# Tri par séléction

**Propriété 1**

*Soit $I$ un ensemble fini non vide de cardinal $n$ (typiquement $[1..n]$ ou $[0..n-1]$).*
*Soit $(x_i)_{i\in I}\in X^I$ où $(X,\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.*
*Soit $i_1\in\arg\min\limits_{i\in I} x_i$. On note $\widetilde{I}=I\setminus\{i_1\}$.*

*Si $\widetilde{\sigma}\in Bij\left([1..n-1],\widetilde{I}\right)$ est telle que $(x_{\widetilde{\sigma}(i)})_{i\in[1..n-1]}$ est croissante, alors le prolongement $\sigma$ de $\widetilde{\sigma}$ défini ci-contre est une bijection telle que $(x_{\sigma(i)})_{i\in[1..n]}$ est croissante.*

$$\sigma=\begin{pmatrix}[1..n] & \rightarrow & I\\ 1 & \mapsto & i_1\\ i\geqslant 2 & \mapsto & \widetilde{\sigma}(i-1)\end{pmatrix}$$

**Preuve :** Soit $\widetilde{\sigma}\in Bij\left([1..n-1],\widetilde{I}\right)$ telle que $(x_{\widetilde{\sigma}(i)})_{i\in[1..n-1]}$ est croissante, et $\sigma$ défini comme dans l'énoncé.

- **Montrons que $\sigma$ est une bijection.**
Par définition de $\sigma$, $\sigma(1)=i_1$ et $\sigma([2..n])=\widetilde{\sigma}([2..n]-1)=\widetilde{\sigma}([1..n])$, or comme $\widetilde{\sigma}$ est en particulier surjective, $\widetilde{\sigma}([1..n])=\widetilde{I}$. On a donc $\sigma(I)=\widetilde{I}\cup\{i_1\}=I$, autrement dit $\sigma$ est surjective.

Soit $(i,j)\in[1..n]^2$ tel que $\sigma(i)=\sigma(j)$.
$\rightarrow$ Si $(i,j)\in\{1\}^2$, on a $i=j=1$.
$\rightarrow$ Si $(i,j)\in[2..n]^2$, on a $\sigma(i)=\widetilde{\sigma}(i-1)$ et $\sigma(j)=\widetilde{\sigma}(j-1)$, donc $\widetilde{\sigma}(i-1)=\widetilde{\sigma}(j-1)$, ce qui implique par surjectivité de $\widetilde{\sigma}$ que $i-1=j-1$, donc $i=j$.
$\rightarrow$ Si $(i,j)\in\{1\}\times[2..n]$, on a $i_1=\sigma(i)=\sigma(j)\in im(\widetilde{\sigma})=\widetilde{I}$. Absurde (par déf. de $\widetilde{I}$).
$\rightarrow$ Si $(i,j)\in[2..n]\times\{1\}$, c'est absurde de même.

Dans tous les cas on a $i=j$. On en déduit que $\sigma$ est injective.

- **Montrons que $(x_{\sigma(i)})_{i\in[1..n]}$ est croissante.**
Si $(i,j)\in[1..n]^2$ tel que $i<j$.
$\rightarrow$ Si $i=1$, nécessairement $j\in[2..n]$, donc $\sigma(i)=i_1$ et $\sigma(j)=\widetilde{\sigma}(j-1)\in\widetilde{I}$ donc $x_{\sigma(i)}=x_{i_1}\leqslant x_{\sigma(j)}$ par définition de $i_1$ comme $\arg\min$.
$\rightarrow$ Sinon, $(i,j)\in[2..n]^2$ donc $\sigma(i)=\widetilde{\sigma}(i-1)$ et $\sigma(j)=\widetilde{\sigma}(j-1)$, or par croissance de $(x_{\widetilde{\sigma}(i)})_{i\in[1..n-1]}$, on a $x_{\widetilde{\sigma}(i-1)}$ et $x_{\widetilde{\sigma}(j-1)}$ donc $x_{\sigma(i)}\leqslant x_{\sigma(j)}$.
Dans les deux cas on a $x_{\sigma(i)}\leqslant x_{\sigma(j)}$. On en déduit que $(x_{\sigma(i)})_{i\in[1..n]}$ est croissante. □

```
let tri_selec (t_init : 'a array) : int array =
  (* hypothèse : Array.length t_init >0 *)
  (* calcule une permutation qui trie les valeurs de t_init*)

  let n =  Array.length t_init in
  let t = Array.make n t_init.(0) in
  let sigma = Array.make n 0 in
  for i = 0 to (n-1) do
    t.(i) <- t_init.(i) ;
    sigma.(i) <- i
  done;
  (* à ce stade t est une copie de t_init et sigma est l'identité*)

  (* invariant : sigma est une permutation,
     et pour i de k à n t.(sigma.(i))=t_init.(i)
     et t_init.(sigma.(i)) pour i de 1 à k-1 est croissante
     et si k>1, pour tout i de k à n, t.(k-1) <= t.(i) *)
  for k=0 to n-1 do
    (* trouvons i0 l'argmin de t[k..n]*)
    let i0 = ref k in
    for j = k+1 to n-1 do
      if t.(j) < t.(!i0) then i0:=j else()
    done;
    (* on veut retenir ds sigma.(k) l'indice ds t_init de la valeur t.(i0),
       retenir  ds sigma.(k) = sigma.(i0)
       de plus on veut séparer cette valeur des valeurs restant à trier dans t
       donc on échange  sigma.(i0) et sigma.(k) et  t.(i0) et t.(k)*)
    let temp = t.(k) in t.(k) <- t.(!i0) ; t.(!i0) <- temp;
    let temp = sigma.(k) in sigma.(k) <- sigma.(!i0); sigma.(!i0) <- temp;
  done;
  sigma

let test_tri_selec :unit =
  assert(tri_selec [|1;2;3|] = [|0;1;2|]);
  assert(tri_selec [|4;2;3|] = [|1;2;0|]);
  assert(tri_selec [|'a';'d';'c';'e';'f'|] = [|0;2;1;3;4|])
```