Aufgabe I1

a) Die Sprache $L_1 = \{a^i b^j \mid i + j \leq 200, 2i + j \geq 15\}$ ist nicht regulär.

Aufgabe I1

a) Die Sprache $L_1 = \{a^i b^j \mid i + j \leq 200, 2i + j \geq 15\}$ ist nicht regulär.

L_1 nicht regulär: Sei $15 \leq n \leq 100$. Sei $w = a^n b^n$. $w \in L$. Wir betrachten eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$. Wegen Pumping-Lemma muss auch $xy^i z \in L$ für alle i. Das Wort $xy^{200} z$ hat Länge ungefähr 200 und somit zu viele a und b. So gilt $xy^{200} z \notin L$. Also L nicht regulär und Aussage wahr.

Aufgabe I1

a) Die Sprache $L_1 = \{a^i b^j \mid i + j \leq 200, 2i + j \geq 15\}$ ist nicht regulär.

L_1 nicht regulär: Sei $15 \leq n \leq 100$. Sei $w = a^n b^n$. $w \in L$. Wir betrachten eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$. Wegen Pumping-Lemma muss auch $xy^i z \in L$ für alle i. Das Wort $xy^{200} z$ hat Länge ungefähr 200 und somit zu viele a und b. So gilt $xy^{200} z \notin L$. Also L nicht regulär und Aussage wahr.

n fest gewählt, für $n > 200$ gibt es kein passendes Wort zum widerlegen mehr, da L_1 endlich ist. Jede endliche Sprache ist regulär.

Aufgabe I1

b) Die Sprache $L_2 = \{(abcd)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

Aufgabe I1

b) Die Sprache $L_2 = \{(abcd)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

Sei n *belibig. Wir wählen* $w = (abcd)^n$*. Es gilt* $w \in L$.
$x = ab, y = cd, z = (abcd)^{n-1}$*. Es gilt* $w = xyz$ *und* $|xy| \leq n$ *und* $|y| > 0$*. Nach dem Pumping-Lemma muss auch* $xy^iz \in L$*. Es gilt* $xy^2z = abcdcd(abcd)^{n-1} \notin L$*. So mit* L_2 *nicht regulär und wiederlegt.*

Aufgabe I1

b) Die Sprache $L_2 = \{(abcd)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

Sei n *belibig. Wir wählen* $w = (abcd)^n$*. Es gilt* $w \in L$.
$x = ab, y = cd, z = (abcd)^{n-1}$*. Es gilt* $w = xyz$ *und* $|xy| \leq n$ *und* $|y| > 0$*. Nach dem Pumping-Lemma muss auch* $xy^iz \in L$*. Es gilt* $xy^2z = abcdcd(abcd)^{n-1} \notin L$*. So mit* L_2 *nicht regulär und wiederlegt.*

Zerlegung wurde fest gewählt. Die gewünschte Aussage gilt nicht für alle Zerlegungen ($x = \varepsilon, y = abcd, z = (abcd)^{n-1}$ kann man pumpen ohne die Sprache zu verlassen). Die Sprache L_2 ist regulär, da sie durch den regulären Ausdruck $(abcd)^*$ beschrieben wird.

Aufgabe I1

c) Die Sprache $L_3 = \{z = xyx^R \mid x, y \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist kontextfrei.

Aufgabe I1

c) Die Sprache $L_3 = \{z = xyx^R \mid x, y \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist kontextfrei.

$z = a^n b^n a^n$, dann gibt's Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| > 0$. Sei $uvwxy$ so gewählt, dass der vxw-Part im ersten drittel liegt, also nur die ersten as enthält. Nach dem Pump-Lemma muss auch $uv^i wx^i y \in L$ für alle i kann aber trivialistischerweise nicht sein da die Anzahl der a am Anfang sich ändert und am Ende des Wortes gleich bleibt. $\implies$ L_3 nicht konteckstfrei und die Ausage widerlegt.

Aufgabe I1

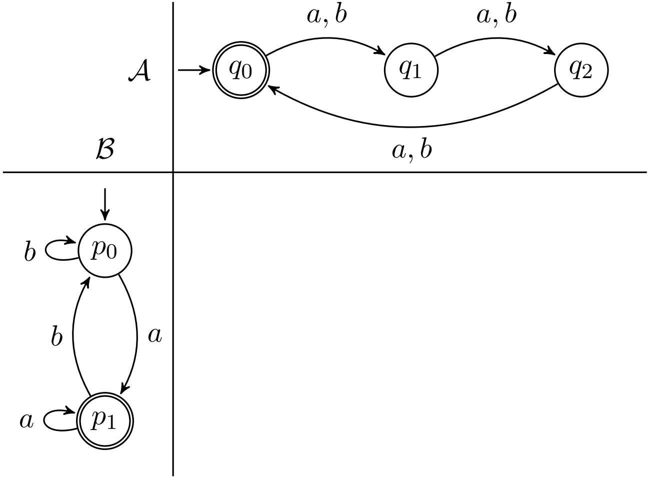
c) Die Sprache $L_3 = \{z = xyx^R \mid x, y \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist kontextfrei.

$z = a^n b^n a^n$, dann gibt's Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| > 0$. Sei $uvwxy$ so gewählt, dass der vxw-Part im ersten drittel liegt, also nur die ersten as enthält. Nach dem Pump-Lemma muss auch $uv^iwx^iy \in L$ für alle i kann aber trivialistischerweise nicht sein da die Anzahl der a am Anfang sich ändert und am Ende des Wortes gleich bleibt. $\implies$ L_3 nicht konteckstfrei und die Ausage widerlegt.

Wieder Zerlegung fest gewählt. Außerdem wurde angenommen, dass $a^m b^n a^n \notin L_3$ für $m \neq n$, tatsächlich ist jedoch $L_3 = \Sigma^*$ und somit regulär.

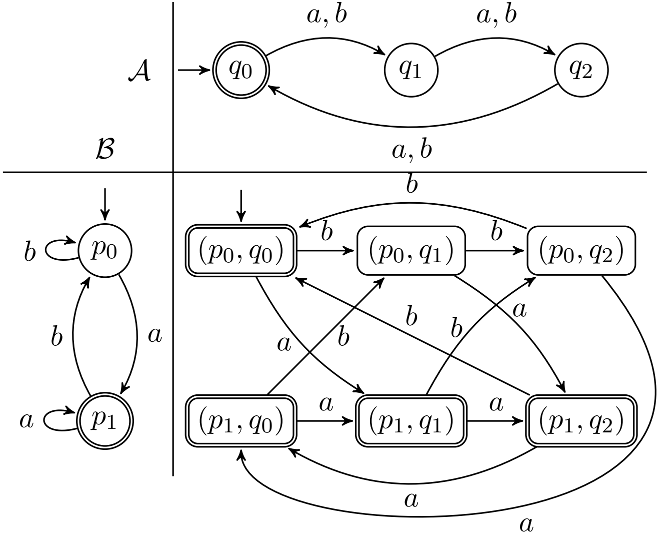
Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Bekannt: Einfache Produktkonstruktion zum Erkennen von Schnitt, Vereinigung, etc. regulärer Sprachen



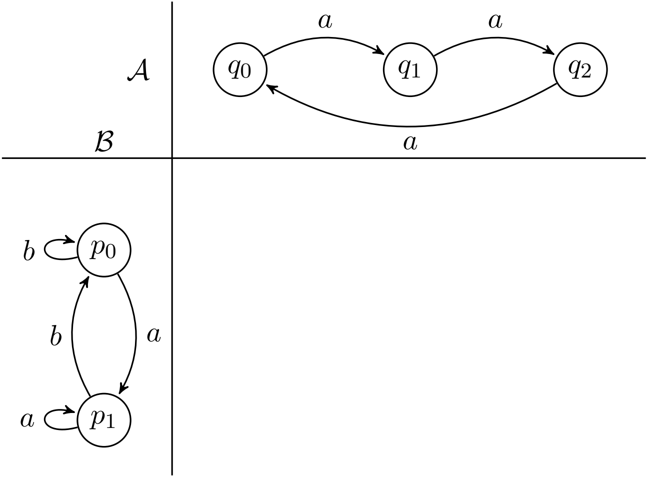
Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Bekannt: Einfache Produktkonstruktion zum Erkennen von Schnitt, Vereinigung, etc. regulärer Sprachen



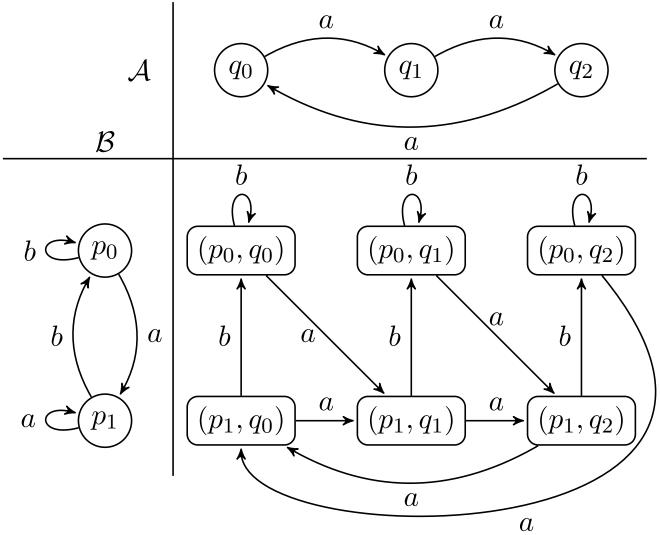
Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Jetzt: Synchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ mit $\Sigma_\circ = \{a\}$.



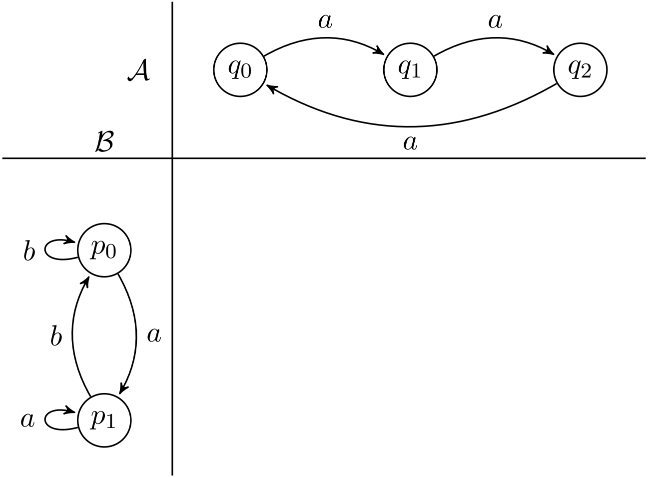
Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Jetzt: Synchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ mit $\Sigma_\circ = \{a\}$.



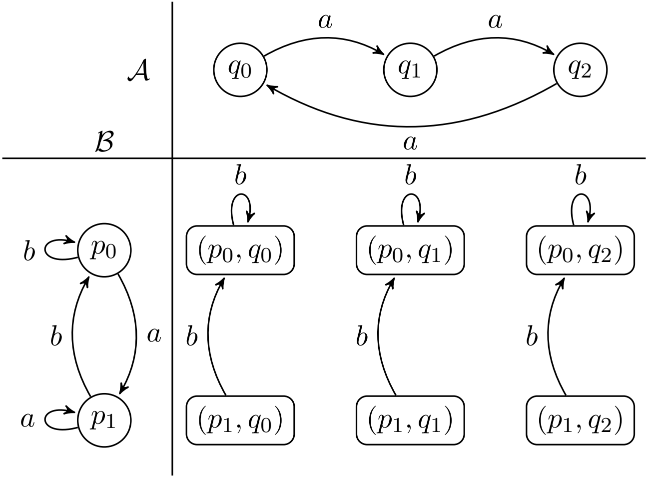
Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Unsynchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \sqcup\!\sqcup \mathcal{B}$.



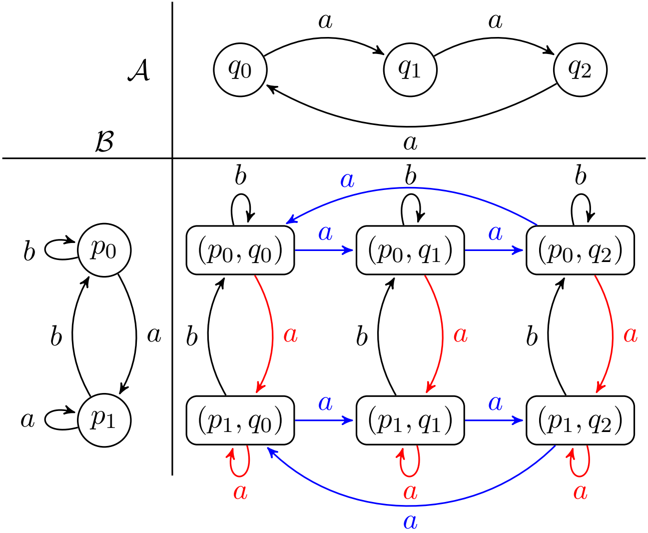
Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Unsynchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \sqcup\!\sqcup \mathcal{B}$.



Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Unsynchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \sqcup\!\sqcup \mathcal{B}$.



Kontextsensitive Grammatiken

- Bisher: Kontextfreie Grammatiken: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \rightarrow \gamma$ mit $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$.

Kontextsensitive Grammatiken

- Bisher: Kontextfreie Grammatiken: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to \gamma$ mit $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Jetzt: Mit Kontextsensitive Grammatiken, d.h. erlaube die Anwendung von Produktionen nur mit bestimmten Kontext:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \qquad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \in (N \cup \Sigma)^+.$$

Kontextsensitive Grammatiken

- Bisher: Kontextfreie Grammatiken: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to \gamma$ mit $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Jetzt: Mit Kontextsensitive Grammatiken, d.h. erlaube die Anwendung von Produktionen nur mit bestimmten Kontext:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \qquad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \in (N \cup \Sigma)^+.$$

- Kontextsensitive Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\begin{aligned} S &\to aSBC \mid \varepsilon, & CB &\to XB, & XB &\to XY, \\ XY &\to BY, & BY &\to BC, & aB &\to ab, \\ bB &\to bb, & C &\to c. \end{aligned}$$

Kontextsensitive Grammatiken

- Bisher: Kontextfreie Grammatiken: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to \gamma$ mit $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Jetzt: Mit Kontextsensitive Grammatiken, d.h. erlaube die Anwendung von Produktionen nur mit bestimmten Kontext:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \qquad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \in (N \cup \Sigma)^+.$$

- Kontextsensitive Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\begin{array}{ccc} S \to aSBC \mid \varepsilon, & CB \to XB, & XB \to XY, \\ XY \to BY, & BY \to BC, & aB \to ab, \\ bB \to bb, & C \to c. & \end{array}$$

- Wie könnte ein Automatenmodell, das kontextsensitive Sprachen erkennt, funktionieren?