1 Aparente contradição encontrada com a distribuição de probabilidade da variável aleatória que é o produto de outras duas

Sejam X e Y duas variáveis contínuas e independentes descritas pelas funções densidade de probabilidade f_X e f_Y. Segue que a função densidade de probabilidade de $Z = XY$ é:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z/x) \frac{1}{|x|} dx \tag{1}$$

Suponha $f_X(x) = \frac{C_1}{x^{\alpha_1}}$ e $f_Y(y) = \frac{C_2}{y^{\alpha_2}}$ com $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ constantes e não nulos. Considere também $1 \leq x, y \leq L$. Aplicando a fórmula inicial:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z/x) \frac{1}{|x|} dx \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z/y) \frac{1}{|y|} dy && (2)\\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1}{x^{\alpha_1}} \frac{C_2}{(z/x)^{\alpha_2}} \frac{1}{x} dx \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_2}{y^{\alpha_2}} \frac{C_1}{(z/y)^{\alpha_1}} \frac{1}{y} dy && (3)\\
C_1 C_2 z^{-\alpha_2} \int_1^L x^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} dx \quad &= C_1 C_2 z^{-\alpha_1} \int_1^L y^{\alpha_1 - \alpha_2 - 1} dy && (4)\\
C_1 C_2 z^{-\alpha_2} \left. \frac{x^{\alpha_2 - \alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right|_{x=1}^{L} \quad &= C_1 C_2 z^{-\alpha_1} \left. \frac{y^{\alpha_1 - \alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2} \right|_{y=1}^{L} && (5)\\
z^{-\alpha_2} \left[\frac{C_1 C_2}{\alpha_2 - \alpha_1} (L^{\alpha_2 - \alpha_1} - 1) \right] \quad &= z^{-\alpha_1} \left[\frac{C_1 C_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (L^{\alpha_1 - \alpha_2} - 1) \right] && (6)
\end{aligned}$$

O que é impossível se $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

(Não pode haver equivalência entre duas leis de potência de expoentes diferentes, contradição evidente já na terceira linha com a integral definida. O único termo não constante na última linha é z.)