

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 51

Студент
Мироненко Артем Дмитриевич
Р3131

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $x_4x_5 + x_1x_2x_3 = 3, 5, 8, 10$ и неопределенное значение при $x_1x_2x_4 = 0$.

Таблица истинности

| № | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_4x_5 | $x_1x_2x_3$ | $x_1x_2x_4$ | f |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------------|-------------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | d |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | d |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | d |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | d |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 |
| 13 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 0 |
| 14 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 15 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| 16 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 17 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 |
| 18 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 4 | 5 | 0 |
| 19 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 4 | 1 |
| 21 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 5 | 4 | 0 |
| 22 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 5 | 5 | 0 |
| 23 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 | 1 |
| 24 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 0 |
| 25 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 | 6 | 0 |
| 26 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 6 | 7 | 1 |
| 27 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 6 | 7 | 0 |
| 28 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 7 | 6 | 0 |
| 29 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 7 | 6 | 1 |
| 30 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 7 | 7 | 0 |
| 31 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 7 | 7 | 1 |

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \\ \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

| $K^0(f)$ | | | $K^1(f)$ | | | $K^2(f)$ | | $Z(f)$ |
|----------|-------|---|-----------------|-------|---|-------------------------|-------|--------|
| m_0 | 00000 | ✓ | m_0-m_1 | 0000X | ✓ | $m_0-m_1-m_4-m_5$ | 00X0X | 11010 |
| m_1 | 00001 | ✓ | m_0-m_4 | 00X00 | ✓ | $m_1-m_3-m_9-m_{11}$ | 0X0X1 | X0001 |
| m_4 | 00100 | ✓ | m_1-m_3 | 000X1 | ✓ | $m_4-m_6-m_{12}-m_{14}$ | 0X1X0 | X0100 |
| m_3 | 00011 | ✓ | m_4-m_5 | 0010X | ✓ | | | 111X1 |
| m_6 | 00110 | ✓ | m_4-m_6 | 001X0 | ✓ | | | 1X111 |
| m_9 | 01001 | ✓ | m_1-m_5 | 00X01 | ✓ | | | 00X0X |
| m_{12} | 01100 | ✓ | m_1-m_9 | 0X001 | ✓ | | | 0X0X1 |
| m_{17} | 10001 | ✓ | m_4-m_{12} | 0X100 | ✓ | | | 0X1X0 |
| m_{20} | 10100 | ✓ | m_1-m_{17} | X0001 | | | | |
| m_5 | 00101 | ✓ | m_4-m_{20} | X0100 | | | | |
| m_{11} | 01011 | ✓ | m_9-m_{11} | 010X1 | ✓ | | | |
| m_{14} | 01110 | ✓ | $m_{12}-m_{14}$ | 011X0 | ✓ | | | |
| m_{26} | 11010 | | m_3-m_{11} | 0X011 | ✓ | | | |
| m_{23} | 10111 | ✓ | m_6-m_{14} | 0X110 | ✓ | | | |
| m_{29} | 11101 | ✓ | $m_{29}-m_{31}$ | 111X1 | | | | |
| m_{31} | 11111 | ✓ | $m_{23}-m_{31}$ | 1X111 | | | | |

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

| Простые импликанты | | 0-кубы | | | | | | | | | | | |
|--------------------|-------|--------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | | 3 | 6 | 9 | 11 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 31 |
| | 11010 | | | | | | | | | | X | | |
| | X0001 | | | | | | | X | | | | | |
| | X0100 | | | | | | | | X | | | | |
| | 111X1 | | | | | | | | | | | X | X |
| | 1X111 | | | | | | | | | X | | | X |
| | 00X0X | | | | | | | | | | | | |
| | 0X0X1 | X | | X | X | | | | | | | | |
| | 0X1X0 | | X | | | X | X | | | | | | |

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0X0X1 \\ X0001 \\ 0X1X0 \\ X0100 \\ 1X111 \\ 11010 \\ 111X1 \end{array} \right\}$$

Вся таблица вычеркнулась, следовательно ядро покрытия является минимальным покрытием

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 0X0X1 \\ X0001 \\ 0X1X0 \\ X0100 \\ 1X111 \\ 11010 \\ 111X1 \end{array} \right\}$$

$$S^a = 27$$

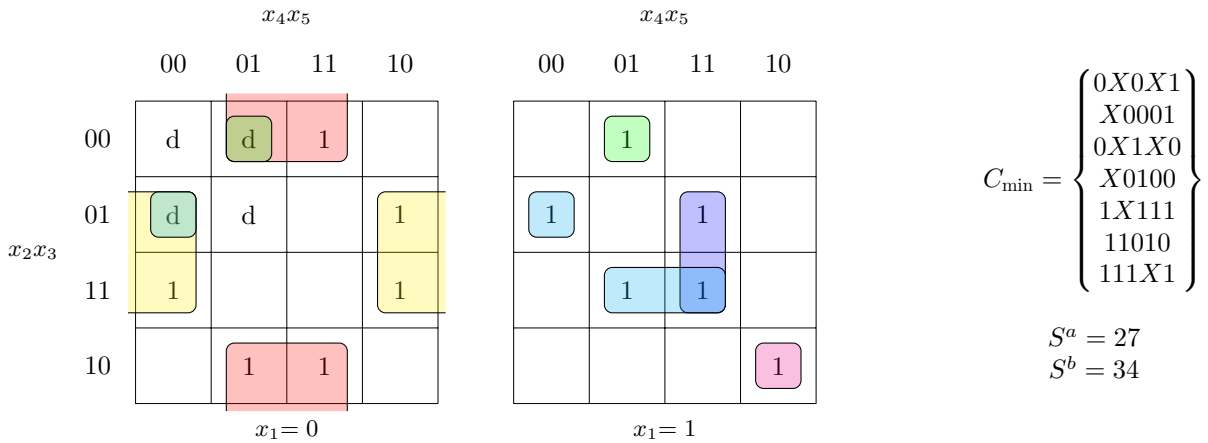
$$S^b = 34$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_5$$

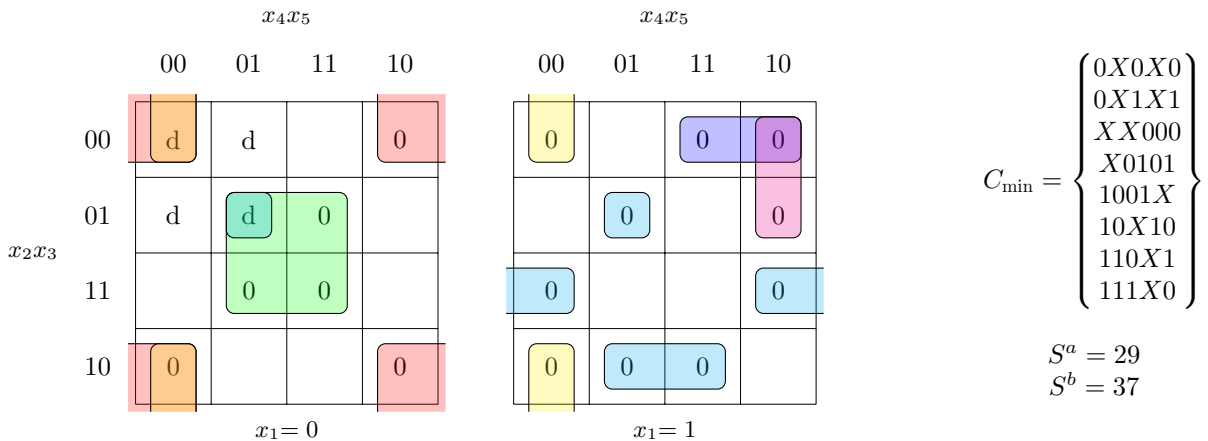
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_5$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_3 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) (x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$$

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_5 \quad S_Q = 34 \quad \tau = 2$$

$$f = x_3 \overline{x_5} (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) \vee \overline{x_3} x_5 (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) \vee x_1 x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \quad S_Q = 29 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = x_1 (x_2 \vee x_4)$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \overline{x_4}$$

$$f = x_3 \overline{x_5} \overline{\varphi} \vee \overline{x_3} x_5 \overline{\varphi} \vee \varphi x_3 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \quad S_Q = 23 \quad \tau = 5$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_3 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) (x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 37 \quad \tau = 2$$
$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5)$$

$$f = (x_3 \vee x_5 \vee x_1 x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee (x_3 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_3} \vee x_5)) (\overline{x_3} \vee \overline{x_5} \vee x_1 (x_2 \vee x_4)) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee x_3 x_5) \quad S_Q = 31 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = x_1 x_4$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_1} \vee \overline{x_4}$$

$$f = (x_3 \vee x_5 \vee \varphi) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee (x_3 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_3} \vee x_5)) (\overline{x_3} \vee \overline{x_5} \vee x_1 (x_2 \vee x_4)) (\overline{\varphi} \vee x_2 \vee x_3 x_5) \quad S_Q = 31 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_3 \vee x_5 \vee x_1 x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee (x_3 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_3} \vee x_5)) (\overline{x_3} \vee \overline{x_5} \vee x_1 (x_2 \vee x_4)) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee x_3 x_5) \quad S_Q = 31 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$\begin{aligned} f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) &= 0 \\ f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1]) &= 0 \\ f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) &= 1 \\ f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) &= 1 \end{aligned}$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_3 \bar{x}_5 \bar{\varphi} \vee \bar{x}_3 x_5 \bar{\varphi} \vee \varphi x_3 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \quad (S_Q = 23, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_1 (x_2 \vee x_4)$$

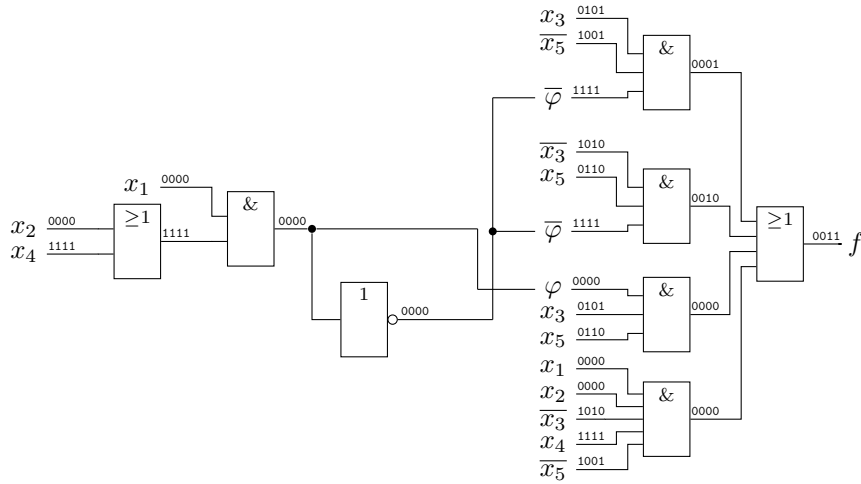
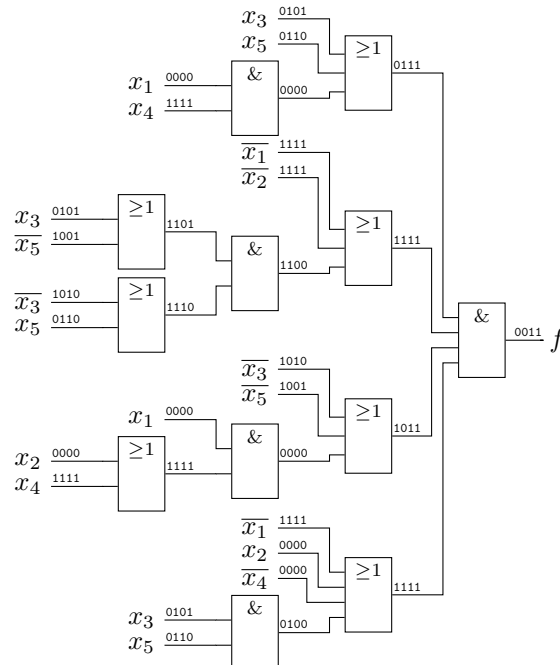


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_3 \vee x_5 \vee x_1 x_4) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee (x_3 \vee \bar{x}_5) (\bar{x}_3 \vee x_5)) (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_5 \vee x_1 (x_2 \vee x_4)) (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_3 x_5) \quad (S_Q = 31, \tau = 4)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_3 \overline{x_5} \overline{\varphi} \overline{x_3} x_5 \overline{\varphi} \varphi x_3 x_5 x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5}} \quad (S_Q = 29, \tau = 8)$$

$$\varphi = x_1 \overline{x_2} \overline{x_4}$$

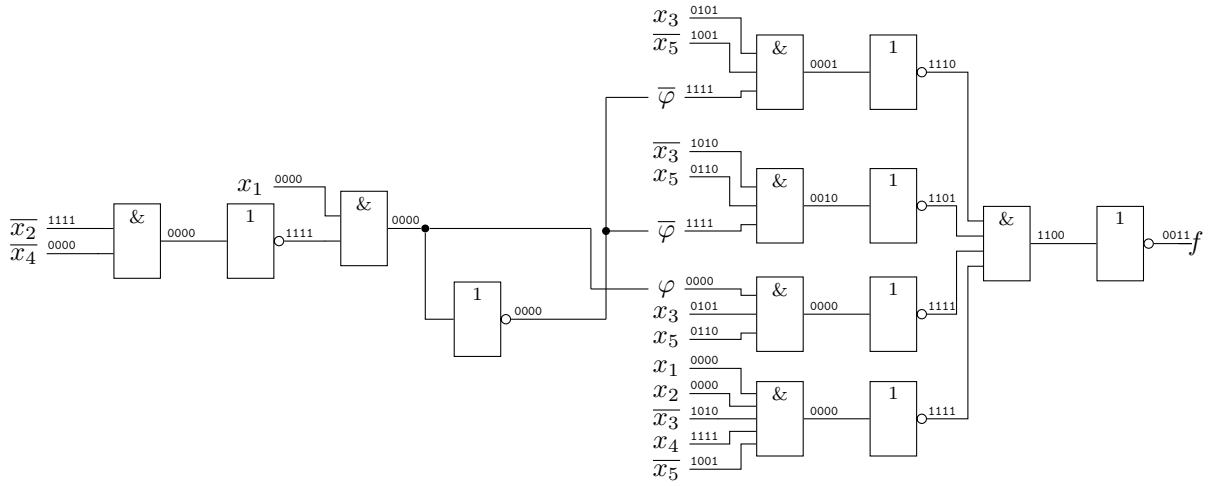
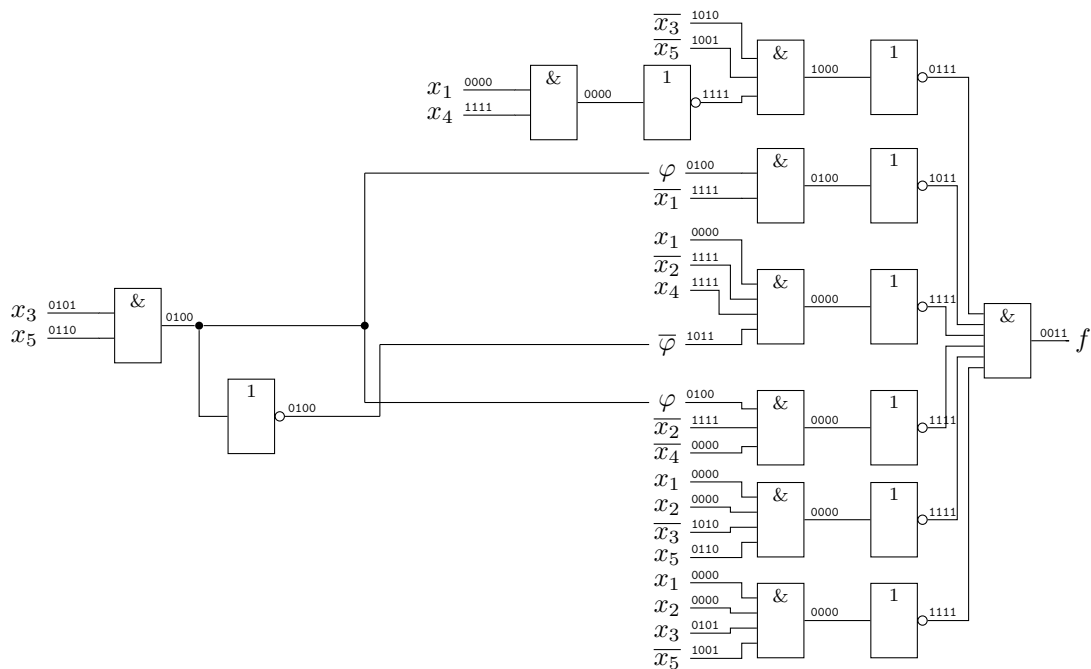


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_3 \overline{x_5} x_1 x_4 \overline{\varphi} \overline{x_1} x_1 \overline{x_2} x_4 \overline{\varphi} \overline{\varphi} \overline{x_2} \overline{x_4} x_1 x_2 \overline{x_3} x_5 x_1 x_2 x_3 \overline{x_5}} \quad (S_Q = 38, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_3 x_5$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_3 \overline{x_5} \overline{\varphi} \overline{\varphi} x_5 \overline{x_3} x_5 \overline{\varphi} x_1 x_2 x_4 x_5 \quad (S_Q = 32, \tau = 7)$$

$$\varphi = \overline{x_1 x_2 x_4}$$

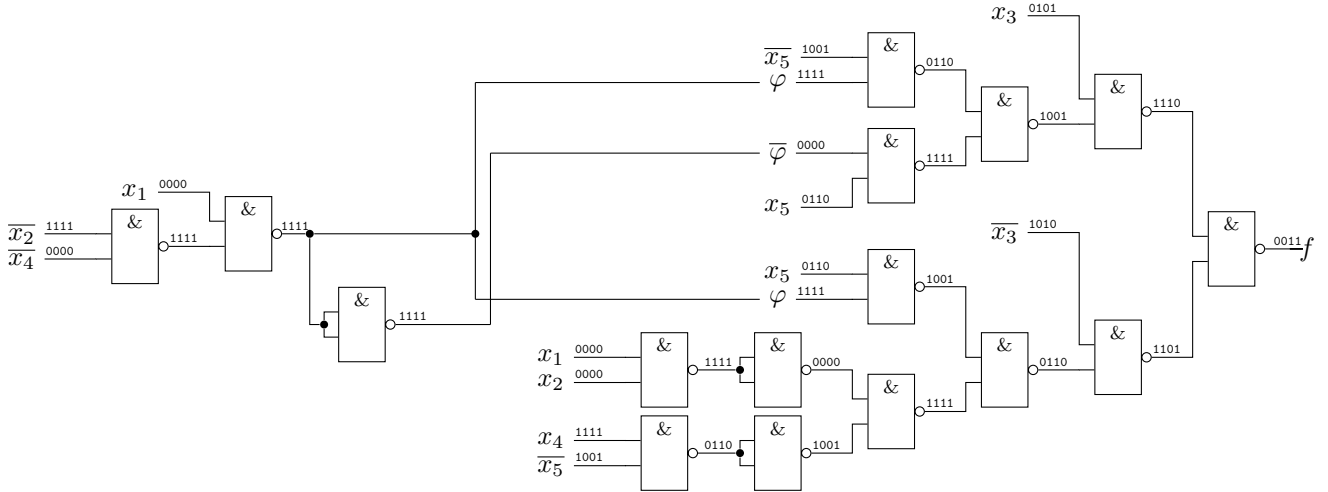


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_1 x_2 x_3 x_5 x_3 x_5 x_2 x_4 x_3 x_5 x_3 x_5 x_1 x_4 x_3 x_5 x_1 x_2 x_4 \quad (S_Q = 46, \tau = 9)$$

