Задание № 7

Образуют ли линейное пространство множество целых чисел?

Да, множество целых чисел образует линейное пространство над полем вещественных чисел (или над другим полем, например, полем комплексных чисел). Линейное пространство - это алгебраическая структура, удовлетворяющая некоторым определенным свойствам. В данном случае, множество целых чисел удовлетворяет основным свойствам линейного пространства.

1) Замкнутость относительно сложения: Если a и b - целые числа, то их сумма $a + b$ также является целым числом.
2) Замкнутость относительно умножения на скаляр: Если a - целое число, а c - любое вещественное число, то произведение $c \cdot a$ также является целым числом.
3) Ассоциативность сложения: Для любых целых чисел a, b и c выполняется равенство $(a + b)+c = a +(b + c)$.
4) Коммутативность сложения: Для любых целых чисел a и b выполняется равенство $a + b=b + a$.
5) Существование нулевого элемента: Существует целое число 0, такое что $a + 0 = a$ для любого целого числа a.
6) Существование противоположного элемента относительно сложения: Для каждого целого числа a существует целое число $-a$, такое что $a + (-a) = 0$.

Таким образом, множество целых чисел удовлетворяет всем этим свойствам и, следовательно, является линейным пространством над полем вещественных чисел.

Задание № 9

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы А

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Из определения собственного вектора v соответствующего собственному значению λ: A*v=λ*v

Тогда: A*v-λ*v=(A-λ*E)*v=0

Уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда det(A-λ*E)=0

$$\det(A-\lambda*E) = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$\lambda_1=1$

$\lambda_2=3$

Для каждого λ найдем его собственные вектора:

$\lambda_1=1$

$$A-\lambda*E = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$A*v=\lambda*v$

Тогда имеем однородную систему линейных уравнений, решим ее методом Гаусса:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x_2:

$x_2 = -x_3$

Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x_1:

$x_1=x_3$

Ответ: $x_1=x_3$; $x_2=-x_3$; $x_3=x_3$