Коллоквиум № 2

Математический анализ – МАТ АН ПИиКТ 10 и 13 – лектор Правдин К.В.

🙋 Для кого и когда?

МАТ АН ПИиКТ 13

Ср 15.11   18:40   ауд. 2304 Крон.   КР № 2

Ср 22.11   18:40   ауд. 2304 Крон.   **Коллоквиум № 2**

МАТ АН ПИиКТ 10

Чт 16.11   18:40   ауд. 1419 Крон.   КР № 2

Чт 23.11   18:40   ауд. 1419 Крон.   **Коллоквиум № 2**

💡 Какие темы готовить? (под каждой темой указано то, что ожидается в вашем ответе)

1. **Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.**
   Определение подпоследовательности, пример. Определение частичных пределов последовательности, пример. Лемма о пределе подпоследовательностей последовательности, имеющей предел. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Лемма о дополнении теоремы Больцано-Вейерштрасса.
2. **Верхний и нижний пределы**
   Определение верхнего и нижнего пределов последовательности, пример. Лемма о частичных пределах последовательности. Замечание об обозначениях. Замечание о критерии наличия предела у последовательности.
3. **Критерий Коши для последовательности**
   Определение фундаментальной последовательности, пример. Критерий Коши. Пример с суммой гармонической последовательности 1+1/2+...+1/n (с доказательством). Пример с последовательностью sin(n) (с доказательством).
4. **Определение предела функции по Коши**
   Определение предельной точки, примеры. Определение предела функции через ε-δ и неравенства. Геометрическая иллюстрация. Определение бесконечных пределов. Определение предела функции через ε-δ-окрестности. Определение предела функции через окрестности. Лемма об эквивалентности определений. Примеры доказательства предела по определению: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$, $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x)=6$. Пример предела sign(x) в точке 0 (с доказательством).
5. **Определение предела по Гейне**
   Определение предела функции по Гейне. Теорема об эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне. Пример предела sin(x) на +oo (с доказательством).
6. **Свойства функций, имеющих конечный предел**
   Определение предела функции через ε-δ и неравенства, через ε-δ-окрестности, через окрестности. Определение бесконечных пределов. Теорема о трёх локальных свойствах функций, имеющих предел. Замечание о дополнении одного из свойств (с доказательством).
7. **Арифметические свойства пределов**
   Определение предела функции через ε-δ и неравенства, через ε-δ-окрестности, через окрестности. Определение бесконечных пределов. Теорема об арифметических свойствах пределов в R∪{±oo} (сложение, умножение, деление).
8. **Предельный переход в неравенствах**
   Определение предела функции через ε-δ и неравенства, через ε-δ-окрестности, через окрестности. Определение бесконечных пределов. Теорема о влиянии неравенства между пределами функций на неравенство между функциями. Следствие о предельном переходе в неравенствах. Пример о несохранении строгости в неравенстве при предельном переходе.
9. **Теорема о сжатой переменной**
   Определение предела функции через ε-δ и неравенства, через ε-δ-окрестности, через окрестности. Определение бесконечных пределов. Теорема о сжатой переменной.
10. **Предел монотонной функции**
    Определение предела функции через ε-δ и неравенства, через ε-δ-окрестности, через окрестности. Определение возрастания и убывания функции, определение монотонной функции. Теорема о пределе монотонной функции (для возрастающей и для убывающей по-отдельности).
11. **Критерий Коши для функции**
    Определение предела функции через ε-δ и неравенства, через ε-δ-окрестности, через окрестности. Формулировка критерия Коши для последовательностей (без доказательства). Критерий Коши для

функции.

12. **Односторонние пределы**
Определения правостороннего и левостороннего пределов функции. Обозначения. Примеры с функциями sign(x) и 5^(1/x). Критерий существования предела через односторонние. Замечение о пределах на конках отрезка и на ±oo.
13. **Бесконечно малые и бесконечно большие функции**
Понятие БМи ББ функций. Лемма о связи БМ и ББ функций. Лемма о трёх свойствах БМ функций. Пример предела sin(x)/x на +oo (с доказательством). Критерий существования конечного предела в терминах БМ функций.
14. **Понятие непрерывности функции**
Определение непрерывной функции в точке из множества её определения (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Лемма о связи непрерывности и предела. Пример доказательства непрерывности функций f(x) = const и f(x) = x. Определение непрерывности функции на множестве, обозначение. Замечение о перестановочности операций взятия предела и функции.
15. **Классификация точек разрыва**
Определение точки разрыва. Лемма о характеристике непрерывности в терминах односторонних пределов (лемма о связи непрерывности и предела, критерий существования предела через односторонние – формулировки и доказательства). Определение устранимого разрыва, разрывов 1 рода (скачка) и 2 рода. Примеры.
16. **Локальные свойства непрерывных функций**
Определение непрерывной функции в точке из множества её определения (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Теорема о пяти локальных свойствах непрерывной функции. Теорема о непрерывности композиции.
17. **Теорема Вейерштрасса**
Определение непрерывной функции в точке из множества её определения (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Лемма о замкнутости отрезка. Теорема Вейерштрасса.
18. **Теоремы Больцано-Коши**
Определение непрерывной функции в точке из множества её определения (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Первая и вторая теоремы Больцано-Коши.
19. **Промежутки**
Определение промежутка. Лемма о характеристике промежутка. Определение непрерывной функции в точке из множества её определения (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Теорема о сохранении промежутка. Лемма о непрерывном образе промежутка. Формулировка прямого обращения теоремы о сохранении промежутка и пример о его недопустимости.
20. **Непрерывность и монотонность функции**
Определение возрастания и убывания функции, определение монотонной функции. Определение непрерывной функции в точке из множества её определения (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции.
21. **Первый замечательный предел**
Определение предела функции через ε-δ и неравенства, через ε-δ-окрестности, через окрестности. Первый замечательный предел. Следствия из первого замечательного предела.
22. **Второй замечательный предел**
Определение предела функции через ε-δ и неравенства, через ε-δ-окрестности, через окрестности. Второй замечательный предел. Следствия из второго замечательного предела.
23. **Асимптотическое сравнение функций**
Определения для сравнения функций (О-большое, о-малое, эквивалентность). Лемма о сравнении функций в терминах пределов. Сравнение БМ и ББ функций. Лемма об арифметике О-больших и о-малых. Теорема о замене на эквивалентную. Необходимое и достаточное условие замены на эквивалентную.
24. **Равномерная непрерывность**
Определение непрерывной функции на множестве (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Определение равномерно непрерывной функции на множестве (через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности). Пример функции 1/x на (0;1). Лемма о связи равномерной непрерывности и непрерывности функции. Теорема Кантора.

* Тема “3.16. Непрерывность элементарных функций” не входит в коллоквиум.

📚 На что опираться при подготовке?

- Бойцев А.А. Конспект лекций по математическому анализу (базовый уровень) https://drive.google.com/file/d/1djjiNfdQDAWuMCLIH2Q0yms76Agb54MP/view?usp=sharing

📝 Как будет проходить коллоквиум?
Вы зайдёте в аудиторию, вас отметят и предложат вытащить билет. В билете вы узнаете, как будете отвечать на вопрос – устно или письменно:

- При устном ответе вам дадут 40 минут на подготовку, вы сможете сделать необходимые записи и затем будете приглашены для устного ответа с опорой на записи.
- При письменном ответе вам дадут 40 минут на подготовку полного ответа в письменном виде. По завершении вам предложат сдать ваш ответ. И вы свободны!

✅ Сколько баллов можно получить на коллоквиуме?
До 10 баллов. При этом важно набрать хотя бы 2 балла, иначе мы не сможем аттестовать вас в семестре.

1️⃣Как будет выглядеть билет?
В билете 1 вопрос с указанием определений, лемм, теорем, замечаний и примеров, которые требуется раскрыть (как в списке тем выше).

🎓 Нужны ли доказательства?
Да (везде, где можно), если вы претендуете на высокий балл. Без доказательств ответ будет оценен не выше 6 баллов.

🥸 Можно ли не учить формулировки и отвечать своими словами?
Не рекомендуется. Дело в том, что математические формулировки и утверждения точны и таят в себе много деталей. При формуллировании своими словами вы можете передать только часть смысла, при этом нарушить детали, что приведёт к ошибке. Важно быть точным, поэтому заучивать – хороший вариант. При этом важно стремиться понимать материал, ведь без этого заучивание превратится в пытку, а при ответе будет моментально раскрыто.

🗿 Можно ли пользоваться конспектом, печатной литераторой, гаджетами?
Нет, потому что на коллоквиуме важно продемонстрировать именно свои знания и понимание материала.

📊 Когда будут известны баллы за коллоквиум?
При устном ответе – сразу после ответа. При письменном – в течение нескольких дней после коллоквиума.

🏃 Можно ли выходить во время коллоквиума?
Нет, выходить нельзя.

🎒 Что взять на коллоквиум?
Чистые листочки для ответов и черновиков, пишущую ручку. Попить.

🤓 Как подготовиться к коллоквиуму?

1) Рекомендуется начать с выучивания формулировок определений, свойств, лемм и теорем.
2) Продолжить изучением их связей и выстраиванием общей картины раздела.
3) И закончить запоминанием доказательств теорем.
   Высший пилотаж – уметь доказывать теоремы на лету, без вспоминания заученных доказательств, а исходя из того, что дано и что нужно.

👀 На что обратить внимание перед коллоквиумом?

➔ быть не голодным и не наетым – чтобы голова не отвлекалась на живот
➔ при возможности почистить зубы или взять с собой освежающие леденцы
➔ утром принять душ и одеться в чистое
➔ хорошо поспать накануне, чтобы быть внимательным и точным

🙄 Будет ли пересдача? Когда?
Да, возможность пересдать коллоквиум будет – во время экзамена на сессии. При этом максимальное количество баллов, которое можно будет получить за коллоквиум, снизится до 8 баллов *(возможны изменения)*.