

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Mathematisches Institut

Abteilung für Reine Mathematik

Arbeitsgruppe Mathematische Physik

**Wissenschaftliche Arbeit
im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt
an Gymnasien**

**Die Riemannsche Vermutung und die
Primzahlverteilung**

Thomas Tony*

Betreuerin: Prof. Dr. Katrin Wendland

Freiburg, 30. Dezember 2021

(Überarbeitete Version)

* Matrikelnummer: 3736901
E-Mail-Adresse: thomas.tony64@yahoo.de

Abstract

Die Riemannsche Vermutung gehört zu den sieben Millennium-Problemen* und ist eines der berühmtesten, ungelösten Probleme der Mathematik. Im Zentrum der Vermutung steht die Riemannsche ζ -Funktion, die als Grenzwert der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit Realteil größer eins definiert ist. Setzt man sie nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ analytisch fort, so besagt die Riemannsche Vermutung, dass alle Nullstellen mit Realteil zwischen null und eins schon Realteil $\frac{1}{2}$ haben. In vielen verschiedenen Forschungsbereichen innerhalb und außerhalb der Mathematik lassen sich Verbindungen zur Riemannschen Vermutung herstellen†. Sie verknüpft zum Beispiel die Funktionentheorie mit der Verteilung von Primzahlen.

Schon Euklid hat sich um 300 v.Chr. mit Primzahlen beschäftigt und bewiesen, dass es unendlich viele davon gibt. Es scheint aber kein Schema zu geben, wie sie unter den natürlichen Zahlen verteilt sind. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sich die Funktion $\pi(x)$, welche die Anzahl der Primzahlen kleiner x angibt, durch den Integrallogarithmus $\text{Li}(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt$ approximieren lässt. Dies ist eine einfache Konsequenz aus dem Primzahlsatz, in dessen Beweis wiederum die Riemannsche ζ -Funktion zentral ist. Bei der Genauigkeit der Approximation spielt die Riemannsche Vermutung eine wichtige Rolle. Es lässt sich nämlich zeigen, dass unter deren Annahme der relative Fehler besser abgeschätzt werden kann, als in jeder bis heute bewiesenen Abschätzung. Es gilt sogar die Äquivalenz zwischen der Riemannsche Vermutung und der Aussage, dass $|\pi(x) - \text{Li}(x)| \in O(\sqrt{x} \ln(x))$ ist.

*Im Jahr 2000 hat das Clay Mathematics Institute in Cambridge eine Liste von sieben bedeutenden mathematischen Problemen aufgestellt, für deren mathematisch korrekten Beweis ein Preisgeld in Höhe von einer Millionen US-Dollar ausgeschrieben wurde [Car+06].

†Für Anwendungen in der Physik vgl. „Physics of the Riemann Hypothesis“ [SA11].

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen	5
2.1. Notationen und grundlegende Definitionen	5
2.2. Die Gamma-Funktion	8
3. Die Riemannsche Vermutung	13
3.1. Einführung der Riemannschen ζ -Funktion	13
3.2. Formulierung der Riemannschen Vermutung	21
4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe	25
4.1. Der Primzahlsatz	25
4.2. Verschiedene Approximationen der π -Funktion	42
5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim \text{Li}$ und die Riemannsche Vermutung	53
5.1. Von Mangoldts Formel	53
5.2. Die Fehlerabschätzung unter Annahme der Riemannschen Vermutung	61
5.3. Eine äquivalente Aussage zur Riemannschen Vermutung	71
6. Zusammenfassung und Ausblick	79
Literaturverzeichnis	80
Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	83
A. Erklärung	85
B. Ausdruck der Online-Quellen	87
B.1. Ausdruck der ersten Seite von [Spi18]	87

1. Einleitung

Die Riemannsche Vermutung ist eines der größten ungelösten Probleme der Mathematik. Sie gehört zu den sieben Millennium-Problemen, für deren mathematisch korrekten Beweis im Jahr 2000 das Clay Mathematics Institute in Camberidge eine Millionen US-Dollar Preisgeld ausgeschrieben hat [Car+06]. Aufgrund der allgemeinen Berühmtheit der Riemannschen Vermutung berichten häufig Fachmagazine und auch Tageszeitungen über Fortschritte und historische Hintergründe. In diesem Zusammenhang ist häufig die Rede von der Primzahlverteilung. In der Zeitschrift „Spektrum“ schreibt Spillner [Spi18] dazu Folgendes:

„Die Vermutung, die Bernhard Riemann, ein berühmter deutscher Mathematiker des 19. Jahrhunderts, über die Nullstellen [der Riemannschen ζ -Funktion] anstellt, wäre – falls sie denn zutrifft – äußerst folgenreich: Sie verbindet nämlich die Welt der Funktionen mit der Welt der Primzahlen.“

Dieser Zusammenhang, der zwischen der Riemannschen Vermutung und der Verteilung von Primzahlen herrscht, wird in dieser Arbeit genauer untersucht.

Eine Primzahl ist eine von eins verschiedene natürliche Zahl, welche nur durch eins und sich selbst teilbar ist. Mathematiker*innen aus allen zeitlichen Epochen haben sich mit Primzahlen beschäftigt. Diese tauchen in den verschiedensten Bereichen der Mathematik, wie zum Beispiel der Algebra, als Charakteristik eines endlichen Körpers auf. Die Definition an sich verlangt kaum mathematische Vorkenntnisse und die ersten Primzahlen 2,3,5,7,... lassen sich leicht bestimmen. Zagier schreibt in seiner Arbeit „Die ersten 50 Millionen Primzahlen“ [Zag77, S.4]:

„[T]rotz ihrer einfachen Definition und Rolle als Baustein der natürlichen Zahlen, [gehören sie] zu den willkürlichsten, widerspenstigsten Objekten [...], die der Mathematiker überhaupt studiert. Sie wachsen wie Unkraut unter den natürlichen Zahlen, scheinbar keinem anderen Gesetz als dem Zufall unterworfen.“

1. Einleitung

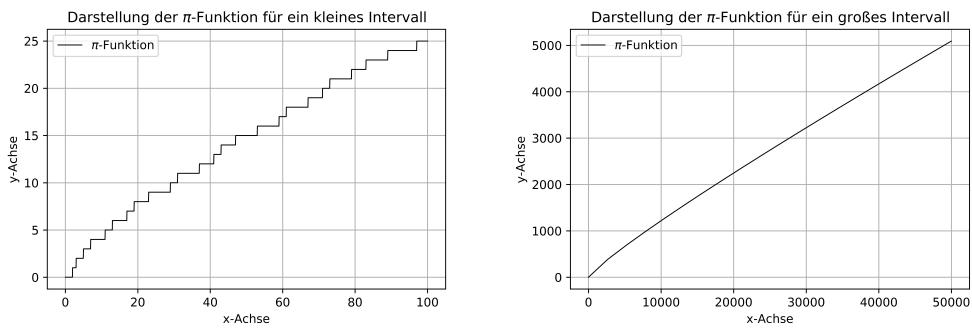


Abbildung 1.1.: Im linken Schaubild ist die Unregelmäßigkeit der π -Funktion auf kleinen Intervallen $[0,100]$ zu sehen, während im rechten Bild die Regelmäßigkeit auf einem großen Intervall $[0, 50000]$ verdeutlicht wird.

Betrachtet man die Funktion $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Anzahl der Primzahlen kleiner x angibt, so lassen sich die zwei folgenden verblüffenden Eigenschaften zur Primzahlverteilung feststellen (vgl. Abbildung 1.1):

- (1) Die π -Funktion ist eine Treppenfunktion, welche für kleine Intervalle die unregelmäßige Verteilung der Primzahlen widerspiegelt.
- (2) Betrachtet man die π -Funktion für ein großes Intervall, so verläuft diese trotz der lokalen, willkürlich erscheinenden Sprünge sehr regelmäßig.

Legendre hat aus empirischen Untersuchungen der π -Funktion die Approximationen $\frac{x}{\ln(x)-1,08366}$ gefunden. Auch Gauß hat sich seit seinen jungen Jahren für Primzahlen interessiert und die These aufgestellt*, dass der Integrallogarithmus

$$\text{Li}(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(t)} dt \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 1 \quad (1.1)$$

eine Approximation der Primzahlen unter einer gegebenen Schranke darstellt [vgl. Zag77]. In der berühmten Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Schranke“ [Rie59] aus dem Jahr 1859 widmet sich Riemann dem Problem durch theoretische Überlegungen. Zentral in seiner Arbeit ist die Einführung der nach ihm benannten Riemannschen ζ -Funktion. Sie wird zuerst auf \mathbb{C} mit Realteil

*Wie Legendre haben auch Gauß empirische Untersuchungen zu seiner Annahme geführt [vgl. Zag77].

größer eins durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\} \quad (1.2)$$

definiert und anschließend nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ analytisch fortgesetzt. Der Zusammenhang zwischen der Riemannschen ζ -Funktion und den Primzahlen ist der Definition nicht direkt anzusehen. Er wird erst durch die Darstellung als Eulerprodukt deutlich:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{(1 - p^{-s})} \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\} \quad (1.3)$$

Riemann hat in seiner Arbeit eine Liste von unbewiesenen Behauptungen aufgestellt. Die meisten davon sind heute bewiesen, wie zum Beispiel der Primzahlsatz *. Dieser besagt, dass die π -Funktion asymptotisch äquivalent zu $\frac{x}{\ln(x)}$ ist. Im Beweis ist wesentlich, dass die Riemannsche ζ -Funktion keine Nullstellen mit Realteil eins hat. Mit einer Ausweitung des Bereichs, in welchem die ζ -Funktion keine Nullstellen hat†, konnte de la Vallée Poussin zeigen, dass für eine Konstante c und hinreichend großes x

$$\frac{|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)|}{|\operatorname{Li}(x)|} < e^{-\sqrt{c \ln(x)}} \quad (1.4)$$

gilt. Bis heute nicht bewiesen ist die berühmte Riemannsche Vermutung:

Alle Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion mit Realteil zwischen null und eins haben Realteil $\frac{1}{2}$.

Einen direkten Zusammenhang zwischen den Nullstellen der ζ -Funktion ρ mit Realteil zwischen null und eins und der Verteilung von Primzahlen liefert von Mangoldts Formel:

$$\Psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{-2n}}{2n} + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \text{ mit } x > 1 \quad (1.5)$$

*Einen ersten vollständigen Beweis fanden unabhängig voneinander J. Hadamard und C. de la Vallée Poussin 1896.

†Es konnte bis heute kein $t_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ gefunden werden, sodass $\zeta(t_1 + it_2) \neq 0$ für alle $t_1 \in (t_0, 1)$ und alle $t_2 \in \mathbb{R}$ gilt.

1. Einleitung

Die Ψ -Funktion auf der linken Seite ist definiert als Summe über die Mangoldt-Funktion Λ :

$$\Lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & n = p^k \text{ für } p \text{ prim, } k \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.6)$$

Dieser Zusammenhang von von Mangoldt ist der Schlüssel zu einer besseren Abschätzung des relativen Fehlers der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ und der folgenden Äquivalenz:

<u>Riemannsche Vermutung</u> „Nullstellen ζ -Funktion“	\iff	<u>$\pi(x) - \text{Li}(x) \in O(\sqrt{x} \ln(x))$</u> „Fehlerabschätzung Primzahlverteilung“
---	--------	--

Der Hauptteil dieser Arbeit gliedert sich in vier Teile. Zuerst werden einige Grundlagen eingeführt (Kapitel 2). Anschließend wird in Kapitel 3 die Riemannsche ζ -Funktion definiert und deren Eigenschaften, wie zum Beispiel Nullstellen, Symmetrien und Polstellen untersucht. Am Ende des dritten Kapitels findet sich die Formulierung der Riemannschen Vermutung. In Kapitel 4 wird der Primzahlsatz bewiesen und weitere Approximationen der π -Funktion miteinander verglichen. Das letzte Kapitel wird dann die Fehlerabschätzung der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ mit der Riemannschen Vermutung in Verbindung bringen.

*Mit $O(\sqrt{x} \ln(x))$ ist die Landau-Notation gemeint.

2. Grundlagen

2.1. Notationen und grundlegende Definitionen

In diesem Kapitel werden nun einige grundlegende Definitionen, Sätze und nötige Notationen wiederholt, welche für die Untersuchung der Riemannschen Vermutung und der Primzahlverteilung benötigt werden.

Definition 2.1.1. Man nennt $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *prim*, falls gilt:

$$(p = k_1 \cdot k_2 \text{ für } k_1, k_2 \in \mathbb{N}) \Rightarrow (k_1 = 1 \vee k_2 = 1)$$

Die Menge aller Primzahlen wird mit \mathbb{P} bezeichnet.

Der folgende Fundamentalsatz der Arithmetik liefert die Grundlage für den Zusammenhang zwischen der Riemannschen ζ -Funktion und Primzahlen. Er wird in einem Umformungsschritt im Beweis des Eulerproduktes (vgl. Kapitel 3.1), welches für alle weiteren Überlegungen zentral ist, benötigt.

Satz 2.1.2 (Fundamentalsatz der Arithmetik). *Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig, bis auf die Reihenfolge, als Produkt von Primzahlen schreiben.*

Beweis. Siehe Karpfinger und Meyberg [KM17, S.65]. □

Es werden folgende Notationen für die natürlichen Zahlen und häufig vorkommende Teilmengen von \mathbb{R} und \mathbb{C} verwendet:

Notation 2.1.3. (Mengenbezeichnungen) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann bezeichne mit

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen ohne null.
- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ die positiven reellen Zahlen.
- $\mathbb{R}_{>a} := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ die reellen Zahlen größer a (analog für „ $<$ “, „ \geq “, „ \leq “).
- $D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$ den offenen Ball um z_0 mit Radius r.

2. Grundlagen

- $\mathbb{H}_r := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > r\}$ die Halbebene der Komplexen Zahlen, mit Realteil größer r.

Folgende Notation wird für die verschiedenen Logarithmusfunktionen verwendet:

Notation 2.1.4. (Logarithmus)

- Bezeichne den natürlichen Logarithmus im reellen auf $(0, \infty)$ mit \ln und schreibe für alle $x \in (0, \infty)$ und $a \in \mathbb{R}$ kurz: $\ln^a(x) := (\ln(x))^a$
- Der Hauptzweig des Logarithmus auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ wird mit Log bezeichnet.

Notation 2.1.5. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f, g : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

- (1) [Lanau-Notation] Man sagt f wächst nicht wesentlich schneller als g und schreibt $f \in O(g)$, wenn gilt:

$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \exists A \in [x_0, \infty) : |f(x)| \leq K|g(x)| \quad \forall x \geq A$$

Gilt sogar

$$\forall K \in \mathbb{R}^+, \exists A \in [x_0, \infty) : |f(x)| < K|g(x)| \quad \forall x \geq A$$

so sagt man f wächst langsamer als g und schreibt $f \in o(g)$. Häufig wird anstatt g exakt zu definieren einfach nur $O(g(x))$ geschrieben und die Definitionsgleichung der Funktion g direkt eingesetzt*.

- (2) Man sagt f ist asymptotisch äquivalent zu g und schreibt $f \sim g$, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und identisch eins ist.

Bemerkung 2.1.6. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f, g : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Dann gilt:

$$(1) \limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty \Leftrightarrow f \in O(g)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f \in o(g)$$

- (3) Die asymptotische Äquivalenz \sim ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die beiden ersten Behauptungen folgen direkt durch ausschreiben der Definitionen. Für den Beweis von (3) seien die Funktionen f und g wie in Notation 2.1.5:

*Schreibe zum Beispiel kurz $O(x^2)$, anstatt „ $O(g)$ mit $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ “.

- (Reflexivität): Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow f \sim f \quad (2.1)$$

- (Symmetrie): Sei $f \sim g$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow g \sim f \quad (2.2)$$

- (Transitivität) Sei h eine weitere Funktion $h : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und es gelte $f \sim g$ $g \sim h$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}}_{f \sim g \equiv 1} \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)}}_{g \sim h \equiv 1} = 1 \quad (2.3)$$

Damit ist gezeigt, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist. \square

Für die Untersuchung der Riemannschen ζ -Funktion werden unendliche Summen und Produkte benötigt. In unserem Fall sind diese in der Regel normal konvergent. Diese Eigenschaft ist im Zusammenhang mit unendlichen Summen und Produkten von Funktionenfolgen eine sehr „schöne“ Eigenschaft. Sie impliziert lokal gleichmäßige Konvergenz und es gilt der sogenannte „Differentiationssatz“ für unendliche Summen/Produkte. Im Folgenden wird die Definition der normalen Konvergenz und der Differentiationssatz behandelt [FB06].

Definition 2.1.7. Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Man nennt

- (1) die *Summe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *normal konvergent* in D , wenn für alle $z_0 \in D$ eine Umgebung U von z_0 und eine positive, reelle Zahlenfolge M_n mit konvergenter Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ existiert, sodass für alle $z \in U \cap D$ gilt:

$$|f_n(z)| < M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- (2) das *Produkt* $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ *normal konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n - 1)$ normal konvergiert.

2. Grundlagen

Satz 2.1.8 (Differentiationssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen mit*

- (1) *normal konvergenter Reihe. Dann ist die Grenzfunktion $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ holomorph in D , die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ ist normal konvergent und für die Ableitung gilt:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z) \quad \forall z \in D \quad (2.4)$$

- (2) *normal konvergentem Produkt. Dann ist die Grenzfunktion $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D holomorph und falls f nicht die Nullfunktion ist, gilt für $z \in \{w \in D | f_n(w) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$:*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} \quad (2.5)$$

Außerdem konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}$ normal in $\{w \in D | f_n(w) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Ein Beweis ist z.B in Freitag und Busam [FB06, Kapitel 3.1 und 4.1] gegeben. \square

2.2. Die Gamma-Funktion

In diesem Kapitel wird die Γ -Funktion eingeführt. Sie wird später mehrmals im Zusammenhang mit der Riemannschen ζ -Funktion (Funktionalgleichung, Produktdarstellung,...) vorkommen. Zuerst ein Satz zur Wohldefiniertheit:

Satz 2.2.1. *Setze für $t \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$:*

$$t^{z-1} = \exp((z-1)\ln(t)) \quad (2.6)$$

Dann konvergiert das Integral $\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ in der Halbebene \mathbb{H}_0 absolut und stellt in Abhängigkeit von z eine analytische Funktion dar. Diese lässt sich zu einer meromorphe Funktion in \mathbb{C} mit einfachen Polen in $S = \{0, -1, -2, \dots\}$ fortsetzen.

Beweis. Der Beweis ist in Freitag und Busam [FB06, Kapitel 4.1] ausgeführt. Die Konvergenz des Integrals lässt sich durch geschicktes aufteilen in drei Teilintegrale

beweisen. Für die meromorphe Fortsetzung wird zuerst mithilfe von partieller Integration die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}_0$ hergeleitet. Damit ergibt sich der Zusammenhang

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdots (z+n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall z \in \mathbb{H}_0 \quad (2.7)$$

womit Γ letztendlich auf $\mathbb{C} \setminus S$ holomorph fortgesetzt werden kann. Aus Gleichung 2.7 folgt dann die Einfachheit der Pole in S . \square

Definition 2.2.2. Die auf ganz \mathbb{C} meromorph fortgesetzte Funktion aus Satz 2.2.1 wird Γ -Funktion genannt.

Bemerkung 2.2.3. Für die Γ -Funktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.8)$$

Deshalb kann die Γ -Funktion als Verallgemeinerung der nur auf \mathbb{N} definierten Fakultät angesehen werden. Die Behauptung folgt induktiv aus $\Gamma(1) = 1$ und der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für $z \in \mathbb{H}_0$ [vgl. FB06, S.196-197].

Lemma 2.2.4. Für die Γ -Funktion gilt:

- (1) $\text{Res}_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
- (2) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$
- (3) $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus S$

Beweis. Der Beweis von (1) und (2) ist in Freitag und Busam [FB06, Kapitel 4.1] ausgeführt. Im wesentlichen folgt die Behauptung (1) aus Gleichung 2.7. Um Behauptung (2) zu beweisen, wird gezeigt, dass die Funktion f definiert durch $f(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ konstant sein muss (mit Liouville). Aus $-f(-z) = f(z)$ folgt dann $f \equiv 0$ und damit die Behauptung. Es bleibt noch (3) zu zeigen. Für alle $z \in \mathbb{H}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \exp(\bar{z}) &= \overline{\exp(z)} \xrightarrow[t^{u=\exp(u \ln(t))}]{} t^{\bar{z}-1} e^{-t} = \overline{t^{z-1} e^{-t}} \quad \forall t \in (0, \infty) \\ &\xrightarrow[\text{def. } \Gamma\text{-Funktion}]{\text{auf } \mathbb{H}_0} \Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mit Gleichung 2.7 lässt sich der Zusammenhang auf ganz $\mathbb{C} \setminus S$ ausweiten. Sei dazu

2. Grundlagen

$z \in \mathbb{C} \setminus S$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{Re}(z) + n + 1 > 0$ dann gilt:

$$\Gamma(\bar{z}) = \frac{\Gamma(\bar{z} + n + 1)}{\bar{z} \cdot (\bar{z} + 1) \dots (\bar{z} + n)} \stackrel{\text{Gl. (2.9)}}{=} \overline{\frac{\Gamma(z + n + 1)}{z \cdot (z + 1) \dots (z + n)}} = \overline{\Gamma(z)} \quad \square$$

Auf \mathbb{H}_0 lässt sich die Γ -Funktion als das Integral $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ darstellen (vgl. Satz 2.2.1). Folgender Satz liefert eine Produktdarstellung auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$:

Satz 2.2.5. (Γ -Funktion als Weierstraß-Produkt)

Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ konvergiert normal auf \mathbb{C} . Sei $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln(n) \right) \in \mathbb{R}$ *. Dann ist die auf \mathbb{C} durch

$$\Delta(z) = \exp(\gamma z) z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right)$$

definierte Δ -Funktion ganz mit einfachen Nullstellen in $\{0, -1, -2, \dots\}$ und die Γ -Funktion lässt sich für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ durch

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\Delta(z)} = \left(\exp(\gamma z) z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \right)^{-1} \quad (2.10)$$

darstellen.

Beweis. Der Beweis ist in [FB06, Kapitel 4.1] ausgeführt. Zuerst wird die normale Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) - 1 \right)$ auf \mathbb{C} bewiesen, woraus dann direkt mit Definition 2.1.7 die zu zeigende normale Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ folgt. Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}$ konvergiert (als Spezialfall $z=1$) absolut. Demnach konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}\right)$ absolut ($1 + \frac{1}{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) [vgl. FB06, S.200] und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \ln\left(\underbrace{\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{=N+1}\right) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \\ &= -\gamma \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dies impliziert die Wohldefiniertheit der Euler-Mascheroni-Konstanten γ . Mit dem

*Die Konstante γ wird die Euler-Mascheronische Konstante genannt. Es gilt: $\gamma = 0,577215664901532860606512\dots$ [vgl. FB06, Seite 202]

Differentiationssatz (Satz 2.1.8), sowie der Produktregel ist Δ ganz. Für die Gleichheit von $\frac{1}{\Delta}$ mit der Γ -Funktion werden im wesentlichen die charakteristischen Eigenschaften der Γ -Funktion (Einfache Postellen bei $\{0, -1, -2, \dots\}$, Funktionalgleichung, Normierung) für $\frac{1}{\Delta}$ nachgerechnet. \square

Folgerung 2.2.6. Für die Γ -Funktion gilt:

$$(1) \quad \Gamma(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(2) (Logarithmische Ableitung) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ gilt für die logarithmische Ableitung der Γ -Funktion:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-1+n} + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \quad (2.12)$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert normal in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Beweis. (1) Die Δ -Funktion aus Satz 2.2.5 ist ganz. Dies impliziert mit $\Gamma = \frac{1}{\Delta}$ sofort die Behauptung.

(2) Mit $\Gamma = \frac{1}{\Delta}$ und der Kettenregel gilt für die logarithmische Ableitung für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{\Delta'(z)}{\Delta^2(z)} \Delta(z) = -\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} \quad (2.13)$$

Um die logarithmische Ableitung der Δ -Funktion zu berechnen, wende den Differentiationssatz für unendliche Produkte (vgl. Satz 2.1.8) an. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} &= -\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} &= -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((1 + \frac{z}{n}) \exp(-\frac{z}{n}) \right)'}{(1 + \frac{z}{n}) \exp(-\frac{z}{n})} \\ &= -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right) & (2.14) \\ &\stackrel{\text{Gl. (2.11)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-1+n} + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

Die normale Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-1+n} + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ folgt als Summe zweier normal konvergenter Reihen von Funktionen direkt aus den beiden folgenden Überlegungen:

2. Grundlagen

- (1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$ konvergiert wegen dem Differentiationssatz (Satz 2.1.8) normal in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.
- (2) Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}$ konvergiert als Spezialfall $z = 1$ von Satz 2.2.5 absolut und damit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ [vgl. FB06, S.200]. Werden die Summanden $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ als konstante Funktionen aufgefasst, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ eine Reihe von Funktionen, welche normal konvergiert.

□

3. Die Riemannsche Vermutung

Ziel dieses Kapitels ist die Formulierung der Riemannschen Vermutung. Dazu wird im ersten Teil die Riemannsche ζ -Funktion zunächst auf \mathbb{H}_1 eingeführt und nach ganz \mathbb{C} meromorph fortgesetzt. Im zweiten Teil werden dann einige Eigenschaften über Symmetrien und Nullstellen untersucht und, mithilfe der Definition der kritischen Nullstellen, die Riemannsche Vermutung formuliert. Wenn nicht anders gekennzeichnet, orientiert sich dieses Kapitel an Fischer und Lieb [FL05, Kapitel 9].

3.1. Einführung der Riemannschen ζ -Funktion

Bevor die Riemannsche ζ -Funktion definiert werden kann, wird folgendes Lemma für dessen Wohldefiniertheit bewiesen:

Lemma 3.1.1. *Die Reihe von Funktionen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für alle $s \in \mathbb{H}_1$ normal, wobei $n^s := \exp(s \ln(n))$ gilt.*

Beweis. Sei $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{H}_1$. Dann gilt für alle $s = \sigma + it \in D_{(\sigma_0-1)}(s_0)$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{|\exp((\sigma + it) \ln(n))|} = \frac{1}{n^\sigma} \quad (3.1)$$

Wegen $\sigma > 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^\sigma}$, womit nach Definition 2.1.7 die normale Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^s}$ bewiesen ist. \square

Mit dem Resultat aus Lemma 3.1.1 lässt sich jetzt die Riemannsche ζ -Funktion auf der Halbebene \mathbb{H}_1 definieren.

Definition 3.1.2. Die auf der Halbebene \mathbb{H}_1 definierte Funktion

$$\zeta : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{C} \quad s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

nennt man *Riemann'sche- ζ -Funktion*.

3. Die Riemannsche Vermutung

Satz 3.1.3. *Die Riemann'sche- ζ -Funktion ist auf der Halbebene \mathbb{H}_1 holomorph und lässt sich als Eulerprodukt darstellen:*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{(1 - p^{-s})} \quad \forall s \in \mathbb{H}_1$$

Das Produkt konvergiert auf \mathbb{H}_1 normal.

Beweis. (1) Die Reihe von Funktionen $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^s}$ besteht auf \mathbb{H}_1 aus holomorphen Funktionen $f_n(s) = \frac{1}{n^s}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert normal gegen die ζ -Funktion. Demnach ist mit dem Differentiationssatz (Satz 2.1.8) auch die ζ -Funktion eine holomorphe Funktion auf \mathbb{H}_1 .

(2) Darstellung als Eulerprodukt [vgl. Zag97]

Die Reihe $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^s}$ konvergiert nach Lemma 3.1.1 normal, also ist die Reihe auch absolut und lokal gleichmäßig konvergent. Deshalb darf die Reihenfolge in der Summe getauscht werden, ohne dass sich an dem Grenzwert etwas ändert. Es gilt:

$$\zeta(s) \stackrel{\text{Def. } \zeta}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \stackrel{\substack{\text{Fundamentalsatz} \\ \text{der Arithmetik}}}{=} \sum_{r_1, r_2, \dots \in \mathbb{N}_0} \left(\prod_{j=1}^{\infty} (p_j)^{r_j} \right)^{-s} \stackrel{\text{ausmult.}}{=} \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=0}^{\infty} p^{-rs} \stackrel{(*)}{=} \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (3.2)$$

(*) Im letzten Schritt lässt sich die Formel für die geometrische Reihe anwenden, da für $s = \sigma + it \in \mathbb{H}_1$ und für alle $p \in \mathbb{P}$ gilt:

$$|p^{-s}| = \left| \exp((-s - it) \ln(p)) \right| = p^{-\sigma} \frac{\sigma > 1}{p > 1} 1 \quad (3.3)$$

(3) Um die normale Konvergenz des unendlichen Produktes zu zeigen sei $s_0 \in \mathbb{H}_1$ und $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ alle Primzahlen der Größe nach geordnet. Dann gilt für $s = \sigma + it \in D_{\epsilon}(s_0)$ mit $\epsilon := 1 - \operatorname{Re}(s_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{1}{1 - p_n^{-s}} - 1 \right| = \frac{1}{|p_n^s - 1|} \stackrel{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \frac{1}{||p_n^s| - 1|} = \frac{1}{p_n^{\sigma} - 1} \quad (3.4)$$

Nach Definition von ϵ ist $\sigma > 1$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-1}}$ konvergiert. Demnach konvergiert auch die Teilreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{\sigma-1}}$ und das Produkt aus dem Lemma ist normal konvergent.

□

Ziel des weiteren Vorgehens ist die meromorphe Fortsetzung der zunächst auf \mathbb{H}_1

3.1. Einführung der Riemannschen ζ -Funktion

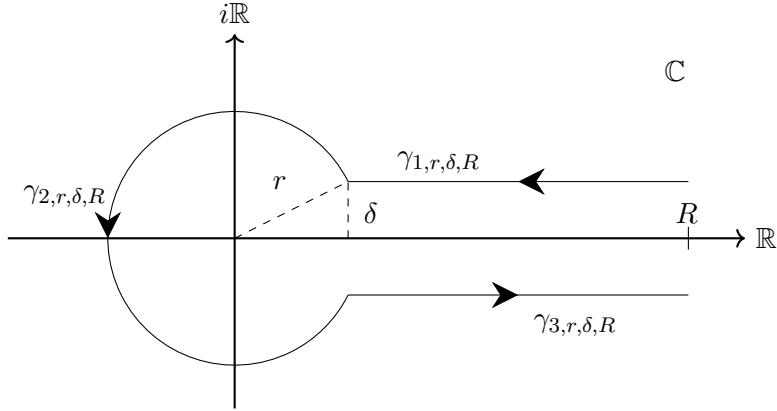


Abbildung 3.1.: In der Abbildung sind die drei glatten Wege γ_1, γ_2 und γ_3 in Abhängigkeit von den Parametern δ, r und R dargestellt. Im Zuge der meromorphen Fortsetzung der ζ -Funktion auf ganz \mathbb{C} wird die Funktion $f(z, s) = \frac{(-z)^{s-1}}{\exp(z)-1}$ über die Komposition dieser drei Wege nach z integriert.

definierten Riemannschen ζ -Funktion nach ganz \mathbb{C} .

Lemma 3.1.4. Zwischen der Riemannsche ζ -Funktion und der in Definition 2.2.2 definierten Γ -Funktion besteht folgender Zusammenhang auf \mathbb{H}_1 :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad \forall s \in \mathbb{H}_1$$

Beweis. Durch Multiplikation der Γ -Funktion mit der ζ -Funktion und Einsetzen der Definitionen ergibt sich mit der geometrischen Reihe der behauptete Zusammenhang. Die exakte Rechnung ist in Fischer und Lieb [FL05, S.242] ausgeführt. \square

Der in Lemma 3.1.4 aufgeführte Zusammenhang zwischen der Γ -Funktion und der ζ -Funktion motiviert das weitere Vorgehen zur meromorphen Fortsetzung der ζ -Funktion auf ganz \mathbb{C} . Riemann geht in seiner berühmten Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ [Rie59] für die meromorphe Fortsetzung analog vor. Es wird der in Abb. 3.1 dargestellte Integrationsweg gewählt und über die Funktion $f(z, s) = \frac{(-z)^{s-1}}{\exp(z)-1}$ nach z integriert. Durch Betrachten des Limes von $r, \delta \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ ergibt sich eine weitere Darstellung der Riemannschen ζ -Funktion, welche auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph ist.

3. Die Riemannsche Vermutung

Lemma 3.1.5. Sei zu den Parametern $r \in (0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \frac{r}{2})$ und $R \in (r, \infty)$

$\gamma_{r,\delta,R} = \gamma_{3,r,\delta,R} \circ \gamma_{2,r,\delta,R} \circ \gamma_{1,r,\delta,R}$ mit

$$\begin{aligned}\gamma_{1,r,\delta,R} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \gamma_{1,r,\delta,R}(t) = (1-t)R + t\sqrt{r^2 - \delta^2} + i\delta \\ \gamma_{2,r,\delta,R} : [\phi, 2\pi - \phi] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \gamma_{2,r,\delta,R}(t) = r \cdot \exp(it) \quad \text{und} \quad \phi = \arcsin\left(\frac{\delta}{r}\right) \\ \gamma_{3,r,\delta,R} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \gamma_{3,r,\delta,R}(t) = tR + (1-t)\sqrt{r^2 - \delta^2} - i\delta\end{aligned}\tag{3.5}$$

eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{C} (vgl. Abb. 3.1). Sei $s \in \mathbb{C}$ beliebig. Mit $(-z)^{(s-1)} := \exp((s-1)\operatorname{Log}(-z))$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt dann:

- (1) Das Integral $\int_{\gamma_{r,\delta,R}} \frac{(-z)^{s-1}}{\exp(z)-1} dz$ existiert und konvergiert für $R \rightarrow \infty$.
- (2) Der Grenzwert $I_{r,\delta}(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{r,\delta,R}} \frac{(-z)^{s-1}}{\exp(z)-1} dz$ ist unabhängig von den Parametern r und δ .
- (3) Die Funktion $I_{r,\delta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ganz.
- (4) Für $s \in \mathbb{C}$ gilt: $I_{r,\delta}(\bar{s}) = \overline{I_{r,\delta}(s)}$ $\forall r \in (0, 2\pi) \forall \delta \in (0, \frac{r}{2})$

Beweis. (1) Sei $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ beliebig. Die Funktion $f(z, s) = \frac{(-z)^{s-1}}{\exp(z)-1} dz$ ist als Funktion von z meromorph auf \mathbb{C} mit der Polstellenmenge $P_f = \{2\pi iv | v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ (bei $z = 0$ heben sich die Nullstelle im Zähler und die Nullstelle im Nenner heraus). Für $r \in (0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \frac{r}{2})$ und $R \in (r, \infty)$ gilt:

$$\operatorname{Bild}(\gamma_{r,\delta,R}) \in \mathbb{H}_0 \setminus P \implies \int_{\gamma_{r,\delta,R}} \frac{(-z)^{s-1}}{\exp(z)-1} dz \text{ existiert} \tag{3.6}$$

Für die Betrachtung des Grenzwertes $\mathbb{R} \rightarrow \infty$ wird das Integral über $\gamma_{r,\delta,R}$ in die drei Teilintegrale aufgeteilt:

$$\int_{\gamma_{r,\delta,R}} f(z, s) dz = \int_{\gamma_{1,r,\delta,R}} f(z, s) dz + \underbrace{\int_{\gamma_{2,r,\delta,R}} f(z, s) dz}_{\text{unabhängig von } R} + \int_{\gamma_{3,r,\delta,R}} f(z, s) dz \tag{3.7}$$

Die zu integrierende Funktion lässt sich mit $\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i\arg(z)^*$ für

* $\arg : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow (-\pi, \pi)$ ist die Argumentfunktion, die jeder komplexen Zahl aus der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ihren eindeutig bestimmten Winkel $\Theta \in (-\pi, \pi)$ zur positiven x-Achse zuordnet.

3.1. Einführung der Riemannschen ζ -Funktion

$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ und den Abschätzungen

$$\exp(-t) \leq \exp(|t|) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

$$\arg(-w) \leq \pi \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \quad (3.9)$$

für alle $z \in \mathbb{H}_0$ durch

$$\begin{aligned} |f(z, s)| &= \left| \frac{(-z)^{s-1}}{\exp(z) - 1} \right| \\ &= \frac{1}{|\exp(z) - 1|} \left| \exp \left((\sigma + it - 1) \underbrace{\text{Log}(-z)}_{=\ln|z|+i\arg(-z)} \right) \right| \\ &= \frac{1}{|\exp(z) - 1|} \exp \left((\sigma - 1) \ln |z| - t \arg(-z) \right) \\ &\leq \frac{|z|^{\sigma-1} \exp(|t|\pi)}{|\exp(z) - 1|} \end{aligned} \quad (3.10)$$

abschätzen. Damit gilt für das erste Integral in der Aufteilung aus Gleichung 3.7 mit $x_0 := \sqrt{r^2 - \delta^2}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{1,r,\delta,R}} f(z, s) dz \right| &\stackrel{\text{Def. } \gamma_{1,r,\delta,R}}{=} \left| \int_0^1 f((1-t)R + tx_0 + i\delta, s) (-R + x_0) dt \right| \\ &\stackrel{\text{Sub. } u=(1-t)R+tx_0}{=} \left| - \int_{x_0}^R f(u + i\delta, s) du \right| \\ &\stackrel{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \int_{x_0}^R |f(u + i\delta, s)| du \\ &\stackrel{\text{Gl. (3.10)}}{\leq} \exp(|t|\pi) \int_{x_0}^R \frac{|u + i\delta|^{\sigma-1}}{|\exp(u + i\delta) - 1|} du \end{aligned} \quad (3.11)$$

Das zeigt die Existenz des Grenzwertes $R \rightarrow \infty$, da der Betrag des Integrals durch ein konvergierendes, reelles Integral abgeschätzt wurde. Eine analoge Abschätzung für das Integral über $\gamma_{3,r,\delta,R}$ und die Unabhängigkeit des Integrals über $\gamma_{2,r,\delta,R}$ von R implizieren die Existenz von $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{r,\delta,R}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$.

- (2) Sei $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $r_i \in (0, 2\pi)$ und $\delta_i \in (0, \frac{r_i}{2})$ für $i \in \{1, 2\}$. Mit den in

3. Die Riemannsche Vermutung

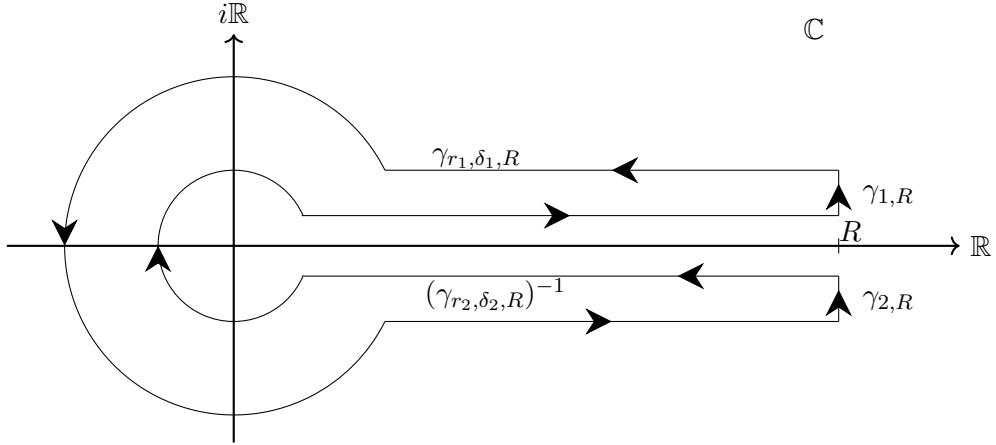


Abbildung 3.2.: Darstellung des geschlossenen Integrationswegs, mit dessen Hilfe die Unabhängigkeit des Integrals $I_{r,\delta}(s)$ von den beiden Parametern r und δ gezeigt wird.

Abbildung 3.2 dargestellten Wegen $\gamma_{1,R}$ und $\gamma_{2,R}$ wird der geschlossene Weg γ_R wie folgt definiert:

$$\gamma_R = \gamma_{1,R} \circ (\gamma_{r_2, \delta_2, R})^{-1} \circ \gamma_{2,R} \circ \gamma_{r_1, \delta_1, R} \quad (3.12)$$

Dann gilt für das Sterngebiet $U := \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(w) \in (-2\pi, 2\pi)\} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} (*) \quad f(z, s) \text{ holomorph auf } U, \text{ Bild}(\gamma_R) \subset U &\stackrel{\text{C.I.}}{\Rightarrow} \int_{\gamma_R} f(z, s) dz = 0 \quad \forall R \in \mathbb{R} \\ (***) \quad \lim_{\text{Re}(z) \rightarrow \infty} |f(z, s)| &\stackrel{\text{Gl.(3.10)}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{i,R}} f(z, s) dz = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \\ \xrightarrow{(*), (**)} \quad I_{r_1, \delta_1}(s) = I_{r_2, \delta_2}(s) &\quad \Rightarrow \quad I_{r,\delta}(s) \text{ ist Parameterunabhängig} \end{aligned}$$

- (3) Nach (1) ist die Funktion $I_{r,\delta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert. Weiter ist die Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $s \mapsto f(s, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (P_f \cup \mathbb{R}_{\geq 0})$ ganz. Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge, dann existiert $A \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $s \in K$ die Abschätzung $|s| < A$ gilt. Dann gilt für alle $s = \sigma + it \in K$ und

3.1. Einführung der Riemannschen ζ -Funktion

$z \in \mathbb{C} \setminus (P_f \cup \mathbb{R}_{\geq 0})$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(s, z)}{\partial s} \right| &= \left| \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \text{Log}(-z) \right| \stackrel{\text{Gl. (3.10)}}{\leq} \frac{|z|^{\sigma-1} \exp(|t|\pi)}{|\exp(z) - 1|} |\text{Log}(-z)| \\ &\leq \frac{|z|^{A-1} \exp(A\pi)}{|\exp(z) - 1|} |\text{Log}(-z)| \end{aligned} \quad (3.13)$$

Das heißt für alle $r \in (0, 2\pi)$, $\delta \in (0, \frac{r}{2})$ und $R \in (r, \infty)$ ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f(s, z)}{\partial s}$ durch eine von s unabhängige über $\gamma_{r, \delta, R}$ integrierbare Funktion (lässt sich analog zu (1) nachrechnen) beschränkt.

$\implies I_{r, \delta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ganz

(4) Sei $s \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt:

$$\frac{(-z)^{\bar{s}-1}}{\exp(z) - 1} = \frac{\exp((\sigma - it - 1)\text{Log}(-z))}{\exp(z) - 1} = \overline{\left(\frac{\exp((\sigma + it - 1)\text{Log}(-\bar{z}))}{\exp(\bar{z}) - 1} \right)} = \overline{\left(\frac{(-\bar{z})^{s-1}}{\exp(\bar{z}) - 1} \right)} \quad (3.14)$$

Seinen $r \in (0, 2\pi)$ und $\delta \in (0, \frac{r}{2})$ beliebig. Aufgrund der Symmetrie der Kurve $\gamma_{r, \delta, R}$ zur reellen Achse entspricht das komplexe Konjugieren von z dem Integrieren über $\gamma_{r, \delta, R}^{-1}$ und es gilt:

$$\begin{aligned} I_{r, \delta}(\bar{s}) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{r, \delta, R}} \frac{(-z)^{\bar{s}-1}}{\exp(z) - 1} dz \stackrel{\text{Gl. (3.14)}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{r, \delta, R}} \overline{\left(\frac{(-\bar{z})^{s-1}}{\exp(\bar{z}) - 1} \right)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\int_{\gamma_{r, \delta, R}^{-1}} \frac{(-z)^{s-1}}{\exp(z) - 1} dz} \\ &= \overline{-I_{r, \delta}(s)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

□

Theorem 3.1.6. Die Riemannsche ζ -Funktion lässt sich auf ganz \mathbb{C} meromorph fortsetzen. Mit der aus Lemma 3.1.5 definierten Funktion $I_{r, \delta}(s)$ gilt auf \mathbb{H}_1 :

$$\zeta(s) = -\Gamma(1-s) \cdot \frac{1}{2\pi i} I_{r, \delta}(s) \quad \forall s \in \mathbb{H}_1 \quad \forall r \in (0, 2\pi) \quad \forall \delta \in \left(0, \frac{r}{2}\right) \quad (3.16)$$

3. Die Riemannsche Vermutung

Beweis. $I_{r,\delta}(s)$ ist nach Lemma 3.1.5 eine ganze Funktion und Γ ist nach Satz 2.2.1 holomorphe auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ mit einfachen Polstellen in $\{0, -1, -2, \dots\}$. Damit definiert die rechte Seite von Gleichung 3.16 eine meromorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} . Für die behauptete meromorphe Fortsetzbarkeit bleibt also nur noch Gleichung 3.16 zu zeigen. Eine genauere Betrachtung der folgenden Grenzwerte findet sich in Fischer und Lieb [FL05, S.242.243]:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_{1,r,\delta,R}} f(z,s) dz \xrightarrow{(R,\delta) \rightarrow (\infty,0)} -\exp(-(s-1)\pi i) \int_r^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\exp(-(s-1)\pi i) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ & \int_{\gamma_{2,r,\delta,R}} f(z,s) dz \xrightarrow{(R,\delta) \rightarrow (\infty,0)} \int_{\partial D_r(0)} f(z,s) dz \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \\ & \int_{\gamma_{3,r,\delta,R}} f(z,s) dz \xrightarrow{(R,\delta) \rightarrow (\infty,0)} \exp((s-1)\pi i) \int_r^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \xrightarrow{r \rightarrow 0} \exp((s-1)\pi i) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ \implies & \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} I_{r,\delta}(s) = 2i \sin((s-1)\pi) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \stackrel{\text{unabh. Paramter}}{\substack{\text{Lemma 3.1.5 (2)}}} I_{r,\delta}(s) \quad (3.17) \end{aligned}$$

Durch einsetzen der beiden Gleichungen

- $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad \forall s \in \mathbb{H}_1 \setminus \mathbb{N} \quad (\text{vgl. Lemma 3.1.4})$

- $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin((1-s)\pi)} \quad \forall s \in \mathbb{H}_1 \setminus \mathbb{N} \quad (\text{vgl. Lemma 2.2.4(2)})$

(3.19)

in Gleichung 3.17 folgt die Behauptung vorerst auf $\mathbb{H} \setminus \mathbb{N}$:

$$\zeta(s) = -\Gamma(1-s) \cdot \frac{1}{2\pi i} I_{r,\delta}(s) \quad s \in \mathbb{H}_1 \setminus \mathbb{N} \quad (3.20)$$

$\Gamma(1-s)$ hat nach Satz 2.2.1 Pole in \mathbb{N} . Deshalb ist die rechte Seite von Gleichung 3.20 für $s \in \mathbb{N}$ nicht ohne weiteres definiert. Die ζ -Funktion ist auf \mathbb{H}_1 holomorph und die Funktion auf der rechten Seite von Gleichung 3.20 ist auf $\mathbb{H}_1 \setminus \mathbb{N}$ holomorph. Beide Funktionen stimmen auf $\mathbb{H}_1 \setminus \mathbb{N}$ überein, weshalb mit dem Identitätssatz schon die Gleichheit auf ganz \mathbb{H}_1 folgt*, was zu zeigen war. \square

*Die Funktion $I_{r,\delta}(s)$ muss also bei $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ einfache Nullstellen haben, um die einfachen Pole von $\Gamma(1-s)$ zu „kompensieren“.

3.2. Formulierung der Riemannschen Vermutung

Bevor die Riemannsche Vermutung aufgestellt werden kann, müssen die Eigenschaften der Riemannschen ζ -Funktion genauer untersucht werden. Mit der Funktionalgleichung aus dem folgenden Satz 3.2.1 lassen sich besondere Nullstellen und Symmetrien der Riemannschen ζ -Funktion ableiten.

Satz 3.2.1. *Die Riemannsche ζ -Funktion erfüllt für alle $s \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung:*

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)\zeta(1-s)2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

Beweis. Der Beweis ist in Fischer und Lieb [FL05, S.446-447] beschrieben. Es wird ein geschickter Integrationsweg gewählt und die Funktionalgleichung folgt mit dem Residuensatz für $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) < 0\}$. Mit dem Identitätssatz lässt sich diese dann auf ganz \mathbb{C} ausweiten. \square

Lemma 3.2.2. *Die meromorph fortgesetzte Riemannsche ζ -Funktion nach ganz \mathbb{C} hat folgende Eigenschaften:*

- (1) ζ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- (2) ζ hat einen einfachen Pol bei $s=1$ mit Residuum 1.
- (3) ζ besitzt keine Nullstellen s mit $\operatorname{Re}(s) > 1$.
- (4) $\{-2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ sind die einzigen Nullstellen mit negativem Realteil.
- (5) Für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt: $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$
- (6) Die Nullstellen aus $\overline{\mathbb{H}_0} \setminus \mathbb{H}_1$ sind Achsensymmetrisch zu $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$.

Beweis. (1) Es gilt nach Theorem 3.1.6 für $s \in \mathbb{H}_1$:

$$\underbrace{\zeta(s)}_{\text{holomorph auf } \mathbb{H}_1} = \underbrace{-\Gamma(1-s)}_{\text{holomorph auf } \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \cdot I_{r,\delta}(s)}_{\text{ganz}} \quad (3.21)$$

$$\implies \zeta \text{ holomorph auf } \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

- (2) Mit der Darstellung der ζ -Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ aus Theorem 3.1.6 und dem einfachen Pol der Γ -Funktion bei 0 (vgl. Satz 2.2.1) muss ζ in 1 einen einfachen

3. Die Riemannsche Vermutung

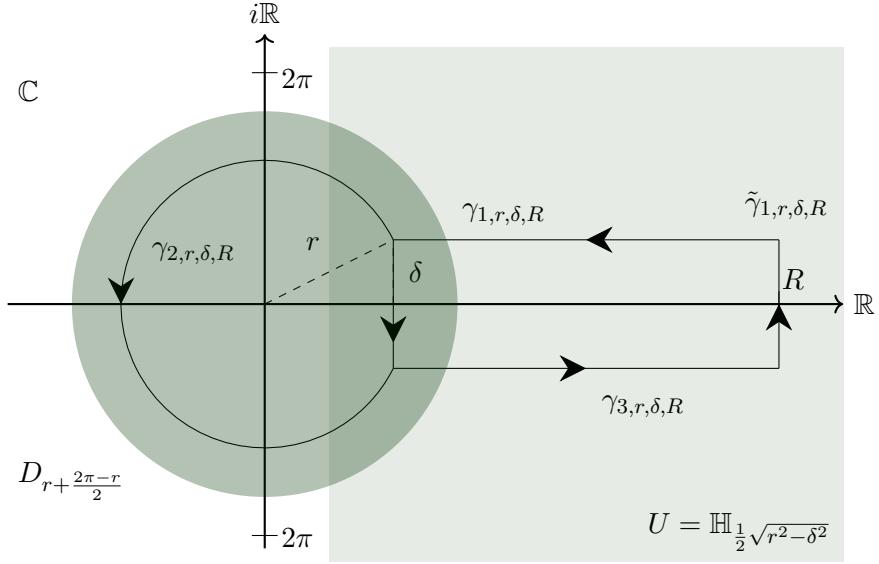


Abbildung 3.3.: In der Abbildung ist der geschlossene Rechtecksweg $\tilde{\gamma}_{1,r,\delta,R}$ dargestellt und die beiden Sterngebiete U und $D_{r+\frac{2\pi-r}{2}}$, welche in dem Beweis $I_{r,\delta}(1) = 2\pi i$ verwendet werden.

Pol haben. Für das Residuum gilt dann:

$$Res_1(\zeta) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) \stackrel{\text{Theorem 3.1.6}}{=} \underbrace{\lim_{s \rightarrow 1} (1-s)\Gamma(1-s)}_{\substack{Res_0(\Gamma)=1 \\ \text{Lemma 2.2.4(1)}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} I_{r,\delta}(1)}_{\substack{1 \\ (*) \\ \stackrel{(*)}{=} 1}} = 1 \quad (3.22)$$

Es bleibt noch $(*)$ zu zeigen: $\frac{1}{2\pi i} I_{r,\delta}(1) = 1$

Wähle dazu $r \in (0, 2\pi)$ beliebig und die Wege wie in Lemma 3.1.5. $\tilde{\gamma}_{r,\delta,R}$ sei der Weg, welcher die beiden Wege $\gamma_{1,r,\delta,R}$ und $\gamma_{3,r,\delta,R}$ zu einem geschlossenen Rechtecksweg ergänzt (vgl. Abbildung 3.3). Dann gilt mit der Unabhängigkeit von $I_{r,\delta}(1)$ von dem Parameter δ :

$$\begin{aligned} I_{r,\delta}(1) &= \lim_{(R,\delta) \rightarrow (\infty,0)} \left(\int_{\gamma_{1,r,\delta,R}} \frac{1}{e^z - 1} dz + \int_{\gamma_{3,r,\delta,R}} \frac{1}{e^z - 1} dz \right) + \lim_{(R,\delta) \rightarrow (\infty,0)} \int_{\gamma_{2,r,\delta,R}} \frac{1}{e^z - 1} dz \\ &= \lim_{(R,\delta) \rightarrow (\infty,0)} \int_{\tilde{\gamma}_{r,\delta,R}} \frac{1}{e^z - 1} dz + \int_{\partial D_r(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Funktion $\frac{1}{e^z - 1}$ ist auf dem Sterngebiet $U := \mathbb{H}_{\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - \delta^2}}$ für alle $\delta \in (0, \frac{r}{2})$

3.2. Formulierung der Riemannschen Vermutung

holomorph und der Weg $\tilde{\gamma}_{r,\delta,R}$ verläuft ganz in U . Dann verschwindet das Integral $\int_{\tilde{\gamma}_{r,\delta,r}} \frac{1}{e^z - 1} dz$ nach dem Integralsatz von Cauchy für alle $\delta \in (0, \frac{r}{2})$ und damit ist auch der Grenzwert $(R, \delta) \rightarrow (\infty, 0)$ null. Durch Anwenden des Residuensatzes auf das Sterngebiet $D_{r+\frac{2\pi-r}{2}}$ gilt außerdem

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{e^z - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0 \left(\frac{1}{e^z - 1} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} = 2\pi i, \quad (3.24)$$

woraus mit Gleichung 3.23 dann $I_{r,\delta}(1) = 2\pi i$ folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

- (3) Aus der Eulerschen Produktdarstellung der ζ -Funktion (Satz 3.1.3) folgt direkt die Behauptung, da für alle $p \in \mathbb{P}$ und alle $s \in \mathbb{H}_1$ gilt:

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} \neq 0 \quad (3.25)$$

- (4) Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) < 0$ und $\zeta(s) = 0$. Dann gilt mit der Funktionalgleichung aus Satz 3.2.1:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \underbrace{\Gamma(1-s)}_{\substack{\text{Folgerung 2.2.6(1)} \\ \neq 0}} \cdot \underbrace{\zeta(1-s)}_{\substack{(3) \\ \neq 0}} \cdot \underbrace{2^s \pi^{s-1}}_{\neq 0} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\xrightarrow[\operatorname{Re}(s) < 0]{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0} s \in \{-2k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

- (5) Sei $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dann gilt mit der Darstellung aus Theorem 3.1.6 für beliebige $r \in (0, 2\pi)$ und $\delta \in (0, \frac{r}{2})$:

$$\begin{aligned} \zeta(\bar{s}) &= -\Gamma(1-\bar{s}) \cdot \frac{1}{2\pi i} I_{r,\delta}(\bar{s}) \stackrel{\text{Lemma 2.2.4(3)}}{=} -\overline{\Gamma(1-s)} \cdot \overline{\frac{-1}{2\pi i} (-I_{r,\delta}(s))} = \overline{\zeta(s)} \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.1.5(4)}}{=} \zeta(s) \end{aligned} \quad (3.27)$$

- (6) Sei $s \in \overline{\mathbb{H}_0} \setminus \mathbb{H}_1$ mit $\zeta(s) = 0$ und $s \notin \{0, 1\}$. Dann gilt mit der Funktional-

3. Die Riemannsche Vermutung

gleichung (vgl. Satz 3.2.1):

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \underbrace{\Gamma(1-s)}_{\substack{\text{Folgerung 2.2.6(1)} \\ \neq 0}} \cdot \zeta(1-s) \cdot \underbrace{2^s \pi^{s-1}}_{\neq 0} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}_{\neq 0} \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies \zeta(1-s) &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

ζ hat bei 1 eine einfache Polstelle (vgl. (1)), woraus direkt $\zeta(1) \neq 0$ folgt. Außerdem hat $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ bei null eine einfache Nullstelle, woraus zusammen mit der einfachen Polstelle der ζ -Funktion bei eins

$$\zeta(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\Gamma(1-s)}_{\substack{\text{Folgerung 2.2.6(1)} \\ \neq 0}} \cdot \zeta(1-s) \cdot 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \neq 0 \quad (3.29)$$

folgt. Damit ist die Behauptung für ganz $\overline{\mathbb{H}_0} \setminus \mathbb{H}_1$ bewiesen. \square

Definition 3.2.3. • Wir nennen die Elemente der Menge $N_{triv} := \{-2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ die *trivialen Nullstellen* der Riemannschen ζ -Funktion.

- Die Menge $N_{nicht\ triv} := \{z \in \mathbb{C} \mid \zeta(z) = 0\} \setminus N_{triv}$ beinhaltet die *nicht trivialen Nullstellen* der Riemannschen ζ -Funktion.
- Der Streifen $S_{krit} := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ in der komplexen Ebene wird *kritischer Streifen* genannt.

Mit Lemma 3.2.2 liegen alle nicht trivialen Nullstellen auf dem Abschluss des kritischen Streifens. Riemann hat 1859 in seiner berühmten Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ [Rie59] folgende Vermutung aufgestellt:

Riemannsche Vermutung 3.2.4. Alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion haben Realteil $\frac{1}{2}$.

Diese Vermutung konnte bis heute nicht bewiesen werden. Die abgeschwächte Version, alle nichttrivialen Nullstellen liegen im kritischen Streifen, wird im folgenden Kapitel bewiesen. Diese spielt eine zentrale Rolle im Beweis des Primzahlsatzes, welcher ein genaueres Verständnis zur Verteilung von Primzahlen ermöglicht.

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

In diesem Kapitel werden einige Approximationen der Funktion $\pi(x)$, welche die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe x angibt, untersucht. Ein Schlüssel zu allen weiteren Approximationen liefert dabei der Primzahlsatz, welcher aussagt, dass π asymptotisch äquivalent zu $\frac{x}{\ln(x)}$ ist. Dieser wird im ersten Teil bewiesen. Im zweiten Teil werden dann weitere asymptotisch äquivalente Funktionen zu π bestimmt, miteinander verglichen und die Folgerungen aus dem Primzahlsatz diskutiert.

4.1. Der Primzahlsatz

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des Primzahlsatzes, welcher eine Annäherung an die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe liefert. Einen ersten vollständigen Beweis fanden unabhängig voneinander J. Hadamard und C. de la Vallée-Poussin 1896. Beide stützten sich dabei auf die Aussage, dass die Riemannsche ζ -Funktion keine Nullstellen mit Realteil eins hat. Einen ersten elementaren Beweis des Primzahlsatzes gelang A. Selberg und P. Erdös [vgl. FB06].

Zuerst die Definition der π -Funktion:

Definition 4.1.1. Die Funktion $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq x\}$ wird die *Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe* genannt.

Theorem 4.1.2. (Primzahlsatz) *Die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe π ist asymptotisch äquivalent zu $\frac{x}{\ln(x)}$. Kurz:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

Der im folgenden ausgeführte Beweis orientiert sich an der Arbeit „Newmans Short Proof of the Prime Number Theorem“ von Zagier [Zag97], welcher überwiegend

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Methoden aus der Funktionentheorie verwendet und deshalb sehr kurz und elegant ist.

Die Funktionen Φ und Θ spielen im Beweis des Primzahlsatzes eine zentrale Rolle. Deshalb werden zuerst diese beiden Funktionen definiert und einige Eigenschaften bewiesen.

Definition 4.1.3. Definiere die Φ -Funktion und die Tschebyscheffsche Θ -Funktion durch:

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{H}_1 &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \Phi(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \\ \Theta : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Theta(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \ln(p)\end{aligned}\tag{4.1}$$

In beiden vorkommenden Reihen wird über alle Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge summiert.

Zuerst wird die Wohldefiniertheit sowie einige Eigenschaften der Φ - und der Θ -Funktion untersucht. Dazu die beiden folgenden Lemmata:

Lemma 4.1.4. Für die Φ -Funktion aus Definition 4.1.3 gilt:

- (1) Die Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(p_n)}{p_n^s}$ konvergiert normal in \mathbb{H}_1 mit $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ und $p_i < p_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit ist Φ wohldefiniert.
- (2) Φ ist holomorph auf \mathbb{H}_1 .
- (3) Φ ist meromorph fortsetzbar auf $\mathbb{H}_{1/2}$. Außerdem gibt es nur Pole bei 1 mit dem Residuum 1 und bei den Nullstellen von ζ .

Beweis. (1) Um die normale Konvergenz zu zeigen sei $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{H}_1$. Nach Satz 3.1.3 und $\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s}$ für $s \in \mathbb{H}_1$ ist die Reihe $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s}$ normal konvergent. Dann existiert eine Folge A_n nicht negativer reeller Zahlen, deren Reihe konvergiert und eine Umgebung U von s_0 , sodass für $s = \sigma + it \in U$ gilt:

$$\left| -\frac{\ln(n)}{n^s} \right| = \frac{\ln(n)}{n^\sigma} \leq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\tag{4.2}$$

Definiere damit die Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $M_n := A_{p_n}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergiert als Teilreihe von $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann gilt für alle $s = \sigma + it \in U$ und

alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\ln(p_n)}{p_n^s} \right| = \frac{\ln(p_n)}{p_n^\sigma} \stackrel{\text{Gl. (4.2)}}{\leq} A_{p_n} = M_n \quad (4.3)$$

Damit konvergiert nach Definition 2.1.7 die Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s}$ in \mathbb{H}_1 normal.

(2) Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \text{ normal konvergent auf } \mathbb{H}_1 \\ \frac{\ln(p_n)}{p_n^s} \text{ holomorph auf } \mathbb{H}_1 \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{Satz 2.1.8}]{\text{Diff.Satz}} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \text{ holomorph auf } \mathbb{H}_1 \quad (4.4)$$

(3) Um die dritte Aussage zu beweisen, werden zuerst die drei folgenden Aussagen $(*) - (***)$ gezeigt:

$(*)$ Mit dem Differentiationssatz für unendliche Produkte (vgl. Satz 2.1.8) und der Darstellung der ζ -Funktion als Eulerprodukt (Satz 3.1.3) gilt für $s \in \mathbb{H}_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &\stackrel{\text{Satz 3.1.3}}{=} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{((1-p^{-s})^{-1})'}{(1-p^{-s})^{-1}} \\ &\stackrel{p^{-s}=\exp(-s \ln(p))}{=} -\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{-\exp'(-s \ln(p))}{1-p^{-s}} \\ &= -\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s - 1} \\ &= -\sum_{p \in \mathbb{P}} \left(\frac{\ln(p)}{p^s} + \frac{\ln(p)}{p^s(p^s - 1)} \right) \\ &\stackrel{\text{Def.}\Phi}{=} -\Phi(s) - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s(p^s - 1)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$(**)$ Die Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s(p^s - 1)}$ ist normal konvergent und holomorph auf $\mathbb{H}_{1/2}$. Um die Konvergenz zu zeigen sei $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{H}_{1/2}$ beliebig und $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ alle Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge. Da die Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s}$ auf \mathbb{H}_1 normal konvergiert existiert zu $\tilde{s}_0 = 2\sigma_0 + it_0 \in \mathbb{H}_1$ eine Folge M_n nicht negativer Zahlen, deren Reihe konvergiert und eine Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{H}_1$ (vgl. Abb. 4.1) von \tilde{s}_0 , sodass für alle $\tilde{s} = \tilde{\sigma} + it \in \tilde{U}$

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

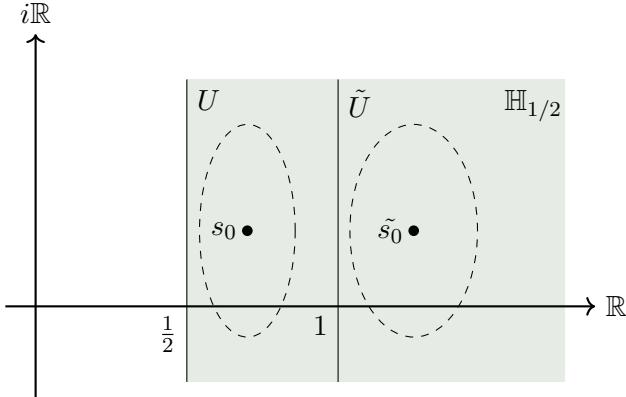


Abbildung 4.1.: Skizze zum Beweis der normalen Konvergenz der Reihe
 $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s(p^s-1)}$

gilt:

$$\left| \frac{\ln(p_n)}{p_n^s} \right| = \frac{\ln(p_n)}{p_n^s} \leq M_n \quad (4.6)$$

Definiere die Umgebung U von s_0 durch $U := \{ \frac{\tilde{\sigma}}{2} + it \mid \tilde{\sigma} + it \in \tilde{U} \} \subset \mathbb{H}_{1/2}$. Weiter gilt für $n > 2$ und $s = \sigma + it \in U$:

$$\begin{aligned} |p_n^s| &= p_n^\sigma > p_n^{1/2} \geq p_3^{1/2} = \sqrt{5} > 2 \\ \Rightarrow -1 &> -\frac{|p_n^s|}{2} \\ \Rightarrow |p_n^s - 1| &\geq |p_n^s| - 1 > |p_n^s| - \frac{|p_n^s|}{2} = \frac{|p_n^s|}{2} \\ \Rightarrow |p_n^s||p_n^s - 1| &> \frac{|p_n^{2s}|}{2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dann lässt sich für $n > 2$ und $s = \sigma + it \in U$ jeder Summand der Reihe durch

$$\left| \frac{\ln(p_n)}{p_n^s(p_n^s - 1)} \right| \stackrel{\text{Gl. (4.7)}}{<} \frac{2 \ln(p_n)}{|p_n^{2s}|} = \frac{2 \ln(p_n)}{p_n^{2\sigma}} \stackrel{\tilde{\sigma} := 2\sigma}{=} \frac{2 \ln(p_n)}{p_n^{\tilde{\sigma}}} \stackrel{\tilde{\sigma} + it \in \tilde{U}}{\stackrel{\text{Gl. (4.6)}}{\leq}} 2M_n \quad (4.8)$$

abschätzen und die Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s(p^s-1)}$ konvergiert normal auf $\mathbb{H}_{1/2}$. Jeder Summand der Reihe ist holomorph auf $\mathbb{H}_{1/2}$, woraus mit der normalen Konvergenz und dem Differentiationssatz (Satz 2.1.8) die komplexe Differenzierbarkeit auf $\mathbb{H}_{1/2}$ folgt.

(***)) Da die ζ -Funktion eine meromorphe Funktion mit der einzigen Polstelle bei 1 ist (vgl. Lemma 3.2.2), ist die logarithmische Ableitung $\frac{\zeta'}{\zeta}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus (\{\text{Nullstellen von } \zeta\} \cup \{1\})$, also auch meromorph auf $\mathbb{H}_{1/2}$.

Weiter im Beweis der ursprünglichen Aussage. Für $s \in \mathbb{H}_1$ lässt sich mit (*) die Φ -Funktion wie folgt darstellen:

$$\Phi(s) = \underbrace{- \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s(p^s - 1)}}_{\text{normal konvergent und holomorph auf } \mathbb{H}_{1/2} \text{ (**)}} - \underbrace{\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}}_{\text{meromorph auf } \mathbb{H}_{1/2} \text{ (***)}} \quad (4.9)$$

Damit lässt sich Φ auf $\mathbb{H}_{1/2}$ meromorph fortsetzen. Da der erste Teil in Gleichung 4.9 holomorph auf $\mathbb{H}_{1/2}$ ist und nach (***)) der zweite Teil holomorph auf $\mathbb{H}_{1/2} \setminus (\{\text{Nullstellen von } \zeta\} \cup \{1\})$, hat ϕ nur Pole bei den Nullstellen von ζ und bei eins. Für das Residuum bei eins gilt:

$$Res_1(\Phi) = Res_1 \left(\frac{\zeta'}{\zeta} \right) = ord_1(\zeta) \stackrel{\text{Lemma 3.2.2 (2)}}{=} 1 \quad (4.10)$$

□

Lemma 4.1.5. *Die Θ -Funktion aus Definition 4.1.3*

(1) *ist wohldefiniert*

(2) *wächst nicht wesentlich schneller als x dh. es gilt: $\Theta(x) \in O(x)$*

Beweis. (1) Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist die Summe $\sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \ln(p)$ endlich, also ist Θ wohldefiniert.

(2) Die Behauptung folgt mit Bemerkung 2.1.6 (1) aus $\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\Theta(x)}{x} \right| < \infty$. Beweise zuerst durch Induktion die Gleichung:

$$2^{2n} \geq \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.11)$$

- Induktionsanfang: Die Behauptung gilt für $n = 1$, da $4 \geq 2$ gilt.
- Induktionsvoraussetzung: Angenommen die Behauptung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

- Induktionssschritt: Es gilt mit $4(n+1)(n+1) \geq (2n+2)(2n+1)$:

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)} &\stackrel{\text{IV}}{\geq} 4 \cdot \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)}{n!} \\
&= \frac{4(n+1)(n+1)}{n+1} \cdot \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+2)}{n!} \quad (4.12) \\
&\geq \frac{(2n+2)(2n+1)2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+2)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Mit der durch Induktion bewiesenen Gleichung 4.11 gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
2^{2n} &\geq \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)}{n!} \\
&= \underbrace{\prod_{p \in \mathbb{P}, n < p \leq 2n} p}_{\substack{\text{keiner der Faktoren kürzt sich mit} \\ \text{einem der Faktoren aus } n!}} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{p \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}, n < p \leq 2n} p}{n!}}_{\geq 1} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \prod_{p \in \mathbb{P}, n < p \leq 2n} p \\
&\stackrel{\text{Def. } \Theta}{=} \exp(\Theta(2n) - \Theta(n)) \\
\implies \Theta(2n) - \Theta(n) &\leq 2n \ln(2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Dann existiert zu $C > \ln(2)$ ein $A \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$\Theta(x) - \Theta\left(\frac{x}{2}\right) \leq Cx \quad \forall x \geq A \quad (4.15)$$

gilt. Sei weiter $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge positiver, reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine passende Folge in \mathbb{N} , sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{x_n}{2^{r_n}} \geq A > \frac{x_n}{2^{r_n+1}} \quad (4.16)$$

Dann gilt für alle $n \in N$ auch:

$$\begin{aligned}
\Theta(x_n) - \Theta\left(\frac{x_n}{2^{r_n+1}}\right) &= \sum_{m=0}^{r_n} \underbrace{\left(\Theta\left(\frac{x_n}{2^m}\right) - \Theta\left(\frac{x_n}{2^{m+1}}\right)\right)}_{\substack{\text{Gl. (4.15) und (4.16)} \\ \leq C \frac{x_n}{2^m}}} \leq Cx_n \underbrace{\sum_{m=0}^{r_n} \frac{1}{2^m}}_{\substack{\text{geom. Reihe} \\ \leq 2}} \leq 2Cx_n
\end{aligned}$$

(4.17)

$$\implies \frac{\Theta(x_n)}{x_n} \leq 2C + \frac{\Theta\left(\frac{x_n}{2^{r_n+1}}\right)}{x_n} \stackrel{\text{Gl. (4.16)}}{\leq} 2C + \frac{\Theta(A)}{x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.18)$$

$$\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Theta(x_n)}{x_n} \right| < \infty \quad (4.19)$$

Aus der Beliebigkeit der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt die Behauptung:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\Theta(x)}{x} \right| < \infty \quad (4.20)$$

□

Es gilt sogar noch mehr, denn Θ ist asymptotisch äquivalent zu x . Daraus lässt sich der Primzahlsatz in wenigen Schritten ableiten. Deshalb ist das nächste Ziel, diese Behauptung zu beweisen. Hierzu muss zuerst die Riemannsche ζ -Funktion bei Realteil eins genauer untersucht werden, um anschließend mit dem Analytischen Theorem (vgl. Satz 4.1.11) die Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)-x}{x^2}$ zu beweisen. Damit kann dann $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Theta(x)}{x} = 1$ bewiesen werden, was gerade die asymptotischen Äquivalenzen zwischen Θ und x bedeutet (vgl. Notation 2.1.5).

Satz 4.1.6. *Die Riemannsche ζ -Funktion hat keine Nullstellen in $\overline{\mathbb{H}}_1$.*

Beweis. Mit Lemma 3.2.2 bleibt zu zeigen: ζ hat keine Nullstellen mit Realteil eins. Sei $s_0 = 1 + i\alpha \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl mit Realteil eins. Im Fall $\alpha = 0$ ist $s_0 = 1$ keine Nullstelle von ζ , da bei eins die ζ -Funktion eine Polstelle hat. Zeige im folgenden, dass $s_0 = 1 + i\alpha$ für $\alpha \neq 0$ eine Nullstelle der Ordnung null sein muss, und damit keine „echte“ Nullstelle ist.

Habe dazu $1 + i\alpha$ die Ordnung μ und $1 + 2i\alpha$ die Ordnung ν . Dann müssen $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ sein, da ζ auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph ist (vgl. Lemma 3.2.2). Zuerst drei Behauptungen mit Beweis:

Behauptung (1). Sei g eine auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Dann ist \tilde{g} , definiert durch $\tilde{g}(z) := \overline{g(\bar{z})}$, holomorph auf $\overline{U} := \{\bar{z} | z \in U\}$.

Beweis. Da g holomorph ist auf U existieren $u, v : \{(x, y) | x + iy \in U\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen mit $g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ für $x + iy \in U$. Diese erfüllen dann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Um die komplexe Differenzierbarkeit von \tilde{g} auf \tilde{U} nachzurechnen, überprüfe die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen mit $\tilde{g}(x + iy) = u(x, -y) + i(-v(x, -y))$ für

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

$x + iy \in \tilde{U}$. Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \partial_1 u(x, -y) \stackrel{\text{CR-DG auf } U}{=} \partial_2(-v(x, -y)) \quad \forall x + iy \in \tilde{U} \\ \partial_2 u(x, -y) \stackrel{\text{CR-DG auf } U}{=} \partial_1 v(x, -y) \quad \forall x + iy \in \tilde{U} \end{array} \right\} \implies \tilde{g} \text{ holomorph auf } \tilde{U}$$

Behauptung (2). Sei s_0 eine Nullstelle von ζ der Ordnung μ dann ist auch $\overline{s_0}$ eine Nullstelle von ζ der Ordnung μ .

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung U von s_0 und eine auf U holomorphe Funktion g , sodass für alle $s \in U$:

$$\zeta(s) = (s - s_0)^\mu g(s) \quad \wedge \quad g(s_0) \neq 0 \quad (4.21)$$

Außerdem gilt mit $\overline{U} := \{\overline{z} | z \in U\}$ und $\tilde{g} : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\tilde{g}(z) := \overline{g(\overline{z})}$:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \zeta(s) \stackrel{\text{Lemma 3.2.2 (5)}}{=} \overline{\zeta(\overline{s})} = (s - \overline{s_0})^\mu \tilde{g}(s) \quad \forall s \in \overline{U} \\ \bullet \tilde{g}(\overline{s_0}) = \overline{g(s_0)} \neq 0 \\ \bullet \tilde{g} \text{ ist holomorph auf } \overline{U} \quad (\text{vgl. Beh.(1)}) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{s_0} \text{ ist Nullstelle von } \zeta \text{ der Ordnung } \mu$$

Behauptung (3). Sei s_0 eine Nullstelle von ζ der Ordnung μ , dann gilt für das Residuum von ϕ in s_0 : $\text{Res}_{s_0}(\Phi) = -\mu$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{H}_{1/2}$ und eine auf U holomorphe Funktion g , sodass sich für alle $s \in U$ die ζ -Funktion durch $\zeta(s) = (s - s_0)^\mu g(s)$ darstellen lässt und $g(s_0) \neq 0$ gilt. Sei $V \subset U$, sodass $g|_V$ keine Nullstelle hat. Dann gilt für alle $s \in V$:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &\stackrel{\text{Gl. (4.9)}}{=} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s(p^s - 1)} \\ &= -\frac{\mu}{(s - s_0)} - \underbrace{\frac{g'(s)}{g(s)}}_{\text{holomorph auf } V \subset U} - \underbrace{\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s(p^s - 1)}}_{\text{holomorph auf } V \subset \mathbb{H}_{1/2}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Damit gilt im Fall $\mu \neq 0$ für das Residuum $\text{Res}_{s_0}(\Phi) = -\mu$. Im Fall $\mu = 0$ ist s_0 eine hebbare Singularität von Φ und das Residuum ist null. Zusammen ergibt sich die Behauptung.

Wieder zurück zum Beweis des ursprünglichen Satzes. Aus Behauptung (3), sowie Lemma 4.1.4 (3) folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -\mu &\stackrel{\text{Beh. (3)}}{=} \text{Res}_{1+i\alpha}(\Phi) = \lim_{z \rightarrow 1+i\alpha} (z - 1 - i\alpha)\Phi(z) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon\Phi(1 + \epsilon + i\alpha) \\ 1 &\stackrel{\text{Lemma 4.1.4 (3)}}{=} \text{Res}_1(\Phi) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon\Phi(1 + \epsilon). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Durch analoge Rechnungen und Verwendung von Behauptung (2) ergeben sich noch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -\mu &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon\Phi(1 + \epsilon - i\alpha) \\ -\nu &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon\Phi(1 + \epsilon \pm 2i\alpha), \end{aligned} \tag{4.24}$$

womit sich dann die finale Abschätzung ergibt:

$$\begin{aligned} 6 - 8\mu - 2\nu &\stackrel{\text{Gl. (4.23)}}{=} \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \Phi(1 + \epsilon + ir\alpha) \\ &\stackrel{\text{Def. } \Phi}{=} \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \frac{\ln(p)}{p^{1+\epsilon+ir\alpha}} \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^{1+\epsilon}} \sum_{r=0}^4 \binom{4}{r} (p^{-i\alpha})^{r-2} \\ &\stackrel{\text{Bin. Formel}}{=} \lim_{\epsilon \searrow 0} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^{1+\epsilon}} \underbrace{p^{2i\alpha} (p^{-i\alpha} + 1)^4}_{= \left(p^{-\frac{i\alpha}{2}} + p^{\frac{i\alpha}{2}}\right)^4 \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \\ &\geq 0 \\ \xrightarrow{\mu, \nu \geq 0} \mu = 0 &\implies \zeta(1 + i\alpha) \neq 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Da $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig war, hat die ζ -Funktion keine Nullstellen auf der Achse mit Realteil eins. \square

Folgerung 4.1.7. Alle kritischen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion liegen innerhalb des kritischen Streifens.

Beweis. Die Nullstellenfreiheit auf der Achse mit Realteil eins (vgl. Satz 4.1.6) und

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

die Eigenschaften

- ζ besitzt keine Nullstellen s mit $\operatorname{Re}(s) > 1$.
- $\{-2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ sind die einzigen Nullstellen mit negativem Realteil.
- Die Nullstellen aus $\overline{\mathbb{H}_0} \setminus \mathbb{H}_1$ sind Achsensymmetrisch zu $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$.

aus Lemma 3.2.2 implizieren die Behauptung. \square

Lemma 4.1.8. Das Integral $\int_0^\infty \frac{\Theta(x)-x}{x^2} dx$ existiert.

Die Existenz des Integrals folgt als Spezialfall des Analytischen Theorems. Um dieses formulieren zu können, muss zuerst der Begriff der holomorphen Funktion auf beliebige Teilmengen der komplexen Zahlen erweitert werden:

Definition 4.1.9. Sei $A \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf A , falls für alle $a \in A$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f|_{A \cap D_\delta(a)}$ auf $D_\delta(a)$ holomorph fortgesetzt werden kann.

Bemerkung 4.1.10. (1) Für offene Teilmengen $A \subset \mathbb{C}$ stimmt Definition 4.1.9 mit der Standarddefinition überein.

(2) Die Φ -Funktion lässt sich Holomorph auf $\overline{\mathbb{H}_1} \setminus \{1\}$ fortsetzen.

Beweis. Sei $z_0 \in \overline{\mathbb{H}_1} \setminus \{1\}$, dann existiert wegen Satz 4.1.6 ein beliebig kleines $\delta > 0$, sodass $D_\delta(z_0)$ keine Nullstellen von ζ enthält und $1 \notin D_\delta(z_0)$ liegt. Da sich die Φ -Funktion holomorph auf $\mathbb{H}_{1/2} \setminus (\{1\} \cup \{\text{Nullstellen von } \zeta\})$ fortsetzen lässt (vgl. Lemma 4.1.4 (3)) und die ζ -Funktion keine Nullstellen mit Realteil eins hat (vgl. Satz 4.1.6), lässt sich auch $\Phi|_{D_\delta(z_0) \cap \overline{\mathbb{H}_1}}$ auf $D_\delta(z_0)$ holomorph fortsetzen*. \square

Satz 4.1.11 (Analytisches Theorem). *Sei $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und lokal integrierbare Funktion und $g : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $g(z) := \int_0^\infty f(t) \exp(-zt) dt$, ist holomorph fortsetzbar auf $\overline{\mathbb{H}_0}$. Dann existiert das Integral $\int_0^\infty f(t) dt$.*

*An dieser Stelle geht ein, dass die Riemannsche ζ -Funktion keine Nullstellen mit Realteil eins hat. Wäre dies nicht der Fall, so wäre die Φ -Funktion nicht auf $\overline{\mathbb{H}_1} \setminus \{1\}$ holomorph und das analytischen Theorems nicht anwendbar. Dieses ist aber für den Beweis der asymptotischen Äquivalenz $\Theta \sim x$ und dem daraus folgenden Primzahlsatz essentiell.

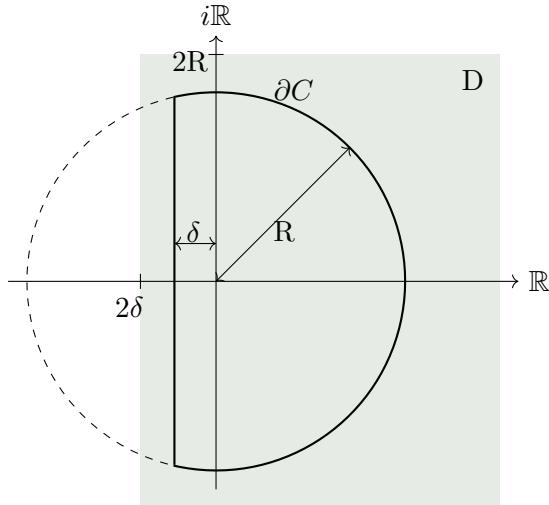


Abbildung 4.2.: Im Beweis des Analytischen Theorems wird der Integralsatz von Cauchy auf einen Weg entlang von ∂C angewendet. Dieser hängt von den beiden Parametern R und δ ab. δ wird dabei so gewählt, dass die Funktion g auf D holomorph fortgesetzt werden kann.

Bemerkung 4.1.12. Die Funktion g aus Satz 4.1.11 ist wohldefiniert, da für eine obere Schranke B von $|f|$ gilt:

$$|f(t) \exp(-zt)| \leq B \exp(-\sigma t) \quad \forall z = \sigma + it \in \mathbb{H}_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.26)$$

Wegen $\sigma > 0$ existiert damit das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t) \exp(-zt) dt$.

Beweis. Seien die Funktionen f und g wie in der Behauptung. Die auf ganz \mathbb{C} definierte Funktion $g_T(z) = \int_0^T f(t) \exp(-zt) dt$ ist ganz für alle $T > 0$, da f lokal integrierbar ist. Mit den Definitionen von g und g_T muss für den Beweis des Analytischen Theorems die Existenz des Grenzwertes $\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0)$ und die Gleichheit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0) = g(0) \quad (4.27)$$

gezeigt werden.

Sei dazu $R > 0$ beliebig und g nach $\overline{\mathbb{H}}_0$ holomorph fortgesetzt. Dann existiert wegen der Kompaktheit von $[-2R, 2R]$ und Definition 4.1.9 ein $\delta > 0$, sodass g auch nach $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > -2\delta, \operatorname{Im}(z) \in (-2R, 2R)\}$ holomorph fortgesetzt werden kann. Sei $C := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \operatorname{Re}(z) > -\delta\}$ (vgl. Abb. 4.1.11) und ∂C^\pm definiert durch: $\partial C^\pm := \partial C \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \gtrless 0\}$

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Dann gilt mit der Integralformel von Cauchy für alle $T > 0$:

$$\begin{aligned}
g(0) - g_T(0) &\stackrel{\text{C.I.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} (g(z) - g_T(z)) \underbrace{\frac{\exp(zT) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)}{z}}_{:= h(z, T)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\underbrace{\int_{\partial C^+} (g(z) - g_T(z)) h(z, T) dz}_{:= I_1(T)} + \underbrace{\int_{\partial C^-} g_T(z) h(z, T) dz}_{:= I_2(T)} - \underbrace{\int_{\partial C^-} g(z) h(z, T) dz}_{:= I_3(T)} \right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Behauptung. Für $B \in \mathbb{R}$, sodass $B \geq |f(t)|$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

- (1) $|I_1(T)| \leq 2\pi \frac{B}{R} \quad \forall T > 0$
- (2) $|I_2(T)| \leq 2\pi \frac{B}{R} \quad \forall T > 0$
- (3) $\lim_{T \rightarrow \infty} I_3(T) = 0$

(1) Für die beiden Integranden in $I_1(T)$ gilt für $z = z_1 + iz_2 \in \partial C^+$ und $T > 0$:

$$\begin{aligned}
|g(z) - g_T(z)| &\stackrel{\Delta \text{Ungl.}}{\leq} \stackrel{\text{Def.}}{\int_T^\infty} |f(t) \exp(-zt)| dt \leq B \int_T^\infty \exp(-z_1 t) dt = \frac{B \exp(-z_1 T)}{z_1} \\
\left| \exp(zT) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| &\stackrel{R^2 = z\bar{z}}{=} \exp(z_1 T) \left| \frac{\bar{z} + z}{R^2} \right| = \exp(z_1 T) \frac{2z_1}{R^2}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Damit lässt sich das Integral $I_1(T)$ mit der Standardabschätzung für alle $T > 0$ wie folgt abschätzen:

$$|I_1(T)| \leq \frac{B \exp(-z_1 T)}{z_1} \cdot \exp(z_1 T) \frac{2z_1}{R^2} \cdot \pi R = 2\pi \frac{B}{R} \tag{4.31}$$

- (2) Da $g_T(z)h(z, T)$ als Funktion von z in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist, lässt sich anstelle über ∂C^- auch über den Halbkreis $\tilde{\partial C^-} := \{z \in C \mid |z| = R, \operatorname{Re}(z) < 0\}$ integrieren. Mit analogen Abschätzungen, wie in Gleichung 4.30 und 4.31 folgt die Behauptung.
- (3) In der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$ konvergiert $\exp(zT)$ für $T \rightarrow \infty$ kompakt gleichmäßig gegen null. Die beiden anderen Faktoren im Integranden sind unabhängig von T , weshalb die Behauptung gilt.

Um den Beweis des Analytischen Theorems abzuschließen sei $\epsilon > 0$ und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

eine beliebige Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{2\pi} |I_3(T_n)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n > N$ (möglich mit Gleichung 4.29 (3)) und $R > 0$, sodass $\frac{2B}{R} < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für alle $n > N$:

$$\begin{aligned} |g_{T_n}(0) - g(0)| &\stackrel{\text{Gl. (4.28)}}{\leq} \frac{1}{2\pi} (|I_1(T_n)| + |I_2(T_n)| + |I_3(T_n)|) \\ &\stackrel{\text{Gl. (4.29)}}{\leq} \frac{2B}{R} + \frac{1}{2\pi} |I_3(T_n)| \\ &< \epsilon \\ \text{Folge } T_n \text{ beliebig } \implies \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0) &= g(0) \end{aligned} \quad (4.32)$$

□

Beweis. (Lemma 4.1.8)

Sei $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ alle Primzahlen der Größe nach geordnet und $p_0 := 1$. Dann lässt sich zwischen der Φ -Funktion und der Θ -Funktion für $s \in \mathbb{H}_1$ folgender Zusammenhang herleiten:

$$\begin{aligned} s \underbrace{\int_0^\infty \exp(-st) \Theta(e^t) dt}_{\text{existiert, da } \Theta(x)=O(x)} &\stackrel{\text{Subst. } e^t=x}{=} s \int_1^\infty \frac{\Theta(x)}{x^{s+1}} dx \\ &= s \sum_{k=0}^{\infty} \int_{p_k}^{p_{k+1}} \frac{\Theta(x)}{x^{s+1}} dx \\ &\stackrel{\Theta \text{ konst. auf } [p_k, p_{k+1}]}{=} s \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(p_k) \frac{1}{s} \left[-x^{-s} \right]_{p_k}^{p_{k+1}} \\ &\stackrel{\text{Umklammern}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-s} \underbrace{(\Theta(p_k) - \Theta(p_{k-1}))}_{=\ln(p_k)} + \underbrace{\Theta(p_0) p_0^{-s}}_{=0} \\ &= \Phi(s) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Für $f(t) = \Theta(e^t)e^{-t} - 1$ sind die Voraussetzung aus dem Analytischen Theorem 4.1.11 erfüllt:

- f ist lokal integrierbar, da f bis auf die Nullmenge $\{t \in \mathbb{R}^+ | e^t \in \mathbb{P}\}$ stetig ist.
- f ist beschränkt, da $\Theta(x) = O(x)$ (vgl. Lemma 4.1.5(2)). Genauer existiert nach der Definition von O ein $K \in \mathbb{R}^+$ und ein $A \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x > A$ gilt:

$$|\Theta(x)| \leq K|x| \quad (4.34)$$

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Dann gilt für $t \in \mathbb{R}^+$ die Abschätzung

$$|f(t)| \stackrel{\Delta-\text{Ung.}}{\leq} |\Theta(e^t)|e^{-t} + 1 \leq \begin{cases} K|e^t|e^{-t} + 1 = K + 1 & \text{falls } t > \ln(A) \\ \Theta(A) + 1 & \text{falls } t \leq \ln(A) \end{cases} \quad (4.35)$$

und die Funktion f ist beschränkt.

- Für $z \in \mathbb{H}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-zt) dt \\ &= \int_0^\infty (\exp(-zt)\Theta(e^t)e^{-t} - \exp(-zt)) dt \\ &= \frac{z+1}{z+1} \int_0^\infty \exp(-t(z+1)) \Theta(e^t) dt - \frac{1}{z} \\ &\stackrel{\text{Gl. (4.33)}}{=} \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Die Funktionen $z+1$ und z sind holomorph auf \mathbb{H}_0 und ungleich null. Deshalb gilt:

- $g(z)$ ist holomorph auf \mathbb{H}_0 , da $\Phi(z+1)$ holomorph auf \mathbb{H}_0 (vgl. Lemma 4.1.4)
- $g(z)$ ist holomorph fortsetzbar auf $\overline{\mathbb{H}}_0$

Beweis. $\Phi(z+1)$ lässt sich holomorph nach $\overline{\mathbb{H}}_0 \setminus \{0\}$ fortsetzen (vgl. Bemerkung 4.1.10 (2)) und für das Residuum bei null gilt:

$$\text{Res}_0 \left(\frac{\Phi(z+1)}{z+1} \right) = \frac{1}{z+1} \Big|_{z=0} \text{Res}_0(\Phi(z+1)) \stackrel{\text{Lemma 4.1.4}}{=} 1 \quad (4.36)$$

Damit hebt sich der einzige Term mit negativer Potenz in der Laurantentwicklung von $\frac{\Phi(z+1)}{z+1}$ (Φ hat einen Pol erster Ordnung bei eins) mit $\frac{1}{z}$ heraus und g ist holomorph fortsetzbar nach $\overline{\mathbb{H}}_0$.

Anwendung des Analytischen Theorems 4.1.11 liefert die Existenz des folgenden

Integrals, womit die Behauptung bewiesen ist:

$$\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty (\Theta(e^t)e^{-t} - 1)dt \stackrel{\text{Subst. } x=e^t}{=} \int_1^\infty \frac{\Theta(x) - x}{x^2} dx \quad (4.37)$$

□

Folgerung 4.1.13. Aus der Existenz des Integrals $\int_1^\infty \frac{\Theta(x)-x}{x^2} dx$ folgt die Existenz der beiden Integrale:

$$\int_1^\infty \left(\frac{\Theta(x) - x}{x^2} \right)^\pm dx \quad (4.38)$$

$(\cdot)^\pm$ ist dabei für alle $y \in \mathbb{R}$ definiert durch:

$$(y)^+ := \begin{cases} y & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (y)^- := \begin{cases} y & \text{für } y \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.39)$$

Lemma 4.1.14. Die Tschebyscheffsche Θ -Funktion ist asymptotisch äquivalent zu x . Kurz gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Theta(x)}{x} = 1$$

Beweis. Zeige zuerst die beiden folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall \lambda_1 > 1 \exists A \in \mathbb{R} \forall x > A : \quad \Theta(x) < \lambda_1 x \\ (2) \quad & \forall \lambda_2 < 1 \exists B \in \mathbb{R} \forall x > B : \quad \Theta(x) > \lambda_2 x \end{aligned} \quad (4.40)$$

(1) (Beweis durch Widerspruch)

Angenommen: $\exists \lambda_1 > 1 \forall A \in \mathbb{R} \exists x_0 > A : \quad \Theta(x_0) \geq \lambda_1 x_0$

$$\xrightarrow{\Theta \text{ monoton wachsend}} \Theta(x) \geq \lambda_1 x_0 \quad \forall x \geq x_0 \quad (4.41)$$

Dann gilt:

$$\int_{x_0}^{\lambda_1 x_0} \frac{\Theta(t) - t}{t^2} dt \stackrel{\text{Gl. (4.41)}}{\geq} \int_{x_0}^{\lambda_1 x_0} \frac{\lambda_1 x_0 - t}{t^2} dt \stackrel{\text{Subst. } u=\frac{t}{x_0}}{=} \int_1^{\lambda_1} \frac{\lambda_1 - u}{u^2} du =: L > 0 \quad (4.42)$$

Anschaulich reicht das für den Widerspruch schon aus, da die Abschätzung für

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

beliebig große A gilt und damit die Funktion $\frac{\Theta(x)-x}{x^2}$ immer wieder Bereiche hat (x_0 bis λx_0), in denen das Intergal L ergibt. Dies ist ein Widerspruch zur Existenz des uneigentlichen Integrals Lemma 4.1.8. Im folgenden wird das Argument exakter ausformuliert:

Sei λ_1 wie in der Annahme und $A_0 = 1$. Sei x_0 das kleinste $x_0 \geq A_0$, sodass $\Theta(x_0) \geq \lambda_1 x_0$ gilt. Wegen $\Theta(1) = 0$ ist $x_0 \neq 1$. Konstruiere induktiv zwei Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &:= \lambda_1 x_n \\ x_{n+1} &:= \min\{x \in \mathbb{R} | x \geq A_{n+1}, \Theta(x) \geq \lambda_1 x\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dann gilt mit der Notation aus Folgerung 4.1.13, der Definition der Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Gleichung 4.42:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left(\frac{\Theta(t)-t}{t^2} \right)^+ dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{A_n}^{x_n} \left(\frac{\Theta(t)-t}{t^2} \right)^+ dt}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_n}^{\lambda_1 x_n} \left(\frac{\Theta(t)-t}{t^2} \right)^+ dt}_{\geq \frac{\Theta(t)-t}{t^2}} \right) \\ &\stackrel{\text{Gl. (4.42)}}{\geq} \sum_{n=0}^{\infty} L \end{aligned} \quad (4.44)$$

$\not\leq$ zur Existenz des Integrals $\int_1^\infty \frac{\Theta(t)-t}{t^2} dt$ (vgl. Folgerung 4.1.13)

Die Negation der angenommenen Aussage liefert die erste Behauptung.

- (2) Der Beweis der zweiten Aussage geht analog. Die negierte Behauptung wird angenommen. Dann lässt sich für passendes, aber beliebig großes, $x \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathbb{R}^+$ das folgende Integral analog zu Gleichung 4.42 durch

$$\int_{\lambda_2 x}^x \frac{\Theta(t)-t}{t^2} dt \leq L < 0 \quad (4.45)$$

abgeschätzt, was zur Divergenz des Integrals $\int_1^\infty \left(\frac{\Theta(t)-t}{t^2} \right)^- dt$ und damit zum Widerspruch führt.

Aus (1) und (2) folgt:

$$\begin{aligned}
 & \forall \lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1 \exists A \in \mathbb{R} : \lambda_2 < \frac{\Theta(x)}{x} < \lambda_1 \quad \forall x > A \\
 \Rightarrow & \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists A \in \mathbb{R} : \underbrace{1 - \epsilon < \frac{\Theta(x)}{x} < 1 + \epsilon}_{\Leftrightarrow \left| \frac{\Theta(x)}{x} - 1 \right| < \epsilon} \quad \forall x > A \tag{4.46} \\
 \Rightarrow & \text{Der Grenzwert existiert und es gilt: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Theta(x)}{x} = 1 \quad \square
 \end{aligned}$$

Mit der gerade bewiesenen asymptotischen Äquivalenz von Θ und x (Lemma 4.1.14) lässt sich schlussendlich der Primzahlsatz beweisen.

Beweis. (Primzahlsatz)

$$\text{Zu zeigen: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

Im folgenden Beweis bezeichnet p immer eine Primzahl. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$:

$$\Theta(x) \stackrel{\text{Def. } \Theta}{=} \sum_{p \leq x} \ln(p) \leq \sum_{p \leq x} \ln(x) \stackrel{\text{Def. } \pi}{=} \pi(x) \ln(x) \Rightarrow \pi(x) \geq \frac{\Theta(x)}{\ln(x)} \tag{4.47}$$

Sei $\epsilon \in (0, 1)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 \Theta(x) & \stackrel{\text{Def. } \Theta}{=} \sum_{p \leq x} \ln(p) \geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} \ln(p) \geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p \leq x} \ln(x^{1-\epsilon}) \\
 & = (\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})) \ln(x^{1-\epsilon}) \\
 & \stackrel{\pi(y) \leq y \forall y \in \mathbb{R}}{\geq} \underset{\ln(x^{1-\epsilon}) > 0}{(1 - \epsilon) \ln(x)(\pi(x) - x^{1-\epsilon})} \\
 \Rightarrow \pi(x) & \leq \frac{\Theta(x)}{(1 - \epsilon) \ln(x)} + x^{1-\epsilon} \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichungen 4.47 und 4.48 mit $\frac{\ln(x)}{x}$ liefert für beliebiges $\epsilon \in (0, 1)$:

$$\underbrace{\frac{\Theta(x)}{x}}_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \xrightarrow{\text{Lemma 4.1.14}} 1}} \leq \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} \leq \underbrace{\frac{\Theta(x)}{x}}_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \xrightarrow{\text{Lemma 4.1.14}} 1}} (1 - \epsilon)^{-1} + \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^\epsilon}}_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \xrightarrow{} 0}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>1} \tag{4.49}$$

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

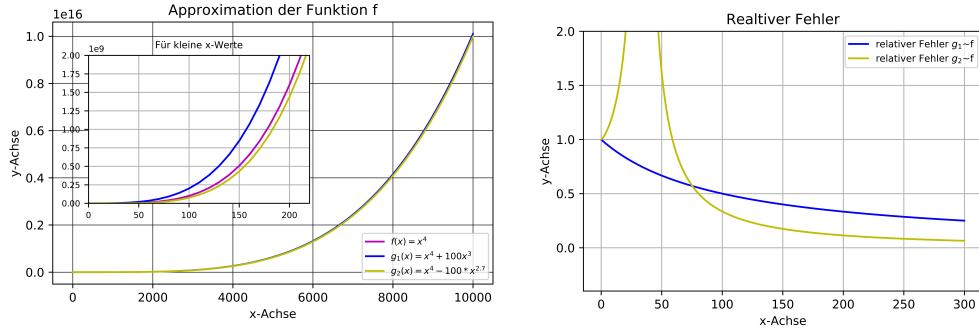


Abbildung 4.3.: Es handelt sich um ein einfaches Beispiel zur Interpretation der asymptotischen Äquivalenz. Die Funktion f wird durch die beiden Funktionen g_1 und g_2 approximiert. Im linken Bild sind die Graphen aller drei Funktionen dargestellt, während im rechten Bild deren relative Abweichungen aufgetragen werden.

Also gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$ und der Primzahlsatz ist bewiesen. \square

4.2. Verschiedene Approximationen der π -Funktion

Der Primzahlsatz sagt für die Funktion der Primzahlen unter einer gegebenen Schranke aus, dass diese asymptotisch äquivalent zu $\frac{x}{\ln(x)}$ ist. Daraus ergeben sich Rückschlüsse über die Verteilung der Primzahlen. Folgendes Beispiel soll an drei einfachen Funktionen die Konsequenzen der asymptotischen Äquivalenz verdeutlichen.

Beispiel 4.2.1. Seien f , g_1 und g_2 durch $f(x) = x^4$, $g_1(x) = x^4 - 100x^3$ und $g_2(x) = x^4 - 100x^{2.7}$ auf \mathbb{R}^+ definierte Funktionen. Alle drei sind paarweise asymptotisch äquivalent dh. es gilt:

$$f \sim g_1 \quad \wedge \quad f \sim g_2 \quad \wedge \quad g_1 \sim g_2 \quad (4.50)$$

Im Schaubild 4.3 (links) ist zu sehen, dass die Funktionen g_1 und g_2 sich für große x nicht an f annähern. Das Gegenteil ist der Fall: Die Differenz wird immer größer. Betrachtet man aber die relative Abweichung $\frac{|f(x) - g_i(x)|}{|g_i(x)|}$ für $i \in \{1, 2\}$, so geht diese für beide Funktionen gegen null. Der entscheidende Unterschied zwischen g_1 und g_2 besteht darin, dass die relativen Abweichungen unterschiedlich schnell gegen null gehen (vgl. Abbildung 4.3 rechts).

Beispiel 4.2.1 zeigt, dass $\pi \sim \frac{x}{\ln(x)}$ keinesfalls bedeutet, dass $\frac{x}{\ln(x)}$ sich π annähert. Die Differenz $|\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)}|$ geht im allgemeinen für große x gegen unendlich. Über die relative Abweichung $\frac{|\pi(x) - g(x)|}{|g(x)|}$ lassen sich unterschiedliche Approximationen g , welche asymptotisch äquivalent zu π sind, vergleichen. Zunächst wird eine Definition eingeführt, um relative und absolute Abweichungen voneinander zu unterscheiden. Außerdem wird ein Kriterium definiert, welches das Vergleichen verschiedener Approximationen erlaubt:

Definition 4.2.2. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f, g_1, g_2 : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die paarweise asymptotisch äquivalent sind.

- (1) Dann definiere für $x \in [x_0, \infty)$ den *absoluten Fehler* der Approximation $f \sim g_1$ durch $|f(x) - g_1(x)|$ und falls $g_1(x) \neq 0$ den *relativen Fehler* durch $\frac{|f(x) - g_1(x)|}{|g_1(x)|}$.
- (2) Nenne die Funktion g_1 eine *bessere Approximation der Funktion f*, als die Funktion g_2 , wenn der absolute Fehler der Approximation $g_1 \sim f$ langsamer wächst als der absolute Fehler der Approximation $g_2 \sim f$. Kurz: $|f - g_1| \in o(|f - g_2|)$

Bemerkung 4.2.3. Für die Funktionen aus Beispiel 4.2.1 gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - g_2(x)|}{|f(x) - g_1(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x^{2,7}}{100x^3} = 0 \quad \text{Bemerkung 2.1.6 (2)} \quad (g_2 - f) \in o(g_1 - f) \quad (4.51)$$

Demnach ist, wie aus dem Schaubild 4.3 zu erwarten, g_2 eine bessere Approximation der Funktion f , als g_1 .

Das Ziel ist eine Funktion zu finden, die die π -Funktion möglichst gut, im Sinne der Definition 4.2.2 (2), approximiert. Folgender Satz liefert eine große Auswahl möglicher Funktionen:

Satz 4.2.4. Die für beliebiges $A \in \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f_A : (e^A, \infty)^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x) - A} \quad (4.52)$$

ist asymptotisch äquivalent zu π . Kurz: $\pi \sim f_A$

*Wähle den Definitionsbereich $x > e^A$, damit $\ln(x) - A > 0$ gilt und die Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich wohldefiniert ist.

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Beweis. Mit dem Primzahlsatz (Theorem 4.1.2) gilt für beliebiges $A \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{f_A(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi(x)}{f_0(x)} \frac{f_0(x)}{f_A(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{\pi(x)}{f_0(x)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1} \underbrace{\frac{\ln(x) - A}{\ln(x)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1} \right) = 1 \quad (4.53)$$

$$\implies \pi \sim f_A \quad \forall A \in \mathbb{R} \quad \square$$

Aus sorgfältigen Rechnungen mit vollständigen Datensätzen von $\pi(x)$ hat Legendre 1808 die zur Konstanten $A = 1,08366$ gehörende Funktion $f_{1,08366}$ als beste Approximation von π gefunden [vgl. Zag77, S.8].

Auch Gauss hat sich mit der Verteilung der Primzahlen beschäftigt und aus Empirischen Untersuchungen* herausgefunden, dass die Frequenz der Primzahlen um eine große Zahl x etwa $\frac{1}{\ln(x)}$ ist. Dies hat ihn zu der Annahme geführt, dass $\pi(x)$ durch den Integrallogarithmus $\text{Li}(x)$ approximiert werden kann. Dazu folgende Definition:

Definition 4.2.5. Nenne die Funktion

$$\text{Li} : \mathbb{R}_{>1} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$$

den *Integrallogarithmus*.

Lemma 4.2.6. Der Integrallogarithmus ist differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>1}$ mit:

$$\text{Li}'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Mit der Standardabschätzung für Integrale und $\frac{1}{\ln(t)}$ monoton fallend gilt für $h > 0$ mit $x + h > 1$:

$$\frac{1}{\ln(x+h)} \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{1}{\ln(t)} dt = \frac{\text{Li}(x+h) - \text{Li}(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \frac{1}{\ln(x)} \quad (4.54)$$

$$\implies \text{Li}'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Li}(x+h) - \text{Li}(x)}{h} = \frac{1}{\ln(x)} \quad (4.55)$$

□

*Gauß hat schon im Alter von 15 Jahren den Primzahlsatz gefunden (nicht bewiesen!), indem er mit einer Logarithmentafel Primzahltabellen angefertigt hat. „In einem Brief an Enke [Gau72, S. 444–447] beschreibt er, wie er ‚sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt‘ habe, ‚um bald hie bald dort eine Chiliade [das heißt ein Intervall von 1000 Zahlen] abzuzählen‘, bis er schließlich die Primzahlen bis 3 Millionen (!) aufgezählt und mit den Formeln verglichen hatte“ [Zag77, S.8].

Satz 4.2.7. Der Integrallogarithmus ist asymptotisch äquivalent zur π -Funktion.
Kurz: $\pi \sim Li$

Zuerst ein Lemma, welches im Beweis von Satz 4.2.7 verwendet wird*.

Lemma 4.2.8. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^n(x)}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln^{n+1}(t)} dt = 0 \quad (4.56)$$

Beweis. [Der Beweis orientiert sich an Edw74, Kap. 5.4 S.85] Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $x \in \mathbb{R}_{>2}$. Die Funktion $\frac{1}{\ln^{(n+1)}(t)}$ ist monoton fallend. Deshalb lässt sich das Integral mit der Standardabschätzung für Integrale wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \frac{\ln^n(x)}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln^{(n+1)}(t)} dt &= \frac{\ln^n(x)}{x} \underbrace{\int_2^{x^{1/2}} \frac{1}{\ln^{(n+1)}(t)} dt}_{\leq \frac{x^{1/2}-2}{\ln^{(n+1)}(2)}} + \frac{\ln^n(x)}{x} \underbrace{\int_{x^{1/2}}^x \frac{1}{\ln^{(n+1)}(t)} dt}_{\leq \frac{x-x^{1/2}}{\ln^{(n+1)}(x^{1/2})} = 2^{n+1} \frac{x-x^{1/2}}{\ln^{(n+1)}(x)}} \\ &= \frac{1}{\ln^{(n+1)}(2)} \frac{\ln^n(x)}{x^{1/2}} - \frac{2}{\ln^{(n+1)}(2)} \frac{\ln^n(x)}{x} + \frac{2^{(n+1)}}{\ln(x)} - \frac{2^{(n+1)}}{\ln(x)x^{1/2}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad \square$$

Beweis. (Satz 4.2.7) Die Asymptotische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation (vgl. Bemerkung 2.1.6). Deshalb muss wegen des Primzahlsatzes $\pi \sim \frac{x}{\ln(x)}$ (Theorem 4.1.2) nur $Li \sim \frac{x}{\ln(x)}$ gezeigt werden. Mit partieller Integration lässt sich der Integrallogarithmus zu

$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{1}{\ln^2(t)} dt \quad (4.57)$$

umschreiben. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Li(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1 - \frac{2}{\ln(2)} \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln^2(t)} dt \right)}_{\substack{\text{Lemma 4.2.8} \\ \text{Spezialfall } n=1}} = 1 \quad (4.58)$$

und die Behauptung ist bewiesen. \square

*Das Lemma ist allgemeiner, als es im Beweis benötigt wird. Für die Fälle $n=2$ und $n=3$ wird es in einem späteren Beweis noch einmal gebraucht, deshalb die Version für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

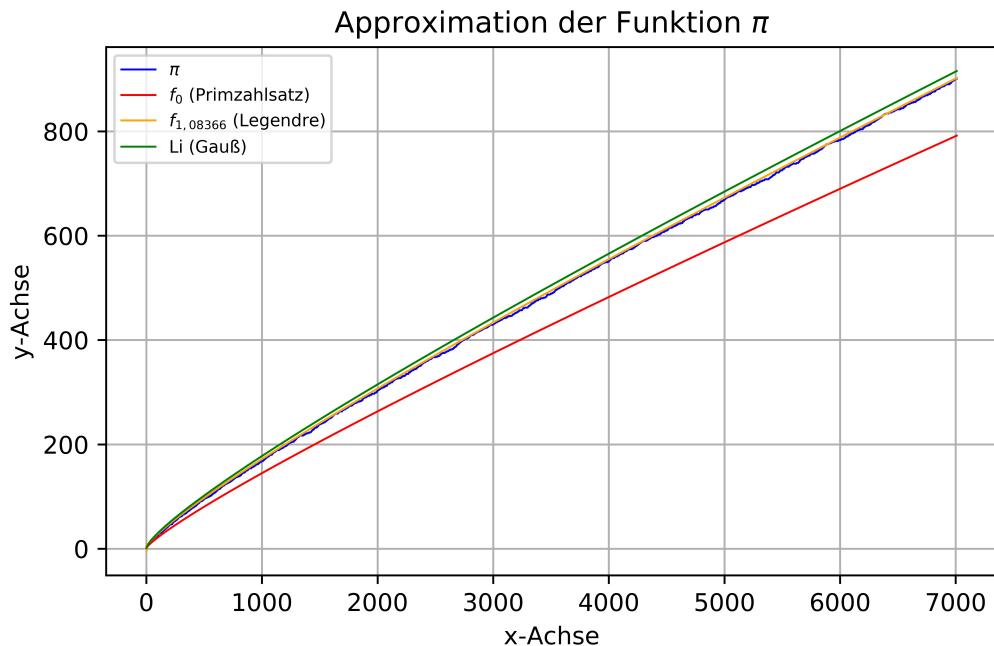


Abbildung 4.4.: In diesem Schaubild werden die drei zu π asymptotisch äquivalenten Funktionen f_0 , $f_{1,08366}$ und Li dargestellt.

Schaubild 4.4 zeigt die drei Approximationen f_0 , $f_{1,08366}$ (Legendre) und Li (Gauß) der π -Funktion. Auffällig ist vor allem die deutlich bessere Approximation durch das Einführen der Konstante $A=1,08366$ von Legendre im Vergleich zu $A=0$. Es wird sich später herausstellen, dass für $A=1$ die π -Funktion noch besser angenähert wird. Im Bild scheint die Approximation von Legendre besser zu sein als die Approximation von Gauß durch den Integrallogarithmus. Für größere x ist dies nicht mehr der Fall. Um dies zu beweisen, braucht man eine Abschätzung des relativen Fehlers der Approximation $\pi \sim Li$. De la Vallée Poussin hat 1899 folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.2.9 (De la Vallée Poussin). *Es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$, sodass sich der relative Fehler der Approximation $\pi \sim Li$ für hinreichend große x durch*

$$\frac{|\pi(x) - Li(x)|}{|Li(x)|} < e^{-\sqrt{c \ln(x)}}$$

abschätzen lässt.

Beweis. [Ausführlich in Edw74, Kapitel 5.2 und 5.3]

Grundlegend für den Beweis des Primzahlsatzes (Theorem 4.1.2) ist die Nullstellen-

freiheit der Riemannsche ζ -Funktion auf der Geraden mit Realteil eins. Der Beweis der Abschätzung von de la Vallée Poussin basiert auf einer strengeren Aussagen [Beweis vgl. Edw74, Kapitel 5.2]:

Es existieren Konstanten $c \in \mathbb{R}^+$ und $K \in \mathbb{R}_{>1}$, sodass für alle kritischen Nullstellen $\rho = \beta + i\gamma$ der Riemannschen ζ -Funktion mit $\gamma > K$ gilt:

$$\beta < 1 - \frac{c}{\ln(\gamma)} * \quad (4.59)$$

Damit lässt sich dann die gewünschte Abschätzung des relativen Fehlers der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ beweisen [vgl. Edw74, Kapitel 5.3]. \square

Folgender Satz gibt Aufschluss über die Frage, welche der Funktionen f_A für $A \in \mathbb{R}$ und Li die π -Funktion am besten approximieren.

Theorem 4.2.10. (1) f_1 ist unter allen f_A mit $A \in \mathbb{R}$ die beste Annäherung an π .

(2) Der Integrallogarithmus Li approximiert π besser als f_1 .

Bevor Theorem 4.2.10 bewiesen wird zwei Lemmata, die für den Beweis benötigt werden:

Lemma 4.2.11. Zu $A \in \mathbb{R}$ existieren Konstanten $a, c, d \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $g : \mathbb{R}_{>1} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\frac{|g(x)|}{|Li(x)|e^{-\sqrt{c \ln(x)}}} < 1$ für hinreichen großes x , sodass für alle $x \in (e^{|A|}, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad f_A(x) &= \frac{x}{\ln(x)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i x}{\ln^{(i+1)}(x)} \\ (2) \quad Li(x) &= \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + a + 2 \int_2^x \frac{1}{\ln^3(t)} dt \\ &= \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + \frac{2x}{\ln^3(x)} + d + 6 \int_2^x \frac{1}{\ln^4(t)} dt \\ (3) \quad \pi(x) &= Li(x) + g(x) \end{aligned} \quad (4.60)$$

*Die Lage der kritischen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion werden auf einen kleineren Bereich als den kritischen Streifen eingeschränkt. Trotzdem können diese für große Imaginärteile beliebig nahe an der Achse mit Realteil 1 liegen. Es konnte bis heute für kein $a < 1$ gezeigt werden, dass alle kritischen Nullstellen Realteil kleiner gleich a haben (Für $a = \frac{1}{2}$ wäre damit die Riemannsche Vermutung gezeigt). Dies lässt vermuten, dass unter Annahme der Riemannschen Vermutung eine noch bessere Abschätzung des relativen Fehlers der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ gezeigt werden kann. Dazu mehr in Kapitel 5 „Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim \text{Li}$ und die Riemannsche Vermutung“.

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Beweis. (1) Sei $A \in \mathbb{R}$ und $x \in (e^{|A|}, \infty)$, dann gilt $\left| \frac{A}{\ln(x)} \right| < 1$ und mit der geometrischen Reihe lässt sich f_A wie folgt umschreiben:

$$f_A(x) \stackrel{\text{Def. } f_A}{=} \frac{x}{\ln(x) - A} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{x}{\ln(x)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{\ln^i(x)} = \frac{x}{\ln(x)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i x}{\ln^{(i+1)}(x)} \quad (4.61)$$

(2) Sei $x \in (e^{|A|}, \infty)$, dann gilt mit dreimaliger Partieller Integration:

$$\begin{aligned} \text{Li}(x) &\stackrel{\text{Def. Li}}{=} \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{1}{\ln^2(t)} dt \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} - \underbrace{\frac{2}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln^2(2)}}_{=: a} + 2 \int_2^x \frac{1}{\ln^3(t)} dt \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + \frac{2x}{\ln^3(x)} - \underbrace{\frac{2}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln^2(2)} - \frac{4}{\ln^3(2)}}_{=: d} + 6 \int_2^x \frac{1}{\ln^4(t)} dt \end{aligned} \quad (4.62)$$

(3) Definiere g auf $\mathbb{R}_{>1}$ durch $g(x) = \pi(x) - \text{Li}(x)$. Dann gilt nach Definition von g , wie gefordert, $\pi(x) = \text{Li}(x) + g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Wegen Satz 4.2.9 existieren ein $c, B \in \mathbb{R}$, sodass für $x > B$ gilt:

$$\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)|} < e^{-\sqrt{c \ln(x)}} \Rightarrow \frac{|g(x)|}{|\text{Li}(x)| e^{-\sqrt{c \ln(x)}}} = \frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)| e^{-\sqrt{c \ln(x)}}} < 1 \quad (4.63)$$

□

Lemma 4.2.12. Für $c \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^n(x)}{e^{\sqrt{c \ln(x)}}} = 0 \quad (4.64)$$

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ fest. Zeige zuerst durch Induktion:

$$\left(\frac{\ln^n(x)}{e^{\sqrt{c \ln(x)}}} \right)^k = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (2n-j) \ln^{(n-k/2)}(x)}{c^{k/2} e^{\sqrt{c \ln(x)}}} \quad \forall k \in \{0, \dots, 2n\} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>1} \quad (4.65)$$

4.2. Verschiedene Approximationen der π -Funktion

wobei mit $(\cdot)^k$ k -maliges anwenden von L'Hospital gemeint ist und für $k = 0$ das Produkt $\prod_{j=0}^{0-1}(2n - j) := 1$ ist.

- Induktionsanfang: Die Behauptung gilt für $k=0$ mit $\prod_{j=0}^{0-1}(2n - j) = 1$ offensichtlich.
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $k \in \{0, \dots, 2n - 1\}$.
- Induktionsschritt: Um die Behauptung für $k+1$ zu zeigen sei $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ln^n(x)}{e^{\sqrt{c \ln(x)}}} \right)^{k+1} &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2n - j)}{c^{k/2}} \frac{(\ln^{(n-k/2)}(x))'}{(e^{\sqrt{c \ln(x)}})' \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2n - j)}{c^{k/2}} \frac{(n - \frac{k}{2}) \ln^{(n-k/2-1)}(x) 2\sqrt{c \ln(x)}}{e^{\sqrt{c \ln(x)}} c} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^k(2n - j)}{c^{(k+1)/2}} \frac{\ln^{(n-(k+1)/2)}(x)}{e^{\sqrt{c \ln(x)}}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Damit ist Gleichung 4.65 gezeigt und mit $2n$ -maligem anwenden von L'Hospital gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^n(x)}{e^{\sqrt{c \ln(x)}}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{\underset{\text{Gl. (4.65)}}{=}} \frac{\prod_{j=0}^{2n-1}(2n - j)}{c^n} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^0(x)}{e^{\sqrt{c \ln(x)}}} = 0 \quad (4.67)$$

□

Beweis. (Theorem 4.2.10)

- (1) Um die Behauptung zu beweisen muss der Grenzwert für x gegen unendlich des Quotienten der beiden absoluten Fehlern betrachtet werden (vgl. Definition 4.2.2). Sei dazu $A \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig und $x \in (e^{|A|}, \infty)$. Dann gilt mit den Konstanten $a, c, d \in \mathbb{R}$ und der Funktion g aus Lemma 4.2.11 durch ineinander einsetzen der drei Gleichungen 4.60:

$$\begin{aligned} \pi(x) - f_1(x) &= \pi(x) - \text{Li}(x) + \text{Li}(x) - f_1(x) \\ &= g(x) + a + 2 \int_2^x \frac{1}{\ln^3(t)} dt - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x}{\ln^{(i+1)}(x)} \\ \pi(x) - f_A(x) &= g(x) + a + 2 \int_2^x \frac{1}{\ln^3(t)} dt - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{A^i x}{\ln^{(i+1)}(x)} + \frac{(1-A)x}{\ln^2(x)} \end{aligned} \quad (4.68)$$

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Durch erweitern mit $\frac{\ln^2(x)}{(1-A)x}$ lässt sich der Quotient der absoluten Fehlern ohne Betrag für $x \in (e^{|A|}, \infty)$ wie folgt schreiben:

$$\frac{\pi(x) - f_1(x)}{\pi(x) - f_A(x)} = \frac{\underbrace{\frac{1}{1-A} \frac{\ln^2(x)g(x)}{x}}_{(*)} + \underbrace{\frac{a}{1-A} \frac{\ln^2(x)}{x}}_{(*)} + \underbrace{\frac{2}{1-A} \frac{\ln^2(x)}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln^3(t)} dt}_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \text{Lemma 4.2.8 (n=2)}}} - \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(1-A)\ln^{(i-1)}(x)}}_{(**)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0}{\underbrace{\frac{1}{1-A} \frac{\ln^2(x)g(x)}{x}}_{(*)} + \underbrace{\frac{a}{1-A} \frac{\ln^2(x)}{x}}_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \text{Lemma 4.2.8 (n=2)}}} + \underbrace{\frac{2}{1-A} \frac{\ln^2(x)}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln^3(t)} dt}_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \text{Lemma 4.2.8 (n=2)}}} - \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{A^i}{(1-A)\ln^{(i-1)}(x)}}_{(**)} + 1} \quad (4.69)$$

- (*) Um den Grenzwert von (*) für $x \rightarrow \infty$ zu berechnen wird mit $\text{Li}(x)e^{-\sqrt{c \ln(x)}}$ erweitert. Dies liefert:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\ln^2(x)g(x)}{x} \right| &= \underbrace{\frac{|g(x)|}{\text{Li}(x)e^{-\sqrt{c \ln(x)}}}}_{\substack{x \text{ hinreichen groß} \\ \text{Voraussetzung g}}} \cdot \underbrace{\frac{\text{Li}(x)}{\frac{x}{\ln(x)}}}_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \text{Satz 4.2.7}}} \cdot \underbrace{\frac{\ln(x)}{e^{\sqrt{c \ln(x)}}}}_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \text{Lemma 4.2.12}}} \quad (4.70) \\ &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(x)g(x)}{x} = 0 \end{aligned}$$

- (**) Für $x \in (e^{|A|}, \infty)$ mit $x > e$ und $Z \in \{1, A\}$ gilt mit der geometrischen Reihe:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{Z^i}{\ln^{(i-1)}(x)} = \frac{Z^2}{\ln(x)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{Z}{\ln(x)} \right)^i \stackrel{\text{geom. Reihe *}}{=} \frac{Z^2}{\ln(x) - Z} \quad (4.71)$$

$$\implies Z = 1 : \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(1+A)\ln^{(i-1)}(x)} = 0 \quad (4.73)$$

$$Z = A : \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{A^i}{(1+A)\ln^{(i-1)}(x)} = 0 \quad (4.74)$$

Aus den Betrachtungen der Grenzwerte von (*), (**) und Gleichung 4.69 folgt:

$$\begin{array}{c} * \\ \begin{array}{l} e^{|A|} < x \Rightarrow \left| \frac{A}{\ln(x)} \right| < 1 \\ e < x \Rightarrow \left| \frac{1}{\ln(x)} \right| < 1 \end{array} \end{array} \xrightarrow{Z \in \{1, A\}} \left| \frac{Z}{\ln(x)} \right| < 1 \quad (4.72)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) - f_1(x)}{\pi(x) - f_A(x)} = 0 \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\pi(x) - f_1(x)|}{|\pi(x) - f_A(x)|} = 0 \\ \text{Bemerkung 2.1.6 (2)} &\implies |\pi - f_1| \in o(|\pi - f_A|) \\ \text{Definition 4.2.2} &\implies f_1 \text{ approximiert } \pi \text{ besser als } f_A \end{aligned} \quad (4.76)$$

Da $A \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig war, ist die Behauptung bewiesen.

- (2) Analog zu eben lassen sich die Differenzen der Approximationen $\pi \sim \text{Li}$ und $\pi \sim f_1$ mit Lemma 4.2.11 für $x \in (e, \infty)$ als

$$\begin{aligned} \pi(x) - \text{Li}(x) &= g(x) \\ \pi(x) - f_1(x) &= g(x) + d + 6 \int_2^x \frac{1}{\ln^4(t)} dt - \sum_{i=3}^{\infty} \frac{x}{\ln^{(i+1)}(x)} + \frac{x}{\ln^3(x)} \end{aligned} \quad (4.77)$$

schreiben. Dann gilt durch erweitern mit $\frac{\ln^3(x)}{x}$ für alle $x \in (e, \infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(x) - \text{Li}(x)}{\pi(x) - f_1(x)} &= \frac{\overbrace{\ln^3(x)g(x)}^{x \rightarrow \infty \atop \text{analog zu } (*)}}{\overbrace{\frac{x}{\ln^3(x)}}^{x \rightarrow \infty \atop \text{analog zu } (*)} + d \overbrace{\frac{x}{\ln^3(x)}}^{x \rightarrow \infty \atop \text{analog zu } (*)} + 6 \overbrace{\frac{\ln^3(x)}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln^4(t)} dt}^{x \rightarrow \infty \atop \text{Lemma 4.2.8 (n=3)}} - \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{\ln^{(i-2)}(x)} + 1} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

Daraus folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) - \text{Li}(x)}{\pi(x) - f_1(x)} = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Eine noch bessere Annäherung an π hat Riemann in seiner Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ [Rie59] herausgefunden. Im Vergleich zu den beiden Annäherungen von Legendre und Gauß, welche aus empirischen Untersuchungen hervorgingen, haben theoretische Überlegungen Riemann auf die nach ihm benannte Riemannsche R-Funktion geführt:

4. Approximation der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

x	$\pi(x)$	$\text{Li}(x)$	$R(x)$	$ \pi(x) - \text{Li}(x) $	$ \pi(x) - R(x) $
100 000 000	5 761 455	5 762 209	5 761 552	754	97
200 000 000	11 078 937	11 079 975	11 079 090	1 038	153
300 000 000	16 252 325	16 253 409	16 252 355	1 084	30
400 000 000	21 336 326	21 337 378	21 336 185	1 052	141
500 000 000	26 355 867	26 356 832	26 355 517	965	350
600 000 000	31 324 703	31 326 045	31 324 622	1 342	81
700 000 000	36 252 931	36 254 242	36 252 719	1 311	212
800 000 000	41 146 179	41 147 862	41 146 248	1 683	69
900 000 000	46 009 215	46 011 649	46 009 949	2 434	734
1 000 000 000	50 847 534	50 849 235	50 847 455	1 701	79

Tabelle 4.1.: In der Tabelle sind einige Werte der π Funktion denen des Integrallogarithmus und der Riemannschen R-Funktion gegenübergestellt [vgl. Zag77, S.10]. In den beiden letzten Spalten werden die absoluten Fehler dargestellt.

$$R(x) = \text{Li}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(x)}{n} \text{Li}(x^{\frac{1}{n}}) \quad (4.79)$$

mit der Möbiusfunktion

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & \text{Die Primfaktorzerlegung ist quadratfrei, wobei} \\ & k \hat{=} \text{Anzahl der Primzahlen in der Primfaktorzerlegung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.80)$$

Abbildung 4.1 zeigt die erstaunliche Überscheinstimmung der Riemannschen R-Funktion mit der tatsächlichen Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe.

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim \text{Li}$ und die Riemannsche Vermutung

Im letzten Kapitel wurde der Primzahlsatz (π ist asymptotisch äquivalent zu $\frac{x}{\ln(x)}$) bewiesen und der Integrallogarithmus als bessere Approximation der Primzahlen unter einer gegebenen Schranke gefunden. In diesem Kapitel wird die Approximation der π -Funktion durch den Integrallogarithmus mit der Riemannschen Vermutung in Verbindung gebracht. Im Beweis der Abschätzung des relativen Fehlers der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ von De la Vallée Poussin spielt die Nullstellenfreiheit der ζ -Funktion in einem Bereich der Achse mit Realteil eins eine zentrale Rolle. Dies lässt vermuten, dass unter Annahme der Riemannschen Vermutung eine noch bessere Abschätzung des relativen Fehlers als von De la Vallée Poussin gefunden werden kann. Dafür wird im ersten Teil dieses Kapitels die Formel von von Mangoldt behandelt, welche die Primzahlen in Form der sogenannten Ψ -Funktion mit den kritischen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion in Verbindung bringt. Damit wird im zweiten Teil unter Annahme der Riemannschen Vermutung die Abschätzung von De la Vallée Poussin verbessert und im dritten Teil mit einer äquivalenten Formulierung der Riemannschen Vermutung das Kapitel abgeschlossen.

5.1. Von Mangoldts Formel

Der Zentrale Satz dieses Kapitels ist die Formel von von Mangoldt. Ursprünglich hat von Mangoldt diese Formel im Rahmen des Beweises von Riemanns Hauptformel aus der Arbeit „Die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ [Rie59] verwendet. Riemanns Hauptformel [vgl. Edw74, S.22 und S.48]:

$$J(x)^\dagger := \frac{1}{2} \left(\sum_{p^n < x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} \right) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) - \ln(2) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t(t^2 - 1) \ln(t)} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>1}$$

[†]Riemann selbst schrieb dafür $f(x)$. Häufig wird auch die Notation $\Pi(x)$ verwendet. Die Bezeichnung $J(x)$ wird von Edwards [Edw74] übernommen, um Missverständnisse mit der Π -Funktion $\Pi(x) = \Gamma(x + 1)$ und „normalen“ Funktionen f zu vermeiden.

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

(5.1)

Von Mangoldts Formel trägt alle Informationen, die in Riemanns Hauptformel enthalten sind und ist für weitere Überlegungen einfacher anzuwenden. Deshalb wird in dieser Arbeit auf eine genaue Untersuchung von Riemanns Hauptformel verzichtet und alles weitere ausgehend von von Mangoldts Formel abgeleitet. Das folgende Vorgehen orientiert sich an Edwards [Edw74, Kapitel 3]. Zuerst die Definition der Ψ -Funktion:

Definition 5.1. Definiere die Mangoldt-Funktion Λ und die Ψ -Funktion durch:

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & n = p^k \text{ für } p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \Psi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}, n \leq x} \Lambda(n) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Lemma 5.1.1. Zwischen der Ψ -Funktionen und der Θ -Funktion besteht folgender Zusammenhang:

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta(x^{1/k}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\stackrel{\text{Def. } \Psi}{=} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} \Lambda(n) \stackrel{\text{Def. } \Lambda}{=} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, n \leq x \\ \exists k \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{P}: n = p^k}} \ln(p) \stackrel{\text{umsortieren}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p^k \leq x}} \ln(p) \stackrel{\text{Def. } \Theta}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \Theta(x^{1/k}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

□

Satz 5.1.2 (Von Mangolds Formel). *Mit einer passenden Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>1} \setminus \mathbb{N}$:*

$$\Psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{-2n}}{2n} + c$$

Bei der ersten Summe wird über alle nicht trivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion mit aufsteigendem $|\operatorname{Im}(\rho)|$ summiert.

Von Mangoldts Formel liefert einen Zusammenhang zwischen den nichttrivialen

Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion und der Ψ -Funktion, welche die Informationen der Primzahlverteilung beinhaltet. Folgender Satz ist ein wichtiger Bestandteil im Beweis. Von ihm kommt die Summe über die nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion. Der Satz liefert eine Art Produktdarstellung der Riemannschen ζ -Funktion in Kombination mit der Γ -Funktion. Schon Riemann verwendete in seinem Paper „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ [Rie59] diese Produktdarstellung, hat diese aber noch nicht bewiesen. Hadamard veröffentlichte den ersten Beweis 1893 in seinem Paper [Had93]. Der Beweis von Hadamard war in diesem Gebiet einer der wichtigsten Fortschritte[†]. Damit war der Anstoß zum Beweis von von Mangoldts Formel und damit zum Zusammenhang der Riemannschen Vermutung und der Verteilung von Primzahlen gegeben (vgl. Kapitel 5.2 und 5.3).

Satz 5.1.3. *Es gilt für $s \in \mathbb{C}$ folgende Produktdarstellung:*

$$\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \pi^{-s/2} (s - 1) \zeta(s) = \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \quad (5.4)$$

Das Produkt auf der rechten Seite konvergiert normal in \mathbb{C} . ρ läuft dabei, geordnet nach den Paaren ρ und $1 - \rho$, über alle nicht trivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion.

Beweis. Ein Beweis, basierend auf Hadamard*, ist in Edwards [Edw74, Kapitel 2] ausgeführt. Wesentlich im Beweis der normalen Konvergenz des unendlichen Produktes ist, dass die Anzahl der kritischen Nullstellen in der Umgebung $|\rho - \frac{1}{2}| < R$ kleiner ist, als ein Vielfaches von $R \ln(R)$ für $R \rightarrow \infty$. Diese Abschätzung lässt sich als Spezialfall von einem Theorem von Jensens ableiten [vgl. Edw74, S.40]. Im weiteren Verlauf des Beweises wird die analytische Funktion F für $s \in \mathbb{C}$ durch

$$F(s) = \frac{\Gamma(\frac{s}{2} + 1) \pi^{-s/2} (s - 1) \zeta(s)}{\prod_{\rho} \left(1 - \frac{s - \frac{1}{2}}{\rho - \frac{1}{2}}\right)} \quad (5.5)$$

definiert und gezeigt, dass $\log \circ F$ konstant ist. Durch Exponieren ergibt sich dann die Behauptung. \square

[†]Von Mangoldt sagt über den Beweis von Hadamard: „[It's] the first real progress in the field in 34 years“ [vgl. Edw74, Kapitel 2, S.39]

*1893 veröffentlichte Hadamard ein Paper [Had93] über die Produktdarstellung ganzer Funktionen. Eine Konsequenz daraus ist die zu beweisende Produktformel.

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

Bevor auf Grundlage des vorherigen Satzes die Formel von von Mangoldt (Satz 5.1.2) bewiesen wird zwei Lemmata.

Lemma 5.1.4. *Für die logarithmische Ableitung der Riemannsche ζ -Funktion gilt auf \mathbb{H}_1 ^{*}:*

$$(1) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s} \quad \forall s \in \mathbb{H}_1$$

$$(2) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} - \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \quad \forall s \in \mathbb{H}_1$$

Mit \sum_{ρ} ist die Summe über alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion mit aufsteigendem $|\operatorname{Im}(\rho)|$ gemeint. Alle auftretenden unendlichen Summen konvergieren normal auf \mathbb{H}_1 .

Beweis. (1) Wegen $\Lambda(n) \leq \ln(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der normalen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)n^{-s}$ in \mathbb{H}_1 konvergiert auch $\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$ normal in \mathbb{H}_1 (Ausführlicher Beweis analog zum Beweis von Lemma 4.1.4(1)). Seien $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ alle Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge. Dann gilt mit

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (p_j^{-s})^k = p_j^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} (p_j^{-s})^k \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} p_j^{-s} \frac{1}{1-p_j^{-s}} = \frac{1}{p_j^s - 1} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

(wegen $|p_j^{-s}| = p_j^{-\operatorname{Re}(s)} < p_j^{-1} < 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ gilt der zweite Schritt)

$$(**) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ln(p_j)}{p_j^s - 1} \quad \forall s \in \mathbb{H}_1 \quad (\text{vgl. Gleichung 4.5})$$

(5.6)

*Die zweite Gleichung gilt sogar auf $\mathbb{C} \setminus (\{1\} \cup \{\text{Nullstellen von } \zeta\})$. Für das weite Vorgehen genügt die Aussage wie im Lemma.

für $s \in \mathbb{H}_1$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \Lambda(n) &\stackrel{\text{Def. } \Lambda}{=} \text{normale Konvergenz} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(p_j^k\right)^{-s}}_{=\left(p_j^{-s}\right)^k} \underbrace{\Lambda(p_j^k)}_{\stackrel{\text{Def. } \Lambda}{=} \ln(p_j)} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \ln(p_j) \frac{1}{p_j^s - 1} \\
 &\stackrel{(**)}{=} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

- (2) Sei $s \in \mathbb{H}_1$. Dann folgt durch logarithmisches ableiten beider Seiten der Gleichung

$$\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \tag{5.8}$$

aus Satz 5.1.3:

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} - \frac{1}{2} \ln(\pi) + \frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} \frac{\left(\prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)\right)'}{\prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)} \tag{5.9}$$

Umstellen nach $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, einsetzen der logarithmischen Ableitung von Γ aus Folgerung 2.2.6 (2) (anwendbar, da $\operatorname{Re}(s) > 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(\frac{s}{2} + 1) > 0$) und ausnutzen der normalen Konvergenz des Produktes $\prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ (vgl.Satz 5.1.3) mit dem Differentiationssatz für unendliche Produkte liefern:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \sum_{\rho} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{s}{\rho}}}_{\frac{1}{s-\rho}} \left(-\frac{1}{\rho}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{s+2n} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi) \tag{5.10}$$

Beide unendlichen Reihen sind normal konvergent nach Folgerung 2.2.6 (2), Satz 5.1.3 und dem Differentiationssatz für unendliche Produkte. Durch Addition von $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$ folgt die behauptete Gleichheit:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} &= \left(\underbrace{\frac{1}{s-1} + 1}_{\frac{s}{s-1}}\right) - \sum_{\rho} \left(\underbrace{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}}_{\frac{s}{\rho(s-\rho)}}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}}_{\frac{s}{2n(s+2n)}}\right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

Die normale Konvergenz beider Reihen folgt aus der Addition normal konvergenter Reihen. \square

Lemma 5.1.5. Für $y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(a + \frac{B}{A}) > 0$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{As+B} ds = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{A} y^{-B/A} & y > 1 \end{cases} \quad (5.12)$$

Bei der Integration wird über die direkte Verbindungsline von $a-ih$ nach $a+ih$ integriert.

Beweis. Im Beweis wird vorausgesetzt, dass für $b \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^t}{t} dt = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

Ein Beweis davon ist z.B in Edwards [Edw74, Kapitel 3.3] zu finden. Sei $y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(a + \frac{B}{A}) > 0$. Dann lässt sich durch Substitution von $t := s + \frac{B}{A}$ das Integral aus dem Lemma auf das bekannte Integral aus Gleichung (5.13) zurückführen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{As+B} ds &= \frac{y^{-B/A}}{A} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\frac{B}{A}-ih}^{a+\frac{B}{A}+ih} \frac{y^t}{t} dt \\ &= \frac{y^{-B/A}}{A} \underbrace{\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(a+\frac{B}{A})-ih}^{\operatorname{Re}(a+\frac{B}{A})+ih} \frac{y^t}{t} dt}_{\substack{\text{Gl. (5.13)} \\ \operatorname{Re}(a+\frac{B}{A}) > 0}} \\ &\qquad\qquad\qquad \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.14)$$

\square

Beweis. (Von Mangolds Formel (Satz 5.1.2))

Betrachte für $a > 1$ und $x \in \mathbb{R}_{>1} \setminus \mathbb{N}$ folgendes Integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \quad (5.15)$$

In den folgenden Rechnungen werden zwei Umformungsschritte gemacht, welche noch zu zeigen sind. Diese werden mit (*) und (**) gekennzeichnet. Es lässt sich

5.1. Von Mangoldts Formel

mit Lemma 5.1.4 das Integral aus Gleichung 5.15 auf zwei verschiedene Arten lösen.
Einerseits gilt mit der ersten Gleichung aus Lemma 5.1.4:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \stackrel{\text{Lemma 5.1.4}}{=} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \right) \frac{x^s}{s} ds \\
 & \stackrel{\text{gleichm. Konv.}}{=} \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} n^{-s} \frac{x^s}{s} ds \\
 & \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \underbrace{\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s} ds}_{\substack{\text{Lemma 5.1.5} \\ A=1, B=0} \begin{cases} 0 & n > x \\ 1 & n < x \end{cases}} \\
 & \stackrel{\Lambda(1)=0}{=} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, n \leq x}} \Lambda(n) \\
 & \stackrel{\text{Def. } \Psi}{=} \Psi(x)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Mit der zweiten Gleichung aus Lemma 5.1.4 und

$$c := -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \frac{x^s}{s} ds \stackrel{\text{Lemma 5.1.5}}{=} \left. -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \right|_{A=1, B=0} \tag{5.17}$$

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \\
& \stackrel{\text{Lemma 5.1.4}}{=} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \left(\frac{s}{s-1} - \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \right) \frac{x^s}{s} ds \\
& \stackrel{\text{gleichm. Konv.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s-1} ds - \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{\rho(s-\rho)} ds \\
& \quad + \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{2n(s+2n)} ds + c \\
& \stackrel{(**)}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s-1} ds}_{\substack{\text{Lemma 5.1.5} \\ A=1, \bar{B}=-1}} - \sum_{\rho} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{\rho(s-\rho)} ds}_{\substack{\text{Lemma 5.1.5} \\ A=\rho, \bar{B}=-\rho^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{2n(s+2n)} ds}_{\substack{\text{Lemma 5.1.5} \\ A=2n, \bar{B}=4n^2}} + c \\
& = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} + c
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Aus Gleichung (5.16) und (5.18) folgt die Behauptung:

$$\Psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} + c \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>1} \setminus \mathbb{N} \tag{5.19}$$

In den beiden Schritten (*) und (**) wird der Grenzwert $h \rightarrow \infty$ mit der jeweiligen unendlichen Summe vertauscht. Ein Beweis dazu wird in Edwards [Edw74, Kapitel 3.5] ausgeführt. Dabei wird der folgende Satz (Über die Dichte der Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion), welchen wir auch im nächsten Kapitel noch explizit benötigen, verwendet. Dieser Beweis ist auch in Edwards [Edw74, Kapitel 3.4] zu finden. Er wird ausgehend von dem Beweis der Produktdarstellung aus Satz 5.1.3 von Hadamard und einer strengeren Version der Stirlingschen Formel (Stieltjes 1889) bewiesen.

Satz 5.1.6 (Über die Dichte der Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion). *Es existiert ein $H \in \mathbb{R}$, sodass für $T \geq H$ gilt:*

$$\#^* \{ \rho \in \mathbb{C} | \rho \in N_{\text{nicht triv}}, \operatorname{Im}(\rho) \neq 0, T \leq \operatorname{Im}(\rho) \leq T+1 \} < 2 \ln(T)$$

□

5.2. Die Fehlerabschätzung unter Annahme der Riemannschen Vermutung

In diesem Kapitel wird unter Annahme der Riemannschen Vermutung eine Abschätzung des relativen Fehlers der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ bewiesen. Diese ist genauer, als die Abschätzung von de la Vallée Poussin aus Satz 4.2.9. Der Beweis orientiert sich an Edwards [Edw74, Kapitel 5.5].

Satz 5.2.1. *Gilt die Riemannsche Vermutung, so existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass für hinreichend großes x folgende Abschätzung für den relativen Fehler der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ gilt:*

$$\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)|} < c \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$$

Bemerkung 5.2.2. Sei d die Konstante aus Satz 5.2.1 und c wie aus der Abschätzung von De La Vallée Poussin (Satz 4.2.9). Dann gilt für hinreichen großes x :

$$\underbrace{e^{-\sqrt{c \ln(x)}}}_{\text{Abschätzung ohne Riemannsche Vermutung}} > \underbrace{d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}}_{\text{Abschätzung mit Riemannscher Vermutung}} \quad (5.20)$$

D.h die unter Annahme der Riemannschen Vermutung bewiesene Abschätzung des relativen Fehlers der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ ist genauer, als die von De La Vallée Poussin bewiesene*.

Beweis. (Bemerkung 5.2.2) Seien c und d Konstanten wie aus der Bemerkung und $A \in \mathbb{R}_{>1}$ eine dazu passende Konstante, sodass für alle $x > A$ gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad 16c < \ln(x) &\Leftrightarrow \sqrt{c \ln(x)} < \frac{1}{4} \ln(x) \\ &\Leftrightarrow e^{-\sqrt{c \ln(x)}} > e^{-\frac{1}{4} \ln(x)} \\ &\Leftrightarrow e^{-\sqrt{c \ln(x)}} > x^{-1/4} \\ (2) \quad x^{1/4} > d \ln^2(x) &\Leftrightarrow x^{-1/4} > d \ln^2(x) x^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

*Mit $\#$ ist die Anzahl der Elemente der nachfolgenden Menge gemeint.

*Die unter Annahme der Riemannsche Vermutung bewiesene Abschätzung des relativen Fehlers ist sogar minimal [vgl. Cip99].

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

Dann gilt für alle $x > A$:

$$e^{-\sqrt{c \ln(x)}} \stackrel{\text{Gl. (5.21) (1)}}{>} x^{-1/4} \stackrel{\text{Gl. (5.21) (2)}}{>} d \ln^2(x) x^{-1/2} \quad (5.22)$$

□

Bevor Satz 5.2.1 bewiesen wird, werden zwei Lemmata gezeigt. Sie werden mithilfe von von Mangoldts Formel (Satz 5.1.2) und dem Satz über die Dichte der Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion (Satz 5.1.6) bewiesen. Die Fehlerabschätzung aus Satz 5.2.1 lässt sich dann mit den beiden Lemmata in wenigen Schritten beweisen.

Lemma 5.2.3. *Wird die Riemannsche Vermutung angenommen, so existiert eine Konstante $d \in \mathbb{R}_{>1}$, sodass für die Ψ -Funktion folgende Abschätzung für hinreichend großes x gilt:*

$$\frac{|\Psi(x) - x|}{|x|} < d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$$

Beweis. Der Beweis verläuft im wesentlichen nach den folgenden drei Schritten:

- (1) Die Ψ -Funktion lässt sich mit einer Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}^+$ für $x \in \mathbb{R}^+$ durch

$$\Psi(x) \leq x + \sum_{\rho} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| + c_1 \quad (5.23)$$

abschätzen. In der Summe wird über alle nicht trivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion mit aufsteigendem $|\operatorname{Im}(\rho)|$ summiert.

- (2) Für $\rho \in N_{\text{nicht triv.}}$ eine nicht triviale Nullstelle der Riemannschen ζ -Funktion und $\gamma := \operatorname{Im}(\rho)$ gelten für $x \in \mathbb{R}_{>1}$ folgende drei Abschätzungen:

$$\left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| \leq \begin{cases} 2\sqrt{2x} & \gamma \in \mathbb{R} \\ \frac{\sqrt{2x}}{|\gamma|} & \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \frac{2(2x)^{3/2}}{|\gamma|^2} & \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases} \quad (5.24)$$

- (3) Mit einer Konstanten $c_2 \in \mathbb{R}^+$ gilt für die Ψ -Funktion für hinreichend große x :

$$\Psi(x) \leq x + c_2 \sqrt{x} \ln^2(x) \quad (5.25)$$

5.2. Die Fehlerabschätzung unter Annahme der Riemannschen Vermutung

Bew.(1) Sei $c \in \mathbb{R}$ die Konstante aus der Formel von von Mangoldt (vgl. Satz 5.1.2). Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^+$ mit $c_1 := |c + \frac{1}{2}| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &\stackrel{\Psi \text{ positiv}}{=} |\Psi(x)| \\
&\stackrel{\Psi \text{ monoton wachsend}}{\leq} \left| \int_x^{x+1} \Psi(t) dt \right| \\
&\stackrel{\substack{\text{Von Mangolds Formel} \\ (\text{Satz 5.1.2})}}{=} \left| \int_x^{x+1} \left(t - \sum_{\rho} \frac{t^{\rho}}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{-2n}}{2n} + c \right) dt \right| \\
&= \left| \left[\frac{t^2}{2} - \sum_{\rho} \frac{t^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{-2n+1}}{2n(2n+1)} + ct \right]_x^{x+1} \right| \\
&\stackrel{\Delta\text{-Ung.}}{\leq} x + \sum_{\rho} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| + \left| c + \frac{1}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left| \frac{(x+1)^{-2n+1} - x^{-2n+1}}{2n(2n+1)} \right|}_{\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{2n(2n+1)}} \\
&\leq x + \sum_{\rho} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| + c_1
\end{aligned} \tag{5.26}$$

(*) Für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^{-2n+1}} \leq 1 \leq (x+1)^{2n-1} &\Rightarrow (x+1)^{-2n+1} \leq 1 + x^{-2n+1} \\
&\Rightarrow (x+1)^{-2n+1} - x^{-2n+1} \leq 1
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Bew.(2) Sei $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Nach Voraussetzung wird die Riemannschen Vermutung angenommen. Deshalb liegen alle nicht trivialen Nullstellen der ζ -Funktion auf der Geraden mit Realteil $\frac{1}{2}$ und lassen sich mit $\gamma \in \mathbb{R}$ durch $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ darstellen.

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| &= \frac{1}{|\rho|} \left| \int_x^{x+1} t^\rho dt \right| \\
&\stackrel{\Delta\text{-Ung.}}{\leq} \frac{1}{|\rho|} \int_x^{x+1} t^{1/2} dt \\
&\stackrel{\substack{\text{Standardabschätzung} \\ t^{1/2} \text{ monoton wachsend}}}{\leq} \frac{\sqrt{x+1}}{|\rho|} \\
&\stackrel{\substack{|\rho| = \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma^2} \\ 1 < x}}{\leq} \begin{cases} 2\sqrt{2x} & \gamma \in \mathbb{R} \\ \frac{\sqrt{2x}}{|\gamma|} & \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Für $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt auch die Abschätzung:

$$\left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| \stackrel{\Delta\text{-Ung.}}{\leq} \frac{(x+1)^{3/2} + x^{3/2}}{|\rho(\rho+1)|} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{2(2x)^{3/2}}{|\gamma|^2} \tag{5.29}$$

$$(*) \quad |\rho+1| \geq |\rho| \geq |\gamma| \wedge 1 \leq x \leq 2x$$

Damit sind alle drei Abschätzungen bewiesen.

Bew.(3) Sei $H_1 \in \mathbb{R}$ wie in Satz 5.1.6 (Über die Dichte der Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion), dh. es gilt für alle $x \geq H_1$:

$$\#\{\rho \in \mathbb{C} \mid \rho \in N_{\text{nicht triv.}}, \text{Im}(\rho) \neq 0, x \leq \text{Im}(\rho) \leq x+1\} < 2 \ln(x) \tag{5.30}$$

In der Reihe aus (1) (Gleichung 5.23) wird jetzt anstatt über ρ , über die Imaginärteile γ der Nullstellen ρ summiert und die Summe wird aufgeteilt. Außerdem wird in den beiden letzten Summen nur über die Nullstellen mit positivem Imaginärteil summiert und mit zwei multipliziert, was aufgrund der Symmetrie zur reellen Achse der ζ -Funktion das gleiche ist (vgl. Lemma 3.2.2 (5)). Alle auftauchenden Konstanten A-D sind aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und werden in der später folgenden Begründung der auftauchenden Abschätzungen $(*)-(***)$ definiert. Es gilt für $x \geq H := \max\{H_1, 3\}$:

*Es wird noch zusätzlich $x \geq 3$ gefordert, damit die Abschätzung in Gleichung 5.32 gilt.

5.2. Die Fehlerabschätzung unter Annahme der Riemannschen Vermutung

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &\stackrel{\text{Gl. (5.23)}}{\leq} x + \underbrace{\sum_{|\gamma| \leq H} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right|}_{\stackrel{(*)}{\leq} A\sqrt{x}} + 2 \underbrace{\sum_{H < \gamma \leq x} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right|}_{\stackrel{(**)}{\leq} B\sqrt{x} + C\sqrt{x} \int_H^x \frac{\ln(t)}{t} dt} + 2 \underbrace{\sum_{x < \gamma} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right|}_{\stackrel{(***)}{\leq} Dx^{3/2} \int_x^\infty \frac{\ln(t)}{t^2} dt} + c_1 \\
&\stackrel{\text{P.I.}}{\leq} x + A\sqrt{x} + B\sqrt{x} + C\sqrt{x} \int_H^x \frac{\ln(t)}{t} dt + Dx^{3/2} \left(\left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_x^\infty + \int_x^\infty t^{-2} dt \right) + D + c_1 \\
&= x + A\sqrt{x} + B\sqrt{x} + C\sqrt{x} \left[\frac{\ln^2 t}{2} \right]_H^x + D\sqrt{x} \ln(x) + Dx^{3/2} [-t^{-1}]_x^\infty + D + c_1 \\
&\stackrel{C \in \mathbb{R}_{\geq 0}}{\leq} x + \sqrt{x} \left(A + B + \frac{C}{2} \ln^2(x) + D \ln(x) + D \right) + D + c_1 \\
&\leq x + \underbrace{(A + B + \frac{C}{2} + 3D + c_1) \sqrt{x} \ln^2(x)}_{=:c} \\
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Wobei im letzten Schritt verwendet wird, dass für alle $x > H = \max\{H_1, 3\}$

$$1 \leq \ln(x) \leq \ln^2(x), \quad 1 \leq \sqrt{x} \tag{5.32}$$

gilt. Es bleiben die Abschätzungen $(*) - (***)$ zu zeigen:

- $(*)$ Die Anzahl der Nullstellen $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ mit $|\gamma| \leq H$ muss endlich sein. Denn gäbe es unendliche viele, so müsste nach Bolzano-Weierstrass ein Häufungspunkt der Nullstellenmenge existieren und die Riemannsche ζ -Funktion wäre nach dem Identitätssatz identisch null. Sei die Anzahl der Nullstellen gegeben durch N , so gilt mit der ersten Abschätzung aus (2) (Gleichung 5.24) für $x \geq H$:

$$\sum_{|\gamma| \leq H} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| \leq \sum_{|\gamma| \leq H} 2\sqrt{2x} \leq \underbrace{2^{3/2}N}_{=:A \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \sqrt{x} \tag{5.33}$$

- $(**)$ Sei $x > H$ gegeben und $n \in \mathbb{N}$, sodass $H+n \leq x < H+n+1$ gilt. Dann

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

gilt mit der zweiten Abschätzung aus (2) (Gleichung 5.24):

$$\begin{aligned}
2 \sum_{H < \gamma \leq x} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| &\stackrel{\text{Gl. (5.24)}}{\leq} 2 \sum_{H < \gamma \leq x} \frac{\sqrt{2x}}{|\gamma|} \\
&\stackrel{\text{2. Abschätzung}}{\leq} 2^{3/2} \sqrt{x} \sum_{i=0}^n \sum_{H+i < \gamma \leq H+i+1} \frac{1}{\gamma} \\
&\stackrel{\text{Wahl von n}}{\leq} 2^{3/2} \sqrt{x} \sum_{i=0}^n \frac{2 \ln(H+i)}{H+i} \\
&\stackrel{\text{Nullstellendichte}}{\leq} 2^{3/2} \sqrt{x} \sum_{i=0}^n \frac{2 \ln(H+i)}{H+i} \\
&\stackrel{\text{vgl. Gl. (5.30)}}{\leq} 2^{5/2} \sqrt{x} \left(\frac{\ln(H)}{H} + \sum_{i=1}^n \int_{H+i-1}^{H+i} \frac{\ln(t)}{t} dt \right) \\
&\stackrel{\frac{\ln(t)}{t} \text{ monoton fallend}}{\leq} 2^{5/2} \frac{\ln(H)}{H} \sqrt{x} + \underbrace{2^{5/2}}_{=:B \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \sqrt{x} \int_H^x \frac{\ln(t)}{t} dt \\
&\stackrel{\text{Wahl von n}}{\leq} \underbrace{2^{5/2} \frac{\ln(H)}{H}}_{=:B \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \sqrt{x} + \underbrace{2^{5/2} \sqrt{x} \int_H^x \frac{\ln(t)}{t} dt}_{=:C \in \mathbb{R}_{\geq 0}}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

(*) Analog gilt für $x \geq H$ mit $D := 2^{9/2}$:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{x < \gamma} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| &\stackrel{\text{Gl. (5.24)}}{\leq} 2^{7/2} x^{3/2} \sum_{x < \gamma} \frac{1}{\gamma^2} \\
&\leq 2^{7/2} x^{3/2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{x+i < \gamma \leq x+i+1} \frac{1}{\gamma^2} \\
&\stackrel{\frac{\ln(t)}{t^2} \text{ monoton fallend}}{\leq} D x^{3/2} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \int_x^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt \right) \\
&\stackrel{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leq 1}{\leq} D + D x^{3/2} \int_x^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Im folgenden wird der Beweis der zu zeigenden Aussage aus Lemma 5.2.3 abgeschlossen. Mit der gleichen Technik, wie in den Schritten (1)-(3) lässt sich eine Konstante $\tilde{c} \in \mathbb{R}^+$ finden, sodass für hinreichend großes x gilt:

$$\Psi(x) \geq x - \tilde{c} \sqrt{x} \ln^2(x) \tag{5.36}$$

Anstatt die Ψ -Funktion durch ein Integral von x nach $x+1$ nach oben abzuschätzen,

5.2. Die Fehlerabschätzung unter Annahme der Riemannschen Vermutung

wird sie durch ein Integral von $x-1$ bis x nach unten abgeschätzt. Dann gilt mit $d > \max\{c, \tilde{c}\}$ für hinreichend großes x :

$$x - \tilde{c}\sqrt{x} \ln^2(x) < \Psi(x) < x + c\sqrt{x} \ln^2(x)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Def. von } d}{\implies} x - d\sqrt{x} \ln^2(x) < \Psi(x) < x + d\sqrt{x} \ln^2(x) \\ &\implies -d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} < \frac{\Psi(x) - x}{x} < d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \\ &\implies \left| \frac{\Psi(x) - x}{x} \right| < d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \end{aligned} \tag{5.37}$$

□

Lemma 5.2.4. (1) Zwischen der Ψ -Funktion und der in Definition 4.1.3 definierten Θ -Funktion besteht für alle $x \in \mathbb{R}^+$ folgender Zusammenhang:

$$\frac{\Psi(x) - x}{x} - \Theta(x^{1/2}) \frac{\ln(x)}{\ln(2)x} \leq \frac{\Theta(x) - x}{x} \leq \frac{\Psi(x) - x}{x}$$

(2) Unter Annahme der Riemannschen Vermutung ist der relative Fehler der Abschätzung $\Theta \sim x$ für hinreichend großes x kleiner als ein Vielfaches von $\ln^2(x)x^{-1/2}$.

Beweis. (1) Nach Lemma 5.1.1 gilt für alle $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta(x^{1/k}) \tag{5.38}$$

Wegen $\Theta(x^{1/k}) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt mit Gl. 5.38 offensichtlich $\Theta(x) \leq \Psi(x)$. Für die Abschätzung nach unten betrachte für $x \in \mathbb{R}^+$ zuerst folgende Äquivalenz:

$$\Theta(x^{1/k}) = 0 \Leftrightarrow x^{1/k} < 2 \Leftrightarrow k > \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{5.39}$$

Zu $x \in \mathbb{R}^+$ sei $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - 1 < N \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ gilt. Damit lässt sich Ψ

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

für $N \geq 2$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &\stackrel{\text{Gl. (5.38)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \Theta(x^{1/k}) \quad \begin{array}{c} \text{Wahl von N} \\ \text{Gl. (5.39)} \end{array} \quad \sum_{k=1}^N \Theta(x^{1/k}) \\
&\stackrel{\substack{\text{Für } k \geq 2 \text{ gilt:} \\ \Theta(x^{1/k}) \leq \Theta(x^{1/2})}}{\leq} \Theta(x) + \sum_{k=2}^N \Theta(x^{1/2}) \quad (5.40) \\
&= \Theta(x) + \Theta(x^{1/2})(N-1) \\
&\stackrel{\text{Wahl von N}}{\leq} \Theta(x) + \Theta(x^{1/2}) \frac{\ln(x)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Für $N < 2$ gilt die Aussage wegen $\Psi(x) = \Theta(x)$ und $\Theta(x^{1/2}) = 0$ offensichtlich. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^+$: $\Psi(x) - \Theta(x^{1/2}) \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \leq \Theta(x) \leq \Psi(x)$

$$\Rightarrow \frac{\Psi(x) - x}{x} - \Theta(x^{1/2}) \frac{\ln(x)}{\ln(2)x} \leq \frac{\Theta(x) - x}{x} \leq \frac{\Psi(x) - x}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (5.41)$$

(2) Sei d eine positive Konstante wie in Lemma 5.2.3, dh. es existiert ein $A \in \mathbb{R}^+$, sodass für $x > A$ gilt:

$$\frac{|\Psi(x) - x|}{|x|} < d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \quad (5.42)$$

Sei weiter $B \geq A$, sodass für alle $x > B$

$$\frac{\Theta(x^{1/2})}{\sqrt{x}} < d \ln(2) \ln(x) \quad (5.43)$$

gilt (B existiert, da $\Theta \sim x$). Dann gilt mit der Abschätzung aus Lemma 5.2.4 (1) für alle $x > B$:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\Theta(x) - x}{x} &\stackrel{\text{Lemma 5.2.4(1)}}{\geq} \frac{\Psi(x) - x}{x} - \frac{\Theta(x^{1/2}) \ln(x)}{\ln(2)x} \\
&\stackrel{\text{Gl. (5.42)}}{>} -d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\Theta(x^{1/2}) \ln(x)}{\ln(2)x} \\
&\stackrel{\text{Gl. (5.43)}}{>} -2d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}
\end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\bullet \quad \frac{\Theta(x) - x}{x} \stackrel{\text{Lemma 5.2.4(1)}}{\leq} \frac{\Psi(x) - x}{x} \stackrel{\text{Gl. (5.42)}}{<} d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \leq 2d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \quad (5.45)$$

5.2. Die Fehlerabschätzung unter Annahme der Riemannschen Vermutung

Die beiden Abschätzungen nach oben und unten liefern die Behauptung:

$$\frac{|\Theta(x) - x|}{|x|} < 2d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \quad \forall x > B \quad \square$$

Beweis. (Satz 5.2.1) Es existieren wegen der Abschätzung des relativen Fehlers der Approximation $\Theta \sim x$ (vgl. Lemma 5.2.4 (2)) ein $A \in \mathbb{R}_{>1}$ und eine Konstante $d \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x > A$ gilt:

$$|\Theta(x) - x| < d \ln^2(x) \sqrt{x} \quad (5.46)$$

Zuerst zwei Behauptungen:

$$(1) \quad \exists e \in \mathbb{R} : \quad \pi(x) - \text{Li}(x) = \frac{\Theta(x) - x}{\ln(x)} + \int_A^x \frac{\Theta(t) - t}{t \ln^2 t} dt + e \quad \forall x > A \quad (5.47)$$

$$(2) \quad \text{Für } e \text{ aus (1)} : \quad |\pi(x) - \text{Li}(x)| < d\sqrt{x} \ln(x) + 2d\sqrt{x} + |e| \quad \forall x > A \quad (5.48)$$

Beweis der Behauptungen (1) und (2):

- (1) Sei $x > A$ beliebig. Um die Gleichung zu beweisen, wird das Integral auf der rechten Seite in zwei Integrale aufgeteilt und beide Teile separat betrachtet. Für das zweite Integral gilt mit partieller Integration:

$$\int_A^x t \frac{1}{t \ln^2(t)} dt = \left[-\frac{t}{\ln(t)} \right]_A^x + \int_A^x \frac{1}{\ln(t)} dt = \left[-\frac{t}{\ln(t)} \right]_A^x + \text{Li}(x) - \text{Li}(A) \quad (5.49)$$

Um das zweite Integral umzuformen, betrachte alle Primzahlen p_1, \dots, p_n zwischen A und x dh. $A \leq p_1 < \dots < p_n \leq x$ und p_0 als die nächst kleinere Primzahl von A. Dann gilt $n = \pi(x) - \pi(A)$, womit sich das Integral aufgrund der treppenartigen Θ -Funktion wie folgt umschreiben lässt:

$$\begin{aligned} \int_A^x \frac{\Theta(t)}{t \ln^2(t)} dt &= \int_A^{p_1} \frac{\Theta(p_0)}{t \ln^2(t)} dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{\Theta(p_i)}{t \ln^2(t)} dt + \int_{p_n}^x \frac{\Theta(p_n)}{t \ln^2(t)} dt \\ &= -\Theta(p_0) \left(\frac{1}{\ln(p_1)} - \frac{1}{\ln(A)} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \Theta(p_i) \left(\frac{1}{\ln(p_{i+1})} - \frac{1}{\ln(p_i)} \right) \\ &\quad - \Theta(p_n) \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(p_n)} \right) \\ &\stackrel{\text{Umordnen}}{=} \frac{\Theta(p_0)}{\ln(A)} + \sum_{i=1}^n \underbrace{(\Theta(p_i) - \Theta(p_{i-1}))}_{=\ln(p_i)} \frac{1}{\ln(p_i)} - \frac{\Theta(p_n)}{\ln(x)} \\ &\stackrel{\Theta(p_n)=\Theta(x)}{=} \frac{\Theta(p_0)}{\ln(A)} + \pi(x) - \pi(A) - \frac{\Theta(x)}{\ln(x)} \end{aligned}$$

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim \text{Li}$ und die Riemannsche Vermutung

(5.50)

Zusammensetzen der beiden Gleichungen 5.49 und 5.50 liefert:

$$\begin{aligned} \int_A^x \frac{\Theta(t) - t}{t \ln^2(t)} dt &= \pi(x) - \text{Li}(x) - \underbrace{\frac{\Theta(x) - x}{\ln(x)} + \frac{\Theta(p_0)}{\ln(A)} - \pi(A) - \frac{A}{\ln(A)} + \text{Li}(A)}_{=: -e} \\ \implies \pi(x) - \text{Li}(x) &= \frac{\Theta(x) - x}{\ln(x)} + \int_A^x \frac{\Theta(t) - t}{t \ln^2 t} dt + e \quad \forall x > A \end{aligned} \quad (5.51)$$

(2) Sei $x > A$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\pi(x) - \text{Li}(x)| &\stackrel{\Delta-\text{Ungl.}}{<} \frac{|\Theta(x) - x|}{\ln(x)} + \int_A^x \frac{|\Theta(t) - t|}{t \ln^2 t} dt + |e| \\ &\stackrel{\text{Gl. (5.46)}}{<} \frac{d \ln^2(x) \sqrt{x}}{\ln(x)} + d \int_A^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt + |e| \\ &= d \sqrt{x} \ln(x) + 2d \left[\sqrt{t} \right]_A^x + |e| \\ &\stackrel{A \in \mathbb{R}_{>1}, d \in \mathbb{R}^+}{\leq} d \sqrt{x} \ln(x) + 2d \sqrt{x} + |e| \end{aligned} \quad (5.52)$$

Weiter im Beweis der ursprünglichen Aussage. Wegen $\frac{x}{\ln(x)} \sim \text{Li}$ (vgl. Satz 4.2.7) existiert ein $B \in \mathbb{R}_{>1}$, sodass $\frac{x}{\ln(x)} \leq 2\text{Li}(x)$ für alle $x > B$ gilt. Dann lässt sich für $x > C := \max\{A, B, 3\}$ der relative Fehler der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ durch

$$\begin{aligned} \frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)|} &\stackrel{\text{Gl. (5.48)}}{<} \underbrace{\frac{2d\sqrt{x}\ln(x)}{\text{Li}(x)}}_{\stackrel{(*)}{\leq} 4d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}} + \underbrace{\frac{d\sqrt{x}}{\text{Li}(x)}}_{\stackrel{(**)}{\leq} 2d \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}} + \underbrace{\frac{|e|}{\text{Li}(x)}}_{\stackrel{(***)}{\leq} 2|e| \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}} \\ &\leq \underbrace{(6d + 2|e|) \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}}_{=: c} \end{aligned} \quad (5.53)$$

abschätzen. Noch zu zeigen bleiben die Abschätzungen $(*) - (***)$. Es gelten

5.3. Eine äquivalente Aussage zur Riemannschen Vermutung

folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{x}{\ln(x)} \leq 2\text{Li}(x) \\
 (**)&\Leftrightarrow \frac{x}{\ln(x)} \leq 2\text{Li}(x) \ln(x) \\
 (***)&\Leftrightarrow \frac{x}{\ln(x)} \leq 2\text{Li}(x) \ln(x) \sqrt{x}
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Wegen der Wahl von C gilt für $x > C$:

$$\frac{x}{\ln(x)} \stackrel{\text{Wahl von B}}{\underset{C>B}{\leq}} 2\text{Li}(x) \stackrel{C>3}{\leq} 2\text{Li}(x) \ln(x) \stackrel{C>3}{\leq} 2\text{Li}(x) \ln(x) \sqrt{x} \tag{5.55}$$

Damit gelten dann die Ungleichungen $(*) - (***)$ für $x > C$ und mit Gleichung 5.53 ist die Abschätzung des relativen Fehlers aus Satz 5.2.1 bewiesen. \square

5.3. Eine äquivalente Aussage zur Riemannschen Vermutung

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die Riemannsche Vermutung äquivalent zu der Aussage ist, dass der absolute Fehler der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ nicht wesentlich schneller wächst (im Sinne von Notation 2.1.5), als $\sqrt{x} \ln(x)$. Zunächst wird ein Satz behandelt, welcher eine ähnliche Äquivalenz zur Riemannschen Vermutung aussagt:

Satz 5.3.1. *Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zu der Aussage, dass für alle $\epsilon > 0$ der relative Fehler, der Approximation $\pi \sim \text{Li}$, für hinreichend große x kleiner $x^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ ist.*

Der Beweis von Satz 5.3.1 besteht im wesentlichen aus den folgenden beiden Lemmata und der Aussage aus Satz 5.2.1. Das Vorgehen im Beweis orientiert sich an Edwards [Edw74, Kapitel 5.5].

Lemma 5.3.2. *Sei $\epsilon > 0$ und $\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)|} < x^{-1/2+\epsilon}$ für hinreichend großes x . Dann gilt für hinreichend großes x auch die Abschätzung $|\Psi(x) - x| < x^{1/2+2\epsilon}$.*

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $A \in \mathbb{R}_{>1}$, sodass für $x > A$ gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{|\pi(x) - Li(x)|}{|Li(x)|} < x^{-1/2+\epsilon} \quad (\text{existiert nach Voraussetzung}) \\ (2) \quad & \frac{Li(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} < 2 \quad (Li(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \text{ vgl. Satz 4.2.7}) \\ (3) \quad & \frac{1}{\ln(x)} < \frac{1}{2} \quad (\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Dann gilt für alle $x > A$:

$$|\pi(x) - Li(x)| \stackrel{\text{Gl. (5.56)(1)}}{<} x^{1/2+\epsilon} \underbrace{\frac{Li(x)}{\frac{x}{\ln(x)}}}_{<2} \underbrace{\frac{1}{\ln(x)}}_{<1/2} < x^{1/2+\epsilon} \quad (5.57)$$

Zeige zuerst $|\Theta(x) - x| < \frac{1}{2}x^{1/2+2\epsilon}$ für hinreichen großes x . Betrachte dazu für $x > A$ die beiden Integrale $\int_A^x \frac{\pi(t)}{t} dt$ und $\int_A^x \frac{Li(t)}{t} dt$. Für die Umformung des ersten Integrals seien p_1, \dots, p_n alle Primzahlen zwischen A und x . Dann gilt durch analoge Rechnung wie in Gleichung 5.50:

$$\begin{aligned} \int_A^x \frac{\pi(t)}{t} dt &= \int_A^{p_1} \frac{\pi(t)}{t} dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{\pi(t)}{t} dt + \int_{p_n}^x \frac{\pi(t)}{t} dt \\ &= \pi(x) \ln(x) - \Theta(x) - \Theta(A) + \pi(A) \ln(A) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Für das zweite Integral gilt mit partieller Integration und $Li'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ (vgl. Lemma 4.2.6):

$$\int_A^x \frac{Li(t)}{t} dt = \left[\ln(t) Li(t) \right]_A^x - \int_A^x \ln(t) \frac{1}{\ln(t)} dt = \ln(x) Li(x) - x - \ln(A) Li(A) + A \quad (5.59)$$

Aus den beiden Gleichungen 5.58 und 5.59 folgt für $x > A$:

$$\begin{aligned} \int_A^x \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt &= \pi(x) \ln(x) - \Theta(x) - \ln(x) Li(x) + x \underbrace{-\Theta(A) + \pi(A) \ln(A) + \ln(A) Li(A) - A}_{=:e} \\ \Rightarrow \Theta(x) - x &= \ln(x) (\pi(x) - Li(x)) - \int_A^x \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + e \end{aligned} \quad (5.60)$$

Mit der Dreiecksungleichung und Gleichung 5.57 lässt sich $|\Theta(x) - x|$ für $x > A$

5.3. Eine äquivalente Aussage zur Riemannschen Vermutung

wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
 |\Theta(x) - x| &\stackrel{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \ln(x)|\pi(x) - \text{Li}(x)| + \int_A^x \frac{|\pi(t) - \text{Li}(t)|}{t} dt + |e| \\
 &\stackrel{\text{Gl. (5.60)}}{<} \ln(x)x^{1/2+\epsilon} + \int_A^x t^{-1/2+\epsilon} dt + |e| \\
 &= \ln(x)x^{1/2+\epsilon} + \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + \epsilon} t^{1/2+\epsilon} \right]_A^x + |e| \\
 &= x^{1/2+\epsilon} \left(\ln(x) + \frac{1}{\frac{1}{2} + \epsilon} \right) - \frac{1}{\frac{1}{2} + \epsilon} A^{1/2+\epsilon} + |e|
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Sei $B > A$, sodass die beiden folgenden Abschätzungen (1) und (2) für $x > B$ gelten:

$$\left. \begin{aligned}
 (1) \quad \ln(x) + \frac{1}{\frac{1}{2} + \epsilon} &< \frac{x^\epsilon}{4} \\
 (2) \quad -\frac{1}{\frac{1}{2} + \epsilon} A^{1/2+\epsilon} + |e| &< \frac{1}{4} x^{1/2+2\epsilon}
 \end{aligned} \right\} \stackrel{\text{Gl. (5.61)}}{\implies} |\Theta(x) - x| < \frac{1}{2} x^{1/2+2\epsilon} \quad \forall x > B \tag{5.62}$$

Sei weiter $C > B$, sodass für alle $x > C$ die beiden Ungleichungen $\Theta(x^{1/2}) < 2\sqrt{x}$ (existiert wegen $\Theta \sim x$ vgl. Lemma 4.1.14) und $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} < \frac{1}{4} x^{2\epsilon}$ gelten. Dann lässt sich die Differenz $\Psi(x) - x$ für $x > C$ nach oben durch

$$\begin{aligned}
 \Psi(x) - x &\stackrel{\text{Lemma 5.2.4(1)}}{\leq} \underbrace{\Theta(x) - x}_{\stackrel{\text{Gl. (5.62)}}{<} \frac{1}{2} x^{1/2+2\epsilon}} + \underbrace{\Theta(x^{1/2}) \frac{\ln(x)}{\ln(2)}}_{< \frac{1}{2} x^{1/2+2\epsilon}} < x^{1/2+2\epsilon}
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

und nach unten durch

$$\Psi(x) - x \stackrel{\Psi(x) \geq \Theta(x)}{\geq} \Theta(x) - x \stackrel{\text{Gl. (5.62)}}{>} -\frac{1}{2} x^{1/2+2\epsilon} > -x^{1/2+2\epsilon} \tag{5.64}$$

abschätzen. Beide Abschätzungen zusammengefasst ergeben für alle $x > C$ die Ungleichung $|\Psi(x) - x| < x^{1/2+2\epsilon}$ und die Behauptung aus dem Lemma ist bewiesen. \square

Lemma 5.3.3. Für $s \in \mathbb{H}_1$ gilt:

$$-\frac{(s-1)\zeta(s)'}{(s-1)\zeta(s)} = 1 + s \int_1^\infty x^{-s-1} (\Psi(x) - x) dx \tag{5.65}$$

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

Beweis. Die Funktion $(s-1)\zeta(s)$ ist auf \mathbb{H}_1 holomorph und nullstellenfrei (vgl. Lemma 3.2.2). Demnach ist die linke Seite der zu zeigenden Gleichung wohldefiniert und mit der Produktregel gilt:

$$-\frac{\left((s-1)\zeta(s)\right)'}{(s-1)\zeta(s)} = -\frac{\zeta(s) + (s-1)\zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} = \underbrace{\frac{1}{1-s}}_{(1)} - \underbrace{\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}}_{(2)} \quad (5.66)$$

Seien $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$, sodass durch $\{a_1, a_2, \dots\}$ die Menge $\{p^k | p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}\}$ der Größe nach geordnet wird. Dann gilt für $s \in \mathbb{H}_1$:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{1-s} &= - \int_1^\infty x^{-s} dx & \stackrel{\text{PI.}}{=} & - [x x^{-s}]_1^\infty - s \int_1^\infty x^{-s-1} x dx \\ &= & 1 - s \int_1^\infty x^{-s-1} x dx \\ (2) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &\stackrel{\text{Lemma 5.1.4(1)}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \\ &\stackrel{\substack{\Lambda(n)=0 \\ \text{falls } n \notin \{a_1, a_2, \dots\}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Lambda(a_k)}_{=\Psi(a_k)-\Psi(a_{k-1})} a_k^{-s} \\ &\stackrel{\text{umsortieren}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(a_k) (a_k^{-s} - a_{k+1}^{-s}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(a_k) s \int_{a_k}^{a_{k+1}} x^{-s-1} dx \\ &\stackrel{\Psi \text{ konst. auf }}{=} s \int_1^\infty x^{-s-1} \psi(x) dx \end{aligned} \quad (5.67)$$

Einsetzen der Gleichungen 5.67 (1) und (2) in Gleichung 5.66 liefert die Behauptung. \square

Beweis. (Satz 5.3.1) Für $c \in \mathbb{R}^+$ und $\epsilon > 0$ gilt für hinreichen großes x die Abschätzung $c \ln^2(x) x^{-1/2} < x^\epsilon x^{-1/2}$. Damit folgt die Hinrichtung direkt aus Satz 5.2.1. Es ist also nur die Rückrichtung zu zeigen (Beweis durch Widerspruch):

Annahme: Es existiert ein $\rho \in N_{\text{nicht triv.}}$ mit $\operatorname{Re}(\rho) \neq \frac{1}{2}$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}$, sodass $|\operatorname{Re}(\rho) - \frac{1}{2}| = 3\epsilon$. Dann gilt $\epsilon > 0$, da nach Annahme $\operatorname{Re}(\rho) \neq \frac{1}{2}$.

5.3. Eine äquivalente Aussage zur Riemannschen Vermutung

Wegen der Symmetrie der Nullstellen im kritischen Streifen zur Achse mit Realteil $\frac{1}{2}$ (vgl. Lemma 3.2.2 (6)) gilt:

$$\rho_{\pm} := \frac{1}{2} \pm 3\epsilon + i \operatorname{Im}(\rho) \in N_{\text{nicht triv.}} \quad (5.68)$$

Mit Lemma 5.3.3 gilt für alle $s \in \mathbb{H}_1$:

$$-\frac{((s-1)\zeta(s))'}{(s-1)\zeta(s)} = 1 + s \int_1^\infty x^{-s-1} (\Psi(x) - x) dx \quad (5.69)$$

Dann lässt sich (1) und (2) folgern, was direkt im Widerspruch zueinander steht:

- (1) Die linke Seite aus Gleichung 5.69 lässt sich analytisch nach $\mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}$ fortsetzen.

Beweis. Die folgenden drei Überlegungen beweisen, dass die rechte Seite aus Gleichung 5.69 auf $\mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}$ analytisch ist, woraus die analytische Fortsetzbarkeit der linken Seite folgt.

- Die Funktion $s \mapsto x^{-s-1}(\Psi(x) - x)$ ist auf $\mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}$ analytisch für alle $x \in (1, \infty)$.
- Das Integral $\int_1^\infty x^{-s-1}(\Psi(x) - x) dx$ existiert für alle $s \in \mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}$:
Zu dem gewählten $\epsilon > 0$ gilt nach Voraussetzung $\frac{|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)|}{|\operatorname{Li}(x)|} < x^{-1/2+\epsilon}$ für hinreichend großes x und die Voraussetzung aus Lemma 5.3.2 ist erfüllt. Deshalb existiert ein $A \in \mathbb{R}^+$, sodass $|\Psi(x) - x| < x^{1/2+2\epsilon}$ für alle $x > A$. Dann lässt sich der Betrag des Integrals auf der rechten Seite in Gleichung 5.69 wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty x^{-s-1}(\Psi(x) - x) dx \right| &\leq \int_1^A |x^{-s-1}(\Psi(x) - x)| dx + \int_A^\infty x^{-\operatorname{Re}(s)-1} \underbrace{|\Psi(x) - x|}_{< x^{1/2+2\epsilon}} dx \\ &< \int_1^A |x^{-s-1}(\Psi(x) - x)| dx + \int_A^\infty x^{-\operatorname{Re}(s)-1/2+2\epsilon} dx \end{aligned} \quad (5.70)$$

Das Integral $\int_A^\infty x^{-\operatorname{Re}(s)-1/2+2\epsilon} dx$ konvergiert für $-\operatorname{Re}(s) - \frac{1}{2} + 2\epsilon < -1$, was äquivalent zu $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2} + 2\epsilon$ ist.

- Für alle $s_0 \in \mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}$ lässt sich die partielle Ableitung auf einer kompakten Umgebung von s_0 durch eine von s unabhängige über $(1, \infty)$ integrierbare Funktion abschätzen:

Sei $s_0 \in \mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}$ und $K \subset \mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}$ eine Kompakte Umgebung von s_0 .

5. Die Fehlerabschätzung in $\pi \sim Li$ und die Riemannsche Vermutung

Dann existiert ein $B \in \mathbb{R}^+$, sodass $|s+1| < B$ für alle $s \in K$. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^+$, sodass $|\Psi(x) - x| < x^{1/2+2\epsilon}$ für alle $x > A$ gilt. Dann lässt sich die partielle Ableitung wie folgt abschätzen:

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} (x^{-s-1}(\Psi(x) - x)) \right| < |s+1| |x^{-\operatorname{Re}(s)-3/2+2\epsilon}| \underset{s \in K \subset \mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}}{\underset{|s+1| < B}{<}} Bx^{-2} \quad (5.71)$$

Die Funktion $x \mapsto Bx^{-2}$ ist auf $(1, \infty)$ integrierbar und unabhängig von s .

(2) Die linke Seite aus Gleichung 5.69 hat bei $\rho_+ \in \mathbb{H}_{1/2+2\epsilon}$ eine echte Polstelle.

Beweis. Da $\rho_+ \in \mathbb{N}_{\text{nicht triv}}$ ist, ist ρ_+ eine Nullstelle der auf ganz \mathbb{C} analytischen Funktion $(s-1)\zeta(s)$ (vgl. Lemma 3.2.2 (1) und (2)). Daraus folgt direkt, dass die logarithmische Ableitung von $(s-1)\zeta(s)$ bei ρ_+ eine Polstelle mit positiver Polordnung, also eine echte Polstelle, hat.

Die beiden Folgerungen (1) und (2) stehen im Widerspruch und die Behauptung ist bewiesen. \square

Die in Satz 5.3.1 formulierte Äquivalenz zur Riemannschen Vermutung lässt sich eleganter formulieren. Dazu folgendes Theorem:

Theorem 5.3.4. *Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zu der Fehlerabschätzung $|\pi(x) - Li(x)| \in O(\sqrt{x} \ln(x))$. Kurz:*

$\underbrace{\text{Riemannsche Vermutung}}_{\text{„}\widehat{\equiv}\text{Nullstellen } \zeta\text{-Funktion“}}$	\iff	$\underbrace{ \pi(x) - Li(x) \in O(\sqrt{x} \ln(x))}_{\text{„}\widehat{\equiv}\text{Fehlerabschätzung Primzahlverteilung“}}$
--	--------	---

Beweis. „ \Rightarrow “ Angenommen die Riemannsche Vermutung gilt. Dann existieren nach Satz 5.2.1 ein $c \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^+$, sodass für $x > A$ gilt:

$$\frac{|\pi(x) - Li(x)|}{|Li(x)|} < c \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \quad (5.72)$$

5.3. Eine äquivalente Aussage zur Riemannschen Vermutung

Sei $B \in \mathbb{R}^+$, sodass $\frac{\text{Li}(x)}{\ln(x)} < 2$ für $x > B$ gilt (B existiert wegen $\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ vgl. Satz 4.2.7). Dann gilt für alle $x > \max(A, B, 2)$ ^{*}:

$$\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\sqrt{x} \ln(x)|} = \underbrace{\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)|}}_{\substack{\text{Gl. (5.72)} \\ < c \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}}} \frac{\text{Li}(x)}{\sqrt{x} \ln(x)} < c \underbrace{\frac{\text{Li}(x)}{\ln(x)}}_{< 2} < 2c \quad (5.73)$$

$$\xrightarrow{\text{Def. } O} |\pi(x) - \text{Li}(x)| \in O(\sqrt{x} \ln(x))$$

„ \Leftarrow “ Angenommen es gilt $|\pi(x) - \text{Li}(x)| \in O(\sqrt{x} \ln(x))$. Dh. es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x > A$ gilt:

$$\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\sqrt{x} \ln(x)|} < c \quad (5.74)$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig und dazu $B \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x > B$ gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{\text{Li}(x)} < 2 \quad (\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \text{ vgl. Satz 4.2.7}) \\ (2) \quad & 2c \ln^2(x) < x^\epsilon \quad (\ln^2 \text{ wächst langsamer, als jede Potenzfunktion}) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Dann gilt für alle $x > \max(A, B, 2)$:

$$\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)|} = \underbrace{\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\sqrt{x} \ln(x)|}}_{\substack{\text{Gl. (5.74)} \\ < c}} \underbrace{\frac{\frac{x}{\ln(x)}}{\text{Li}(x)}}_{\substack{\text{Gl. (5.75)} \\ < 2}} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{Gl. (5.75)}}{<} x^{-1/2+\epsilon} \quad (5.76)$$

$$\xrightarrow[\text{Satz 5.3.1}]{\epsilon > 0 \text{ beliebig}} \text{Es gilt die Riemannsche Vermutung} \quad \square$$

*Es wird zusätzlich $x > 2$ gefordert, damit $\text{Li}(x), \ln(x) > 0$ gilt und die Brüche im Nenner weggelassen werden dürfen.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend wurden folgende Resultate in dieser Arbeit erzielt:

- (1) Die zuerst auf \mathbb{H}_1 definierte Riemannsche ζ -Funktion lässt sich nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph fortsetzen. Sie hat bei eins einen einfachen Pol [vgl. Kapitel 3].
- (2) Die π -Funktion ist asymptotisch äquivalent zum Integrallogarithmus Li und zu Funktionen der Art $f_A(x) = \frac{\ln(x)}{x-A}$ für beliebiges $A \in \mathbb{R}$. Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Primzahlsatz $\pi \sim \frac{x}{\ln(x)}$, welcher unter Verwendung der Nullstellenfreiheit der Riemannschen ζ -Funktion bei Realteil eins bewiesen wurde [vgl. Kapitel 4].
- (3) Unter den in (2) aufgezählten Funktionen approximiert der Integrallogarithmus die π -Funktion am besten. Für den Beweis ist die Fehlerabschätzung der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ von De la Vallée Poussin zentral [vgl. Kapitel 4.2]:

Für eine passende Konstante $c \in \mathbb{R}$ und hinreichend großes x gilt:

$$\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)|} < e^{-\sqrt{c \ln(x)}}$$

- (4) Unter Annahme der Riemannschen Vermutung kann der relative Fehler der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und hinreichend großes x durch

$$\frac{|\pi(x) - \text{Li}(x)|}{|\text{Li}(x)|} < c \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}} \tag{6.1}$$

abgeschätzt werden. Diese Abschätzung ist exakter, als jede bis heute bewiesene. Das Zentrale im Beweis ist zum einen die Formel von von Mangoldt, in der die Ψ -Funktion mit den kritischen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion in Verbindung gebracht wird. Zum anderen eine genaue Untersuchung der Dichte der Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion innerhalb des kritischen Streifens [vgl. Kapitel 5.2].

6. Zusammenfassung und Ausblick

- (5) Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zu der Aussage, dass der absolute Fehler der Approximation $\pi \sim \text{Li}$ nicht wesentlich schneller wächst als $\sqrt{x} \ln(x)$. Kurz:

$$\underbrace{\text{Riemannsche Vermutung}}_{\text{„}\widehat{\equiv}\text{Nullstellen } \zeta\text{-Funktion“}} \iff \underbrace{|\pi(x) - \text{Li}(x)| \in O(\sqrt{x} \ln(x))}_{\text{„}\widehat{\equiv}\text{Fehlerabschätzung Primzahlverteilung“}}$$

Dadurch wird eine direkte Verbindung zwischen der Primzahlverteilung und den Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion hergestellt [vlg. Kapitel 5.3].

Im Rahmen einer genaueren Untersuchung des Themas könnten weitere Zusammenhänge und äquivalente Formulierungen der Riemannschen Vermutung betrachtet werden. Unter Verwendung der Theorie der Dirichletschen L-Reihen lässt sich zum Beispiel die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung formulieren [vgl. GD07]:

Für jeden Dirichlet-Charakter χ haben alle kritischen Nullstellen der L-Funktion $s \mapsto L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ Realteil $\frac{1}{2}$.

Außerdem könnten bisherige Beweisideen der Riemannschen Vermutung analysiert und weitergeführt werden. Es gibt zum Beispiel Ansätze, bei denen die Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion als Eigenwerte eines unendlich dimensionalen Operators aufgefasst werden. Aus Untersuchungen mithilfe kohomologischer Methoden erhofft man sich einen Zugang zum Beweis der Riemannschen Vermutung [vgl. Kra08]. Ein weiterer interessanter Ansatz kommt aus der Physik und hat mit chaotischen, quantenmechanischen Systemen zu tun. Dabei werden die Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion als Energieniveaus eines chaotischen quantenmechanischen Systems interpretiert. Sind diese Energieniveaus bestimmt, so folgt die Riemannsche Vermutung [vgl. Cip99]. Ein großes Problem in dieser Überlegung liegt darin, dass chaotische, quantenmechanische Systeme sehr komplex und bisher schwer zu verstehen sind. Umgekehrt würde ein Beweis der Riemannschen Vermutung auch zu neuen Erkenntnissen über chaotische, quantenmechanische Systeme führen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass ein Beweis der Riemannschen Vermutung unzählige Konsequenzen für viele Bereiche der Mathematik und Anwendungen in der Physik hätte. Außerdem würde es Erkenntnisse über eines der ältesten Rätseln der Mathematik - den Primzahlen und deren Verteilung - liefern. Deshalb ist der Beweis der Riemannschen Vermutung eine Millionen Dollar wert und ein so bedeutendes und bekanntes Problem in der Mathematik.

Literaturverzeichnis

- [Car+06] J. Carlson u. a. *The Millennium Prize Problems*. Amsns AMS non-series Title Series. American Mathematical Society, 2006. isbn: 9780821836798. url: <https://books.google.de/books?id=7wJIPJ80RdUC>.
- [Cip99] B. Cipra. „A prime case of chaos“. In: *What's happening in the mathematical sciences* 4 (1999).
- [Edw74] H.M. Edwards. *Riemann's zeta function*. New York [u.a.]: Academic Pr., 1974.
- [FB06] Eberhard Freitag und Rolf Busam. *Funktionentheorie 1 - 4*. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [FL05] Wolfgang Fischer und Ingo Lieb. *Funktionentheorie*. 9. Auflage. Bonn, Bremen: Springer, 2005.
- [Gau72] C.F. Gauß. *Werke*. II. 1872.
- [GD07] Andrew Granville und Jean-Marc Deshouillers. „Refinements of Goldbach's conjecture, and the generalized Riemann hypothesis“. In: *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* 37 (Jan. 2007). doi: 10.7169/facm/1229618748.
- [Had93] J. Hadamard. „Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann“. fre. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1893), S. 171–216. url: <http://eudml.org/doc/234668>.
- [KM17] Christian Karpfinger und Kurt Meyberg. *Algebra - Gruppen - Ringe - Körper*. 4. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2017.
- [Kra08] Jürg Kramer. „Die Riemannsche Vermutung“. In: Bd. 57. Jan. 2008, S. 216–221. doi: 10.1007/978-3-540-77889-9_26.
- [Rie59] Bernhard Riemann. „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“. In: *Monatsberichte der Berliner Akademie* (November 1859), S. 671–680.

- [SA11] Dániel Schumayer und David A. W. Hutchinson. „Physics of the Riemann Hypothesis“. In: *Reviews of Modern Physics - REV MOD PHYS* 83 (Apr. 2011), S. 307–330. doi: 10.1103/RevModPhys.83.307.
- [Spi18] Vera Spillner. „Warum der Beweis der Riemann-Vermutung eine Million Dollar wert ist“. In: *Spektrum Online* (Jan. 2018). [Online; Stand 17. Juli 2019]. url: <https://www.spektrum.de/video/warum-der-beweis-der-riemann-vermutung-eine-million-dollar-wert-ist/1533577>.
- [Zag77] D. Zagier. „Die ersten 50 Millionen Primzahlen“. In: *Elemente der Mathematik (Beiheft zur Zeitschrift)* Band 15 (1977).
- [Zag97] D. Zagier. „Newmans Short Proof of the Prime Number Theorem“. In: *The American Mathematical Monthly* 104.8 (1997), S. 705–708.

Abbildungsverzeichnis

1.1.	Die π -Funktion	2
3.1.	Integrationsweg für die meromorphe Fortsetzung der ζ -Funktion auf ganz \mathbb{C}	15
3.2.	Parameterunabhängigkeit des Integral $I_{r,\delta}(s)$	18
3.3.	Darstellung der Integrationswege im Beweis von $I_{r,\delta}(1) = 2\pi i$	22
4.1.	Skizze zum Beweis der normalen Konvergenz der Reihe $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s(p^s-1)}$	28
4.2.	Integrationsweg für den Beweis des Analytischen Theorems	35
4.3.	Ein einfaches Beispiel zur Interpretation der asymptotischen Äquivalenz	42
4.4.	Vergleich der drei zu π asymptotisch äquivalenten Funktionen f_0 , $f_{1,08366}$ und Li	46

Tabellenverzeichnis

4.1.	Vergleich der π -Funktion mit der Riemannschen R-Funktion und dem Integrallogarithmus Li	52
------	---	----

A. Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken, gegebenenfalls auch elektronischen Medien, entnommen sind, sind von mir durch Angabe der Quelle und des Zugriffsdatums sowie dem Ausdruck der ersten Seite belegt; sie liegen zudem für den Zeitraum von 2 Jahren entweder auf einem elektronischen Speichermedium im PDF-Format oder in gedruckter Form vor.

Freiburg, den 30. Dezember 2021

Thomas Tony

B. Ausdruck der Online-Quellen

B.1. Ausdruck der ersten Seite von [Spi18]

Warum der Beweis der Riemann-Vermutung ein... <https://www.spektrum.de/video/warum-der-beweis-der-riemann-vermutung-eine-million-dollar-wert-ist>
Spektrum.de

26.01.2018

MATHEMATIK

Warum der Beweis der Riemann-Vermutung eine Million Dollar wert ist

Leonhard Euler und nach ihm Bernhard Riemann haben erstaunliche Zusammenhänge zwischen der Welt der Primzahlen und der Funktionen gefunden. Bravourös führt ein Mathematikprofessor aus Berkeley in eines der Millennium-Probleme ein.

Von der SciViews-Autorin Vera Spillner

Als der Mathematiker David Hilbert am 8. August 1900 in Paris die 23 größten mathematischen Herausforderungen für das 20. Jahrhundert vorstellt, stand die Riemann-Vermutung an achter Stelle seiner Liste. Allerdings sollte sie sich in den folgenden 100 Jahren als hartnäckig erweisen. Als so hartnäckig sogar, dass das Clay Mathematics Institute in Cambridge, Massachusetts, für den noch immer ausstehenden Beweis im Jahr 2000 einen Preis von einer Million US-Dollar aussetzte. Worum geht es?

Es geht um den wohl schwierigsten Weg, an eine solche Geldsumme heranzukommen, berichtet Edward Frenkel in einem Video auf dem YouTube-Kanal Numberphile auf höchst sehenswerte Weise. Im Zentrum dieses Millennium-Problems, so erklärt der Professor an der University of California, Berkeley, steht die Riemannsche Zeta-Funktion: eine Summe über unendlich viele Brüche, in deren Nenner die natürlichen Zahlen (n) mit unterschiedlichen Exponenten (s) auftauchen. Mathematisch schreibt sie sich so:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

(Vor Kurzem haben wir hier übrigens ein Video vorgestellt, das eine spezielle Lösung der Zeta-Funktion bei s=-1 diskutiert – eine Lösung, die der Summe 1+2+3+4+5 ... den scheinbar unmöglichen Wert -1/12 zuweist.)

Die Vermutung, die Bernhard Riemann, ein berühmter deutscher Mathematiker des 19. Jahrhunderts, über die Nullstellen dieser Funktion anstellt, wäre – falls sie denn zutrifft – äußerst folgenreich: Sie verbindet nämlich die Welt der Funktionen mit der Welt der Primzahlen. Dieser unerwartete und vor allem für Zahlentheoretiker und Kryptographen wichtige Brückenschlag gelingt, weil man, wie Leonhard Euler bereits im

18. Jahrhundert gezeigt hat, die Zeta-Funktion – eine Summe unendlich vieler Summanden – überraschenderweise gleichsetzen kann mit einem