in D : \ |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Конечно, данное определение нуждается в пояснении.

Замечание 3.52. *Чем же так разительно отличается понятие равномерной непрерывности от понятия непрерывности? Приведем их одно над другим, считая, что $f : E \to \mathbb{R}$, $D \subset E$.*

Непрерывность f на D означает следующее:

$$\forall x' \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in D : \ |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Равномерная непрерывность f на D означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x, x' \in D : \ |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Отличие, причем очень существенное, возникает в том, как выбирается δ. При рассмотрении понятия непрерывности δ, на самом деле, зависит не только от ε, но и от рассматриваемой точки x'. В случае же равномерной непрерывности δ оказывается единой сразу «для всех» точек из D.

Это же наблюдение говорит и об отличии в геометрическом смысле. Если непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на этом промежутке может быть нарисован, не отрывая ручки от бумаги, то равномерная непрерывность говорит еще и о том, что функция не может меняться «быстро».

Рассмотрим пример.

Пример 3.21. *Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, очевидно, непрерывна на $(0, 1)$. В то же время, равномерно непрерывной на этом множестве она не является. Почему? Потому что чем ближе мы подходим к точке ноль (справа), тем быстрее изменяется значение функции, и маленькие «шаги» утихомирить это изменение не помогают.*

Действительно, если положить

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x'_n = \frac{1}{2n},$$

то $x_n, x'_n \in (0,1)$, $(x_n - x'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, *но*

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Итак, как мы видим, несмотря на уменьшающуюся длину шага, по мере приближения к точке $x = 0$ *рост функции не только не стабилизируется, но и даже ускоряется.*

Конечно, равномерно непрерывная на множестве функция обязательно оказывается и непрерывной на этом множестве, что моментально следует из определения. Зафиксируем это в следующей лемме.

Лемма 3.30. *Если* f *равномерно непрерывна на* D, *то* f *непрерывна на* D.

Конечно, хочется понять, нет ли какого-то удобного достаточного условия равномерной непрерывности функции.

Замечание 3.53. *Попробуем разобраться в приведенном примере более детально. Казалось бы, равномерной непрерывности мешает неограниченность рассматриваемой функции. Однако, функция* $y = x$, *являющаяся равномерно непрерывной на* $\mathbb{R}$, *тоже оказывается неограниченной.*

Значит, дело не только и не столько в функции, сколько еще и в множестве, на котором эта функция рассматривается. Из-за того, что мы можем подходить сколь угодно близко к «плохой» точке из $\mathbb{R}$, *мы можем провоцировать сколь угодно сильное изменение неограниченной рядом с этой точкой функции.*

Исправить сложившуюся ситуацию снова поможет ограничение на множество – будем рассматривать отрезок.

Теорема 3.31 (Кантора). *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть f непрерывна, но не равномерно непрерывна на $[a, b]$. Значит,

$$\exists \varepsilon_0 : \ \forall \delta \ \exists x, x' \in [a,b] : \ |x - x'| < \delta, \ \text{ но, в то же время, } \ |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, тогда

$$\exists x_n, x'_n \in [a,b] : \ |x_n - x'_n| < \delta_n, \ \text{ но, в то же время, } \ |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Так как $x_n \in [a, b]$, то, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса (2.9), из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0,$$

где $x_0 \in [a,b]$ согласно лемме 3.6. Но тогда

$$(|x_n - x'_n| < \delta_n) \wedge (\delta_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0) \;\Rightarrow\; (x'_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0).$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}),$$

что оказывается несовместимым с неравенством $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

§4. Производная и исследование функции

4.1. Производная и дифференциал

Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Под промежутком $\langle a, b\rangle$ будем понимать отрезок, интервал, полуинтервал или луч с концами a, b. Изложение начнем с понятия производной.

Определение 4.1 (Понятие производной функции). *Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Приведем пример.

Пример 4.1. *Вычислить производную функции $f(x) = 5^{1-3x}$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.*

$$\left(5^{1-3x}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{5^{1-3(x_0+h)} - 5^{1-3x_0}}{h} =$$

$$= 5^{1-3x_0} \lim_{h\to 0} \frac{5^{-3h} - 1}{h} = 5^{1-3x_0}(-3\ln 5).$$

Отметим логичным образом возникающее замечание.

Замечание 4.1. *Приведенный пример показывает, что функция f может иметь производную не только в одной точке x_0, но и на некотором, вообще говоря большем множестве.*

Теперь рассмотрим пример, в котором производная может принимать бесконечные значения.

Замечание 4.2. *Вычислить производную функции* $f(x) = x^{1/3}$ *в точке* $x_0 = 0$.

$$\left(x^{1/3}\right)'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

Неверно, однако, полагать, что если функция определена в некоторой точке, то в этой точке у функции существует производная.

Пример 4.2. *Пусть* $f(x) = |x|$ *и* $x_0 = 0$. *Пусть* $h > 0$, *тогда*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Пусть $h < 0$, *тогда*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

Значит, рассматриваемая функция не имеет производной в точке $x_0 = 0$. *Впрочем, последнее очевидно и геометрически.*

Теперь введем тесно связанное с понятием производной понятие дифференцируемости функции.

Определение 4.2 (Понятие дифференцируемости функции). *Пусть* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. *Функция* f *называется дифференцируемой в точке* x_0, *если существует такое число* A, *что*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad h \to 0.$$

Итак, дифференцируемость функции в точке x_0 – это, в каком-то смысле, возможность приблизить рассматриваемую функцию линейной функцией вблизи x_0.

Замечание 4.3. *Величины*

$$\Delta f(x, h) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta x(h) = (x+h) - x = h,$$

часто называют приращением функции и приращением аргумента, соответственно. Их иногда (правда, не вполне законно), обозначают как $\Delta f(x)$ *и* Δx.

В новой терминологии получается, что функция дифференцируема в точке, если ее приращение в этой точке как функция приращения аргумента h является линейной с точностью до поправки, бесконечно малой при $h \to 0$ в сравнении с приращением аргумента.

Определение 4.3 (Понятие дифференциала). *Линейная по* h *функция* Ah *в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции* f *в точке* x_0 *и обозначается* $df(x_0)$. *В итоге,*

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Отметим и следующее замечание.

Замечание 4.4. *Как следует из определения, для функции $f(x) = x$ выполняется*

$$x_0 + h - x_0 = 1 \cdot h$$

тем самым $dx(h) = h$. Именно поэтому иногда говорят, что дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением.

Учитывая сказанное, выражение для дифференциала можно переписать так:

$$df(x_0)(h) = Adx(h),$$

или, более компактно, но не вполне законно, так:

$$df(x_0) = Adx.$$

Аналогично тому, как было сделано с производной, дифференцируемость можно рассматривать не в точке, а на множестве. В виду важности последнего понятия, выделим его в отдельное определение.

Определение 4.4 (Понятие дифференцируемости на множестве). *Говорят, что функция f дифференцируема на множестве E, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.*

Давайте отметим, где же «скрыта» точка x_0 (или x) в определении дифференциала.

Замечание 4.5. *Если функция f дифференцируема на множестве E, то на этом множестве возникает функция*

$$df(x)(h) = A(x)h = A(x)dx(h),$$

или, опять-таки,

$$df(x) = A(x)dx,$$

и изменение точки x, вообще говоря, меняет A. В итоге, A становится функцией от x.

А можно ли получить информацию об этой функции $A(x)$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.1 (О связи производной и дифференцируемости). *Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. В этом случае $A(x_0) = f'(x_0)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, значит

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle, \quad h \to 0.$$

Поделив на h, получим

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A + o(1).$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получаем, что предел правой части равен A, значит

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A,$$

то есть, согласно определению и введенным обозначениям,

$$f'(x_0) = A = A(x_0).$$

Достаточность. Согласно теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой (3.9), имеем

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle,$$

откуда

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h),$$

то есть функция дифференцируема в точке x_0 и

$$A = A(x_0) = f'(x_0).$$

$\square$

Естественно задаться вопросом: как связаны понятия дифференцируемости и непрерывности. Ответ дается следующей леммой.

Лемма 4.1 (О непрерывности дифференцируемой функции). *Если функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, то она непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. В представлении

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h), \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle, \quad h \to 0,$$

достаточно перейти к пределу при $h \to 0$. Тогда

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) = 0,$$

откуда

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции в точке x_0 (лемма 3.4). $\square$

Здесь же отметим важное замечание.

Замечание 4.6. *Обратное утверждение к только что данному, конечно, неверно. Мы уже это видели, рассматривая пример 4.2.*

Сформулируем и еще одно замечание.

Замечание 4.7. *Конечно, из существования бесконечной производной непрерывность, вообще говоря, не вытекает. Рассмотрим уже знакомую нам (разрывную в нуле) функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$. Несложно понять, что*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sign} h}{h} = +\infty,$$

откуда и следует утверждение.

Раз производная определяется через предел, то оказывается разумным (и полезным с точки зрения геометрии) рассмотреть понятия односторонних производных – односторонних пределов специального вида.

Определение 4.5. *Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Предел*

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется правосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0 + 0)$, $f'_+(x_0)$.

Аналогично, предел

$$\lim_{h \to 0-0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется левосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0 - 0)$, $f'_-(x_0)$.

Пример вычисления односторонних производных нами, на самом деле, уже показан в примере 4.1. Более детально к применению односторонних производных мы обратимся при изучении типов экстремумов. Сейчас же завершим изложение данного пункта следующими замечаниями. Начнем с идейного.

Замечание 4.8. *Понятно, что критерий существования производной можно сформулировать аналогичным тому, как было сделано в случае пределов, образом – через односторонние производные (теорема 3.8). Формулировку теоремы и соответствующих ей ограничений мы оставляем читателю.*

Теперь зафиксируем и следующее техническое замечание.

Замечание 4.9. *В дальнейшем мы часто, но не совсем корректно, приращение h в определении производной и (или) дифференцируемости будем обозначать через Δx. Это приблизит используемые нами обозначения к принятым во многих источниках (опять-таки, не совсем корректным) обозначениям.*

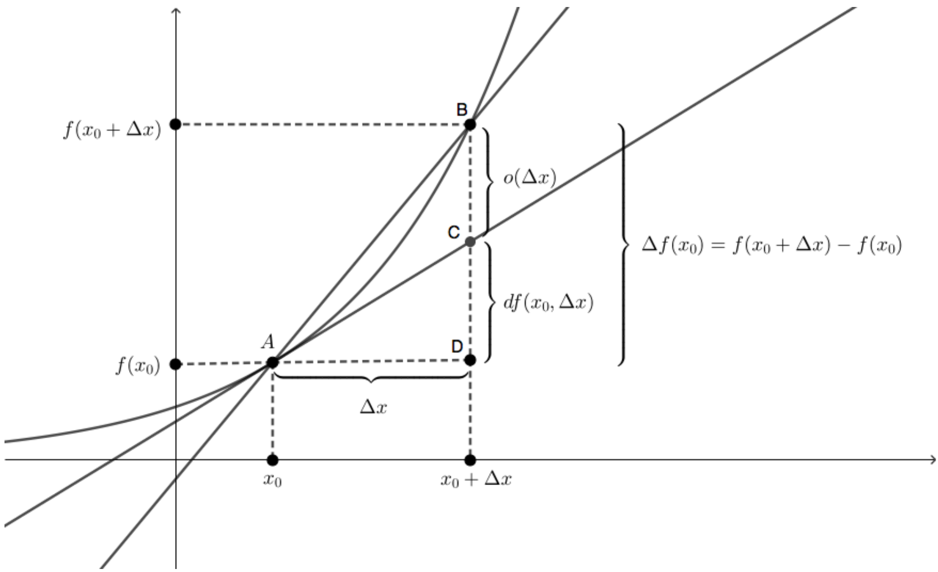

Рис. 4. Касательная и дифференциал

4.2. Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная.

В предыдущем пункте мы полностью сосредоточились на «алгебраическом» и «анализном» смыслах вводимых понятий, ни разу не обратившись к геометрическому смыслу того, что происходит. Роль последнего же трудно переоценить. Оказывается, понятие дифференцируемости тесно связано с понятием касательной.

Замечание 4.10. *Из школьного курса геометрии часто известно следующее понятие касательной (обычно – к окружности): прямая называется касательной (к окружности), если она имеет (с окружностью) единственную общую точку. Такое определение годится (очень условно!), если рассматривается что-то «выпуклое, замкнутое и однопетельное», но не годится в общем случае. Так, прямые* $y = 0$ *и* $x = 0$ *имеют ровно одну общую точку – точку* $(0, 0)$ *– с графиком функции* $y = x^2$ *(последний, кстати, выпуклый), но в качестве касательной разумно рассматривать лишь прямую* $y = 0$.

Посмотрим на рисунок 4. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Проведем секущую AB через точки

$$A = (x_0, f(x_0)), \quad B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)),$$

лежащие на графике функции. На рисунке $\Delta x \geqslant 0$, но, конечно же, это не обязательно так. Устремляя Δx к нулю, точка B будет двигаться (по графику функции) к точке A, а секущая AB будет стремиться занять предельное положение AC. Угловой коэффициент секущей AB равен

$$k_{AB} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}(BAD).$$

В силу дифференцируемости функции f в точке x_0,

$$k_{AC} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{AB} = f'(x_0) = \operatorname{tg}(CAD).$$

Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение 4.6. *Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Предельное положение AC секущей AB графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

Теперь сформулируем лемму об уравнении касательной.

Лемма 4.2 (Об уравнении касательной). *Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказательство. Угловой коэффициент, согласно сказанному выше, равен $k_{AC} = f'(x_0)$. Осталось воспользоваться уравнением прямой с заданным коэффициентом наклона и проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$. $\square$

Отметим несколько важных замечаний.

Замечание 4.11. *Рисунок 4 показывает связь приращения функции, производной этой функции, дифференциала и $o(\Delta x)$. Можно сформулировать следующий геометрический смысл дифференциала: дифференциал есть приращение касательной к графику функции, отвечающее приращению аргумента Δx.*

Отдельно введем понятие вертикальной касательной – касательной в случае, когда $f'(x_0) = \pm\infty$. Чтобы не упереться в казуистические случаи вроде того, что показан в замечании 4.7, придется дополнительно потребовать непрерывность рассматриваемой функции.

Определение 4.7. *Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и $f'(x_0) = \pm\infty$. Прямая $x = x_0$ называется (вертикальной) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

Для иллюстрации последнего определения полезно самостоятельно нарисовать картинку и понять происходящее, скажем, на примере функции $f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 0$.

Замечание 4.12. *Аналогично понятиям односторонних производных, можно ввести понятия односторонних касательных. Односторонние касательные помогают охарактеризовать поведение функции в «проблемных» точках.*

Так, если $f'(x_0-0)$, $f'(x_0+0)$ существуют в $\mathbb{R}$ и различны, то в точке x_0 график функции терпит «излом» (например, $f(x)=|x|$).

Если, например, $f'(x_0-0)=-\infty$, $f'(x_0+0)=+\infty$ и f непрерывна в точке x_0, то в точке x_0 график функции выглядит как «птичка» (например, $f(x)=x^{2/3}$).

Понятно, что описанные ситуации могут комбинироваться. Интересующемуся читателю мы советуем самостоятельно подумать над возможными комбинациями и примерами к ним.

Если хотя бы одной из односторонних производных в точке x_0 нет, то нет и соответствующей односторонней касательной в этой точке.

Отметим и еще одно, асимптотическое замечание.

Замечание 4.13. *Если функция дифференцирема в точке x_0, то*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0), \quad x\to x_0,$$

и последнее представление единственно. Именно поэтому касательную часто называют наилучшим линейным (а вообще-то – афинным) приближением функции в точке x_0.

Вспоминая таблицу эквивалентностей (3.50) и формулы для производных простейших функций, известные из школы, полезно понять, что выведенные нами ранее эквивалентности – это в точности «касательные». Ну, за исключением функции $\cos x$, у которой мы добились большего – асимптотической кривой в виде многочлена второго порядка при $x\to x_0$, задаваемой уравнением

$$y(x)=1-\frac{x^2}{2}.$$

Касательная же оказывается, в некотором смысле, тривиальной – прямой $y=1$.

4.3. Основные правила дифференцирования

В этом разделе мы изучим основные правила дифференцирования: получим формулы для производной суммы, произведения, частного, композиции и обратной функции. Большинство этих формул, скорее всего, известно из школы. Применение доказанных формул мы увидим в следующем пункте.

Теорема 4.2 (О производной суммы, произведения и частного). *Пусть $f,g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, дифференцируемы в точке x_0. Тогда:*

(a) Их сумма дифференцируема в точке x_0 и

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

(б) Их произведение дифференцируемо в точке x_0 *и*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(в) Их частное дифференцируемо в точке x_0 *при условии, что* $g(x_0) \neq 0$, *и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x},$$

причем оба предела конечны.
1. Докажем первый пункт. Так как

$$\Delta(f+g)(x_0) = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) - g(x_0),$$

то

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f+g)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Докажем второй пункт. Так как

$$\Delta(fg)(x_0) = f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0),$$

то

$$(fg)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(fg)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим первый из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} g(x_0 + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = g(x_0)f'(x_0),$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x_0+\Delta x) = g(x_0)$ в силу непрерывности функции $g(x)$ в точке x_0 (лемма 4.1). Теперь рассмотрим второй из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f(x_0)g'(x_0).$$

Тем самым,

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

3. Третий пункт предлагается доказать самостоятельно. □

Из связи производной и дифференциала сразу вытекает следующее следствие.

Следствие 4.2.1 (О дифференциале суммы, произведения и частного). *В условиях предыдущей теоремы справедливы следующие соотношения:*

(а) $d(f+g)(x_0)=df(x_0)+dg(x_0)$.

(б) $d(fg)(x_0)=g(x_0)df(x_0)+f(x_0)dg(x_0)$.

(в) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0)=\dfrac{g(x_0)df(x_0)-f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$, *при* $g(x_0)\neq 0$.

Теперь обсудим теорему о производной композиции.

Теорема 4.3 (О производной композиции). *Пусть* $f:\langle a,b\rangle\to\langle c,d\rangle$, $g:\langle c,d\rangle\to\mathbb{R}$, f *дифференцируема в точке* $x_0\in\langle a,b\rangle$, g *дифференцируема в точке* $y_0=f(x_0)$. *Тогда функция* $g(f)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и*

$$(g(f))'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0).$$

Доказательство. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0.$$

Так как $g(y)$ дифференцируема в точке y_0, то

$$g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=g'(y_0)\Delta y+o(\Delta y),\quad \Delta y\to 0,$$

где в представлении $o(\Delta y)=\alpha(\Delta y)\Delta y$, $\alpha(\Delta y)\xrightarrow[y\to y_0]{}0$, можно считать, что $\alpha(0)=0$.

Положив

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-y_0,$$

можно заметить, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности f (лемма 4.1). Тогда

$$g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) + o(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) =$$

$$= g'(y_0)(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) =$$
$$= g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + g'(y_0)o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)).$$

Так как

$$o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)),$$

то, используя непрерывность α в нуле и утверждение из замечания 3.27 легко убедиться (сделайте это), что

$$g'(y_0)o(\Delta x) + \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

а значит композиция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

□

Как и ранее, отметим следующее следствие.

Следствие 4.3.1 (О дифференциале композиции). *В условиях предыдущей теоремы,*

$$d(g(f))(x_0) = dg(y_0)(df(x_0)).$$

Иными словами, дифференциал композиции – это композиция дифференциалов. Теперь обсудим теорему о производной обратной функции.

Теорема 4.4 (О производной обратной функции). *Пусть функции $f : \langle a,b\rangle \to \langle c,d\rangle$ и $f^{-1} : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ – взаимно обратные, причем f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a,b\rangle$, а f^{-1} непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке y_0, причем*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Необходимо вычислить

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Положим

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0).$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0 и непрерывности обратной функции f^{-1} в точке y_0, выполнено

$$(\Delta x \to 0) \;\Leftrightarrow\; (\Delta y \to 0).$$

Кроме того, так как функции взаимно обратны, то

$$(\Delta x \neq 0) \;\Leftrightarrow\; (\Delta y \neq 0).$$

Тогда

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

Традиционно, отметим следующее следствие.

Следствие 4.4.1 (О дифференциале обратного отображения). *В условиях предыдущей теоремы,*

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

4.4. Таблица производных

В этом пункте мы выведем выражения для производных простейших функций. Скорее всего, многие из выводимых ниже результатов хорошо известны из школы.

Подробного описания требует область определения функции $f(x) = x^\alpha$.

(а) Случай $\alpha = 0$ в таблице приведен отдельно.

(б) Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то f' определена на $\mathbb{R}$. Более того, при $\alpha = 1$ мы считаем, что $x^{\alpha-1} = 1$ и при $x = 0$.

(в) Если $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, то f' определена на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(г) Если $\alpha = \frac{m}{2n+1}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то при $\alpha \geqslant 1$ функция f' определена на $\mathbb{R}$, а при $\alpha < 1$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(д) Если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ или $\alpha = \frac{2m+1}{2n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то f' при $\alpha > 1$ функция f' определена на $[0, +\infty)$, а при $\alpha < 1$ на $(0, +\infty)$.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему. При доказательстве мы используем замечательные пределы и следствия из них, а также теорему о замене на эквивалентную.

Теорема 4.5 (Производные простейших функций). *Справедливы следующие соотношения:*

	f	f'	*Область определения* f'
1.	1	0	$\mathbb{R}$
2.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$.	*смотри описание выше*
3.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
4.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
5.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
6.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$
7.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
8.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
9.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
10.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
11.	$\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
12.	$\ln \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
13.	a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
14.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Доказательство. 1. Покажем, что $(1)' = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Действительно, так как

$$\Delta f(x_0) = 1 - 1 = 0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

то

$$(1)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

В силу произвольности x_0, получаем требуемое.
2. Покажем, что $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha = x_0^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1\right), \quad x_0 > 0,$$

то

$$(x^\alpha)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left(\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha x_0^{\alpha-1} \Delta x}{\Delta x} = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

В силу произвольности x_0, получаем требуемое. Остальные случаи остаются в качестве упражнения.

3. Покажем, что $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как

$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

то

$$(\sin x)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0.$$

4. Данный пункт доказывается аналогичным предыдущему образом.

5. Покажем, что $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. По формуле производной частного (теорема 4.2) и только что доказанным формулам производных функций $\sin x$ и $\cos x$, имеем

$$(\operatorname{tg} x)'(x_0) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'(x_0) = \frac{(\sin x)'(x_0) \cos x_0 - \sin x_0 (\cos x)'(x_0)}{\cos^2 x_0} =$$

$$= \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

6. Данный пункт доказывается аналогичным предыдущему образом.

7. Покажем, что $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1, 1)$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции (4.4). Обратная функция такова: $x = \sin y$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Все условия теоремы о производной обратной функции выполнены, а значит

$$(\arcsin x)'(x_0) = \frac{1}{(\sin y)'(y_0)} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

8-10. Данные пункты доказывается аналогичным предыдущему образом.

11. Покажем, что $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть $x_0 > 0$, тогда, так как

$$\Delta f(x_0) = \log_a (x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a \left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}\right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right),$$

то

$$(\log_a |x|)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x_0 \Delta x \ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}.$$

Аналогично рассматривается случай $x_0 < 0$.

12. Данный пункт – прямое следствие предыдущего.

13. Покажем, что $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции (4.4). Обратная функция такова: $x = \log_a y$, $y > 0$. Все условия теоремы выполнены, а значит

$$(a^x)'(x_0) = \frac{1}{(\log_a y)'(y_0)} = \frac{1}{\frac{1}{y_0 \ln a}} = y_0 \ln a = a^{x_0} \ln a.$$

14. Данный пункт – прямое следствие предыдущего. □

Используя доказанные соотношения, а также теоремы о правилах дифференцирования, можно легко находить производные элементарных функций, которые, кстати, как теперь стало понятно, тоже являются элементарными функциями.

4.5. Немного о параметрически заданной функции

Пусть T – множество, $\varphi, \psi : T \to \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} : T \to \mathbb{R}^2.$$

Определяет ли введенная система y как функцию f от x? Если да, то говорят, что **система задает функцию f параметрически**. Переменную t при этом называют параметром.

Замечание 4.14. *Понятно, что в общем случае ответ на поставленный вопрос отрицательный. Окружность, задаваемая системой*

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

не является графиком какой-либо функции.

В то же время, если функция φ обратима, то ответ положительный:

$$t = \varphi^{-1}(x) \;\Rightarrow\; y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \varphi(T).$$

Иными словами, $f = \psi(\varphi^{-1})$.

Изучим способ нахождения производной функции f.

Теорема 4.6 (О производной функции, заданной параметрически). *Пусть $T = \langle a, b \rangle$, $t \in T$, $\varphi \in C(T)$, φ строго монотонна, φ, ψ дифференцируемы в точке t, $\varphi'(t) \neq 0$, $f = \psi(\varphi^{-1})$ – параметрически заданная функция. Тогда f дифференцируема в $x = \varphi(t)$ и*

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Доказательство. По правилам дифференцирования композиции (4.3) и обратной (4.4) функции, имеем

$$f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

□

4.6. Французские теоремы

В данном разделе мы изучим различные приложения производной как к исследованию функций на так называемый экстремум, так и к вычислению различного рода пределов. Начнем с определений.

Определение 4.8 (Понятия локального максимума и минимума). *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$.*

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow \ f(x) \geqslant f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Итак, x_0 – точка локального максимума, если в некоторой окрестности этой точки значения функции не больше, чем в самой точке. Если же в некоторой проколотой окрестности этой точки значения функции меньше, чем в самой точке, то x_0 – точка строгого локального максимума. На рисунке 5 видно, что точка $x = 0$ – точка строгого локального минимума, а точка $x = -3$ – точка строгого локального максимума. Все точки из множества $(2, 5]$ можно считать как точками локального максимума, так и точками локального минимума. Точка $x = 2$ – точка локального максимума (не строгого!).

Определение 4.9 (Понятие точек экстремума). *Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локального минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).*

Наша задача – научиться находить точки экстремума, опираясь на поведение производной. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции дает теорема Ферма. Оно и понятно, в точке экстремума производная, если существует, должна быт равна нулю. А точно ли?

Теорема 4.7 (Ферма). *Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.*

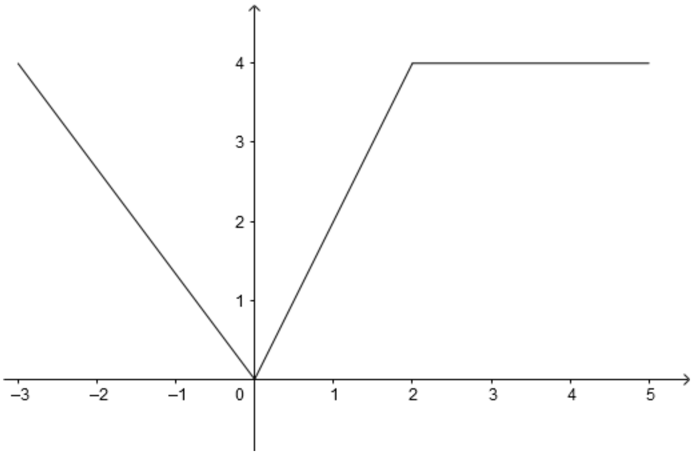

Рис. 5. Точки максимума и минимума

Доказательство. Для определенности будем полагать, что x_0 – точка локального максимума. При достаточно малом $\Delta x < 0$, из определения точки локального максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (3.4.1),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

При достаточно малом $\Delta x > 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (3.4.1),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0.$$

Сравнивая два неравенства, приходим к тому, что $f'(x_0) = 0$. □

Отметим следующее замечание.

Замечание 4.15. *Геометрически теорема Ферма означает, что касательная в точке «внутреннего» экстремума дифференцируемой функции параллельна оси Ox.*

Обратите внимание, что для «граничных» точек теорема, вообще говоря, неверна (рисунок 5 и точка $x = -3$). Озвученное наблюдение находит отражение как в формулировке теоремы, так и в ее доказательстве. Внимательно разберите, почему все может «сломаться» в граничных точках.

Следующая теорема – теорема Ролля. Оказывается, если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает одинаковые значения, то внутри отрезка она имеет хотя бы один экстремум и, как следствие, в этой точке ее производная обращается в ноль.

Теорема 4.8 (Ролля). *Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда*

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

Доказательство. Если f постоянна на отрезке $[a, b]$, то утверждение, очевидно, верно.

Если f не постоянна, то, по теореме Вейерштрасса (3.12), на отрезке $[a, b]$ существуют точки, в которых функция принимает свои наибольшее M и наименьшее m значения, причем $M \neq m$. Значит, хотя бы одно из этих значений принимается внутри интервала (a, b) в некоторой точке ξ. Значит, по теореме Ферма (4.7), $f'(\xi) = 0$. □

Конечно, не обойтись без замечания.

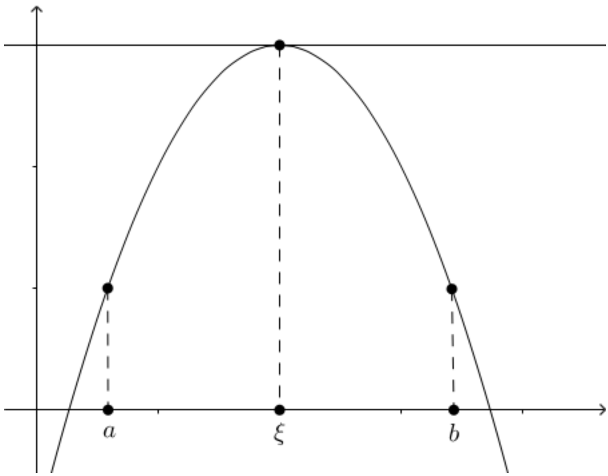

Рис. 6. Теорема Ролля

Замечание 4.16. *Еще раз подчеркнем геометрический смысл теоремы Ролля: если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает равные значения, то на этом отрезке существует хотя бы один экстремум, рисунок 6.*

Следующая теорема позволит нам выяснять характер монотонности функции в зависимости от знака производной. Итак, сформулируем теорему Лагранжа.

Теорема 4.9 (Лагранжа). *Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда*
$$\exists \xi \in (a,b): \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Доказательство. Пусть
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Прямым вычислением проверяется, что $g(a) = g(b)$, причем $g \in C[a,b]$ как разность непрерывных функций, и дифференцируема на (a,b) как разность дифференцируемых функций. Значит, согласно теореме Ролля (4.8),
$$\exists \xi \in (a,b): \ g'(\xi) = 0,$$

откуда
$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \ \Leftrightarrow \ f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

$\square$

Отметим напрашивающееся замечание.

Замечание 4.17. *Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале (a,b) существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, см. рисунок 7.*

Как уже было анонсировано, теорема Лагранжа оказывается незаменимым помощником при исследовании монотонности функции.

Теорема 4.10 (Критерий монотонности функции). *Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Для того чтобы функция f возрастала убывала на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) на (a,b).*

Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на $[a,b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a,b).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ возрастает.
Докажем необходимость. Пусть $x \in (a,b)$, тогда при $\Delta x \neq 0$ имеем
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенстве (3.4.1),
$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

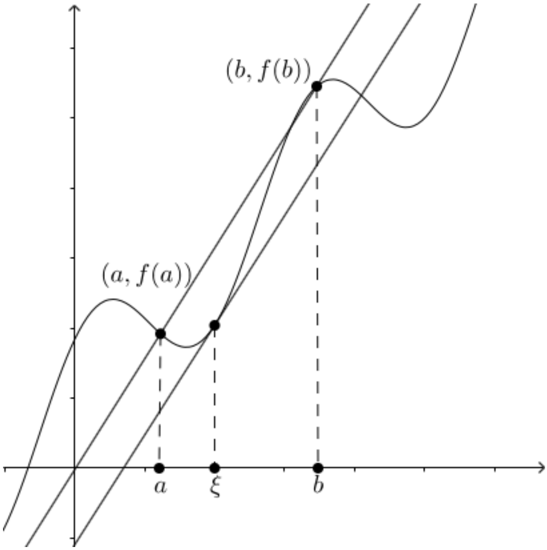

Рис. 7. Теорема Лагранжа

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа (4.9) найдется $\xi \in (a,b)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) \geqslant 0$ на (a,b) и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Так как x_1, x_2 – произвольные, получаем определение возрастающей функции.

Если же $f'(x) > 0$ на (a,b), то $f(x_2) > f(x_1)$ и мы приходим к определению строго возрастающей функции. □

Замечание 4.18. *Полезно заметить, что из того, что функция возрастает (убывает), вообще говоря не следует положительность (отрицательность) производной. Пусть $y = x^3$. Очевидно, что функция возрастает, но $y' = 3x^2$ обращается в ноль при $x = 0$.*

При изучении интегралов оказывается полезным следующий критерий постоянства функции.

Теорема 4.11 (Критерий постоянства функции). *Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Для того чтобы f была постоянной на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на (a,b).*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Если $f'(x) = 0$ на (a,b), то для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_1 < x_2$, по теореме Лагранжа (4.9)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

то есть $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности точек x_1, x_2 функция постоянна. $\square$

Следующая теорема часто помогает на практике при нахождении производных особенно в случае исследования функций.

Теорема 4.12 (О пределе производной). *Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Если*

$$A = \lim_{x \to a+0} f \in \overline{\mathbb{R}},$$

то $f'_+(a) = A$.

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа (4.9), если $\Delta x > 0$, то

$$f(a + \Delta x) - f(a) = f'(\xi)\Delta x, \quad \xi \in (a, a + \Delta x).$$

Осталось устремить Δx к нулю и воспользоваться условием теоремы и определением односторонней производной. $\square$

Теорема 4.13 (Коши). *Пусть $f, g \in C[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Тогда $\exists \xi \in (a, b)$, что выполняется*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a)).$$

Прямые вычисления показывают, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что $\varphi \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Значит, по теореме Ролля (4.8) найдется $\xi \in (a, b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть

$$g'(\xi)\,(f(b) - f(a)) = f'(\xi)\,(g(b) - g(a)).$$

Если $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то $g(b) \neq g(a)$ (иначе по теореме Ролля нашлась бы точка из интервала (a, b), в которой производная бы обращалась в ноль), а значит

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

$\square$