Zufällige pursuit-evasion in Graphen

Tim Jammer

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik, Arbeitsbereich Algorithmen Randomisierung Theorie
Seminar FGI im WiSe16/17

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der formalen Analyse von pursuit-evasion auf Graphen. Bei pursuit-evasion handelt es sich um ein "Spiel", welches von zwei Spielern, dem Jäger und dem Hasen auf einem Graphen gespielt wird. Der Hase versucht, dem Jäger so lange wie möglich zu entkommen, während der Jäger versucht, den Hasen möglichst schnell zu fangen. Es wird betrachtet, welchen Einfluss die Art des Graphens (Baum oder Zyklus) auf das Spiel hat. Ein wichtiges Ergebnis ist, dass für den Hase Zyklen von Vorteil sind, während der Jäger auf Bäumen im Vorteil ist.

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der formalen Analyse von pursuit-evasion auf Graphen. Bei pursuit-evasion handelt es sich um ein "Spiel", welches von zwei Spielern, dem Jäger und dem Hasen auf einem Graphen gespielt wird. Der Hase versucht, dem Jäger so lange wie möglich zu entkommen. Der Jäger versucht im Gegensatz dazu, den Hasen möglichst schnell zu fangen. Um zu zeigen welchen Einfluss die Art des Graphens (ob er z.B. ein Baum ist) auf das Spiel hat, betrachten wir in Abschnitt 4 zunächst das Spiel auf einem allgemeinen Graphen und widmen uns in Abschnitt 5 und 6 speziellen Strategien auf Zyklen und in Bäumen.

2 Problemdefinition

Wir betrachten pursuit-evasion auf einem ungerichteten, ungewichteten, zusammenhängenden Graphen. Der "Jäger" versucht den "Hasen" zu fangen, also in einer Runde auf dem gleichen Knoten wie der Hase zu sein. Pro Runde kann der Jäger eine beliebige Kante entlanggehen oder auf dem gleichen Knoten bleiben. Er hat keine Informationen, wo sich der Hase gerade befindet. Der Hase kann in einer Runde auf einen beliebigen Knoten des Graphen "springen". Er hat keine Informationen über den Jäger. Die einzige Interaktion zwischen diesen beiden Spielern findet dann statt, wenn das Spiel beendet wird, also wenn am Ende einer Runde Hase und Jäger auf dem gleichen Feld sind. Der Hase hat dabei das Ziel, so lange wie möglich zu entkommen, während der Jäger die Anzahl der gespielten Runden so gering wie möglich halten möchte.

Formal werden die Züge des Jägers und Hasen durch eine Folge von Knoten, auf denen sich der entsprechende Spieler befindet, modeliert. Diese Folge kann auch Strategie genannt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Strategie des Jägers zu dem Graphen passen muss, und daher für zwei direkt aufeinander folgende Elemente in der Folge $\mathcal{H}(v_i, v_{i+1})$ $v_i = v_i = v_{i+1}$ oder $(v_i, v_{i+1}) \in E$ gelten muss. Diese Strategie kann auch zufällig erzeugt werden. Dies soll in den nächsten Abschnitten analysiert werden.

3 Anwendung

Neben der Betrachtung dieses Problems in der Spieltheorie, um aus theoretischem Interesse herauszufinden, ob und welche Strategien die Spieler verfolgen können, obwohl sie keine Informationen über die Züge des anderen Spielers bekommen können, gibt es noch weitere Anwendungen.

Naheliegende Anwendungen für solche Verfolger-Probleme kann man z.B. bei der Verfolgung Verdächtiger finden. Ein verwandtes Problem, wie viele Verfolger man benötigt, um innerhalb eines Graphens den Verfolgten sicher zu finden, ist beispielsweise NP-schwer.

Eine weitere Anwendung für solche Probleme findet man z.B. in Mobilfunknetzwerken. Die Nachricht ist dabei der Jäger und das mobile Empfangsgerät der Hase. Die Nachricht versucht über Kabelleitungen die Funkzelle zu erreichen, in der sich das Mobilfunkgerät aktuell befindet, wobei das Mobilfunkgerät praktisch belibig zwischen den einzelnen Funkzellen wechseln kann. Dieses Problem bei der Nachrichtenzustellung findet man insbesondere bei mobilen Ad-hoc-Netzwerken, wo es keine zentralisierte Registrierung gibt, in welcher Zelle sich welches Endgerät aufhält.

4 Jäger-Strategie

In diesem Abschnitt soll eine zufallsbasierte Strategie für den Jäger entwickelt werden, bei der die erwartete Anzahl an Runden, um den Hasen zu fangen, in $O(n \cdot log(diam(G)))$ liegt. Diese obere Schranke ist unabhängig von der gewählten Strategie des Hasen oder des zugrundeliegenden Graphen.

Zunächst zerlegen wir den allgemeinen Graphen in $r = O(d)$ Zyklen der Länge $O(d = diam(G))$. Jeder Knoten kann dabei in jedem Zyklus auch mehrfach vorkommen. Man kann diese Zerlegung einfach anhand eines Spannbaums berechnen. Ein Spannbaum hat n-1 Kanten. Man geht entlang dieses Spannbaums eine Tour aus $2n - 2$ Kanten, sodass jede Kante 2 mal in der Tour vorkommt. Man zerlegt diese Tour nun in Abschnitte der Länge $\frac{d}{2}$. Jeder dieser Abschnitte beschreibt dann einen Zyklus der Länge d (hin und zurück).

Wir betrachten später eine Strategie zum Jagen des Hasen in einem Zyklus. Um den Hasen zu fangen, wählt man gleichverteilt einen Zyklus aus und benutzt die untenstehende Strategie, um den Hasen zu finden, wenn er in diesem Zyklus ist.

Es seien die Knoten jedes Zyklus von 1 bis d durchnummeriert. Jeder Knoten im Graph hat möglicherweise mehrere Nummern. Hase und Jäger müssen sich jeweils auf einen dieser virtuellen Knoten im Zyklus festlegen. Der Hase zählt nur dann als gefangen, wenn er sich auf den gleichen Zyklusknoten wie der Jäger festgelegt hat. Diese Abschätzung verlangsamt nur den Jäger, da der Hase möglicherweise auf dem gleichen Knoten ist, sich allerdings auf einen anderen Zyklusknoten als der Jäger festgelegt hat, und daher nicht gefangen wird. Der Hase wird daher gefangen, wenn er sich auf dem gleichen Zyklusknoten und im gleichen Zyklus wie der Jäger befindet.
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich Jäger und Hase auf dem gleichen Zyklusknoten und im gleichen Zyklus befinden ist genau die Wahrscheinlichkeit, dass der Hase in einem Zyklus mit d Knoten gefangen wird. Diese ist unten mit $\frac{1}{log(d)}$ abgeschätzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Jäger zu diesem Zeitpunkt genau im gleichen Zyklus wie der Hase befindet ist $\frac{1}{r}$, da der Jäger gleichverteilt

einen Zyklus ausgewählt hat. Gesamt ergibt sich also:

$$P = \Omega(\frac{1}{r \cdot log(d)}) = \Omega(\frac{1}{n \cdot log(d)})$$

Ziel ist es daher nun, eine untere Schranke in $\Omega\frac{1}{log(n)}$ für die Wahrscheinlichkeit anzugeben, dass der Jäger den Hasen auf einem Zyklus der Länge n fängt.

Für eine einfachere geometrische Deutung betrachten wir das Problem auf einem Kreis, auf dessen Rand sich der Jäger und Hase befinden. Der Hase kann dabei beliebig zwischen zwei Punkten des Kreises springen. Der Jäger kann sich in eine beliebige Richtung mit einer Geschwindigkeit $0 \leq v \leq 1$ fortbewegen. Man teilt den Kreis in n Intervalle der Größe 1 auf. Jeder Intervall bildet daher einen Knoten im Graphen ab. Der Hase wird also genau dann gefangen, wenn er sich zu einem Zeitpunkt t im gleichen Intervall wie der Jäger befindet.

Der Jäger wählt zuerst eine zufällige Startposition. Diese kann er in maximal $\frac{n}{2}$ Schritten erreichen. Wir betrachten nicht, ob der Hase bereits bei dieser Initialisierung gefangen wird. Anschlließend teilen wir das Spiel in Phasen der Länge n ein. Der Jäger wählt für jede dieser Phasen zufällig (gleichverteilt) eine Geschwindigkeit $0 \leq v \leq 1$ und bewegt sich für n Zeitschritte mit dieser Geschwindigkeit im Uhrzeigersinn fort.

Gefragt ist somit eine untere Grenze für die Wahrscheinlichkeit, dass der Hase in einer Phase gefangen wird.

Da der Hase die Strategie des Jägers nicht kennt oder seine Entscheidungen von ihm abhängig machen kann, können wir eine beliebige Strategie $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, ..., \mathcal{R}_n$ für den Hasen als fest gegeben ansehen.
Wir bezeichenen mit *hits* die Zufallsvariable, die angibt, wie oft sich Hase und Jäger im gleichen Intervall befinden. Wir möchten also die Wahrscheinlichkeit $Pr[hits \geq 1]$ abschätzen. Da *hits* nicht negativ sein kann, gilt $Pr[hits \geq 1] = Pr[hits \neq 0]$. Daher kann man $Pr[hits \geq 1]$ mithilfe der Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung abschätzen (second moment method):

$$Pr[hits \neq 0] \geq \frac{(E[hits])^2}{E[hits^2]}$$

Nun sind die Erwartungswerte $E[hitsa]$ und $E[hits^2]$ zu bestimmen.
Dazu ist es hilfreich sich die geometrische Deutung anzusehen: Man kann sich den Zufallsraum $\Omega = [0, n) \times [0, 1]$ als Fläche eines Zylinders vorstellen. Der Jäger wählt daraus ein zufälliges Tupel (s, v) (Startposition, Geschwindigkeit). Sei S_i^t die Menge der Zufallsereignisse $\omega \in \Omega$, bei denen der Jäger zum Zeitpunkt t im i-ten Intervall ist. Man kann sich diese Mengen S_i^t als Streifen auf dem Zylinder vorstellen. Siehe Abb. 1 Jeder dieser Streifen hat eine Fläche von 1. Dies kann

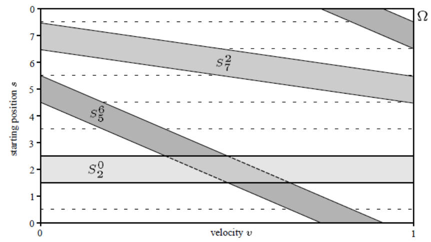

Abb. 1. Geometrische Deutung des Wahrseinlichkeitsraums Ω

man leicht feststellen, wenn man beachtet, dass es für festes t (z.B.= 0) genau n Streifen S_i^0 für die Positionen $I = 1, ..., n$ gibt, die die gesamte Fläche von Ω abdecken. Da die Fläche $A(\Omega) = n$ ist, hat jeder der n Streifen die gleiche Fläche von 1.

Der Jäger fängt daher den Hasen in Schritt t, wenn seine zufällige Auswahl von Startposition und Geschwindigkeit in $S^t_{\mathcal{R}_t}$ liegt. Daher gilt: $hits(\omega) = \sum_{t=0}^{n-1} S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)$[1]

$$
\begin{aligned}
E[hits] &= E[\sum_{t=0}^{n-1} S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)] && (1)\\
&\text{Linearität des Erwartungswertes} && (2)\\
&= \sum_{t=0}^{n-1} E[S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)] && (3)\\
&\text{Definition Erwartungswert} && (4)\\
&\text{ jeder Streifen hat die gleiche Wahrscheinlichkeit von } \frac{1}{n} && (5)\\
&= \sum_{t=0}^{n-1} \int_{\Omega} \frac{1}{n} S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)\ d\omega && (6)\\
&= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \int_{\Omega} S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)\ d\omega && (7)\\
&\text{Fläche eines Streifens ist =1} && (8)\\
&= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot 1 && (9)\\
&= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{n} && (10)\\
E[hits] &= 1 && (11)
\end{aligned}
$$

[1] mit $S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)$ als Indikatorfunktion 1 wenn $\omega \in S^t_{\mathcal{R}_t}$ ist, 0 sonst

$$E[hits^2] = E[\left(\sum_{t=0}^{n-1} S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)\right)^2] \tag{12}$$

$$= E[\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1} S^s_{\mathcal{R}_s}(\omega) \cdot S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)] \tag{13}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1} \int_\Omega \frac{1}{n} \cdot S^s_{\mathcal{R}_s}(\omega) \cdot S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)\ d\omega \tag{14}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \int_\Omega S^s_{\mathcal{R}_s}(\omega) \cdot S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)\ d\omega \tag{15}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1} \int_\Omega S^s_{\mathcal{R}_s}(\omega) \cdot S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)\ d\omega \tag{16}$$

$\int_\Omega S^s_{\mathcal{R}_s}(\omega) \cdot S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)\ d\omega$ ist die Schnittfläche zweier Streifen. Man kann sie mit $\frac{1}{|t-s|}$ abschätzen (siehe Abb. 2). Durch die Definition der Streifen ist $a = 1$ (Länge

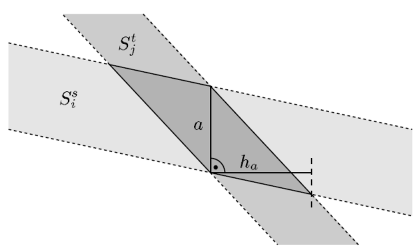

Abb. 2. Kreuzungsfläche zweier Streifen

der Intervalle auf dem Kreis) und $h_a = \frac{1}{|t-s|}$ (x-Differenz der Schnittpunkte der unteren Geraden, die $S^t_{\mathcal{R}_t}$ begrenzt mit den beiden Geraden, die $S^s_{\mathcal{R}_s}$ begrenzen). Für den Fall das $s = t$ (und damit $S^t_{\mathcal{R}_t} = S^s_{\mathcal{R}_s}$) ist die Schnittfläche offensichtlich die Fläche eines der Streifen und damit $= 1$.

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1} \int_\Omega S^s_{\mathcal{R}_s}(\omega) \cdot S^t_{\mathcal{R}_t}(\omega)\ d\omega \tag{17}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1}(\sum_{t=0}^{s-1} \frac{1}{|t-s|} + \sum_{t=s} 1 + \sum_{t=s+1}^{n-1} \frac{1}{|t-s|}) \tag{18}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (\sum_{t=0}^{s-1} \frac{1}{|t-s|} + \sum_{t=s+1}^{n-1} \frac{1}{|t-s|} + 1) \tag{19}$$

$$\text{die harmonische Reihe } H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{20}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (\sum_{t=0}^{s-1} \frac{1}{|t-s|} + H_{n-s} + 1) \tag{21}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (\sum_{t=0}^{s-1} \frac{1}{|s-t|} + H_{n-s} + 1) \tag{22}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (H_s + H_{n-s} + 1) \tag{23}$$

$$s \leq n \tag{24}$$

$$\geq \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (H_n + H_n + 1) \tag{25}$$

$$\geq \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (2 \cdot H_n + 1) \tag{26}$$

$$\geq \frac{1}{n} \cdot n \cdot (2 \cdot H_n + 1) \tag{27}$$

$$E[hits^2] \geq 2 \cdot H_n + 1 \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

Einsetzen gibt:

$$Pr[hits \neq 0] \geq \frac{(E[hits])^2}{E[hits^2]} \geq \frac{1^2}{2 * H_n + 1}$$

Da gilt $H_n < ln(n) + 1$ für $n \geq 2$ folgt:

$$Pr[hits \neq 0] \in \Omega(\frac{1}{log(n)})$$

Da der Erwartungswert $E[hits] = 1$ ist, kann man erwarten, den Hasen in n Durchläufen n mal zu fangen. Wichtig ist es allerdings hierbei zu beachten, dass man dabei auch auf Konstellationen treffen kann, wo der Hase immer auf dem gleiche Feld wie der Jäger ist, also in einem Spiel von n Runden n mal gefangen. Da *hits* anzeigt wie oft der Hase in einem Spiel gefangen wird, ziehen solche Spiele, in denen der Hase mehrfach gefangen wird, den Erwartungswert, wie oft ich den Hasen in einem Spiel fange, nach oben. Das heißt noch nicht, dass es wahrscheinlich ist, den Hasen nur einmal zu fangen. Daher gibt es auch solche Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable > 0 ist.

Wird der Hase mehrfach gefangen, erhöht sich der Erwartungswert. Im folgenden Abschnitt betrachten wir, wie sich der Hase dies zunutze machen kann.

5 Hasen-Strategie auf einem Zyklus

Es stellt sich nun die Frage wie gut die oben dargestellte Jäger-Strategie ist. Tatsächlich kann man zeigen, dass es auf einem Zyklus eine Hasen-Strategie gibt, die eine erwartete Anzahl von $O(n \cdot log(n))$ Runden hat, bevor der Hase gefangen wird. Da der Beweis keine so anschauliche geometrische Deutung hat, verzichten wir an dieser Stelle auf ihn und geben nur die Intuition hinter der Strategie an.

Wenn der Hase zufällig durch den Graphen springt, hat er in jedem Schritt eine Chance von $\frac{1}{n}$ auf dem Feld zu landen, wo sich der Jäger gerade befindet. Damit ist die erwartete Länge des Spiels nur in $O(n)$.
Die Idee hinter einer besseren Strategie für den Hasen besteht nun darin "auszunutzen", dass der Jäger an den Graphen gebunden ist. Nachdem der Hase eine zufällige Startposition gewählt hat, springt der Hase daher besser für x Runden nur in der näheren Umgebung (formal: die Pfadlänge zu einem Knoten bestimmt die Wahrscheinlichkeit, mit der er zum Sprung ausgewählt wird; Knoten die weiter vom Hasen entfernt sind haben eine geringere Wahrscheinlichkeit). Dies sorgt dafür, dass der Hase, falls der Jäger in der Nähe ist, sehr wahrscheinlich gefangen wird. Falls der Jäger alledings nicht in der Nähe der zufällig gewählten Startposition des Hasen ist, so ist es für den Jäger schwer möglich den Hasen zu erreichen, da er die Kanten des Graphen benutzen muss. Wenn der Jäger dann nach x Runden möglicherweise in der Nähe des Hasen ist, springt der Hase zu einem anderen Punkt im Graphen, um es dem Jäger erneut schwierig zu machen ihn zu erreichen.
Idee der formalen Analyse dahinter ist, dass $E[hits|hits \geq 1]$ sehr groß ist, da es besonders wahrscheinlich ist, dass sich Hase und Jäger erneut treffen, wenn sie nach dem ersten Treffen in unmittelbarer Nähe zueinander sind.

Zu beachten ist dabei auch, dass die Verallgemeinerung auf allgemeine Graphen für die Abschätzung der Hasen-Strategie nicht möglich ist, da die Verallgemeinerung, wie sie oben beschrieben wird, nur den Jäger behindert. Schließlich kann man nicht begründen, warum der Hase immer minimal n log n Runden überlebt, wenn man den Jäger einschränkt, möglicherweise gibt es für den nicht eingeschränkten Jäger ja eine bessere Strategie. Das dies tatsächlich der Fall ist, wird im nächsten Abschnitt erläutert.

6 Jäger-Strategie auf einem binären Baum

Auf einem vollständigen Binärbaum kann die Jägerstrategie wie folgt verbessert werden, sodass die erwartete Anzahl an Runden, bis der Hase unabhängig von seiner gewählten Strategie gefangen wird, in $O(n)$ liegt.

Wichtiges Merkmal eines Binärbaumes ist dabei, dass jeder Knoten von jedem anderen aus für den Jäger in maximal log n Schritten erreichbar ist. Die Strategie lässt sich daher prinzipiell auch auf andere, nicht zyklenfreie Graphen übertragen, bei denen die Knoten ebenfalls niemals weiter als $O(log(n))$ voneinander entfernt sind.

Für den Beweis sei zunächst angenommen, dass sich der Hase nur auf den Blättern aufhält.
Als Strategie für den Jäger eignet sich im Baum ein rekursives Verfahren. Sei h die Höhe des Baums, auf der sich der Jäger befindet. Der Jäger startet in der Wurzel (Höhe h). Er wählt sich zufällig vier Knoten der Höhe $\frac{h}{2}$ aus und arbeitet diese rekursiv ab. Das heißt auf Ebene $\frac{h}{2}$ sucht er sich vier Knoten der Ebene $\frac{h}{4}$. Die Rekursion stoppt bei Höhe 2 [2], dann besucht der Jäger alle 4 Blätter dieses Teilbaums, um zu den Hasen dort zu suchen.

Eine Rekursion kann in $O(L)$ Schritten durchgeführt werden, wobei $L = 4^{log_2(log_2(n))} \in O(log^2(n)$ [3] die Anzahl der besuchten Blätter bezeichnet. Der Teilbaum, der während der rekursiven Suche nach dem Hasen besucht wird, entsteht so, dass er die Höhe $O(log(h)) = O(log(log(n)))$ hat. Mit jedem rekursiven Abstieg halbiert sich die Pfadlänge um ein Blatt zu besuchen, gleichzeitig werden aber vier rekursive Abstiege gemacht, sodass die Anzahl der besuchten Blätter klar der bestimmende Faktor für die Länge einer Phase darstellt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Hase in einer dieser Phasen gefangen wird, ist in $\Theta(\frac{L}{m})$ mit $m = \frac{n}{2}$ als die Anzahl der Blätter des Baums.

$$Pr[hits \geq 1] = \frac{E[hits]}{E[hits|hits \geq 1]}$$

Es lässt sich schnell sehen, dass $E[hits] = \frac{L}{m}$ gilt. Für $1 \leq i \leq L$ bezeichne $hit(i)$ die Zufallsvariable, dass der Hase im i-ten besuchten Blatt zur gleichen Zeit wie der Jäger ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{1}{m}$, da der Hase zu jedem Zeitpunkt auf einem der m Blätter sein muss. Man beachte wieder, dass wir nicht die Wahrscheinlichkeit dafür anbgeben, dass der Hase sich auf das Feld mit dem Jäger bewegt. Wie in Abschnitt 4 können wir die Strategie des Hasen als gegeben ansehen. Wir geben daher die Wahrscheinlichkeit an, dass der Jäger auf das Feld trifft, das sich der Hase vorher ausgewählt hat. Da der Jäger gleichverteilt die Teilbäume auswählt, hat er bei jedem Blatt die gleiche Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{m}$, dass er das Blatt trifft, das der Hase vorher ausgewählt hat.

$$E[hits] = \sum_{i=1}^{L} E[hit(i)] = \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{m} = \frac{L}{m}$$

[2] falls h keine 2er Potenz ist, so wählt der Jäger im ersten Schritt die nächste Ebene, dessen Höhe eine 2er Potenz ist

[3] $4^{log_2(log_2(n))} = 2^{2 \cdot log_2(log_2(n))} = 2^{log_2(log_2(n))} \cdot 2^{log_2(log_2(n))} = log_2(n) \cdot log_2(n)$

Es bleibt zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, den Hasen mehrmals zu trefffen in O(1) ist.
Sei $T_S(l)$ der Teil des (quartären) Suchbaums, der auf der Höhe l beginnt und in dem sich das Blatt i, wo der Hase zuerst getroffen wurde, befindet. Die erwartete Anzahl an Treffen in einem dieser Teilbäume ist maximal $\frac{3 \cdot 4^{l-1}}{2^{2^l}}$, da in diesem Suchbaum $3 \cdot 4^{l-1}$ Knoten mit gleicher Wahrscheinlichkeit besucht werden (man kommt ja gerade vom Teilbaum, in dem der Hase das erste Mal gefunden wurde, daher nur *3* $* 4^{l-1}$). Der Teilbaum enthält gesamt 2^{2^h} Knoten, die der Hase gewählt haben könnte. Daher folgt:

$$E[hits|hits \geq 1] \leq 1 + \sum_{l=1}^{h_s} \frac{3 \cdot 4^{l-1}}{2^{2^l}} \tag{30}$$

$$= 1 + 3 \cdot \sum_{l=1}^{h_s} \frac{4^{l-1}}{4^l} \tag{31}$$

$$= 1 + 3 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{4}{16} + \frac{16}{256} + ...) \tag{32}$$

$$= 1 + 3 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...) \tag{33}$$

$$\leq 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \tag{34}$$

$$= O(1) \tag{35}$$

Es bleibt noch zu zeigen, wie man mit einer Hasenstrategie umgeht, bei denen der Hase nicht auf die Blätter des Baumes beschränkt ist. Dafür definieren wir einen virtuellen Baum T' mit 2n Knoten, sodass jedes Blatt von T' einem Knoten im Ausgangsbaum entspricht. Damit ist der Hase jetzt immer auf einem Blatt. Man kann den virtuellen Baum so bilden, dass jeder Pfad zwischen Blättern im virtuellen Baum Länge $O(logn)$ hat, und diesem auch einem Pfad im Ausgangsgraphen der Länge $O(logn)$ entspricht.
Der Jäger simuliert dann das rekursive Verfahren von oben auf T'. Da der Hase jetzt nur noch auf den Blättern sein kann und die Länge der Pfade, die der Jäger zwischen zwei Knoten gehen muss nicht zunimmt, gilt obige Abschätzung der Wahrscheinlichkeit auch für Hasenstrategien, die sich auch inneren Knoten des Baumes aufhalten.

7 Fazit

Die Arbeit hat gezeigt, dass der zugrundeliegende Graph sehr stark beeinflusst, wie lange es dem Hasen gelingen kann vor dem Jäger zu fliehen. Auf einem Zyklus kann der Hase erwarten, dass er im Mittel über $O(n \cdot log(n))$ Runden dem Jäger ausweichen kann. Auf allgemeinen Graphen ist eine solche Strategie optimal, da der Jäger auf allgemeinen Graphen erwarten kann, den Hasen in $O(n \cdot log(n))$ Runden zu trefffen. Auf einem vollständigen Binärbaum kann der

Jäger jedoch erwarten, den Hasen in $O(n)$ zu fangen. Wenn man mit gerichteten Graphen arbeitet ist es allerdings auch möglich einen Graphen zu konstruieren, in dem der Hase erwarten kann $O(n^2)$ Runden lang den Jäger auszuweichen. Interressant ist zu sehen, dass die intuitive Strategie des sich versteckens (nicht stark hin und her springen) für das nicht gefunden werden vorteilhat ist. Dagegen hat es sich für den Jäger auch in der formalen Analyse bestätigt, dass es sinvoll ist, "die Wüste nach einem bestimmten Muster zu durchkämmen", also nach einem bestimmten Schema vorzugehen und dabei nicht für längere Zeit stehenzubleiben.

Literatur

[ARS+03] Micah Adler, Harald Räcke, Naveen Sivadasan, Christian Sohler, and Berthold Vöcking. Randomized pursuit-evasion in graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 12(03):225–244, 2003.