Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

# РГР3+КР3

по дисциплине «Линейная алгебра»

Выполнили: Мироненко Артем

Гаврилович Вероника

Карагодина Ксения

Логинова Ольга

Поток 10.2

Научный руководитель:

Блейхер Оксана Владимировна

Сант-Петербург

~2023~

# Оглавление

# Задание 1

## 1 Задание.

1) Выполнить действия в алгебраической форме $\frac{2\cdot(1+i\cdot\sqrt{3})}{1-i} - (1+i\cdot\sqrt{3})$

1) $\frac{2\cdot(1+i\sqrt{3})}{1-i}$

Чтобы разделить $z_1 = a + i \cdot b_1$ на $z_2 = a_2 + ib_2$ необходимо домножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю. Таким образом:

$$\frac{2\cdot(1+i\sqrt{3})}{1-i} = 2\cdot\frac{(1+i\sqrt{3})\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)} =$$

$$=2\cdot\frac{\left(1+i+i\cdot\sqrt{3}+i^2\sqrt{3}\right)}{\left(1+i-i-i^2\right)} = \left|\begin{matrix}\text{т.к.}\\ i^2=-1\end{matrix}\right|$$

$$=2\cdot\frac{(1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3})}{2} = 1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\cdot i$$

2)Таким образом получим: $1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i-(1+\sqrt{3}i) = 1-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i = i-\sqrt{3}$

# Задание 2

## 2 Задание.

2)Выполнить действия в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{2+2\sqrt{3}i}$$
$$z = 2+2\sqrt{3};$$
$$z = x+iy-$$
$$x = 2; y = 2\sqrt{3}$$

$z = r\cdot\cos\alpha + i\sin\alpha r -$ Тригонометрическая форма записи числа :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+4\cdot 3} =$$
$$= \sqrt{16} = 4.$$

Числу $2+2\sqrt{3}$ i на комплексной плоскости соответствует точка $M(2;2\sqrt{3})$, которая лежит в 1 четверти. Следовательно:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Выполним извлечение корня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$
$$k = 0,1,2,\ldots n-1.$$
$$\sqrt[4]{4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)} =$$
$$= \sqrt[4]{4}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3$$

Пусть $k=0$, тогда

$$\sqrt{z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

Пусть $k = 1$, тогда:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$$

Пусть $k = 2$, тогда:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{13\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{13\pi}{12}\Big)$$

Пусть $k = 3$ тогда:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{19\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{19\pi}{12}\right) \text{ угол отличается на } \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

# Задание 3

## 3 Задание.

3) $x^4 + x^3 + 3x^2 + 5x - 10$ Разложить многочлен на неприводимые множители.
Среди делителей константы c=-10 ищем корни многочлена.
Методом подбора выявили корни $x_1 = 1; x_2 = -2 \Rightarrow$ многочлен делится на$(x-1)(x+2)$. Разделим:

$$\Rightarrow x^4 + x^3 + 3x^2 + 5x - 10 = (x-1)(x+2)\big(x^2+5\big)$$

Окончательное разложение над полем действительных чисел,
так как дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 5$ отрицательный.
Разложение того же многочлена над полем комплексных чисел
получим, если найдем комплексные корни:

$$x^2 + 5 = 0$$
$$x^2 = -5$$
$$x_1 = \sqrt{5}i \quad x_2 = -\sqrt{5}; \quad \text{Тогда окончательное разложение:}$$
$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 5x - 10 = (x-1)(x+2)(x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i)$$

# Задание 4

Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

**Свойства определителей**

При транспонировании величина определителя не меняется.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \acute{n} & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Строки и столбцы определителя эквиваленты.

Если в определители поменять местами какие-либо две строки (столбца) местами, то определитель меняет знак.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \acute{n} & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \Delta = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad.$$

Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен 0.

При умножении элементов какого-либо столбца (строки) на число а, определитель умножается на это число.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \acute{n} & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \begin{vmatrix} \alpha \cdot a & b \\ \alpha \cdot \acute{n} & d \end{vmatrix} = \alpha \cdot ad - \alpha \cdot bc = \alpha \cdot \Delta.$$

Если все элементы какого-либо столбца (строки) равны 0 , то определитель равен 0.

Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \beta a \\ \acute{n} & \beta \acute{n} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a & a \\ \acute{n} & \acute{n} \end{vmatrix} = ac - ac = 0.$$

Пусть каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя равен сумме двух слагаемых, тогда этот определитель равен сумме двух определителей, причём в первом их них соответствующий столбец (строка) состоит из первых слагаемых, а во втором - из вторых слагаемых.

$$\begin{vmatrix} a' + a'' & b \\ c' + c'' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & b \\ c'' & d \end{vmatrix}.$$

Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца умноженного на одно и тоже число.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \alpha b & b \\ c + \alpha d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha b & b \\ \alpha d & d \end{vmatrix} = 0.$$

Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраического дополнения к элементам другого столбца равна 0.

Решение:

Сводим матрицу к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 14 & -10 & 2 & -3 \\ 0 & -31 & 24 & -7 & 9 \\ 0 & -63 & 48 & -16 & 17 \\ 0 & -61 & 48 & -14 & 20 \\ 0 & -89 & 63 & -15 & 25 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 14 & -10 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -63 & 48 & -14 & 17 \\ 0 & -31 & 24 & -7 & 9 \\ 0 & -89 & 63 & -15 & 25 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 14 & -10 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 48 & -14 & 143 \\ 0 & 0 & 24 & -7 & 71 \\ 0 & 0 & 63 & -15 & 203 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 14 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & 48 & 143 \\ 0 & 0 & -7 & 24 & 71 \\ 0 & 0 & -15 & -63 & 203 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 14 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -60 \\ 0 & 0 & -7 & 24 & 71 \\ 0 & 0 & -15 & 63 & 203 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 14 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & -81 & -349 \\ 0 & 0 & 0 & -162 & -697 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 14 & 2 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & -81 & -349 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$$

= 1 * 1 * 1 * (-81) * 1 = -81

Ответ: -81

## Задание 5

Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 6x + 2y - z = 2 \\ 4x - y + 3z = -3 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде

Теория:

**Метод Крамера**

**NtB 2.2.** Метод Крамера заключается в вычислении определителя матрицы $A$ и определителей, полученных из матрицы $A$ подстановкой столбца $b$ в эту матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем определители:

$$\Delta = \det A, \quad \Delta_1 = \det A_1, \quad \Delta_2 = \det A_2, \quad \Delta_3 = \det A_3,$$

и вычисляем значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Прямой подстановкой убеждаемся в правильности решения.

**Метод Гаусса**

**Опр. 2.1. Эквивалентными преобразованиями** матрицы называются следующие три вида преобразований:

(а) перестановка местами произвольных строк матрицы;

(б) умножение произвольной строки матрицы на число $\lambda \neq 0$;

(в) прибавление к произвольной строке матрицы другой строки;

**NtB 2.3.** Применение элементарных преобразований к расширенной матрице

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3. \end{pmatrix}.$$

позволяет получить эквивалентную систему, которая имеет такое же решение как и исходная.

Метод Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу системы к верхнетреугольному виду и затем, используя метод подстановки найти решение:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3. \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3. \end{pmatrix}$$

Откуда сразу получаем:

$$x_3 = \frac{d_3}{c_{33}}, \quad x_2 = \frac{d_2 - c_{23}x_3}{c_{22}}, \quad x_1 = \frac{d_1 - c_{12}x_2 - c_{1_3}x_3}{c_{11}}.$$

**Метод обратной матрицы**

**NtB 2.4.** Исходную систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = b$$

Решим данное матричное уравнение формально, используя тот факт, что матрица $A^{-1}$, обратная к матрице $A$ существует:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} b.$$

*Вычислить* матрицу $A$ можно, использовав один из способов:

- **метод Гаусса** - элементарными преобразованиями строк, необходимо из матрицы $A$ получить единичную матрицу $E$, обратная матрица тогда возникнет из следующей конструкции:

$$[A|E] \sim \left[E|A^{-1}\right]$$

- **метод союзной матрицы** - вычислив *союзную матрицу* $\widehat{A}$, найти $A^{-1}$ с использованием следующей формулы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widehat{A}^T$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$detA = 12 + 18 + (-8) - 3 + 16 - 36 = -1 \neq 0$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

**а) Метод Гаусса**

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & |2 \\ 4 & -1 & 3 & |-3 \\ 3 & 2 & -2 & |3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & |2 \\ 1 & -3 & 5 & |-6 \\ 3 & 2 & -2 & |3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & |-6 \\ 0 & 20 & -31 & |38 \\ 0 & 11 & -17 & |21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & |-6 \\ 0 & 20 & -31 & |38 \\ 0 & 0 & \frac{341}{20} & |-\frac{418}{20} \end{pmatrix} =>$$

$$z = \frac{2}{20} => z = 20$$

$$20y - 31 * 2 = 38 => y = 5$$

$$x - 3 * 5 + 5 * 2 = -6 => x = -1$$

Ответ : x = -1, y = 5, z = 2.

**б) Метод Крамера**

$\Delta = detA = -1$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 18 + 6 - 3 - 12 - 12 = 1$

$x = \frac{1}{-1} = -1$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 36 + 18 - 12 - 9 - 54 + 16 = -5$

$y = \frac{-5}{-1} = 5$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 - 18 + 16 + 18 - 16 = -2$

$z = \frac{-2}{-1} = 2$

Ответ: x = -1, y = 5, z = 2.

**в) в матричном виде**

$\Delta = detA = -1$ $\qquad (-1)^{i+j}M_{ij}$

$A^{-1} = \frac{1}{detA} * \hat{A}^T$, $\hat{A}$ – матрица алгебраических дополнений

$\hat{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$

$\hat{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-8 - 9) = 17$

$\hat{a}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$

$\hat{a}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 2) = 2$

$\hat{a}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 3 = -9$

$\hat{a}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(12 - 6) = -6$

$\hat{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$

$\hat{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(18 + 4) = -22$

$$\hat{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 8 = -14$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -17 & 9 & 22 \\ -11 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -17 & 9 & 22 \\ -11 & 6 & 14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+6-15 \\ -34-27+66 \\ -22-18+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: x = -1, y = 5, z= 2

# Задание 6

Найти общее решение, частное решение и– фундаментальную систему решений данной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение

1) Выпишем основную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -6 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к треугольному виду. Будем работать только со строками, так как умножение строки матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к другой строке для системы означает умножение уравнения на это же число и сложение с другим уравнением, что не меняет решения системы.

Умножим 1-ую строку на (-2). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -7 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножим 2-ую строку на (-1). Умножим 3-ую строку на (2). Добавим 3-ую строку к 2-ой:

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -7 & -7 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -13 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножим 1-ую строку на (7). Умножим 2-ую строку на (5). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -34 & -114 & -18 \\ 0 & 7 & 3 & -13 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -34 & -114 & -18 \\ 0 & 7 & 3 & -13 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Выделенный минор имеет наивысший порядок (из возможных миноров) и отличен от нуля (он равен произведению элементов, стоящих на обратной диагонали), следовательно **rang(A) = 3.**

Этот минор является базисным. В него вошли коэффициенты при неизвестных $x_1,x_2,x_3$, значит, неизвестные $x_1,x_2,x_3$ – зависимые (базисные), а $x_4,x_5$ – свободные.
Преобразуем матрицу, оставляя слева только базисный минор.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -34 & 114 & 18 \\ 0 & 7 & 3 & 13 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

Система с коэффициентами этой матрицы эквивалентна исходной системе и имеет вид:

$$- 34x_3 = 114x_4 + 18x_5$$
$$7x_2 + 3x_3 = 13x_4 + 5x_5$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 6x_4 + x_5$$

Методом исключения неизвестных находим **нетривиальное решение**:
Получили соотношения, выражающие зависимые переменные $x_1,x_2,x_3$ через свободные $x_4,x_5$, то есть нашли **общее решение**:

$$x_3 = -\frac{57}{17}x_4 - \frac{9}{17}x_5$$
$$x_2 = \frac{56}{17}x_4 + \frac{16}{17}x_5$$
$$x_1 = -\frac{123}{17}x_4 - \frac{40}{17}x_5$$

2) Придавая свободным неизвестным любые значения, получим сколько угодно частных решений.

3) Находим фундаментальную систему решений, которая состоит из (n-r) решений.

В нашем случае n=5, r=3, следовательно, фундаментальная система решений состоит из 2-х решений, причем эти решения должны быть линейно независимыми.
Чтобы строки были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из элементов строк, был равен количеству строк, то есть 2.

Достаточно придать свободным неизвестным $x_4, x_5$ значения из строк определителя 2-го порядка, отличного от нуля, и подсчитать $x_1, x_2, x_3$.

Простейшим определителем, отличным от нуля, является единичная матрица.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Задание 7

**Образуют ли линейное пространство множество целых чисел?**

Да, множество целых чисел образует линейное пространство над полем вещественных чисел (или над другим полем, например, полем комплексных чисел). Линейное пространство - это алгебраическая структура, удовлетворяющая некоторым определенным свойствам. В данном случае, множество целых чисел удовлетворяет основным свойствам линейного пространства.

1) Замкнутость относительно сложения: Если $a$ и $b$ - целые числа, то их сумма $a + b$ также является целым числом.
2) Замкнутость относительно умножения на скаляр: Если $a$ - целое число, а $c$ - любое вещественное число, то произведение $c \cdot a$ также является целым числом.
3) Ассоциативность сложения: Для любых целых чисел $a$, $b$ и $c$ выполняется равенство $(a + b)+c = a +(b + c)$.
4) Коммутативность сложения: Для любых целых чисел $a$ и $b$ выполняется равенство $a + b=b + a$.
5) Существование нулевого элемента: Существует целое число 0, такое что $a + 0 = a$ для любого целого числа $a$.

6) Существование противоположного элемента относительно сложения: Для каждого целого числа a существует целое число −a, такое что a + (−a) = 0.

Таким образом, множество целых чисел удовлетворяет всем этим свойствам и, следовательно, является линейным пространством над полем вещественных чисел.

## Задание 8

Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d} = (3,-2{,}0), \qquad \vec{a} = (-3{,}1{,}0), \qquad \vec{b}(2,-1{,}0), \qquad \vec{c} = (1{,}2{,}1)$$

Решение

Для разложения вектора по базису запишем векторное уравнение:

$$x_1\bar{a} + x_2\bar{b} + x_3\bar{c} = \bar{d}$$

Перепишем векторное уравнение в матричном виде и решим его методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим образуют ли заданные вектора базис, для этого найдем определитель матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Для этого воспользуемся формулой для вычисления определителя матрицы 3 на 3

Так как определитель матрицы не равен нулю, то введеная система векторов является базисом.

Решим уравнение методом Гауса:

1-ую строку делим на -3

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & | & -1 \\ 1 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & | & -1 \\ 1 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

2-ую строку делим на $-\frac{1}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & | & -1 \\ 0 & 1 & -7 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

к 1 строке добавляем 2 строку, умноженную на $\frac{2}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & | & 1 \\ 0 & 7 & -7 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

к 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на 5; к 2 строке добавляем 3 строку, умноженную на 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\bar{d} = \bar{a} + 3\bar{b}$

## Задание 9

**Найти собственные числа и собственные векторы матрицы А**

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{matrix}$$

Из определения собственного вектора v соответствующего собственному значению λ: A*v=λ*v

Тогда: A*v-λ*v=(A-λ*E)*v=0

Уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда det(A-λ*E)=0

$$\det(A-\lambda*E) = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

$\lambda_1=1$

$\lambda_2=3$

Для каждого λ найдем его собственные вектора:

$\lambda_1=1$

$$A-\lambda*E = \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{matrix}$$

$A*v=\lambda*v$

Тогда имеем однородную систему линейных уравнений, решим ее методом Гаусса:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную $x_2$:

$x_2 = -x_3$

Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную $x_1$:

$x_1=x_3$

Ответ: $x_1=x_3$; $x_2=-x_3$; $x_3=x_3$