УТВЕРЖДЕНЫ

Протокол №4 от 24.11.2021г.
Зав. кафедрой высшей математики

_______________ Пыжкова О.Н.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ (ЛАиАГ)

Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц AB и BA, если A=$\begin{pmatrix} 3\,5 \\ 7\,2 \\ 5\,8 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 4\,7\,5 \\ 6\,8\,0 \end{pmatrix}$.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ путем разложения по второму столбцу.

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}.$$

Даны векторы своими координатами $\vec{a} = \{1; -3; 5\}$, $\vec{b} = \{2; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{-4; 6; -2\}$. Найти координаты векторов $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ и проекции $np_{Oy}\vec{a}, np_{Ox}\vec{b}$.

Найти координаты и модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2; 4; -3), B(5; 0; 9)$

Даны векторы своими координатами $\vec{a} = \{1; -3; 5\}$, $\vec{b} = \{2; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{-4; 6; -2\}$. Найти координаты векторов $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ и проекции $np_{Oy}\vec{a}, np_{Ox}\vec{b}$.

Найти координаты и модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2; 4; -3), B(5; 0; 9)$

Даны векторы $\vec{a} = \{-4; 2; 4\}$ и $\vec{b} = \{0; -3; 4\}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и косинус угла $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$ между ними.

Даны вершины четырехугольника $A(1; 4; 0), B(-4; 1; 1), \quad C(-5; -5; 3), \ D(1; -2; 2)$. Доказать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.

Даны координаты вершин треугольника $A(1; 2; 4), \ B(-3; 2; 1), \ C(4; 2; 0)$. Найти внутренний угол α при вершине A и внешний угол γ при вершине C.

Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ на ось l, составляющую с $\vec{a}$ угол $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$.

Даны векторы $\vec{a} = \{-4; 2; 4\}$ и $\vec{b} = \{0; -3; 4\}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и косинус угла $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$ между ними.

Даны вершины четырехугольника $A(1;4;0)$, $B(-4;1;1)$, $C(-5;-5;3)$, $D(1;-2;2)$. Доказать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.

Даны координаты вершин треугольника $A(1;2;4)$, $B(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$. Найти внутренний угол α при вершине A и внешний угол γ при вершине C.

Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{2;-4;4\}$ на ось l, составляющую с $\vec{a}$ угол $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$.

Даны векторы $\vec{a}=\{1;2;-2\}$, $\vec{b}=\{-5;0;1\}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}$. Найти $np_{\vec{c}}(2\vec{a}-\vec{b})$, направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Даны векторы $\vec{a}=\{4;-5;3\}$ и $\vec{b}=\{-4;0;2\}$. Проверить, что $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ и найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Даны векторы $\vec{a}=\{2;-4;-5\}$, $\vec{b}=\{-4;1;6\}$, $\vec{c}=\{5;-5;-1\}$. Найти смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, $\vec{c}\vec{a}\vec{b}$.

Проверить компланарность векторов $\vec{a}=\{3;-4;7\}$, $\vec{b}=\{1;2;-3\}$, $\vec{c}=\{2;-1;2\}$.

Доказать, что точки $A(1;2;0)$, $B(4;3;4)$, $C(2;-3;-2)$, $D(3;0;1)$ лежат в одной плоскости.

Найти точку пересечения прямых $3x+2y=5$ и $2x-3y=7$.

Найти точку пересечения прямых $x-y-13=0$ и $2x+3y=11$

Записать уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;0)$ перпендикулярно прямой BC, если $B(2;3)$; $C(-3;1)$.

Найти расстояние между двумя прямыми $2x+y-2=0$ и $x+2y-5=0$.

Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-5=0$ и $3x+4y+7=0$.

Даны координаты точек $A_1(4;\,2;\,0)$, $A_2(6;\,1;\,1)$, $A_3(4;\,6;\,6)$. Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ и уравнение прямой A_1A_2.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;2)$ перпендикулярно прямой $12x+5y-10=0$

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(4;\,5;\,7)$; $A_2(7;\,5;\,3)$; $A_3(9;\,4;\,4)$; $A_4(7;\,9;\,6)$. Найти длину ребра A_1A_2 и угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

Даны координаты точек $A_1(5;\,7;\,8)$; $A_2(9;\,5;\,5)$; $A_3(-3;\,7;\,1)$. Найти: угол между A_1A_2 и A_1A_3 и уравнение прямой A_1A_2.

Найти уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:
$A_1(5;\,7;\,8)$; $A_2(9;\,5;\,5)$; $A_3(-3;\,7;\,1)$.

Даны вершины треугольника ABC: A(2;0), B(4;5), C(6;7). Найти уравнения стороны AC, высоты BK и медианы BM.

Найти расстояние между двумя прямыми $3x+2y-6=0$ и $6x+4y+5=0$.

Даны вершины четырехугольника ABCD: A(-1;3), B(2;1), C(2;5), D(0;4). Докажите, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\,4)$ перпендикулярно прямой $y=5x+3$.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку К(1;-4) параллельно прямой АВ: А(3;4), В(-1;-4).
Записать уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент 2 и проходящей через точку А(-3;5).
Определить вид кривой линии и изобразить ее на чертеже $x^2-2x+y^2-4y+1=0$.
Записать каноническое уравнение кривой $y^2+4y+x^2=0$.
Найти координаты центра и радиус окружности $3x^2+3y^2-4x-6y-15=0$.
Назвать и построить кривую $x^2+y^2-6x=0$.
Дана гипербола $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Определить ее полуоси, фокусы, вершины, эксцентриситет, асимптоты.

Даны комплексные числа $z_1=-1$, $z_2=\pi$, $z_3=-2i$, $z_4=3i-3$, $z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ $z_6=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$.

а) Найти действительную и мнимую части комплексных чисел $z_1,\ldots,\ z_6$;

б) записать числа, сопряженные данным;

в) изобразить числа $z_1,\ldots,\ z_6$ и им сопряженные $\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_6$ соответствующими точками на комплексной плоскости;

г) выполнить действия $z_1-z_4+z_5+z_6$, $z_1^3+z_3^3+(2-i)\cdot z_4$, $\frac{z_3}{z_4}$.

Даны комплексные числа $z_1=-1$, $z_2=\pi$, $z_3=-2i$, $z_4=3i-3$, $z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_6=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$.

а) Найти модули и аргументы комплексных чисел $z_1,\ldots,\ z_6$;

б) записать эти числа в тригонометрической и показательной формах;

в) выполнить действия $z_4\cdot z_5$, $\frac{z_6}{z_4}$, z_5^{14}, $\sqrt{z_3}$, $\sqrt[4]{z_5^{12}}$

Числа z_1 и z_2 представить в тригонометрической форме и выполнить указанные над ними действия:

$z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1^2}{z_2}$, если $z_1=2\sqrt{3}-2i$, $z_2=3-3\sqrt{3}i$.

$z_1^2\cdot\bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, если $z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_2=\sqrt{8}-\sqrt{8}i$.

Показать, что в линейном пространстве квадратных матриц 2-го порядка элементы $\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \bar{e}_2=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}, \bar{e}_3=\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}, \bar{e}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&4\end{pmatrix}$ образуют базис, и найти в указанном базисе координаты элемента $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$. Чему равна размерность данного линейного пространства?

Показать, что многочлены $\overline{e_1} = x^2 + x + 1, \overline{e_2} = x^2 + 2x + 4, \quad \overline{e_3} = x^2 + 3x + 9$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 2. Определить координаты многочлена $x^2 + 4x + 16$ и произвольного квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ в указанном базисе.

Показать, что в линейном пространстве нечетных многочленов степени не выше 5 многочлены $\overline{e_1} = x^5 - x^3, \overline{e_2} = x^3 - 2x, \ \overline{e_3} = x^5 - 3x$ образуют базис, и найти в этом базисе координаты многочлена $2x^5 - 2x^3 - 3x$.

Являются ли линейно независимыми:

а) векторы $\overline{x_1} = (1; 1; 2; -1), \overline{x_2} = (3; 5; 0; 5), \overline{x_3} = (0; 0; 1; -1), \quad \overline{x_4} = (0; 5; 6; -1)$ в $\mathbb{R}^4$;

б) матрицы $\overline{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \overline{e_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \overline{e_4} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) многочлены $\overline{e_1} = x + 3x^2 - x^3, \overline{e_2} = 2x^3 + x - 2, \overline{e_3} = 3 + x - x^2, \quad \overline{e_4} = x + 2x^2 + x^3$?

Найти координаты:

а) вектора $\bar{y} = (5; 10; 8; 7) \in \mathbb{R}^4$ в базисе $\overline{x_1} = (0; 1; 3; -1)$, $\overline{x_2} = (-2; 1; 0; 2), \overline{x_3} = (3; 1; -1; 0), \overline{x_4} = (0; 1; 2; 1)$;

б) матрицы $\bar{a} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе $\overline{e_1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\overline{e_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \overline{e_4} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) многочлена $\bar{y} = 13 - 2x - 8x^2 - 9x^3$ в базисе $\overline{e_1} = x + 3x^2 - x^3, \overline{e_2} = 2x^3 + x - 2$, $\overline{e_3} = 3 + x - x^2, \ \overline{e_4} = x + 2x^2 + x^3$.

Найти матрицы перехода от базиса $\{x^2; x; 1\}$ к базису $\{(x+1)^2; x+1; 1\}$ и от базиса $\{(x+1)^2; x+1; 1\}$ к базису $\{x^2; x; 1\}$.

Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$ к базису $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\}$. Найти координаты вектора $\bar{a} = 4\overline{e_1'} + \overline{e_2'}$ в базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$ и координаты вектора $\bar{b} = 5\overline{e_1} + 7\overline{e_2}$ в базисе $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\}$.

Доказать линейность оператора $f(\bar{x}) = (x_1 - x_2; x_1 + 2x_2 - x_3; 3x_1 + x_3)$, где $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$; записать матрицу этого оператора.

Пусть $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\bar{x}) = (2x_1; x_2 + 5x_3; -x_1)$, $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2; x_2 + x_3; 0)$. Найти матрицы операторов f и g, а также матрицы и явный вид операторов $2f + 3g$.

Даны два базиса $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\}$ линейного пространства и матрица

$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ линейного оператора в базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\}$, если $\overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$, $\overline{e_2'} = \overline{e_1} - \overline{e_2}$.

Какие из векторов $\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{x_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{x_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ являются собственными векторами линейного оператора f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$?

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, имеющего в некотором базисе матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; **в)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***д)*** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; **е)** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

В базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}\}$ линейный оператор f задается матрицей $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти базис, в котором матрица оператора f примет диагональный вид.

Привести к каноническому виду уравнения линий второго порядка:

а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$; **б)** $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

в) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$; **г)** $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$;

Установить с помощью критерия Сильвестра, является ли данная квадратичная форма знакоопределенной:

а) $4x^2 + 2xy + 3y^2$; ***б)*** $-x^2 + 2xy - 2y^2$;

в) $-16x^2 + 24xy - 9y^2$; ***г)*** $2x^2 + 9y^2 + 19z^2 + 8xy + 4xz$;

Лектор Чайковский М.В.