РЯДЫ ФУРЬЕ

1. **Разложение в ряд Фурье периодических функций.**
2. **Разложение в ряд Фурье четных и нечетных периодических функций.**
3. **Разложение в ряд Фурье непериодических функций.**
4. **Приближение заданной функции с помощью тригонометрического многочлена.**
5. **Обобщенные ряды Фурье.**
6. **Комплексная форма ряда Фурье.**
7. **Интеграл Фурье. Понятие о непрерывном и дискретном преобразованиях Фурье.**

1. Разложение в ряд Фурье периодических функций

Рядом Фурье для функции $f(x)$ ***с периодом*** $T=2l$ называется ряд

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}+b_n \sin\frac{\pi n x}{l},} \qquad (1)$$

где

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;}$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx;} \qquad (2)$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.}$$

Тригонометрический ряд Фурье (1) представляет собой разложение функции по системе функций

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, ..., \qquad (3)$$

которая обладает следующими свойствами:

1) все функции системы (3) являются *периодическими* с периодом $T=2l$;

2) система функций (3) обладает свойством *ортогональности* на отрезке $[-l; l]$ в следующем смысле: интеграл по отрезку $[-l; l]$ от произведения двух любых различных функций системы (3) равен нулю:

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0 \ (n \neq 0); \quad \int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0;$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi kx}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0; \quad \int_{-l}^{l} \sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0 \ (k \neq n);$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0.$$

Отметим также, что для периодической с периодом T функции $f(x)$ имеет место также следующее свойство: интеграл от $f(x)$ по отрезку длины T не зависит от выбора начальной точки отрезка:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.$$

Тригонометрические ряды Фурье используются при изучении периодических процессов: колебательных и вращательных движений различных деталей машин и приборов, акустических и электромагнитных колебаний, периодического движения небесных тел и т. д.

Формально ряд Фурье можно записать для любой функции $f(x)$, если она интегрируема на $[-l; l]$. Но тогда возникают вопросы:

1) сходится ли полученный ряд;

2) можно ли поставить знак равенства между функцией и ее рядом Фурье?

Ответ на эти вопросы дает теорема Дирихле.

Теорема Дирихле (достаточное условие сходимости ряда Фурье). Пусть функция $f(x)$ имеет период $T = 2l$ и удовлетворяет условиям:

1) кусочно-непрерывна на $[-l; l]$, т. е. непрерывна на этом отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва 1-го рода;

2) кусочно-монотонна на $[-l; l]$, т. е. монотонна на этом отрезке или отрезок можно разбить на конечное число интервалов, на которых она монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и его сумма $S(x)$ равна:

1) $S(x_0) = f(x_0)$, если в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ непрерывна;

2) $S(x_0) = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$, если $x = x_0$ – точка разрыва функции $f(x)$;

3) $S(l) = \dfrac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}$.

Иллюстрация теоремы Дирихле дана на рис. 1.

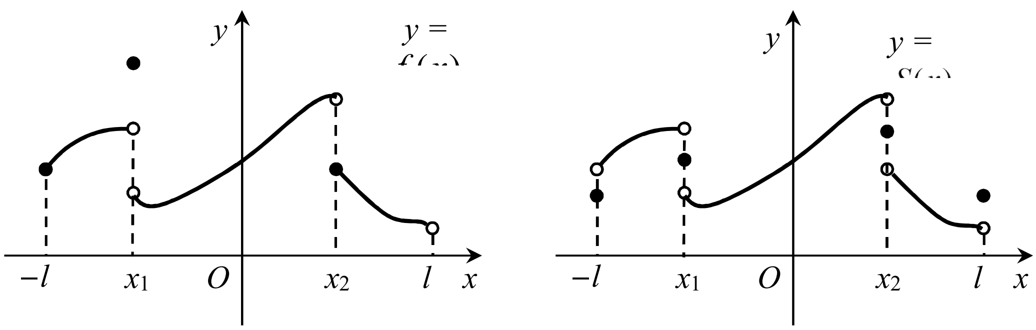


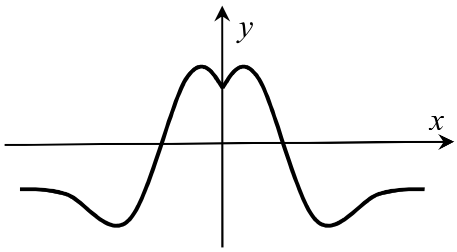
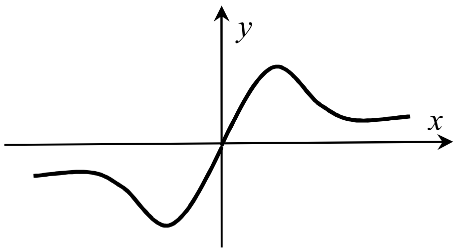
Рис. 1. График функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье

Замечание. Большинство функций, которые встречаются в технических приложениях, удовлетворяют условиям теоремы Дирихле.

2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных периодических функций

Напомним основные свойства четных и нечетных функций.

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если ее область определения симметрична относительно 0 и $f(-x) = f(x)$ для	Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если ее область определения симметрична относительно 0 и $f(-x) = -f(x)$ для

всех x из области определения функции.	всех x из области определения функции.
График четной функции симметричен относительно Oy. 	График нечетной функции симметричен относительно начала координат. 
Интеграл по симметричному относительно 0 промежутку:	
$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx,$ если $f(x)$ – четная функция.	$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0,$ если $f(x)$ – нечетная функция.

Если $f(x)$ – *четная*, периодическая с периодом $T = 2l$ функция, то ее *ряд Фурье содержит только косинусы* и имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Если $f(x)$ – *нечетная*, периодическая с периодом $T = 2l$ функция, то она разлагается в *ряд по синусам*:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

3. Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Непериодическая функция $f(x)$, заданная на всей числовой прямой, не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x.

Однако на любом конечном промежутке $(a;b)$ непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье, если она удовлетворяет условиям теоремы Дирихле на этом промежутке. Для этого строят ряд Фурье для *периодической* функции $f_1(x)$, которая совпадает с $f(x)$ на промежутке $(a;b)$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1 случай. Если функция $f(x)$ задана на симметричном относительно 0 промежутке $(-l;l)$, то $f_1(x)$ – периодическая с периодом $T=2l$ функция, совпадающая с $f(x)$ на промежутке $(-l;l)$ (рис. 2).

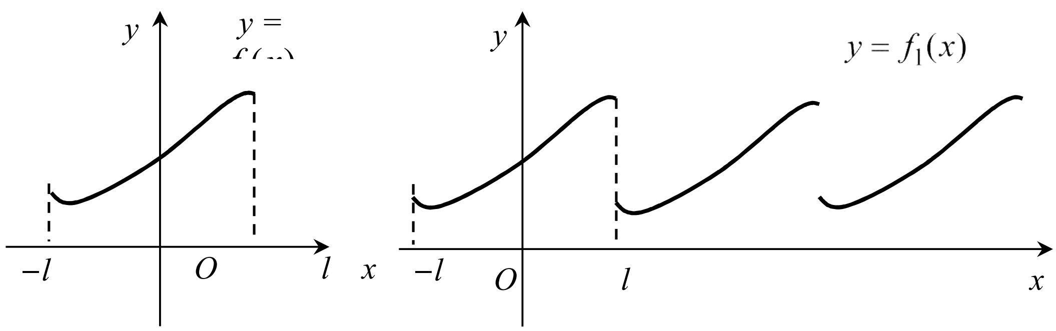


Рис. 2. График функции $f(x)$, заданной на $(-l;l)$, и периодической с периодом $T=2l$ функции $f_1(x)$

2 случай. Если функция $f(x)$ задана на произвольном промежутке $(a;a+2l)$ длины $2l$ (рис. 3), то при вычислении коэффициентов ряда Фурье используют следующее свойство: определенный интеграл от периодической функции с периодом T по любому отрезку длины T имеет одно и то же значение:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

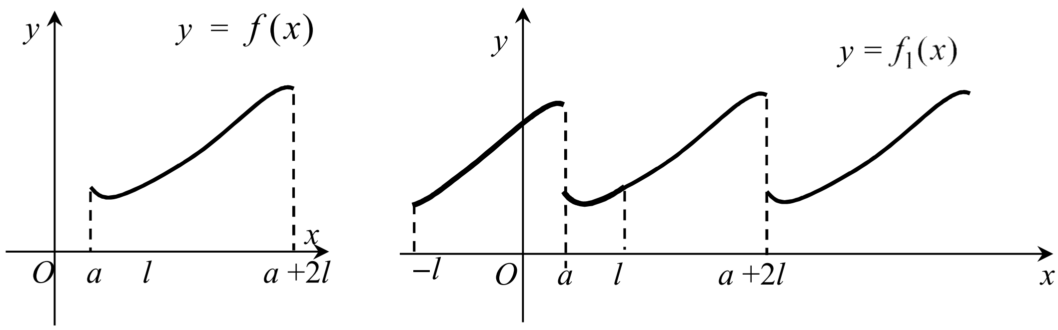


Рис. 3. График функции $f(x)$, заданной на $(a; a+2l)$, и периодической с периодом $T = 2l$ функции $f_1(x)$

Поэтому коэффициенты ряда Фурье (1) вычисляют в этом случае по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

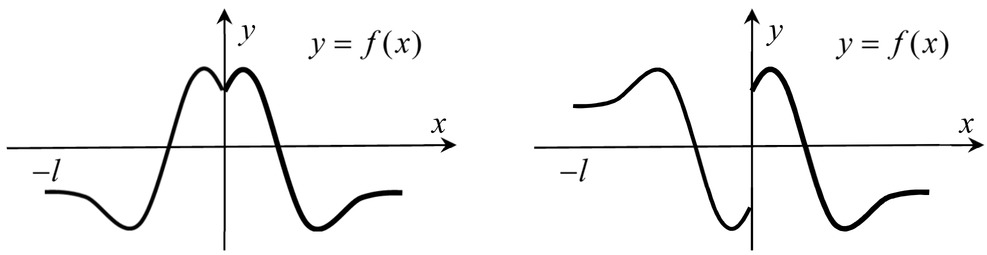
3 случай. Если функция $f(x)$ задана на промежутке $(0; l)$, то можно:

1) продолжить ее до периодической с периодом $T = l$ функции (см. случай 2);

2) доопределить функцию произвольным образом на промежутке $(-l; 0)$ и продолжить до периодической с периодом $T = 2l$ функции.

Как правило, функция $f(x)$ доопределяется на промежутке $(-l; 0)$ так, чтобы получилась либо четная (рис. 4а), либо нечетная (рис. 4б) функция. Если функцию $f(x)$ доопределяют четным образом, то она раскладывается в ряд Фурье, который содержит только косинусы; если функцию $f(x)$ доопределяют нечетным образом, то она раскладывается в ряд Фурье, содержащий только синусы.

Оба эти ряда (по косинусам и по синусам) сходятся к $f(x)$ на $(0;l)$ и имеют противоположные по знаку суммы на $(-l;0)$.



а б

Рис. 4. Доопределение функции $f(x)$, заданной на $(0;l)$:
а) четным; б) нечетным образом

Замечание. Если $f(x)$ задана на промежутке $(0;l)$, то выбор вида ее разложения в ряд Фурье (ряд по косинусам или ряд по синусам) определяется свойствами функции на концах промежутка, т. е. в точках $x=0$ и $x=l$.

Если функция в этих точках не равна нулю, то ее раскладывают в ряд по косинусам, так как для разложения по синусам приходится заменять $f(x)$ разрывной функцией.

Если функция $f(x)$ на концах промежутка равна нулю, ее следует раскладывать в ряд синусов, поскольку при нечетном продолжении получается непрерывная функция $f_1(x)$ с непрерывной производной, а при четном продолжении – непрерывная функция с разрывной производной, т. е. ряд по синусам быстрее сходится к $f(x)$, чем ряд по косинусам.

4. Приближение заданной функции с помощью тригонометрического многочлена

Представление функции бесконечным рядом (Фурье, Тейлора и т. д.) имеет на практике тот смысл, что n-я частичная сумма ряда является приближенным выражением разлагаемой функции, причем это приближение можно сделать сколь угодно точным, выбирая достаточно большое n (достаточно большое число членов ряда).

Будем оценивать погрешность приближения функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ с помощью ***среднего квадратичного уклонения***

$$\Delta_2(\varphi)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b(\varphi(x)-f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема (минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье). Если $f(x)$ – периодическая с периодом $T=2l$ функция, то среди всех тригонометрических полиномов (многочленов) порядка n

$$\varphi_n(x)=A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k\cos\frac{k\pi x}{l}+B_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

наименьшее среднее квадратичное уклонение от функции $f(x)$ имеет тот многочлен, коэффициенты которого есть коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Можно показать, что это уклонение удовлетворяет соотношению

$$\Delta_2^2=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geq 0.$$

Отсюда следует ***неравенство Бесселя***

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

Более того, можно показать, что справедливо ***равенство Парсеваля***

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

Следовательно, из необходимого условия сходимости ряда вытекает, что при условии, что $\int_{-l}^{l}f^2(x)dx<\infty$, имеют место соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0;$ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.$

5. Обобщенные ряды Фурье

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...$ называется ***ортогональной*** на отрезке $[a;b]$, если интеграл по отрезку $[a;b]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен 0:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Основными примерами ортогональных систем функций являются тригонометрические системы вида

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, ...$$

Примером ортогональной нетригонометрической системы является система многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Выпишем несколько первых членов этой системы:

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!}(x^2-1)^0 = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 \cdot 1!}(x^2-1)' = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\left((x^2-1)^2\right)'' = \frac{1}{2}(3x^2-1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!}\left((x^2-1)^3\right)''' = \frac{1}{4}(5x^3-3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 \cdot 4!}\left((x^2-1)^4\right)^{IV} = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

Можно показать, что система многочленов Лежандра ортогональна на $\left[-1;1\right]$.

Обобщенным рядом Фурье функции $f(x)$ ***по ортогональной на отрезке*** $[a;b]$ ***системе функций*** $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...$ называется ряд вида

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

в котором коэффициенты вычисляются по формулам.

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}. \qquad (4)$$

Теорема. Среди всех обобщенных многочленов вида

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

наименьшее среднее квадратичное уклонение от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет тот многочлен, коэффициенты которого есть коэффициенты обобщенного ряда Фурье, т. е. находятся по формуле (4).

6. Комплексная форма ряда Фурье

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}}, \text{ где } c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}dx.$$

Комплексная форма записи ряда Фурье получается после подстановки в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$$

выражений для косинуса и синуса через экспоненту:

$$\cos\frac{\pi nx}{l} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}} + \mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}\right); \quad \sin\frac{\pi nx}{l} = \frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}} - \mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}}\right).$$

7. Интеграл Фурье. Понятие о непрерывном и дискретном преобразованиях Фурье

Пусть $f(x)$ – непериодическая функция, заданная на $(-\infty;\infty)$, но удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле на любом конечном промежутке и пусть $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ (функция абсолютно интегрируема на $(-\infty;\infty)$). Тогда имеет место формула

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i\omega x}\,d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt, \qquad (5)$$

которая называется ***формулой Фурье***, а интеграл в правой части равенства – ***интегралом Фурье***.

Замечание. Формула Фурье справедлива во всех точках непрерывности функции $f(x)$; в точках разрыва 1-го рода вместо $f(x)$ в левой части равенства должно быть $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Введя функцию

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt, \qquad (6)$$

формулу Фурье можно записать (для всех точек непрерывности функции $f(x)$) в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega x}\,d\omega. \qquad (7)$$

Функция $F(\omega)$ называется ***преобразованием Фурье*** для функции $f(x)$; говорят, что формула (6) задает ***прямое***, а формула (7) – ***обратное преобразование Фурье***.

Преобразование Фурье закладывает основы многих методов, применяющихся в области цифровой обработки сигналов. Преобразование Фурье позволяет сопоставить сигналу, заданному во временной области, его эквивалентное представление в частотной области, а обратное преобразование Фурье позволяет по частотной характеристике сигнала определить соответствующий сигнал во временной области.

Интегральное (непрерывное) преобразование Фурье используется в теоретических исследованиях, когда известно аналитическое задание функции $f(x)$. На практике обычно имеют дело с дискретными данными, т. е. функция $f(x)$ задается набором ее значений $f_0, f_1, ..., f_{N-1}$ на некоторой сетке (обычно равномерной). В этом случае приходится считать, что за пределами этой сетки функция равна 0, и заменять интеграл интегральной суммой.

В случае равномерной сетки ***дискретное преобразование Фурье*** задается формулой:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \mathrm{e}^{-2\pi i \cdot \frac{kn}{N}}, \quad 0 \le n \le N-1,$$

и сводится к умножению вектора значений функции $f(x)$ на матрицу с элементами $\mathrm{e}^{-2\pi i \cdot \frac{kn}{N}}$, что требует $O(N^2)$ арифметических операций.

Однако можно существенно сократить число операций, используя *метод быстрого преобразования Фурье*. Если размерность вектора исходных данных $N = n_1 n_2 \cdot ... \cdot n_k$, то этот метод выполняет дискретное преобразование Фурье за $O((n_1 + n_2 + ... + n_k)N)$ операций и при этом повышает точность вычислений.