Раздел 9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла

Задачей дифференциального исчисления является нахождение по функции $y = f(x)$ ее производной или дифференциала. В интегральном исчислении решается обратная задача: по заданной функции $y = f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$, т. е. требуется *восстановить функцию по ее производной*. Например, по закону изменения скорости восстановить уравнение закона движения.

Опр. 1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной для функции*** $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$\boxed{F'(x) = f(x).}$$

Пример 1. Для функции $f(x) = x^2$ первообразными являются, например, функции $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 2$ и вообще любая функция вида $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, где C – произвольная постоянная.●

Т 1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то *множество всех первообразных для функции* $f(x)$ на этом промежутке задается формулой $F(x) + C$, где $C = \text{const}$ – произвольная постоянная.

Доказательство. 1) Докажем, что функция $F(x) + C$ является первообразной для $f(x)$. Очевидно, $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

2) Пусть $G(x)$ – некоторая другая первообразная для $f(x)$ на данном промежутке. Тогда для любого x из этого промежутка

$$(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(x) - F(x) = C = \text{const},$$

откуда $G(x) = F(x) + C$. ◁

Опр. 2. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ (на этом промежутке) и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C,}$$

где $C = \text{const}$ – произвольная постоянная. Здесь $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***.

Операция нахождения неопределенного интеграла называется ***интегрированием.*** Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Поэтому для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, нужно продифференцировать результат и получить подынтегральную функцию.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Основные понятия интегрального исчисления впервые появились в работах Ньютона и Лейбница в конце XVII в. Обозначение интеграла $\int$ в виде вытянутой буквы S ввел Лейбниц, термин «интеграл» предложил И. Бернулли, он же написал первый курс интегрального исчисления, опубликованный в 1742 г.

В 1768–1779 гг. появился курс интегрального исчисления Л. Эйлера, в котором изложение велось практически так же, как в современных учебниках. Таким образом, методы нахождения неопределенных интегралов достигли современного уровня уже во второй половине XVIII в.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx. \triangleleft$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Доказательство. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$ ◁

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ \ k \neq 0 \text{ – постоянная.}$$

Доказательство.

$$\int kf(x)dx = \int kF'(x)dx = \int (kF(x))'dx = kF(x) + C =$$

$$= k\left(F(x) + \frac{C}{k}\right) = k\int f(x)dx. \ ◁$$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Упражнение 1. Доказать аналогично свойству 3.

Свойства 3 и 4 часто объединяют в одно и называют *свойством линейности неопределенного интеграла*.

5. Инвариантность формулы интегрирования: любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = u(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Доказательство. Пусть $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную. Для сложной функции $F(u)$ в силу свойства инвариантности дифференциала 1-го порядка имеем $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$, поэтому

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C. \ ◁$$

Таким образом, *формулы интегрирования остаются справедливыми независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой непрерывно дифференцируемой функцией от нее*.

Пример 1 (продолжение). Поскольку $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$ то для любой дифференцируемой функции $u = u(x)$ имеем $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C,$ а значит, например,

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C;$$

$$\int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C. \bullet$$

В частном случае из свойства 5 следует еще одно свойство.

6. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, a, b – числа, $a \neq 0,$ то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Доказательство. Положим $u = ax + b,$ тогда

$$du = d(ax+b) = (ax+b)' dx = adx,$$

откуда $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ и

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \triangleleft$$

Таблица основных неопределенных интегралов

Пусть $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную.

0. $\int 0du = C.$ **1.** $\int du = u + C.$ **2.** $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1.$ **3.** $\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C.$ **4.** $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$; в частности, $\int e^u du = e^u + C.$ **5.** $\int \sin u du = -\cos u + C.$ **6.** $\int \cos u du = \sin u + C.$ **7.** $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C.$ **8.** $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C.$	**9.** $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C,$ или $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{u}{a} + C.$ **10.** $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C,$ или $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\arccos\dfrac{u}{a} + C.$ **11.** $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C.$ **12.** $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C.$

Упражнение 2. Проверить дифференцированием.

§ 2. Основные методы интегрирования

Интегрирование, в отличие от дифференцирования с его установленными формальными правилами, в большей степени требует индивидуального подхода. Нет общих приемов нахождения неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие (хоть и не всегда) свести интеграл к табличному.

1. Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции с использованием основных свойств неопределенного интеграла сводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием***.

Пример 1. Найдем интеграл $\int \dfrac{x^7 - 2x^5 + 3}{x^5} dx.$

Решение. Разделим числитель на знаменатель почленно и воспользуемся свойством линейности неопределенного интеграла:

$$\int \frac{x^7 - 2x^5 + 3}{x^5} dx = \int \left(\frac{x^7}{x^5} - \frac{2x^5}{x^5} + \frac{3}{x^5} \right) dx = \int x^2 dx - 2\int dx + 3\int x^{-5} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x + 3\frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{3}{4x^4} + C. \bullet$$

Замечание. Произвольная постоянная записывается при этом не каждый раз при нахождении интеграла от суммы, а лишь один раз, когда исчезает знак последнего интеграла в сумме.

Пример 2.

$$\int \frac{7^x + 1}{3^x} dx = \int \left(\frac{7}{3} \right)^x dx + \int \left(\frac{1}{3} \right)^x dx = \frac{\left(\frac{7}{3} \right)^x}{\ln \frac{7}{3}} + \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{7^x}{3^x (\ln 7 - \ln 3)} - \frac{1}{3^x \ln 3} + C. \bullet$$

Пример 3.

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx = \int \frac{(x^2 + 4) - 4}{x^2 + 4} dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2 + 4} \right) dx = \int dx - 4\int \frac{dx}{x^2 + 2^2} =$$

$$= x - \frac{4}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = x - 2\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \bullet$$

Пример 4.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C. \bullet$$

Пример 5.

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C. \bullet$$

2. Внесение множителя под знак дифференциала

Часто при вычислении интегралов пользуются приемом подведения функции под знак дифференциала. Связь дифференциала и производной выражается формулой

$$\boxed{u'(x)dx = d(u(x)).} \tag{1}$$

Переход от левой части этого равенства к правой называют ***подведением множителя*** $u'(x)$ ***под знак дифференциала***. Это позволяет с помощью свойства инвариантности формул интегрирования найти интеграл вида

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(u(x)) + C.$$

Замечание 1. С учетом определения неопределенного интеграла формулу (1) иногда бывает полезно переписать в виде

$$\boxed{f(x)dx = d\left(\int f(x)dx\right).} \tag{2}$$

Замечание 2. Полезно также иметь в виду свойства дифференциала: 1) постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала: $d(au) = adu$; 2) дифференциал не изменяется, если к функции прибавить постоянную: $d(u+b) = du.$ Следовательно,

$$\boxed{du = \frac{1}{a}d(au) = \frac{1}{a}d(au+b).} \tag{3}$$

где a, b – числа, $a \neq 0$.

Пример 6. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$•

Пример 7. $\int \mathrm{e}^{2x-3}\, dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x-3}\, d(2x-3) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-3} + C.$•

Пример 8. $\int \frac{dx}{4x+9} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x+9)}{4x+9} = \frac{1}{4}\ln|4x+9| + C.$•

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \int \frac{dx}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C.\bullet$$

В этих примерах используется формула (3) или свойство 6 неопределенного интеграла.

Пример 10. Найдем интеграл $\int \frac{xdx}{4x^2+9}$.

Решение. 1 способ. Заметим, что в числителе, с точностью до постоянного множителя, стоит производная знаменателя:

$$\int \frac{xdx}{4x^2+9} = \left| d(4x^2+9) = (4x^2+9)'dx = 8xdx \right| = \frac{1}{8}\int \frac{8xdx}{4x^2+9} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{d(4x^2+9)}{4x^2+9} = \frac{1}{8}\ln(4x^2+9) + C.$$

2 способ. Отметим, что оформление решения могло быть другим. Используя формулу (2), внесем множитель x под знак дифференциала, а затем применим свойство (3):

$$\int \frac{xdx}{4x^2+9} = \left| xdx = d\left(\int xdx\right) = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2) \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{4x^2+9} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \frac{d(4x^2+9)}{4x^2+9} = \frac{1}{8}\ln(4x^2+9) + C. \bullet$$

Пример 11.

$$\int \frac{xdx}{4x^4+9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{4x^4+9} = \left| xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2) \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(2x^2)^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d(2x^2)}{(2x^2)^2+3^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x^2}{3} + C = \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{2x^2}{3} + C. \bullet$$

Пример 12.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^3}} = \left| x^2dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}d(x^3) \right| = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{4-x^3}} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(4-x^3)}{\sqrt{4-x^3}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int (4-x^3)^{-\frac{1}{2}} d(4-x^3) = -\frac{1}{3}\frac{(4-x^3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{3}\frac{(4-x^3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{4-x^3} + C. \bullet$$

Пример 13.

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \left|\cos x dx = d(\sin x)\right| = \int e^{\sin x}\, d(\sin x) = e^{\sin x} + C. \bullet$$

Пример 14.

$$\int \sin x\cos^2 x dx = \left|\sin x dx = -d(\cos x)\right| = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$\bullet$

Пример 15.

$$\int \frac{\sin x dx}{2\cos x - 5} = \left|\sin x dx = -d(\cos x)\right| = -\int \frac{d(\cos x)}{2\cos x - 5} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(2\cos x - 5)}{2\cos x - 5} = -\frac{1}{2}\ln|2\cos x - 5| + C. \bullet$$

Пример 16.

$$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)\right| = \int \arcsin x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$$

$\bullet$

Пример 17.

$$\int \mathrm{ctg} 2x dx = \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = \left|d(\sin 2x) = 2\cos 2x dx\right| = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2x dx}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\ln\left|\sin 2x\right| + C. \bullet$$

Пример 18.

$$\int \frac{dx}{x\ln 3x} = \left|d(\ln 3x) = \frac{3}{3x}dx = \frac{dx}{x}\right| = \int \frac{d(\ln 3x)}{\ln 3x} = \ln\left|\ln 3x\right| + C. \bullet$$

Упражнение 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x\ln\ln\ln x\ln\ln\ln\ln x}$.

3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Метод замены переменной состоит в переходе к новой переменной с помощью некоторой *подстановки*. При этом исходный интеграл стремятся преобразовать в интеграл, метод интегрирования которого известен. В конце решения обязательно возвращаются к исходной переменной.

Т 1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором промежутке *X*, а функция $x = \varphi(t): T \to X$ непрерывно дифференцируема и имеет непрерывную обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.} \qquad (4)$$

Доказательство. Найдем дифференциалы левой и правой частей, учитывая, что $f(x) = f(\varphi(t))$ – сложная функция:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx = f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Так как при дифференцировании обеих частей формулы получаются одинаковые выражения, то равенство интегралов имеет место. ◁

Замечание. Формула (4) может использоваться как слева направо, так и справа налево. Прочтение формулы (4) справа налево – это фактически метод поднесения множителя под знак дифференциала, рассмотренный выше. По сути, внесение множителя под знак дифференциала – это частный случай замены переменной, при котором решение оформляется без введения нового обозначения.

При интегрировании заменой переменной важно удачно подобрать подстановку. Однако общих методов выбора подстановок не существует. Для различных типов интегралов существуют свои подстановки.

Пример 19. Найдем $\int \frac{xdx}{(x-5)^4}$.

Решение. 1 способ. Сделаем замену $t = x - 5$:

$$\int \frac{xdx}{(x-5)^4} = \left| \begin{array}{l} t = x-5 \quad \Rightarrow \quad x = t+5 \\ dx = (t+5)'dt = dt \end{array} \right| = \int \frac{t+5}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^3} + 5\int \frac{dt}{t^4} =$$

$$= \int t^{-3}dt + 5\int t^{-4}dt = \frac{t^{-2}}{-2} + 5\frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{2t^2} - \frac{5}{3t^3} + C =$$

$$=-\frac{1}{2(x-5)^2}-\frac{5}{3(x-5)^3}+C.$$

2 способ. Решение можно было оформить без замены переменных, преобразовав подынтегральное выражение:

$$\int\frac{xdx}{(x-5)^4}=\int\frac{(x-5)+5}{(x-5)^4}dx=\int\left(\frac{1}{(x-5)^3}+\frac{5}{(x-5)^4}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{(x-5)^3}+5\int\frac{dx}{(x-5)^4}=\int(x-5)^{-3}d(x-5)+5\int(x-5)^{-4}d(x-5)=$$

$$=\frac{(x-5)^{-2}}{-2}+5\frac{(x-5)^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{2(x-5)^2}-\frac{5}{3(x-5)^3}+C.\bullet$$

Пример 20.

$$\int\frac{dx}{\mathrm{e}^x+3}=\left|\begin{matrix} t=\mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\quad x=\ln t \\ dx=(\ln t)'\,dt=\frac{1}{t}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{1}{t(t+3)}dt=\frac{1}{3}\int\frac{3+t-t}{t\left(t+3\right)}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+3}=\frac{1}{3}\ln|t|-\frac{1}{3}\int\frac{d(t+3)}{t+3}=\frac{1}{3}\ln|t|-\frac{1}{3}\ln|t+3|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\mathrm{e}^x-\frac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^x+3)+C=\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^x+3)+C.\ \bullet$$

4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда поскольку $(uv)'=u'v+v'u,$ то

$$d(uv)=vdu+udv.$$

Проинтегрируем это равенство:

$$\int d(uv)=\int vdu+\int udv.$$

Учитывая, что $\int d(uv)=uv+C,$ получим формулу

$$\boxed{\int u\,dv=u\,v-\int v\,du,}$$

которая называется ***формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле***. Ее целесообразно применять, когда интеграл в правой части проще, чем интеграл в левой.

Замечание. Постоянную интегрирования в формуле не записывают, так как в правой части находится неопределенный интеграл, содержащий произвольную постоянную.

Практическое применение метода интегрирования по частям заключается в том, что подынтегральное выражение представляют в виде произведения функции u и дифференциала dv (последний обязательно содержит dx). При переходе к правой части формулы первый множитель дифференцируется, а второй интегрируется:

$$du = u'dx; \quad v = \int dv.$$

Разбиение подынтегрального выражения на множители осуществляется так, чтобы получить в правой части формулы более простой интеграл.

Метод интегрирования по частям удобно применять для вычисления интегралов следующих стандартных типов:

1) интегралы вида

$$\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\,dx, \ \int P_n(x)a^{kx}dx,$$

$$\int P_n(x)\cos kxdx, \int P_n(x)\sin kxdx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n; $k \in \mathbb{R}$ (здесь полагаем $\boxed{u = P_n(x)}$ и применяем формулу интегрирования по частям n раз);

2) интегралы вида

$$\int P_n(x)\ln kxdx,$$

$$\int P_n(x)\arccos kxdx, \ \int P_n(x)\arcsin kxdx,$$

$$\int P_n(x)\mathrm{arctg} kxdx, \ \int P_n(x)\mathrm{arcctg} kxdx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен; $k \in \mathbb{R}$ (здесь полагаем $\boxed{dv = P_n(x)dx}$);

3) интегралы вида

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bxdx, \ \int \mathrm{e}^{ax}\sin bxdx,$$

$$\int \cos(\ln x)dx, \ \int \sin(\ln x)dx,$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx,\ \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, применение к которым формулы интегрирования по частям приводит к уравнению, из которого можно выразить исходный интеграл (при нахождении первых четырех интегралов формула интегрирования по частям применяется *дважды*, причем в интегралах $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx dx$, $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx dx$ за u оба раза нужно взять функцию одного типа, т. е. либо оба раза e^{ax}, либо оба раза тригонометрическую функцию).

Пример 21.

$$\int x^2\sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2; & du = u'dx = (x^2)'dx = 2xdx \\ dv = \sin 2x dx; & v = \int dv = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2x dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x\cos 2x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos 2x dx; & v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. \bullet$$

Пример 22.

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{arctg}\,x; & du = u'dx = (\mathrm{arctg}\,x)'dx = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx; & v = \int dv = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C =$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+C.\bullet$$

Пример 23. Найдем $\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям дважды, принимая за u оба раза функцию одного типа, например, тригонометрическую.

$$\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x dx=\left|\begin{matrix} u=\cos 2x; & du=u'dx=-2\sin 2x dx \\ dv=\mathrm{e}^{-x}dx; & v=\int dv=\int \mathrm{e}^{-x}dx=-\mathrm{e}^{-x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x-\int(-\mathrm{e}^{-x})(-2\sin 2x)dx=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x-2\int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\sin 2x; & du=u'dx=2\cos 2x dx \\ dv=\mathrm{e}^{-x}dx; & v=\int dv=\int \mathrm{e}^{-x}dx=-\mathrm{e}^{-x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x-2\left(-\mathrm{e}^{-x}\sin 2x+2\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x dx\right)=$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x-4\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x dx.$$

Заметим, что в последнем выражении снова получили искомый интеграл. Обозначим его через $I=\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x dx.$ Имеем равенство:

$$I=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x-4I;$$

$$5I=2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x.$$

Отсюда можно выразить искомый интеграл:

$$\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x dx=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-x}\sin 2x-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+C.\bullet$$

Пример 24. Найдем $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, а затем преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{1-x^2}; & du=-\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx; & v=x\end{matrix}\right|=$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x \cdot (-x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \arcsin x.$$

В результате получили в правой части равенства исходный интеграл. Обозначим его через $I = \int \sqrt{1-x^2} dx.$ Имеем равенство:

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x;$$

$$2I = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

Отсюда получаем

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C. \bullet$$

Замечание. Помимо трех стандартных типов, существует много других интегралов, для которых метод интегрирования по частям весьма эффективен.

Упражнение 2. Применить формулу интегрирования по частям для нахождения интеграла $\int x\sqrt[3]{5x-3}dx.$

§ 3. Интегрирование рациональных дробей

Опр. 1. Рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. дробь вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, а $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Опр. 2. Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя *строго меньше* степени знаменателя ($n < m$); рациональная дробь называется ***неправильной***, если степень числителя *больше или равна* степени знаменателя ($n \geq m$).

Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого нужно числитель поделить уголком на знаменатель.

Пример 1. Выделим целую часть неправильной дроби $\dfrac{2x^4+3x^3-x^2+8x+1}{x^2+3x+2}$.

Решение. Разделим числитель на знаменатель уголком:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +\,3x^3 & -\,x^2 & +\,8x & +\,1 & x^2+3x+2 \\ \cline{6-6}
2x^4 & +\,6x^3 & +\,4x^2 & & & 2x^2-3x+4 \\ \cline{1-4}
 & -3x^3 & -\,5x^2 & +\,8x & +\,1 & \\
 & -3x^3 & -\,9x^2 & -\,6x & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & +\,14x & +\,1 & \\
 & & 4x^2 & +\,12x & +\,8 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & -\,7 &
\end{array}
$$

Процесс деления заканчивается, когда степень остатка становится *меньше* степени делителя. Таким образом,

$$\frac{2x^4+3x^3-x^2+8x+1}{x^2+3x+2}=2x^2-3x+4+\frac{2x-7}{x^2+3x+2}. \bullet$$

Опр. 3. ***Простейшими***, или ***элементарными***, рациональными дробями называются правильные дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; **II.** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k\in\mathbb{N}, k\geq 2)$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $(p^2-4q<0)$; **IV.** $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(p^2-4q<0;\ k\in\mathbb{N}, k\geq 2)$.

(Здесь A, a, M, N, p, q – действительные числа.)

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование простейших дробей I и II типов осуществляется с помощью замены $t=x-a$:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Интегралы от простейших дробей III типа, а также интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx, \quad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

берутся посредством выделения полного квадрата в знаменателе и замены $t = x + \frac{b}{2a}$.

Пример 2. Найдем $\int \frac{3x-1}{2x^2-8x+15}dx.$

Решение. Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат и сделаем замену:

$$\int \frac{3x-1}{2x^2-8x+15}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x-1}{x^2-4x+\frac{15}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x-1}{(x^2-2\cdot 2x+4)-4+\frac{15}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{3x-1}{(x-2)^2+\frac{7}{2}}dx = \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{3(t+2)-1}{t^2+\frac{7}{2}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{3t+5}{t^2+\frac{7}{2}}dt;$$

последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов:

$$= \frac{3}{2}\int \frac{tdt}{t^2+\frac{7}{2}} + \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{7}{2}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{7}{2}\right)}{t^2+\frac{7}{2}} + \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left(t^2+\frac{7}{2}\right) + \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left((x-2)^2+\frac{7}{2}\right) + \frac{5}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-2)}{\sqrt{7}} + C =$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left(x^2-4x+\frac{15}{2}\right)+\frac{5}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-2)}{\sqrt{7}}+C.\bullet$$

Интегралы от простейших дробей IV типа путем выделения полного квадрата в знаменателе и замены преобразуются к сумме двух интегралов:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}dx=\left|\begin{matrix} t=x+\frac{p}{2}; \quad x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}dt=M\int\frac{tdt}{\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}+\left(N-\frac{pM}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}.$$

Обозначим $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. Таким образом, интегрирование простейших дробей IV типа сводится к вычислению интегралов вида

$$I_0=\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}; \qquad I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Первый из них легко берется поднесением под знак дифференциала:

$$I_0=\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}+C=-\frac{1}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+C.$$

Нахождение интеграла I_k после преобразования и применения формулы интегрирования по частям сводится к нахождению интеграла I_{k-1} с меньшей степенью в знаменателе.

Рассмотрим это преобразование.

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}I_{k-1}-\frac{1}{a^2}\int t\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=t; & du=dt \\ dv=\dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^k} & v=\displaystyle\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{k-1}-\frac{1}{a^2}\left(-\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Таким образом, для интегралов I_k имеет место следующая рекуррентная формула

$$I_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Пример 3. Найдем $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Здесь $k=2, a^2=1$. Применяя полученную формулу, находим

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{x}{2\cdot(2-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C.$$

●

Представление правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей

Любую *правильную* рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (где степень числителя *строго меньше* степени знаменателя: $n<m$) можно представить в виде суммы простейших дробей, причем это представление определяется единственным образом.

Как следует из основной теоремы алгебры, любой многочлен степени m с *действительными* коэффициентами может быть разложен в произведение линейных и квадратичных множителей с *действительными* коэффициентами, т. е. представлен в виде

$$Q_m(x) = A(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \ldots (x^2+px+q)^r \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta, \ldots$ – различные действительные корни многочлена $Q_m(x)$, квадратные трехчлены $x^2+px+q, \ldots$ не имеют действительных корней, $k, l, \ldots, r, \ldots$ – натуральные числа, $k+l+\ldots+2r+\ldots=m.$

Пример 4. 1) $x^2-1=(x-1)(x+1);$

2) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ (здесь квадратный трехчлен не имеет действительных корней, $D<0$);

3) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ (здесь квадратный трехчлен не имеет действительных корней, $D<0$);

4) многочлен x^4+1 не имеет действительных корней, но может быть представлен в виде произведения двух квадратичных множителей с действительными коэффициентами:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$$

$$=(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$$

(квадратные трехчлены не имеют действительных корней, $D<0$).•

Упражнение 1. Разложить многочлен x^6+1 на квадратичные множители с действительными коэффициентами.

Т 1. Всякую *правильную* рациональную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей, причем это разложение определяется однозначно: если знаменатель дроби имеет вид (1), то дробь раскладывается в сумму простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+$$

$$+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+\cdots+ \tag{2}$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r}+\cdots,$$

где $A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ..., B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_r, N_r, ...$ – некоторые действительные числа – неизвестные коэффициенты, которые нужно определить.

Отметим, что в разложении (2) линейным множителям знаменателя соответствуют простейшие дроби I и II типов, а квадратичным множителям – дроби III и IV типов, причем число дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение (1).

Приведем примеры, поясняющие формулировку теоремы.

Пример 5. Запишем вид разложения на простейшие дроби:

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}+\dfrac{D}{(x-3)^3};$

2) $\dfrac{3x+5}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1};$

3) чтобы записать вид разложения на простейшие для дроби $\dfrac{2x+3}{(x^2+3x+2)(x^2+2x+3)}$, необходимо предварительно разложить знаменатель на множители, оставляя только тот квадратный трехчлен, дискриминант которого меньше 0:

$$\frac{2x+3}{(x^2+3x+2)(x^2+2x+3)}=\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)(x^2+2x+3)}=$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3};$$

4) при разложении дроби $\dfrac{8x^4}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)}$ разложим ее знаменатель на множители и сгруппируем одинаковые множители:

$$\frac{8x^4}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)}=$$

$$=\frac{8x^4}{(x-1)(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{8x^4}{(x-1)^4(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+$$

$$+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{(x-1)^4}+\frac{E}{x+1}+\frac{F}{(x+1)^2}+\frac{Gx+H}{x^2+x+1}+\frac{Ix+J}{x^2+1}.\bullet$$

При нахождении числовых значений неопределенных коэффициентов разложения (2) обычно используют ***метод неопределенных коэффициентов*** или ***метод частных значений***, иногда их комбинацию.

Для этого приводят правую часть равенства (2) к общему знаменателю $Q_m(x)$ (это наименьший общий знаменатель!) и получают равенство двух дробей: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{S(x)}{Q_m(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами. Так как знаменатели двух дробей равны, то равны и их числители: $P_n(x)=S(x)$.

Метод неопределенных коэффициентов (*метод сравнения коэффициентов*) основывается на том, что если два многочлена равны, то все их коэффициенты при одинаковых степенях переменной совпадают. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства $P_n(x)=S(x)$, получаем систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяются искомые коэффициенты.

Метод частных значений основывается на том, что если два многочлена равны, то совпадают их значения при всех значениях переменной. Поэтому можно определить значения коэффициентов, подставляя в равенство $P_n(x)=S(x)$ вместо переменной x конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно сначала вместо x подставляют корни знаменателя $Q_m(x)$, а потом любые другие значения).

Пример 6. Найдем разложение правильной рациональной дроби $\dfrac{x^2+1}{x^2(x^2-2x+3)}$ на сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов.

Решение. Знаменатель уже разложен на множители, дискриминант квадратного трехчлена $D<0$, поэтому запишем разложение дроби на простейшие с неизвестными (неопределенными) коэффициентами:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x^2-2x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3}.$$

Правую часть получившегося равенства приведем к (наименьшему!) общему знаменателю

$$\frac{x^2+1}{x^2(x^2-2x+3)}=\frac{Ax(x^2-2x+3)+B(x^2-2x+3)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2-2x+3)}.$$

Приравняем числители получившихся дробей с одинаковыми знаменателями и приведем подобные слагаемые:

$$Ax(x^2-2x+3)+B(x^2-2x+3)+(Cx+D)x^2=x^2+1;$$

$$Ax^3-2Ax^2+3Ax+Bx^2-2Bx+3B+Cx^3+Dx^2=x^2+1;$$

$$(A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(3A-2B)x+3B=0\cdot x^3+1\cdot x^2+0\cdot x+1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C, D:

$$\begin{array}{r|l} x^3: & \\ x^2: & \\ x: & \\ x^0: & \end{array}\left\{\begin{array}{l} A+C=0,\\ -2A+B+D=1,\\ 3A-2B=0,\\ 3B=1; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} C=-A,\\ D=1+2A-B,\\ A=\dfrac{2}{3}B,\\ B=\dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} C=-\dfrac{2}{9},\\ D=1+\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{9},\\ A=\dfrac{2}{9},\\ B=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Таким образом, разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+1}{x^2(x^2-2x+3)}=\frac{\frac{2}{9}}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x^2}+\frac{-\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}}{x^2-2x+3}=\frac{2}{9x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2x-10}{x^2-2x+3}.\bullet$$

Пример 7. Найдем разложение правильной рациональной дроби $\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}$ на сумму простейших дробей, используя метод подходящих (частных) значений.

Решение. Знаменатель дроби разложим на неприводимые множители:

$$x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1).$$

Запишем разложение с неопределенными коэффициентами этой правильной дроби на простейшие:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}.$$

Приведем правую часть получившегося равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}.$$

Приравняем числители получившихся дробей:

$$A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)=x^2+x-1.$$

Для определения коэффициентов A, B, C придаем неизвестной x частные значения, например, совпадающие с действительными корнями знаменателя дроби:

при $x=0$ получим $-2A=-1$, а значит, $A=\frac{1}{2}$;

при $x=2$ имеем $6B=5$, откуда $B=\frac{5}{6}$;

при $x=-1$ получим $3C=-1$, поэтому $C=-\frac{1}{3}$.

Таким образом,

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\frac{1}{2x}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}.\bullet$$

Замечание. Иногда разложение правильной дроби на простейшие можно «подобрать», преобразовав числитель дроби. Поскольку, как следует из теоремы 1, разложение определяется однозначно, то любой способ его получения приводит к одному и тому же результату.

Пример 8. Найдем разложение правильной рациональной дроби $\dfrac{1}{x^4+4x^2}$ на сумму простейших дробей.

Решение. Разложим знаменатель дроби на множители, домножим и разделим дробь на 4, в числителе прибавим и вычтем x^2, представим дробь в виде разности двух дробей:

$$\frac{1}{x^4+4x^2}=\frac{1}{x^2(x^2+4)}=\frac{1}{4}\frac{4}{x^2(x^2+4)}=\frac{1}{4}\frac{4+x^2-x^2}{x^2(x^2+4)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4+x^2}{x^2(x^2+4)}-\frac{x^2}{x^2(x^2+4)}\right)=\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+4}.\bullet$$

Алгоритм интегрирования рациональных дробей

Сформулируем общее правило интегрирования рациональных дробей в виде следующего алгоритма.

1. Если рациональная дробь является неправильной, представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, разделив числитель на знаменатель уголком.
2. Разложить знаменатель полученной правильной рациональной дроби на неприводимые множители (линейные и квадратичные, не имеющие действительных корней).
3. Записать с неопределенными коэффициентами разложение полученной правильной рациональной функции на сумму простейших дробей.
4. Найти неопределенные коэффициенты.
5. Проинтегрировать рациональную функцию, представленную в виде суммы многочлена и простейших рациональных дробей по стандартным правилам интегрирования.

Пример 9. Найдем интеграл $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 12}{x^3 + 4x} dx.$

Решение. Дробь неправильная, так как степень числителя 4, больше степени знаменателя 3. Разделим числитель на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -2x^3 & +4x^2 & & -12 & x^3+4x \\ \cline{6-6} x^4 & & +4x^2 & & & x-2 \\ \cline{1-3} & -2x^3 & & & -12 & \\ & -2x^3 & & -8x & & \\ \cline{2-5} & & & 8x & -12 & \end{array}$$

Процесс деления заканчивается, когда степень остатка становится *меньше* степени делителя. Таким образом,

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 12}{x^3 + 4x} = x - 2 + \frac{8x - 12}{x^3 + 4x}.$$

Разложим полученную правильную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{8x - 12}{x^3 + 4x} = \frac{8x - 12}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4};$$

$$\frac{8x - 12}{x(x^2 + 4)} = \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 4)}.$$

Приравняем числители правой и левой частей:

$$A(x^2 + 4) + (Bx + C)x = 8x - 12;$$

$$(A + B)x^2 + Cx + 4A = 8x - 12.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной и найдем значения коэффициентов:

$$\begin{array}{r|l} x^2: & \\ x: & \\ x^0: & \end{array} \begin{cases} A + B = 0, \\ C = 8, \\ 4A = -12; \end{cases} \quad \begin{cases} B = -A = 3, \\ C = 8, \\ A = -3. \end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{8x-12}{x(x^2+4)}=-\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x+8}{x^2+4}$.

Возвращаемся к вычислению интеграла, записав вместо исходной дроби сумму многочлена и простейших дробей с найденными коэффициентами:

$$\int\frac{x^4-2x^3+4x^2-12}{x^3+4x}dx=\int\left(x-2-\frac{3}{x}+\frac{3x+8}{x^2+4}\right)dx=$$

$$=\int xdx-2\int dx-3\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{xdx}{x^2+4}+8\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-3\ln|x|+\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C. \bullet$$

§ 4. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интегралов от тригонометрических функций.

Интегралы вида $\int\sin ax\cos bxdx$, $\int\cos ax\cos bxdx$, $\int\sin ax\sin bxdx$

Для вычисления таких интегралов используют формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 1.

$$\int\sin x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\sin(-2x)+\sin 4x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\sin 2xdx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\sin 4xdx=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x+C. \bullet$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ($m, n \in \mathbb{Z}, m, n \geq 0$)

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) замена $t = \cos x$, если $m = 2k+1$ (m – нечетное);

2) замена $t = \sin x$, если $n = 2l+1$ (n – нечетное);

3) если $m = 2k, n = 2l$ (обе степени m и n четные), то применяются ***формулы понижения степени***

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};} \qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.}$$

Пример 2. Найдем интеграл $\int \sin^4 x dx$.

Решение. Поскольку степень четная, необходимо применить формулу понижения степени.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \bullet$$

Пример 3. Найдем интеграл $\int \sin^5 x dx$.

Решение. Поскольку степень синуса нечетная, интеграл берется подстановкой $t = \cos x$. Так как $dt = d(\cos x) = -\sin x dx$, поднесем множитель $\sin x$ под знак дифференциала:

$$\int \sin^5 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx = \left|\sin x dx = -d(\cos x)\right| =$$

$$= -\int \left(\sin^2 x\right)^2 d(\cos x) = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 d(\cos x) = \left|t = \cos x\right| =$$

$$= -\int (1-t^2)^2 dt = -\int (1-2t^2+t^4) dt = -\int dt + 2\int t^2 dt - \int t^4 dt =$$

$$= -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C. \bullet$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Опр. 1. ***Рациональной функцией*** $R(u; v; w; ...)$ нескольких переменных $u, v, w, ...$ называется функция, которая получается из переменных $u, v, w, ...$ и действительных чисел с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления).

Рассмотрим интеграл

$$\int R(\sin x; \cos x)dx$$

от функции, рационально зависящей от тригонометрических.

Утв. 1. ***Универсальная тригонометрическая подстановка***

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

всегда сводит интеграл вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$ к интегралу от рациональной функции.

Доказательство. Действительно, выражая x, получим

$$x = 2\operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Функции $\sin x$ и $\cos x$ рационально выражаются через $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \ \triangleleft$$

Таким образом,

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.}$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}; \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{1+t^2+2t}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2+2t} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} + C = C - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}. \bullet$$

Замечание. Универсальная тригонометрическая подстановка всегда позволяет найти интеграл, но в силу своей общности зачастую приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Поэтому ее применяют только в тех случаях, когда не подходят более простые частные подстановки.

Частные тригонометрические подстановки

Более простые тригонометрические подстановки могут применяться, если подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x)$ обладает специальными свойствами четности или нечетности:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\sin x$, т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то используется подстановка $\boxed{t = \cos x;}$

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\cos x$, т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то используется подстановка $\boxed{t = \sin x;}$

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ является *четной по совокупности аргументов*, т. е. $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то используется подстановка $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$ или $\boxed{t = \operatorname{ctg} x.}$

Во многих случаях подстановку можно осуществить поднесением множителя под знак дифференциала, не вводя новых обозначений.

Пример 5. Найдем интеграл $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^6 x}$.

Решение. Подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}$ является нечетной относительно $\cos x$:

$$R(\sin x; -\cos x) = \frac{(-\cos x)^3}{\sin^6 x} = -\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} = -R(\sin x; \cos x),$$

поэтому следует применить подстановку $t = \sin x$.

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^6 x} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sin^6 x} = \int \frac{\cos^2 x d(\sin x)}{\sin^6 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x) d(\sin x)}{\sin^6 x} =$$

$$= |t = \sin x| = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^6} = \int \left(\frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^4} \right) dt = -\frac{1}{5t^5} + \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C. \bullet$$

Пример 6. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. 1 способ. Подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x) = \frac{1}{\sin x}$ является нечетной относительно $\sin x$:

$$R(-\sin x; \cos x) = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sin x} = -R(\sin x; \cos x),$$

поэтому сделаем замену $t = \cos x$. Для этого выделим в числителе $dt = -\sin x dx$:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\int \frac{-\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

2 способ.

Замечание. В интегралах $\int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x}$ удобно применять универсальную тригонометрическую подстановку.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}; \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \bullet$$

Пример 7. Найдем интеграл $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x}$.

Решение. Подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x) = \dfrac{1}{\sin^4 x}$ является четной по совокупности аргументов, поскольку

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^4} = \frac{1}{\sin^4 x} = R(\sin x; \cos x),$$

поэтому рекомендуется подстановка $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$. Так как $d(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ и в знаменателе подынтегральной функции присутствует $\sin^4 x$, сделаем замену $t = \operatorname{ctg} x$.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d(\operatorname{ctg} x) = |t = \operatorname{ctg} x| = -\int (1 + t^2) dt = -t - \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C. \bullet$$

Пример 8. Найдем интеграл $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$ является четной по совокупности аргументов, можно сделать подстановку $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$. Выберем вариант $t = \operatorname{tg} x$ и выделим в подынтегральном выражении множитель $d(\operatorname{tg} x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, вынеся в знаменателе за скобку $\cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 4} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C. \bullet$$

Пример 9. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{3 + \sin x \cos x}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x) = \frac{1}{3 + \sin x \cos x}$ является четной по совокупности аргументов, сделаем подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Выделим в подынтегральном выражении множитель $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$, вынеся в знаменателе за скобку $\cos^2 x$. Предварительно домножим 3 в знаменателе на *тригонометрическую единицу* $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x \cos x} = \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x \cos x} =$$

$$= \int \frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x + 3 + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| t = \operatorname{tg} x;\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \right| = \int \frac{dt}{3t^2 + t + 3} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{3}t + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + 2\cdot\frac{1}{6}t + \frac{1}{36} + 1 - \frac{1}{36}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{36}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(t + \frac{1}{6}\right)}{\left(t + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{6}{\sqrt{35}}\left(t + \frac{1}{6}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{6t + 1}{\sqrt{35}} + C = \frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{6\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{35}} + C. \bullet$$

Замечание. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ берутся подстановкой $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 10. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$.

Решение. Сделаем подстановку $t = \operatorname{tg} x$, выразим $x = \operatorname{arctg} t$ и найдем $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(1+\mathrm{t})(1+t^2)}.$$

Получили интеграл от правильной рациональной дроби, разложим ее на простейшие и определим коэффициенты:

$$\frac{1}{(1+\mathrm{t})(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2)+(Bt+C)(1+t)}{(1+\mathrm{t})(1+t^2)};$$

$$A + At^2 + Bt + Bt^2 + C + Ct = 1;$$

$$\begin{array}{l} t^2: \\ t: \\ t^0: \end{array}\left|\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=0, \\ A+C=1; \end{cases}\right. \quad \begin{cases} A=-B, \\ C=-B, \\ -2B=1; \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2}, \\ C=\frac{1}{2}, \\ B=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(1+\mathrm{t})(1+t^2)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\mathrm{t}} - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg} x| - \frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2}x + C. \bullet$$

Замечание. Во многих случаях удобно вместо введения тригонометрических подстановок применить некоторые особые приемы, например, использовать *тригонометрическую единицу* $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Пример 11. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

Решение. Теоретически подынтегральная функция $R(\sin x;\cos x)=\dfrac{1}{\sin^3 x\cos x}$ позволяет сделать любую из частных тригонометрических подстановок (наиболее выгодной оказывается $t=\operatorname{ctg} x$). Используем в числителе *тригонометрическую единицу* $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ и представим интеграл в виде суммы двух интегралов, что позволит уменьшить степени в знаменателе:

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}dx=\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=$$

$$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}dx+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx-\frac{1}{2\sin^2 x}=$$

$$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}-\frac{1}{2\sin^2 x}=$$

$$=-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C=\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C. \bullet$$

Пример 12. Найдем интеграл $\int\dfrac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Теоретически следует сделать подстановку $t=\operatorname{tg} x$ или $t=\operatorname{ctg} x$ (лучше $t=\operatorname{tg} x$). Однако удобнее будет понизить степень в числителе следующим образом:

$$\int\frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-2\int dx+\int\cos^2 x dx=\operatorname{tg} x-2x+\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\operatorname{tg} x-2x+\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x dx=\operatorname{tg} x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\bullet$$

§ 5. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций

I. Интегралы вида $\int R(\mathrm{e}^x)dx$, т. е. интегралы от функций, *рационально* зависящих от e^x, вычисляются подстановкой $\boxed{t=\mathrm{e}^x.}$ Говорят, что эта подстановка позволяет *рационализировать* интеграл, т. е. свести его к интегралу от рациональной дроби, для которой существует алгоритм интегрирования.

Пример 1. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x+1} = \left| \begin{matrix} t = \mathrm{e}^x; \quad x = \ln t \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{1+t-t}{t(t+1)} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + C = x - \ln(\mathrm{e}^x + 1) + C. \bullet$$

II. Интегралы вида $\int R\left(x; x^{\frac{m_1}{n_1}}; x^{\frac{m_2}{n_2}}; \ldots \right) dx$, где $m_1, m_2, \ldots$ – целые, $n_1, n_2, \ldots$ – натуральные числа, рационализируются подстановкой $\boxed{x = t^s,}$ где s – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots$ (или, иначе говоря, s – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$).

Аналогично в более общем случае: интегралы вида

$$\int R\left(x; (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}; (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}; \ldots \right) dx$$

берутся подстановкой $\boxed{ax + b = t^s,}$ а интегралы вида

$$\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}; \ldots \right) dx$$

берутся подстановкой $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,}$ где s – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots$. (Здесь $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $m_1, m_2, \ldots \in \mathbb{Z}$; $n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}$.)

Пример 2. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет вид $R\left(x^{\frac{2}{3}}; x^{\frac{1}{2}}\right)$, наименьший общий знаменатель показателей степеней равен 6. Значит, следует сделать замену $x = t^6$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6; \quad dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x} \\ \sqrt[3]{x^2} = (t^6)^{\frac{2}{3}} = t^4 \\ \sqrt{x} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = 6\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$

$$= 6\int \left(\frac{t^2 - 1}{t-1} + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C =$$

$$= 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C. \bullet$$

Пример 3. Найдем интеграл $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$.

Решение.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} 3x + 1 = t^3 \\ x = \dfrac{t^3 - 1}{3} \\ dx = t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(\dfrac{t^3 - 1}{3} + 1 \right) t^2 dt}{t} = \frac{1}{3} \int (t^3 + 2) t dt =$$

$$= \frac{1}{3} \int (t^4 + 2t) dt = \frac{t^5}{15} + \frac{t^2}{3} + C = \frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C. \bullet$$

Упражнение 1. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{(1-x)^2}$.

Пример 4. Найдем интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

Решение. Этот интеграл может быть вычислен достаточно просто без замены, если преобразовать подкоренное выражение, домножив числитель и знаменатель на $1 - x$:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int\sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.\bullet$$

III. Тригонометрические подстановки позволяют свести интегралы, содержащие корень из квадратного трехчлена, к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических.

Интегралы вида	берутся подстановкой
$\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x=a\sin t$ или $x=a\cos t$
$\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x=a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$
$\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x=\frac{a}{\cos t}$ или $x=\frac{a}{\sin t}$

Пример 5. Найдем интеграл $\int\sqrt{1-x^2}dx.$

Решение. Заметим, что тригонометрические подстановки выбираются так, чтобы можно было извлечь корень из квадратного трехчлена. В данном случае следует сделать замену $x=\sin t$, откуда $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t.$ (Здесь корень из квадрата раскрываем со знаком «+», поскольку взяв $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, получим все значения $x=\sin t\in[-1;1]$ и $\cos t\geq 0.$)

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\left|\begin{array}{l}x=\sin t;\,dx=\cos tdt\\ \sqrt{1-x^2}=\cos t\end{array}\right|=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2tdt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

При переходе к исходной переменной учли, что если $x=\sin t$, то $t=\arcsin x$, и преобразовали по формуле синуса двойного угла: $\sin 2t=2\sin t\cos t=2x\sqrt{1-x^2}.\bullet$

Упражнение 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

IV. Интегралы вида $\int R\left(x; \sqrt{ax+b}; \sqrt{cx+d}\right)dx,$ где $a, b, c, d \in \mathbb{R},$ сводятся к случаю **III** заменой $t = \sqrt{ax+b}$.

V. Интегралы вида $\int R\left(x; \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$ где $a, b, c \in \mathbb{R},$ сводятся к случаю **III** путем выделения полного квадрата и замены $t = x + \frac{b}{2a}$.

VI. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \frac{dx}{(mx+n)^2\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $a, b, c, m, n \in \mathbb{R},$ удобно вычислять заменой $mx + n = \frac{1}{t}$.

Упражнение 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ указанным способом, сравнить с результатом упражнения 2.

VII. Интегралы вида $\int x^m (ax^n + b)^p\,dx,$ где $a, b \in \mathbb{R};$ $m, n, p \in \mathbb{Q},$ называются ***интегралами от дифференциального бинома***. В 1768 г. Л. Эйлер указал три случая интегрируемости дифференциального бинома:

1) если p – целое число, то используется подстановка $x = t^s$, где s – наименьший общий знаменатель дробей *m* и *n* (см. случай **II**);

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то применяется подстановка $ax^n + b = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то используется замена $a + \frac{b}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$.

Упражнение 4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

Упражнение 5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+1)^3}}$ двумя способами.

Понятие о неберущихся интегралах

Т 1 [Коши]. Всякая непрерывная на промежутке $(a;b)$ функция $f(x)$ имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$.

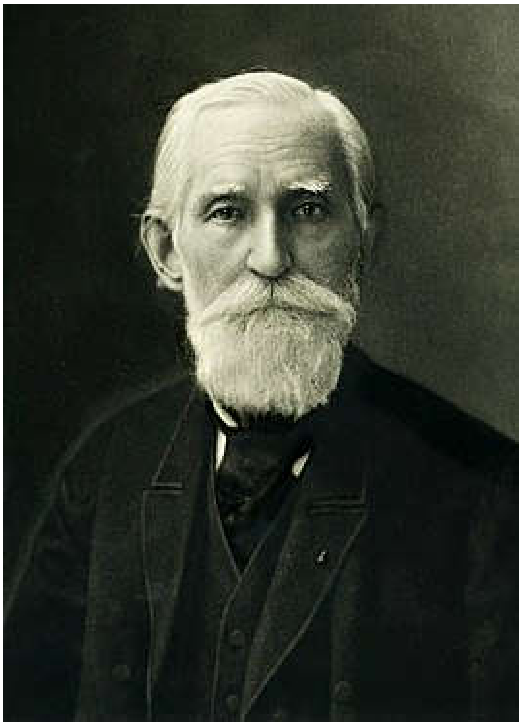
Однако не всегда первообразная $F(x)$ является *элементарной* функцией.

Опр. 1. Интеграл $\int f(x)dx$ называется ***неберущимся***, или ***не выражающимся в элементарных функциях***, если первообразная для функции $f(x)$ не является элементарной функцией.

Как было показано в § 3, интеграл от любой рациональной дроби выражается через элементарные функции. В § 4 и § 5 были приведены примеры подстановок, позволяющих свести к интегралам от рациональных функций интегралы определенных типов, что дает еще примеры «берущихся» интегралов.

Приведем примеры неберущихся интегралов.

В 1853 г. П. Л. Чебышев доказал, что интеграл от дифференциального бинома $\int x^m(ax^n+b)^p dx$, за исключением указанных Л. Эйлером трех случаев (число p – целое, или $\frac{m+1}{n}$ – целое, или v$\frac{m+1}{n}+p$ – целое) не выражается в элементарных функциях.



Пафну́тий Льво́вич Чебышёв
(1821–1894)

русский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук и еще 24 академий мира. Величайший, наряду с Н. И. Лобачевским, русский математик XIX в.

Получил фундаментальные результаты в теории чисел, теории вероятностей, математическом анализе, прикладной математике. Чебышева отличало стремление к увязке проблем математики с вопросами естествознания и техники и к соединению абстрактной теории с практикой. Он основал математическую теорию синтеза механизмов и разработал ряд практически важных концепций механизмов.

Докторская диссертация Чебышева «Теория сравнений», напечатанная в 1849 г., стала первой российской монографией по теории чисел. Этот труд несколько раз переиздавался, был переведен на немецкий и итальянский языки.

Известно также, что интегралы вида $\int x^{\alpha} e^{\pm x}\,dx$, $\int x^{\alpha}\cos x\,dx$, $\int x^{\alpha}\sin x\,dx$ берутся только если α – натуральное число или $\alpha = 0$.

Другие примеры неберущихся интегралов:

– $\int e^{-x^2}\,dx$ – ***интеграл Пуассона*** (играет важную роль в теории вероятностей);

– $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$ – ***интегралы Френеля*** (используется в физике);

– $\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}\,x$ – ***интегральный логарифм*** (используется в теории чисел);

– $\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{si}\,x$; $\int \frac{\cos x}{x}dx = \mathrm{ci}\,x$ – ***интегральные синус и косинус***;

– $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ – ***эллиптический интеграл I рода***;

– $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$ – ***эллиптический интеграл II рода***.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Симео́н Дени́ Пуассо́н
(фр. *Siméon Denis Poisson*)
(1781–1840)

французский математик, механик и физик.

В 1800 г., не достигнув еще возраста 20 лет, опубликовал две статьи, которые сделали его известным в ученом мире. В одной из них было дано новое, простое доказательство теоремы Безу.

В 1820 г. Пуассону было поручено высшее наблюдение над преподаванием математики во всех коллежах Франции.

При Наполеоне был произведен в бароны, впоследствии стал пэром Франции.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Огюсте́н Жан Френе́ль
(фр. *Augustin-Jean Fresnel*)
(1788–1827)

французский физик, один из создателей волновой теории света.

Основные работы по физической оптике. Почти всю жизнь провел в трудных материальных условиях, работал в одиночестве. Не имея лаборатории и средств на покупку оборудования, ухитрялся мастерить приборы из простейших доступных приспособлений и делал с их помощью высокоточные измерения. Умер в возрасте 39 лет от туберкулеза.

Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещенный на первом этаже Эйфелевой башни.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Пример 6. Покажем, что интеграл Пуассона $\int e^{-x^2}\,dx$ является неберущимся, преобразовав его к интегралу вида $\int x^{\alpha} e^{\pm x}\,dx$.

Решение. Сделав замену $t = x^2$, получим:

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2;\ x = \sqrt{t} \\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right| = \int \mathrm{e}^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt.$$

Последний интеграл неберущийся, так как число $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ не является натуральным.•