# Aufgabe I1

a) Die Sprache $L_1 = \{a^i b^j \mid i + j \leq 200, 2i + j \geq 15\}$ ist nicht regulär.

# Aufgabe I1

a) Die Sprache $L_1 = \{a^i b^j \mid i + j \leq 200, 2i + j \geq 15\}$ ist nicht regulär.

*$L_1$ nicht regulär: Sei $15 \leq n \leq 100$. Sei $w = a^n b^n$. $w \in L$. Wir betrachten eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$. Wegen Pumping-Lemma muss auch $xy^i z \in L$ für alle $i$. Das Wort $xy^{200} z$ hat Länge ungefähr 200 und somit zu viele $a$ und $b$. So gilt $xy^{200} z \notin L$. Also $L$ nicht regulär und Aussage wahr.*

# Aufgabe I1

a) Die Sprache $L_1 = \{a^i b^j \mid i + j \leq 200, 2i + j \geq 15\}$ ist nicht regulär.

*$L_1$ nicht regulär: Sei $15 \leq n \leq 100$. Sei $w = a^n b^n$. $w \in L$. Wir betrachten eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$. Wegen Pumping-Lemma muss auch $xy^i z \in L$ für alle $i$. Das Wort $xy^{200} z$ hat Länge ungefähr 200 und somit zu viele $a$ und $b$. So gilt $xy^{200} z \notin L$. Also $L$ nicht regulär und Aussage wahr.*

$n$ fest gewählt, für $n > 200$ gibt es kein passendes Wort zum widerlegen mehr, da $L_1$ endlich ist. Jede endliche Sprache ist regulär.

# Aufgabe I1

b) Die Sprache $L_2 = \{(abcd)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

# Aufgabe I1

b) Die Sprache $L_2 = \{(abcd)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

*Sei* $n$ *belibig. Wir wählen* $w = (abcd)^n$. *Es gilt* $w \in L$.
$x = ab, y = cd, z = (abcd)^{n-1}$. *Es gilt* $w = xyz$ *und* $|xy| \leq n$ *und* $|y| > 0$. *Nach dem Pumping-Lemma muss auch* $xy^iz \in L$. *Es gilt* $xy^2z = abcdcd(abcd)^{n-1} \notin L$. *So mit* $L_2$ *nicht regulär und wiederlegt.*

# Aufgabe I1

b) Die Sprache $L_2 = \{(abcd)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

*Sei* $n$ *belibig. Wir wählen* $w = (abcd)^n$. *Es gilt* $w \in L$.
$x = ab, y = cd, z = (abcd)^{n-1}$. *Es gilt* $w = xyz$ *und* $|xy| \leq n$ *und* $|y| > 0$. *Nach dem Pumping-Lemma muss auch* $xy^iz \in L$. *Es gilt* $xy^2z = abcdcd(abcd)^{n-1} \notin L$. *So mit* $L_2$ *nicht regulär und wiederlegt.*
Zerlegung wurde fest gewählt. Die gewünschte Aussage gilt nicht für alle Zerlegungen ($x = \varepsilon, y = abcd, z = (abcd)^{n-1}$ kann man pumpen ohne die Sprache zu verlassen). Die Sprache $L_2$ ist regulär, da sie durch den regulären Ausdruck $(abcd)^*$ beschrieben wird.

# Aufgabe I1

c) Die Sprache $L_3 = \{z = xyx^R \mid x, y \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist kontextfrei.

# Aufgabe I1

c) Die Sprache $L_3 = \{z = xyx^R \mid x, y \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist kontextfrei.

*$z = a^n b^n a^n$, dann gibt's Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| > 0$. Sei $uvwxy$ so gewählt, dass der $vxw$-Part im ersten drittel liegt, also nur die ersten $a$s enthält. Nach dem Pump-Lemma muss auch $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i$ kann aber trivialistischerweise nicht sein da die Anzahl der $a$ am Anfang sich ändert und am Ende des Wortes gleich bleibt. $\implies L_3$ nicht konteckstfrei und die Ausage widerlegt.*

# Aufgabe I1

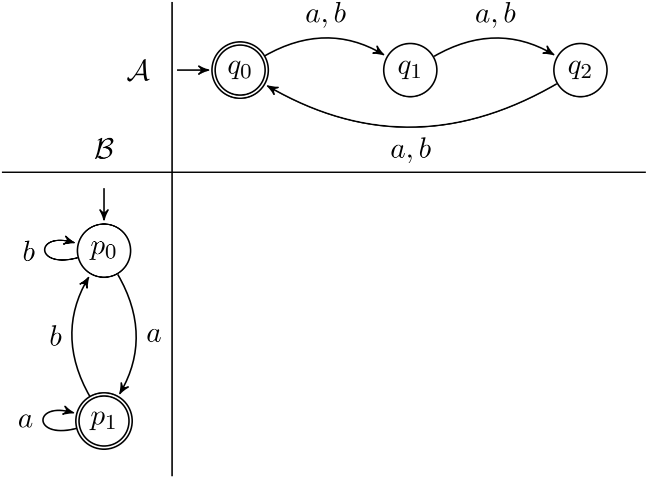
c) Die Sprache $L_3 = \{z = xyx^R \mid x, y \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist kontextfrei.

*$z = a^n b^n a^n$, dann gibt's Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| > 0$. Sei $uvwxy$ so gewählt, dass der $vxw$-Part im ersten drittel liegt, also nur die ersten $a$s enthält. Nach dem Pump-Lemma muss auch $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i$ kann aber trivialistischerweise nicht sein da die Anzahl der $a$ am Anfang sich ändert und am Ende des Wortes gleich bleibt. $\implies$ $L_3$ nicht konteckstfrei und die Ausage widerlegt.*

Wieder Zerlegung fest gewählt. Außerdem wurde angenommen, dass $a^m b^n a^n \notin L_3$ für $m \neq n$, tatsächlich ist jedoch $L_3 = \Sigma^*$ und somit regulär.

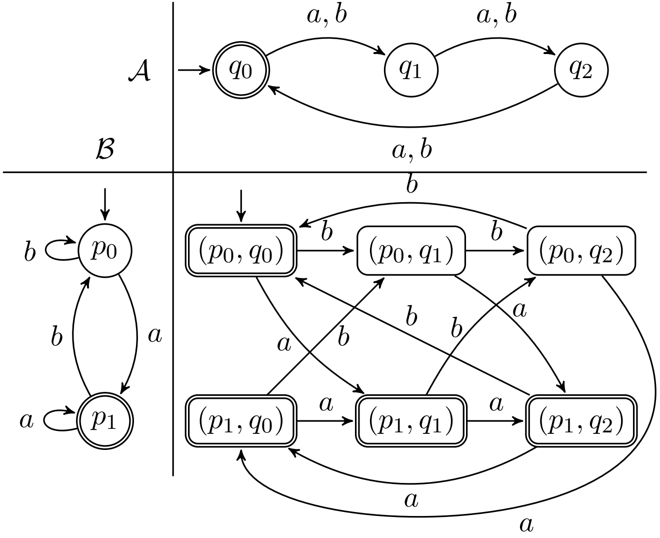
# Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Bekannt: Einfache Produktkonstruktion zum Erkennen von Schnitt, Vereinigung, etc. regulärer Sprachen



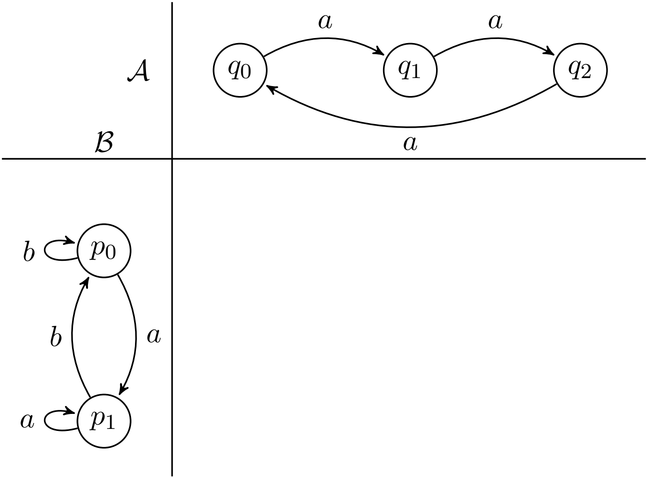
# Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Bekannt: Einfache Produktkonstruktion zum Erkennen von Schnitt, Vereinigung, etc. regulärer Sprachen



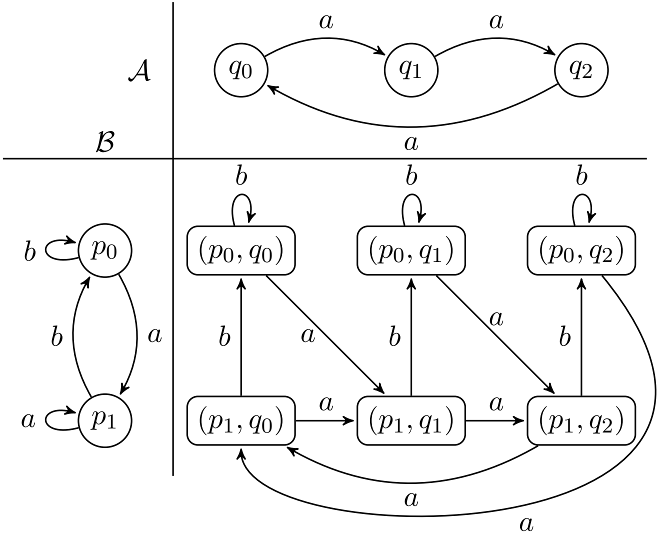
# Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Jetzt: Synchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ mit $\Sigma_\circ = \{a\}$.



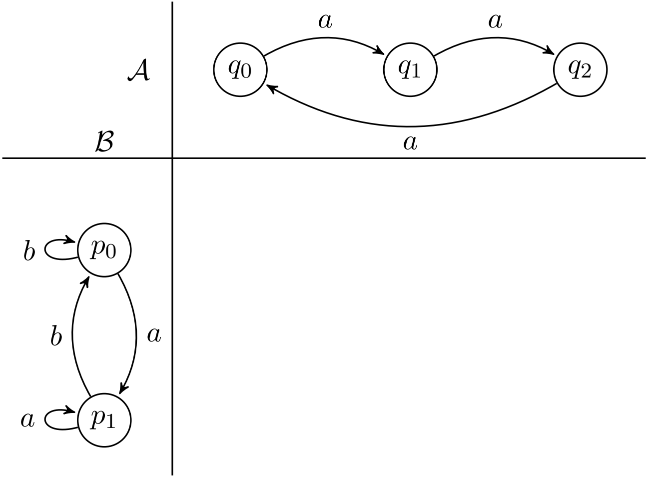
# Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Jetzt: Synchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ mit $\Sigma_\circ = \{a\}$.



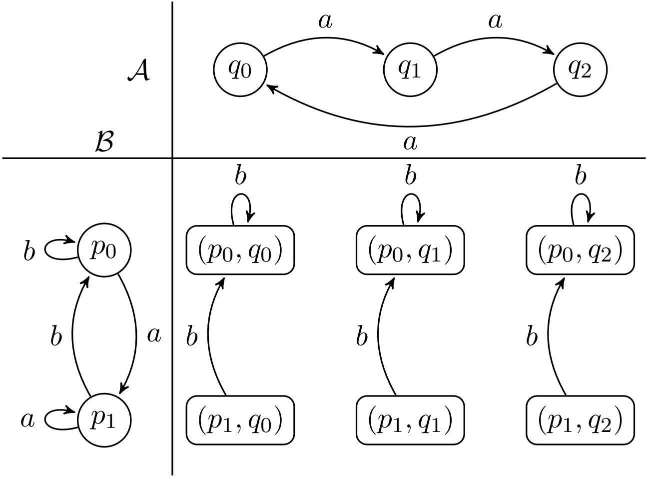
# Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Unsynchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \sqcup\!\sqcup\, \mathcal{B}$.



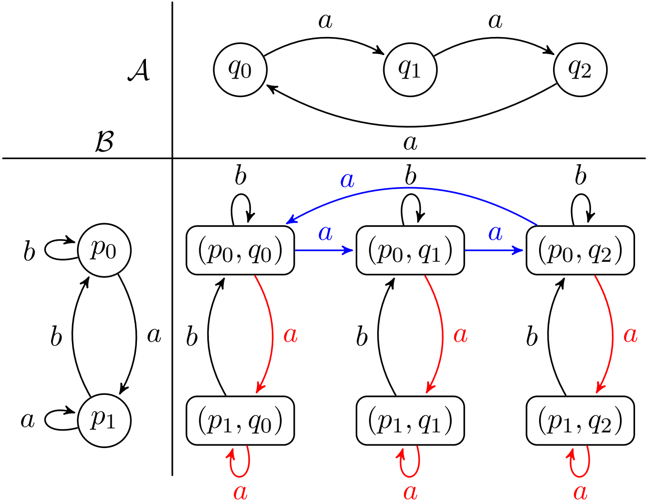
# Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Unsynchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \sqcup\!\sqcup \mathcal{B}$.



# Synchronisierte und Unsynchronisierte Produkte

Unsynchronisiertes Produkt: $\mathcal{A} \sqcup\!\sqcup \mathcal{B}$.



# Kontextsensitive Grammatiken

- Bisher: Kontextfreie Grammatiken: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to \gamma$ mit $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$.

# Kontextsensitive Grammatiken

- Bisher: Kontextfreie Grammatiken: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to \gamma$ mit $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Jetzt: Mit Kontextsensitive Grammatiken, d.h. erlaube die Anwendung von Produktionen nur mit bestimmten Kontext:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \qquad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \in (N \cup \Sigma)^+.$$

# Kontextsensitive Grammatiken

- Bisher: Kontextfreie Grammatiken: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to \gamma$ mit $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Jetzt: Mit Kontextsensitive Grammatiken, d.h. erlaube die Anwendung von Produktionen nur mit bestimmten Kontext:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \qquad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \in (N \cup \Sigma)^+.$$

- Kontextsensitive Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\begin{aligned} S &\to aSBC \mid \varepsilon, & CB &\to XB, & XB &\to XY, \\ XY &\to BY, & BY &\to BC, & aB &\to ab, \\ bB &\to bb, & C &\to c. \end{aligned}$$

# Kontextsensitive Grammatiken

- Bisher: Kontextfreie Grammatiken: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen der Form $A \to \gamma$ mit $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$.
- Jetzt: Mit Kontextsensitive Grammatiken, d.h. erlaube die Anwendung von Produktionen nur mit bestimmten Kontext:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \qquad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \in (N \cup \Sigma)^+.$$

- Kontextsensitive Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\begin{array}{ccc} S \to aSBC \mid \varepsilon, & CB \to XB, & XB \to XY, \\ XY \to BY, & BY \to BC, & aB \to ab, \\ bB \to bb, & C \to c. & \end{array}$$

- Wie könnte ein Automatenmodell, das kontextsensitive Sprachen erkennt, funktionieren?