Раздел 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия и примеры функций нескольких переменных

Сформулируем определение функции нескольких переменных (ФНП).

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n, Z \subseteq \mathbb{R}$.

Замечание. Напомним, что $\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; ...; x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}$ обозначает множество упорядоченных комбинаций n действительных чисел; при этом $\mathbb{R}^2$ можно интерпретировать как множество точек плоскости, а $\mathbb{R}^3$ – как множество точек пространства.

Опр. 1. Если каждому набору значений n переменных величин $(x_1; x_2; ...; x_n)$ из некоторого множества X поставлено в соответствие определенное число $z \in Z$, то говорят, что на множестве X задана ***функция*** n ***переменных*** $z = f(x_1; x_2; ...; x_n)$; переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называют ***независимыми переменными*** (***аргументами***), z называют ***зависимой переменной*** (***функцией***), множество X называют ***областью определения***, а множество Z – ***областью значений*** функции.

Пример 1. 1) Функция $z = \pi x_1^2 x_2$ выражает зависимость объема цилиндра от радиуса основания x_1 и высоты x_2.

2) Функция $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ выражает, например, зависимость длины вектора от значений его координат.

3) Важный пример дает линейная функция n переменных: $z = a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n$.

В частности, при $n = 2$ получим линейную функцию двух переменных $z = a + b_1x + b_2y$, которая может быть изображена графически плоскостью в пространстве (рис. 1). Областью определения этой функции является $\mathbb{R}^2$, а областью значений $\mathbb{R}$.

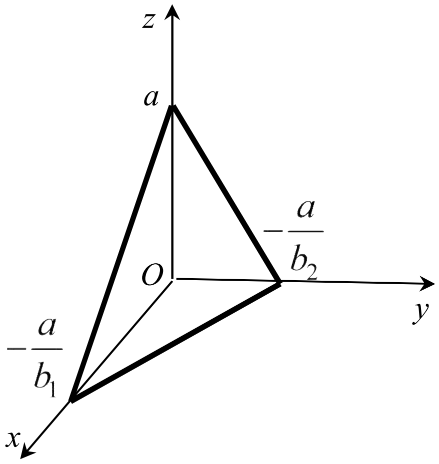

Рис. 1. График функции $z = a + b_1 x + b_2 y$

Вообще, функции двух переменных допускают графическое изображение, поскольку задают некоторую поверхность в пространстве.

4) Для функции $z = x^2 + y^2$ область определения $X = \mathbb{R}^2$, область значений $Z = [0; +\infty)$. Данная функция задает эллиптический параболоид (рис. 2).

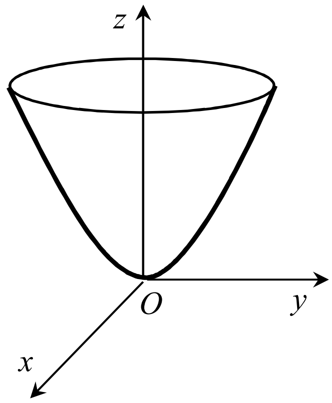

Рис. 2. График функции $z = x^2 + y^2$

5) Рассмотрим функцию $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Область определения задается условием $x^2 + y^2 \le 1$ (это круг радиуса 1 с центром в начале координат); область значений $Z=[0;1]$. Для построения графика функции избавимся от корня:

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Последнее уравнение задает в пространстве сферу радиуса 1 с центром в начале координат. Учитывая область значений исходной функций, видим, что уравнение $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ задает верхнюю половину сферы (рис. 3).

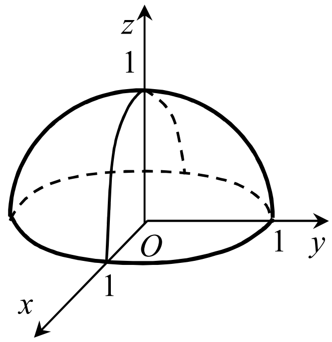

Рис. 3. График функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

●

Мы рассмотрим основные понятия ФНП на примере функций двух переменных (Ф2П), поскольку на случай функций 3-х и более переменных все результаты могут быть обобщены без существенных измерений.

Опр. 2. ***Линией уровня*** Ф2П $z=f(x;y)$ называется множество точек плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение c, т. е. $f(x;y)=c$.

Пример 2. Линии уровня линейной функции $z=x+2y$ задаются уравнениями $x+2y=c$. Это параллельные прямые. При $c=1$ прямая $x+2y=1$ пересекает ось Ox при $x=1$, а ось Oy при $y=0{,}5$; при $c=2$ прямая $x+2y=2$ пересекает ось Ox при $x=2$, а ось Oy при $y=1$. При $c=0$ прямая $x+2y=0$ проходит через начало координат (см. рис. 4).

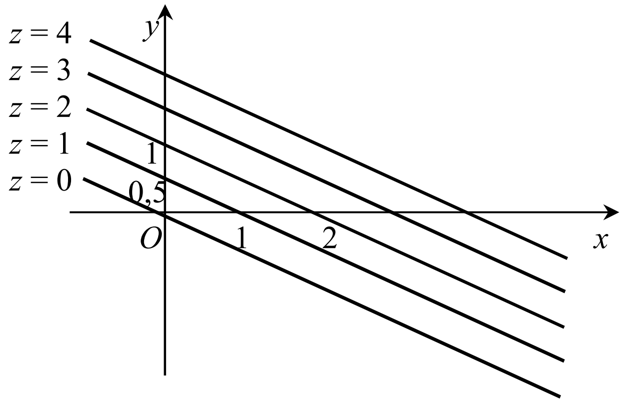

Рис. 4. Линии уровня функции $z = x + 2y$

•

Пример 3. Линиями уровня функции $z = x^2 + y^2$ являются концентрические окружности $x^2 + y^2 = c$. При $c = 1; 2; 3; 4$ получаем окружности радиуса $1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 2$ соответственно (рис. 5). Значение $c = 0$ функция принимает только в одной точке – начале координат.

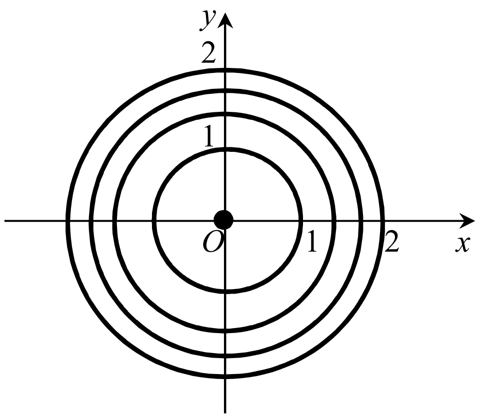

Рис. 5. Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$

•

Пример 4. Линиями уровня функции $z = \sqrt{xy}$ при $c > 0$ являются гиперболы $xy = c^2$, а при $c = 0$ оси координат $x = 0$ и $y = 0$ (см. рис. 6).

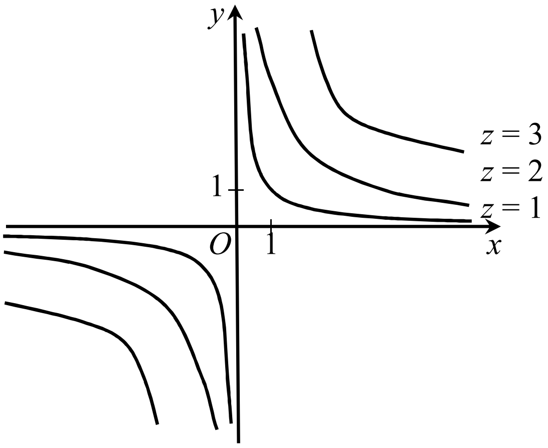

Рис. 6. Линии уровня функции $z=\sqrt{xy}$

•

Линии уровня помогают без построения трехмерного чертежа понять, как выглядит поверхность $z = f(x; y)$. Примеры линий уровня можно увидеть на географических картах, где изображены линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря постоянна.

Аналогично для функций трех переменных вводится понятие поверхности уровня.

Опр. 3. ***Поверхностью уровня*** функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ называется множество точек пространства, в которых функция принимает одно и то же значение c, т. е. $f(x; y; z) = c$.

§ 2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Опр. 1. δ-***окрестностью*** $O_\delta(M_0)$ ***точки*** $M_0(x_0; y_0)$ называется множество точек $M(x; y)$ плоскости, находящихся на расстоянии менее δ от точки M_0, т. е.

$$|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

Другими словами, δ-окрестность $O_\delta(M_0)$ точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ (рис. 7).

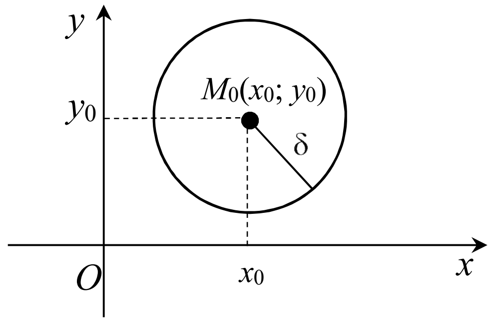

Рис. 7. δ-окрестность $O_\delta(M_0)$

Опр. 2. ***Проколотой*** δ***-окрестностью*** $\overset{\circ}{O}_\delta(M_0)$ ***точки*** M_0 называется δ-окрестность точки M_0 без самой этой точки.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, быть может, без самой этой точки.

Опр. 3. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x; y)$ ***при*** $x \to x_0, y \to y_0$ (или ***в точке*** $(x_0; y_0)$): $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x; y) = A$, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности $O_\varepsilon(A)$ точки A найдется такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{O}_\delta(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$, что для всех точек $(x; y) \in \overset{\circ}{O}_\delta(M_0)$ имеет место $f(x; y) \in O_\varepsilon(A)$.

Сформулируем также определение предела «на языке последовательностей».

Рассмотрим последовательность точек: $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), ..., M_n(x_n; y_n), ...$

Опр. 4. Говорят, что ***последовательность точек*** $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), ..., M_n(x_n; y_n), ...$ ***сходится к точке*** $M_0(x_0; y_0)$, если

$$\lim_{n\to\infty} |M_0M_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0.$$

Опр. 5. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x; y)$ ***в точке*** $M_0(x_0; y_0)$: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x; y) = A$, если для любой сходящейся к

$M_0(x_0; y_0)$ последовательности точек $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), ..., M_n(x_n; y_n), ...,$ отличных от $M_0(x_0; y_0)$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1; y_1), f(x_2; y_2), ..., f(x_n; y_n), ...$ сходится к числу A.

Утв. 1. Определение 3 и определение 5 эквивалентны.

Основные теоремы о пределах (основные свойства пределов), сформулированные для функций одной переменной, переносятся на случай ФНП.

Тем не менее, вычисление пределов Ф2П – задача гораздо более сложная, чем для функций одной переменной.

Пример 1. Вычислим $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

Решение. С помощью замены $t = x^2 + y^2$ решение задачи сводится к вычислению предела функции одной переменной, поскольку $x \to 0, y \to 0$ тогда и только тогда, когда $t \to 0$. Используя эквивалентные бесконечно малые $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$, получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1. \bullet$$

Пример 2. Рассмотрим предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Если сначала определить предел данной функции при $x \to 0$, а затем найти предел при $y \to 0$, вычислим *повторный предел*

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1.$$

Другой *повторный предел* равен

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1.$$

Понятие повторного предела отличается от введенного в определениях 3 и 5 понятия *двойного предела*, который не зависит от пути, по которому точка $M(x; y)$ приближается к $M_0(x_0; y_0)$.

Покажем, что двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует. Для этого используем определение предела на языке последовательностей (определение 5).

1) Рассмотрим последовательность точек $M_n\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\to}(0;0)$. В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{2\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}=0.$$

2) Рассмотрим последовательность точек $M'_n\left(\dfrac{1}{n};0\right)\underset{n\to\infty}{\to}(0;0)$. В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} f(M'_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2-0^2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}=1.$$

Таким образом, для двух разных сходящихся к $(0;0)$ последовательностей точек соответствующие последовательности значений функции сходятся к разным числам 0 и 1. Следовательно, в соответствии с определением 5 предела на языке последовательностей, двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует. •

Упражнение. Показать, что не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, но существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Опр. 6. Функция $z = f(x;y)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to x_0$, $y \to y_0$ (***в точке*** $(x_0;y_0)$), если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = 0.$

Опр. 7. Функция $z = f(x;y)$ называется ***непрерывной в точке*** $(x_0;y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$

Опр. 8. Если функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0)$ (возможно, проколотой), но условие непрерывности $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$ не выполняется, то точка $(x_0;y_0)$ называется ***точкой разрыва*** функции $z = f(x;y)$.

В отличие от функций одной переменной, для Ф2П точки разрыва могут быть изолированными, а могут образовывать линии разрыва.

Пример 3. 1) Функция $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ имеет точку разрыва (0; 0).

2) Для функции $z = \dfrac{1}{x - y}$ прямая $y = x$ является линией разрыва.●

Для функций трех переменных могут возникать также поверхности разрыва.

Пример 4. Для функции $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$ сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ является поверхностью разрыва.●

§ 3. Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ (включая саму эту точку). Поскольку x и y – независимые переменные, то они могут изменяться или оставаться неизменными независимо друг от друга. Давая некоторое приращение одной из переменных при сохранении значения другой, получим *частное приращение* функции.

Опр. 1. ***Частное приращение функции*** $z = f(x; y)$ ***по переменной*** x в точке $M_0(x_0; y_0)$, отвечающее приращению аргумента Δx, определяется равенством

$$\boxed{\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0).}$$

Частное приращение функции $z = f(x; y)$ ***по переменной*** y в точке $M_0(x_0; y_0)$, отвечающее приращению аргумента Δy, определяется равенством

$$\boxed{\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).}$$

Опр. 2. ***Полным приращением функции*** $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, отвечающим приращениям аргументов Δx и Δy, называется

$$\boxed{\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).}$$

Замечание. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$

Понятия частных и полного приращения Ф2П проиллюстрированы на рис. 8.

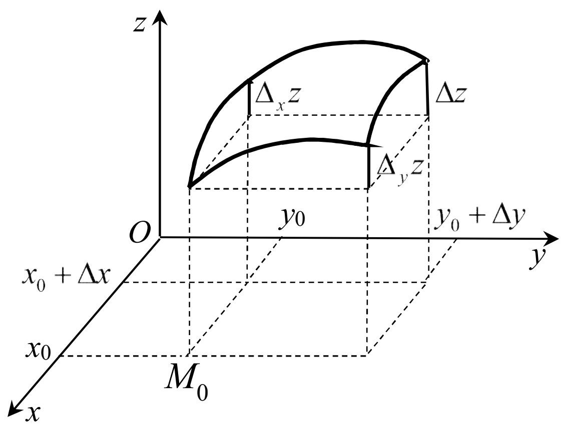

Рис. 8. Частные и полное приращения функции двух переменных

Опр. 3. ***Частной производной функции*** $z = f(x; y)$ ***по некоторой переменной*** называется предел (если он существует и конечен) отношения частного приращения функции по этой переменной к приращению этой переменной, когда последнее стремится к 0:

$$\boxed{z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x};}$$

$$\boxed{z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}.}$$

Частную производную функции $z = f(x; y)$ по переменной x обозначают $z'_x, f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$. Аналогично, частная производная по y обозначается $z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Из определения частной производной следует, что *для нахождения частной производной z по x следует продифференцировать функцию z по переменной x, считая y постоянным.*

Пример 1. Найдем частные производные функции $z = x^2 + \sin(x + y^2)$.

Решение. Продифференцируем функцию z по x, считая y постоянным:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos(x + y^2).$$

Дифференцируя по y при фиксированном x, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos(x + y^2). \bullet$$

Пример 2. Найдем частные производные функции $z = x^y$.

Решение. При фиксированном y имеем степенную функцию переменной x, а при фиксированном x получим показательную функцию от y. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x. \bullet$$

Аналогично физическому смыслу производной функции одной переменной, частная производная ФНП характеризует скорость изменения функции при изменении соответствующей переменной.

Геометрический смысл частных производных

Фиксируя на поверхности $z = f(x; y)$ одну из переменных, например, $y = y_0$, получаем некоторую линию – сечение поверхности плоскостью $y = y_0$.

Геометрический смысл частных производных аналогичен геометрическому смыслу производной функции одной переменной: *значение частной производной функции* $z = f(x; y)$ *по переменной x в точке* $M_0(x_0; y_0)$ *равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке* $K_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ *к линии пересечения поверхности* $z = f(x; y)$ *и плоскости* $y = y_0$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0; y_0) = \operatorname{tg}\alpha.}$$

Аналогично, $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0; y_0) = \operatorname{tg}\beta$ (см. рис. 9).

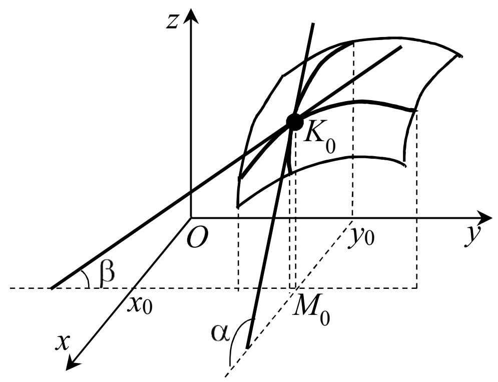

Рис. 9. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Дифференцируемость функции двух переменных

Опр. 4. Функция $z = f(x; y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $(x_0; y_0)$, если ее *полное* приращение в этой точке представимо в виде

$$\boxed{\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y)\Delta y,}$$

где A и B – некоторые числа, зависящие только от точки $(x_0; y_0)$, но не зависящие от Δx и Δy, а $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x; \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Т 1 [необходимое условие дифференцируемости]. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно.

Т 2 [необходимое условие дифференцируемости]. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то в этой точке существуют частные производные, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0; y_0) = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0; y_0) = B.$$

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f(x; y) = \begin{cases} 0 & \text{на осях координат,} \\ 1 & \text{в остальных точках плоскости.} \end{cases}$$

Найдем ее частные производные в точке $(0; 0)$:

$$f'_x(0; 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x; 0) - f(0; 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0; 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0; \Delta y) - f(0; 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Однако функция $f(x; y)$ не является непрерывной в точке $(0; 0)$, а следовательно, не является дифференцируемой в этой точке.•

Т 3 [достаточное условие дифференцируемости]. Если функция $z = f(x; y)$ в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$ имеет частные производные, и эти частные производные непрерывны в самой точке $(x_0; y_0)$, то функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$.

Дифференциал функции двух переменных

Напомним, что функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, если ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y)\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x; \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x; \Delta y) = 0.$

Опр. 5. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то главная, линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения функции называется ***полным дифференциалом*** этой функции:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Замечание. Для дифференцируемой функции $\Delta z \approx dz$ при достаточно малых значениях Δx и Δy.

Так как для независимых переменных $\Delta x = dx, \Delta y = dy,$ то

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.}$$

Опр. 6. Выражения $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx, d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ называются ***частными дифференциалами.***

Замечание. $dz = d_x z + d_y z,$ но $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$

Геометрический смысл дифференциала

С геометрической точки зрения, производная функции одной переменной равна тангенсу угла наклона касательной, а дифференциал – приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в данной точке.

Частная производная Ф2П геометрически равна тангенсу угла наклона касательной к линии, которая получается в сечении поверхности $z = f(x; y)$ соответствующей вертикальной плоскостью.

Если к поверхности $z = f(x; y)$ провести в точке $(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$, *касательную плоскость*, то эта плоскость будет содержать все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0;\, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;\, y_0)(y - y_0).$$

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал функции $z = f(x;\, y)$ в точке $(x_0;\, y_0)$, отвечающий приращениям аргументов Δx и Δy, равен приращению аппликаты касательной плоскости, проведенной к поверхности в этой точке.

Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ называют ***частными производными первого порядка***. Так как частные производные первого порядка являются функциями двух переменных, то они также могут иметь частные производные, которые называются ***частными производными второго порядка***:

$$z = z(x;\, y)\left[\begin{array}{l} \to \quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x \quad \left[\begin{array}{l} \to \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \\ \to \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} \end{array}\right. \\ \\ \to \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y \quad \left[\begin{array}{l} \to \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} \\ \to \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

При этом частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, взятые по различным переменным, называются ***смешанными производными***.

Аналогично определяются производные третьего и более высоких порядков, причем частные производные высшего порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными.

Пример 4. Найдем все частные производные 2-го порядка для функции $z = x^2 + \sin(x + y^2)$.

Решение. Поскольку $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos(x + y^2)$ (см. пример 1), то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2x + \cos(x + y^2)\right)'_x = 2 - \sin(x + y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2x + \cos(x + y^2)\right)'_y = -2y\sin(x + y^2).$$

Дифференцируя $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(x + y^2)$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2y\cos(x + y^2)\right)'_x = -2y\sin(x + y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2y\cos(x + y^2)\right)'_y = 2\cos(x + y^2) - 4y^2\sin(x + y^2). \bullet$$

Пример 5. Найдем все частные производные 2-го порядка для функции $z = x^y$.

Решение. Поскольку $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, (см. пример 2), то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(yx^{y-1}\right)'_x = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(yx^{y-1}\right)'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x.$$

Дифференцируя $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(x^y \ln x\right)'_x = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x^y \ln x\right)'_y = x^y \ln^2 x. \bullet$$

Заметим, что в обоих примерах $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Т 4. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся только порядком дифференцирования по различным переменным, равны между собой, в частности: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, или $z''_{yx} = z''_{xy}$.

Пример 6. Найдем $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z = \cos xy$.

Решение. Найдем последовательно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin xy \cdot (xy)'_x = -y\sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-y\sin xy\right)'_y = -\sin xy - xy\cos xy;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left(-\sin xy - xy\cos xy\right)'_y = -2x\cos xy + x^2 y\sin xy. \bullet$$

Дифференциалы высших порядков

Полный дифференциал ФНП называют также ***дифференциалом первого порядка.***

Опр. 7. ***Дифференциалом второго порядка*** называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2 z = d(dz)$.

Аналогично, ***дифференциалом n-го порядка*** называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные, x и y – независимые переменные (заметим, что dx и dy не зависят от изменения x и y). Вычислим дифференциал второго порядка

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогичный результат имеет место для дифференциалов высших порядков. Например,

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Символически можно записать, что $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$

Можно показать, что так же, как в случае функций одной переменной, дифференциал первого порядка ФНП обладает свойством инвариантности формы (т. е. форма записи дифференциала первого порядка не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других переменных), а дифференциалы 2-го и более высоких порядков не обладают этим свойством.

§ 4. Дифференцирование сложных и неявных функций нескольких переменных

Правило дифференцирования сложной функции

1. Случай одной независимой переменной. Пусть $z = z(x; y)$ – дифференцируемая функция двух переменных x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. В этом случае функция $z = z(x(t); y(t))$ является *сложной функцией одной независимой переменной* t, переменные x и y называются *промежуточными аргументами*.

Т 1. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, а функция $z = z(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, то сложная функция $z = z(x(t); y(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

Доказательство. Чтобы доказать, что функция $z = z(x(t); y(t))$ дифференцируема в точке t_0, нужно показать, что существует

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Дадим независимой переменной t приращение Δt. Тогда переменные x и y получат приращения Δx и Δy, а функция z – приращение Δz соответственно. Так как функция $z = z(x; y)$ дифференцируема, то

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y)\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x; \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x; \Delta y) = 0.$

Если $\Delta t \to 0,$ то в силу того, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы, а следовательно, непрерывны, $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$ Поэтому, переходя в равенстве

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x; \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x; \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

к пределу при $\Delta t \to 0,$ получим

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \triangleleft$$

Следствие 1. Если $z = z(x; y)$ – дифференцируемая функция двух переменных x и y, причем x – независимая переменная, а $y = y(x)$ – дифференцируемая функция, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Замечание. В этом случае производную $\dfrac{dz}{dx}$ называют *полной производной z по x* в отличие от частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Пример 1. Найдем производную $\dfrac{dz}{dt}$, если

$$z = \frac{1}{\cos t}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t + \operatorname{tg}^4 t} + \mathrm{e}^{\frac{2}{\cos t}}.$$

Решение. Обозначим $x = \mathrm{tg}^2 t,\ y = \dfrac{1}{\cos t}$ и воспользуемся формулой (1). Найдем частные производные функции $z = y\sqrt{1 + x + x^2} + \mathrm{e}^{2y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(y\sqrt{1 + x + x^2} + \mathrm{e}^{2y}\right)'_x = y\frac{1 + 2x}{2\sqrt{1 + x + x^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(y\sqrt{1 + x + x^2} + \mathrm{e}^{2y}\right)'_y = \sqrt{1 + x + x^2} + 2\mathrm{e}^{2y}.$$

Учитывая, что $\dfrac{dx}{dt} = (\mathrm{tg}^2 t)' = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,t}{\cos^2 t} = \dfrac{2\sin t}{\cos^3 t};\ \dfrac{dy}{dt} = \left(\dfrac{1}{\cos t}\right)' = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$, по формуле (1) получим полную производную

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = y\frac{1 + 2x}{2\sqrt{1 + x + x^2}}\frac{2\sin t}{\cos^3 t} + (\sqrt{1 + x + x^2} + 2\mathrm{e}^{2y})\frac{\sin t}{\cos^2 t}.$$

Подставим в получившееся выражение $x = \mathrm{tg}^2 t,\ y = \dfrac{1}{\cos t}$, получим окончательный ответ:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1 + 2\,\mathrm{tg}^2 t}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t + \mathrm{tg}^4 t}}\frac{\sin t}{\cos^4 t} + \left(\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t + \mathrm{tg}^4 t} + 2\mathrm{e}^{\frac{2}{\cos t}}\right)\frac{\sin t}{\cos^2 t}. \bullet$$

Пример 2. Найдем полную производную $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = 4x^2y^5,\ y = \arcsin x^3$.

Решение. Используем формулу (2). Найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(4x^2y^5\right)'_x = 8xy^5; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(4x^2y^5\right)'_y = 20x^2y^4;$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\arcsin x^3\right)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}}.$$

Тогда в силу (2) полная производная равна

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=8xy^5+20x^2y^4\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}=8xy^5+\frac{60x^4y^4}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Подставляя $y=\arcsin x^3$, получим

$$\frac{dz}{dx}=8x\arcsin^5 x^3+\frac{60x^4\arcsin^4 x^3}{\sqrt{1-x^6}}.\bullet$$

2. Случай нескольких независимых переменных.

Следствие 2. Если $z=z(x;\,y)$ – дифференцируемая функция двух переменных x и y, а $x=x(u;\,v)$, $y=y(u;\,v)$ – дифференцируемые функции двух независимых переменных u и v, то

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3)$$

Формулы (1), (2), (3) и аналогичные им записываются в соответствии со следующим правилом.

Правило дифференцирования сложной ФНП: *производная сложной функции по независимой переменной равна сумме произведений частных производных по промежуточным аргументам на производные этих аргументов по независимой переменной.*

Пример 3. Найдем частные производные сложной функции $z=u\ln v$, где $u=3x-y,\, v=x^2+y^2$.

Решение. Поскольку $z=z(u;\,v);\ u=u(x;\,y);\, v=v(x;\,y)$, то по правилу дифференцирования сложной функции запишем формулы для частных производных функции z по независимым переменным x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Вычислим вспомогательные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(u\ln v\right)'_u=\ln v;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\left(u\ln v\right)'_v=\frac{u}{v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(3x-y\right)'_x=3;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\left(x^2+y^2\right)'_x=2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(3x-y\right)'_y=-1;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\left(x^2+y^2\right)'_y=2y.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3\ln v+2x\frac{u}{v};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\ln v+2y\frac{u}{v},$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3\ln(x^2+y^2)+\frac{2x(3x-y)}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\ln(x^2+y^2)+\frac{2y(3x-y)}{x^2+y^2}.\bullet$$

Производная неявной функции

Т 2. Пусть функция $z=z(x;\,y)$ задана неявно уравнением $F(x;\,y;\,z)=0$ и функция $F(x;\,y;\,z)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, причем $F'_z(x;\,y;\,z)\neq 0.$ Тогда

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.}$$

Доказательство. Используя правило дифференцирования сложной функции, продифференцируем уравнение $F(x;\,y;\,z)=0$ по переменной x, помня, что x и y – независимые переменные, а $z=z(x;\,y)$ – функция:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Bigg/\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Аналогично, дифференцируя по y, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Bigg/\frac{\partial F}{\partial z}.\ \triangleleft$$

Пример 4. Найдем частные производные функции $z=z(x;\,y)$, заданной уравнением $z=\mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{z}+x.$

Решение. Обозначим $F(x;\,y;\,z)=\mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{z}+x-z$ и найдем частные производные этой функции:

$$F'_x=\left(\mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{z}+x-z\right)'_x=y\,\mathrm{e}^{xy}+1;$$

$$F'_y = \left(e^{xy} + e^z + x - z\right)'_y = x\,e^{xy};$$

$$F'_z = \left(e^{xy} + e^z + x - z\right)'_z = e^z - 1.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y\,e^{xy}+1}{e^z-1}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x\,e^{xy}}{e^z-1}. \bullet$$

Замечание. Производную функции одной переменной $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x;\, y) = 0$, можно найти по аналогичной формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Пример 5. Найдем $\dfrac{dy}{dx}$, если $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Решение. Обозначим $F(x;\, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ и найдем частные производные этой функции:

$$F'_x = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)'_x = \frac{2x}{a^2}; \qquad F'_y = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)'_y = \frac{2y}{b^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{a^2}\frac{b^2}{2y} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}. \bullet$$

§ 5. Производная по направлению и градиент

Частные производные характеризуют скорость изменения функции при изменении только одной переменной, т. е. при движении вдоль координатных осей. Для характеристики скорости изменения функции в направлении заданного вектора $\vec{l}$ вводится понятие производной по направлению.

Опр. 1. ***Производной функции*** $z = f(x;\, y)$ ***в точке*** $M_0(x_0;\, y_0)$ ***по направлению вектора*** $\vec{l} = l_x\vec{i} + l_y\vec{j}$ называется предел, если он существует и конечен, отношения приращения функции в данном направлении к величине перемещения при условии, что величина перемещения стремится к 0:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l},}$$

где $\Delta l = \left|\overline{M_0M}\right|$, $M(x_0 + \Delta x;\, y_0 + \Delta y)$, $\overline{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{l}$, $\Delta_l z = f(x_0 + \Delta x;\, y_0 + \Delta y) - f(x_0;\, y_0)$ (см. рис. 10).

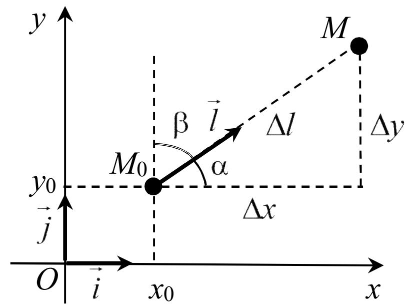

Рис. 10. К определению производной по направлению

Выведем формулу для вычисления этой производной.

Направление вектора на плоскости полностью характеризуется углами α и β, которые вектор образует с осями координат, причем если $\vec{l} = l_x\vec{i} + l_y\vec{j}$, то

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}};\quad \cos\beta = \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}.$$

Для точек $M_0(x_0;\, y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x;\, y_0 + \Delta y)$, таких, что $\overline{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{l}$, получим (см. рис. 10):

$$\Delta l = \left|\overline{M_0M}\right|;\qquad \Delta x = \Delta l \cos\alpha;\qquad \Delta y = \Delta l \cos\beta.$$

Так как функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y)\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x; \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x; \Delta y) = 0.$ Поэтому

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta l \cos\beta + \alpha(\Delta x; \Delta y)\Delta l \cos\alpha + \beta(\Delta x; \Delta y)\Delta l \cos\beta;$$

$$\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \alpha(\Delta x; \Delta y)\cos\alpha + \beta(\Delta x; \Delta y)\cos\beta.$$

Если $\Delta l \to 0,$ то $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0,$ поэтому, переходя к пределу при $\Delta l \to 0,$ получим формулу

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.}$$

Аналогично, производная функции $u = u(x; y; z)$ трех переменных по направлению вектора $\vec{l} = l_x\vec{i} + l_y\vec{j} + l_z\vec{k}$ равна

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,}$$

где $\cos\alpha = \dfrac{l_x}{|\vec{l}|}; \cos\beta = \dfrac{l_y}{|\vec{l}|}; \cos\gamma = \dfrac{l_z}{|\vec{l}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$; $|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$ – длина вектора $\vec{l}$.

Очевидно, частные производные являются производными по направлениям координатных осей.

Пример 1. Найдем производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M_0(1; -2; -1)$ по направлению вектора $\vec{l} = \{2; 3; -6\}$.

Решение. Найдем частные производные и их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(xy^2z^3\right)'_x=y^2z^3;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=(-2)^2\cdot(-1)^3=-4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(xy^2z^3\right)'_y=2xyz^3;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=2\cdot 1\cdot(-2)\cdot(-1)^3=4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(xy^2z^3\right)'_z=3xy^2z^2;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=3\cdot 1\cdot(-2)^2\cdot(-1)^2=12.$$

Найдем длину и направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:

$$\left|\vec{l}\right|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=7;\qquad \cos\alpha=\frac{2}{7};\quad \cos\beta=\frac{3}{7};\quad \cos\gamma=-\frac{6}{7}.$$

Следовательно, производная по направлению равна

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=-4\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{3}{7}+12\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{-8+12-72}{7}=-\frac{68}{7}. \bullet$$

Производная по направлению определяет скорость изменения функции в данном направлении. Если $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)<0,$ то функция в этом направлении убывает, если $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)>0,$ то возрастает, при этом $\left|\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)\right|$ – мгновенная скорость изменения функции в заданном направлении в точке M_0. Для того чтобы охарактеризовать направление, в котором функция возрастает быстрее всего, вводится понятие градиента.

Опр. 2. ***Градиентом*** функции $u=u(x;y;z)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным функции:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.}$$

Соответственно, для функции $z=f(x;y)$ двух переменных градиент – это вектор $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}\,z}=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.}$

Основные свойства градиента.

1. Производная по направлению вектора $\vec{l}$ равна *скалярному произведению* градиента и единичного вектора этого направления:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{\mathrm{grad}\, u} \cdot \vec{e}_l,$$

где $\vec{e}_l \uparrow\uparrow \vec{l}, \left|\vec{e}_l\right| = 1.$

Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{\mathrm{grad}\, u} \cdot \vec{e}_l = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right| \left|\vec{e}_l\right| \cos\varphi = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right| \cos\varphi,$$

где $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}; \vec{l}})$ – угол между векторами $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}$ и $\vec{l}$, то несложно видеть, что производная по направлению принимает наибольшее значение при $\cos\varphi = 1$, т. е. если берется в направлении градиента.

2. Градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции.

3. Производная в направлении градиента равна модулю градиента: $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\right|$, если $\vec{l} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}.$

Упражнение. Доказать свойство 3.

4. Градиент в каждой точке направлен перпендикулярно поверхности (линии) уровня, проходящей через эту точку.

Пример 2. Построим линии уровня функции $z = x^2 + y^2$ и градиент в точках $(1; 0), (0; 1), (1; 1), (-1; 1).$

Решение. Линиями уровня функции $z = x^2 + y^2$ являются концентрические окружности $x^2 + y^2 = c.$ При $c = 1$ получаем окружность радиуса 1, которая проходит через точки $(1; 0), (0; 1);$ при $c = 2$ линия уровня проходит через точки $(1; 1), (-1; 1)$ (рис. 11).

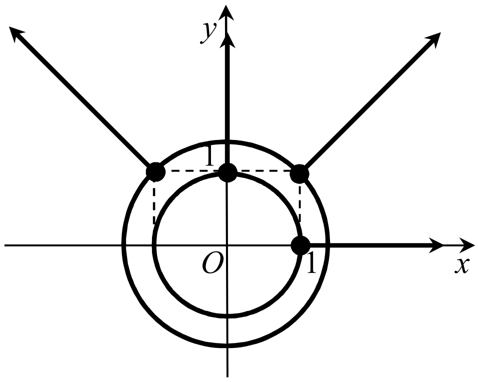

Рис. 11. Перпендикулярность градиента функции $z = x^2 + y^2$ линиям уровня

Вычислим градиент:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} z} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

и построим векторы

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} z}(1;0) = 2\vec{i}; \qquad \overrightarrow{\operatorname{grad} z}(0;1) = 2\vec{j};$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} z}(1;1) = 2\vec{i} + 2\vec{j}; \qquad \overrightarrow{\operatorname{grad} z}(-1;1) = -2\vec{i} + 2\vec{j}. \bullet$$

§ 6. Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в точке $M_0(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности.

Опр. 1. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется ***точкой локального максимума*** (***минимума***) функции $z = f(x; y)$, если для всех точек $M(x; y)$ из некоторой проколотой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ имеет место $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ (соответственно $f(x_0; y_0) < f(x; y)$).

Характерное свойство точек экстремума: в некоторой окрестности точки экстремума приращение функции не меняет знак, а именно $\Delta z < 0$ в окрестности точки локального максимума и $\Delta z > 0$ в окрестности точки локального минимума.

Т 1 [необходимое условие существования локального экстремума]. Если $(x_0; y_0)$ – точка локального экстремума функции $z = f(x; y)$, то в этой точке обе частные производные

$f_x'(x_0; y_0), f_y'(x_0; y_0)$ равны 0 или хотя бы одна из них не существует.

Доказательство следует из аналогичной теоремы для функций одной переменной.

Рассмотрим функцию $z = f(x; y_0)$ при фиксированном $y = y_0$. Это функция одной переменной, x_0 – ее точка экстремума, следовательно, производная этой функции в точке экстремума $f_x'(x_0; y_0)$ равна 0 или не существует.

Аналогично доказывается, что $f_y'(x_0; y_0)$ равна 0 или не существует. ◃

Опр. 2. Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума (обе частные производные $f_x'(x_0; y_0), f_y'(x_0; y_0)$ равны 0 или хотя бы одна из них не существует), называются ***критическими***, а точки, в которых $f_x'(x_0; y_0) = f_y'(x_0; y_0) = 0,$ – ***стационарными*** точками функции $z = f(x; y).$

Т 2 [достаточное условие существования локального экстремума Ф2П]. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x; y)$ и в окрестности этой точки функция имеет непрерывные частные производные второго порядка. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{xy}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(x_0; y_0) > 0,$ то точка $M_0(x_0; y_0)$ – точка локального минимума функции $z = f(x; y)$;

2) если $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0,$ то точка $M_0(x_0; y_0)$ – точка локального максимума функции $z = f(x; y)$;

3) если $\Delta < 0,$ то точка $M_0(x_0; y_0)$ не является точкой локального экстремума функции $z = f(x; y)$;

4) в случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ может быть, может не быть; требуются дополнительные исследования.

Пример 1. Исследуем на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 + 9xy.$

Решение. Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x = 3x^2 + 9y; \quad z'_y = 3y^2 + 9x,$$

приравняем их к 0 и решим систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 9y = 0, \\ 3y^2 + 9x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{3}, \\ y^2 + 3x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{3}, \\ \dfrac{x^4}{9} + 3x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{3}, \\ x^4 + 27x = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения получим $x(x^3 + 27) = 0,$ откуда $x_1 = 0; x_2 = -3.$ Тогда соответствующие значения y равны $y_1 = 0; y_2 = -3.$

Получили две стационарные точки $M_1(0; 0), M_2(-3; -3).$

Проверим в каждой из этих точек достаточное условие экстремума. Найдем частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = 6x; \quad z''_{xy} = 9; \quad z''_{yy} = 6y$$

и составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 9 \\ 9 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 81.$$

Для точки $M_1(0; 0)$ имеем $\Delta(M_1) = -81 < 0,$ т. е. точка $M_1(0; 0)$ не является точкой локального экстремума функции.

В точке $M_2(-3; -3)$ получим $\Delta(M_2) = 36 \cdot 9 - 81 = 243 > 0;$ $z''_{xx}(-3; -3) = -18 < 0,$ поэтому точка $M_2(-3; -3)$ является точкой локального максимума, значение функции в этой точке равно

$$z_{\max} = z_{\max}(-3; -3) = (-3)^3 + (-3)^3 + 9 \cdot (-3) \cdot (-3) = 27. \bullet$$

Пример 2. Исследуем на экстремум функцию $z = 3x^2y - x^3 - y^4.$

Решение. Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x = 6xy - 3x^2; \quad z'_y = 3x^2 - 4y^3,$$

приравняем их к 0 и решим систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x(2y - x) = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2y - x = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ -4y^3 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y, \\ 3 \cdot 4y^2 - 4y^3 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2(3 - y) = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0,\ y = 0; \\ y = 0,\ x = 0; \\ y = 3,\ x = 6. \end{array}\right.$$

Получили две стационарные точки $M_1(0;0), M_2(6;3)$.

Проверим в каждой из этих точек достаточное условие экстремума. Найдем частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = 6y - 6x; \quad z''_{xy} = 6x; \quad z''_{yy} = -12y^2$$

и составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6y - 6x & 6x \\ 6x & -12y^2 \end{vmatrix} = -12 \cdot 6y^2(y - x) - 36x^2 = -36(2y^2(y - x) + x^2).$$

В точке $M_2(6;3)$ получим

$$\Delta(M_2) = -36 \cdot (2 \cdot 9 \cdot (-3) + 36) = -36 \cdot (-18) > 0;$$
$$z''_{xx}(6;3) = 18 - 36 = -18 < 0,$$

поэтому точка $M_2(6;3)$ является точкой локального максимума, значение функции в этой точке равно

$$z_{\max} = z_{\max}(6;3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 3^3 \cdot (12 - 8 - 3) = 27.$$

Для точки $M_1(0;0)$ имеем $\Delta(M_1) = 0$, нужны дополнительные исследования. Рассмотрим приращение функции в точке M_1:

$$\Delta z = f(0 + \Delta x; 0 + \Delta y) - f(0;0) = f(\Delta x; \Delta y) - 0 = 3\Delta x^2 \Delta y - \Delta x^3 - \Delta y^4.$$

Заметим, что при $\Delta y = 0$ если $\Delta x > 0$, то $\Delta z < 0$, а если $\Delta x < 0$, то $\Delta z > 0$, т. е. в окрестности точки $M_1(0;0)$ приращение функции принимает как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет.●

Т 3 [достаточное условие существования локального экстремума ФНП]. Пусть $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ – стационарная точка функции $u = u(x_1; x_2; ...; x_n)$, т. е.

$$u'_{x_1}(M_0) = u'_{x_2}(M_0) = ... = u'_{x_n}(M_0) = 0,$$

и пусть в окрестности этой точки функция $u = u(x_1; x_2; ...; x_n)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Тогда:

1) если $d^2u(M_0) > 0$ при всех наборах значений $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, не равных 0 одновременно, то точка $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ является точкой локального минимума функции $u = u(x_1; x_2; ...; x_n)$;

2) если $d^2u(M_0) < 0$ при всех наборах значений $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, не равных 0 одновременно, то точка $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ является точкой локального максимума функции $u = u(x_1; x_2; ...; x_n)$;

3) если $d^2u(M_0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то точка $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ не является точкой локального экстремума функции $u = u(x_1; x_2; ...; x_n)$;

4) если при всех наборах значений $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ имеет место $d^2u(M_0) \geq 0$ либо $d^2u(M_0) \leq 0$, причем существуют такие наборы значений $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, не равных 0 одновременно, что $d^2u(M_0) = 0$, то вопрос о существовании локального экстремума функции $u = u(x_1; x_2; ...; x_n)$ в точке $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ остается открытым; требуются дополнительные исследования.

Замечание. Отметим, что дифференциал второго порядка ФНП

$$d^2u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \Delta x_i^2 + 2\sum_{i<j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \Delta x_i \, \Delta x_j$$

является *квадратичной формой* от величин $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Достаточные условия существования локального экстремума ФНП могут быть переформулированы как *условия знакоопределенности квадратичной формы*, проверка которых в теории квадратичных форм проводится с помощью критерия Сильвестра.

Понятие об условном экстремуме

Экстремум функции $z = f(x; y)$, найденный при условии, что $\varphi(x; y) = 0$, называется ***условным***, а уравнение $\varphi(x; y) = 0$ называется ***уравнением связи***. В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой окрестности, а только в тех, для которых выполняется условие связи $\varphi(x; y) = 0$.

Пример 3. Найдем экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$.

Решение. Выражая из уравнения связи $y = 1 - x$ и подставляя это выражение в функцию z, сводим задачу к поиску безусловного экстремума функции одной переменной

$$z = x^2 + (1 - x)^2; \qquad z = 2x^2 - 2x + 1.$$

Находя производную и приравнивая ее к 0:

$$z' = 4x - 2 = 0,$$

получим критическую точку $x = \frac{1}{2}$. Воспользуемся достаточным условием экстремума на основании второй производной: так как $z''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0$, то критическая точка $x = \frac{1}{2}$ является точкой локального минимума функции $z = 2x^2 - 2x + 1$, причем $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Определим вторую координату точки условного экстремума: $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$ имеет условный локальный минимум $z_{\min} = \frac{1}{2}$ в точке $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Замечание. Функция $z = x^2 + y^2$ задает в пространстве эллиптический параболоид (рис. 12).

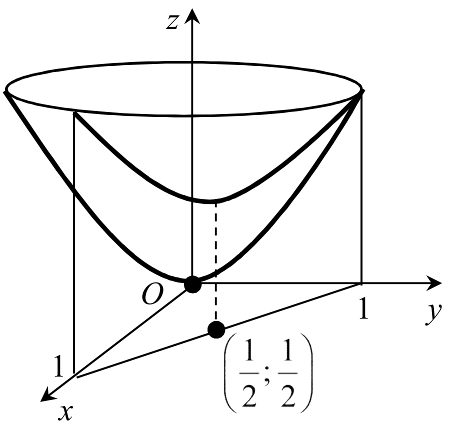

Рис. 12. Условный экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$

Несложно видеть, что безусловный минимум этой функции достигается в точке $O(0; 0)$ и равен $z_{\min} = z(0; 0) = 0.$

Условный минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$ – это минимум на линии пересечения параболоида и плоскости $x + y = 1$ (см. рис. 12). •

В случае, когда уравнение связи сложно разрешить относительно какой-либо переменной или когда это приводит к громоздким вычислениям, для нахождения критических точек используется *метод множителей Лагранжа*.

Пусть требуется найти экстремум функции $z = f(x; y)$ при условии, что $\varphi(x; y) = 0,$ т. е.

$$\begin{cases} f(x; y) \to \text{extr}, \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases}$$

Метод множителей Лагранжа включает следующие этапы:

1) составить ***функцию Лагранжа***

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y);$$

2) найти критические точки как критические точки функции Лагранжа, т. е. решить систему

$$\begin{cases} L'_x(x; y; \lambda) = 0, \\ L'_y(x; y; \lambda) = 0, \\ L'_\lambda(x; y; \lambda) = 0; \end{cases}$$

3) определить знак приращения Δz в окрестности критических точек по тем точкам окрестности, которые удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x;\,y)=0$.

Замечание. При решении конкретных задач иногда удается установить характер критических точек на основании существа задачи.

Пример 4. На эллипсе $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ найдем точки, наименее и наиболее удаленные от прямой $3x+y=9$ (рис.13).

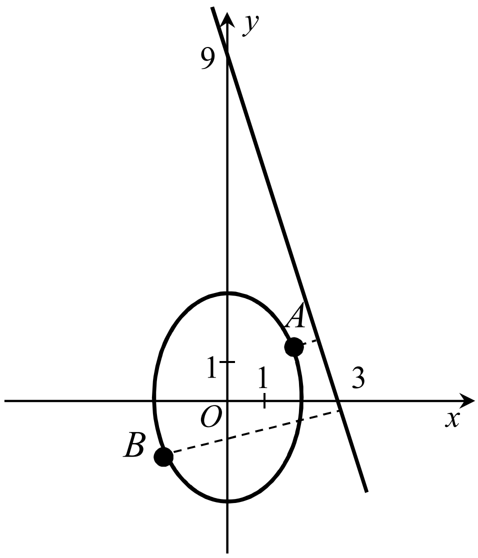

Рис. 13. Расстояние от точек эллипса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ до прямой $3x+y=9$

Решение. Запишем формулу, выражающую расстояние от произвольной точки $(x;\,y)$, лежащей на эллипсе, до прямой:

$$d(x;\,y)=\frac{|3x+y-9|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|3x+y-9|}{\sqrt{10}}.$$

Имеем задачу условного экстремума

$$\begin{cases} d(x;\,y)\to \text{extr}, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \end{cases}$$

или, что эквивалентно, задачу

$$\begin{cases} f(x;\, y) = 10d^2(x;\, y) = (3x + y - 9)^2 \to \text{extr}, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(x;\, y;\, \lambda) = (3x + y - 9)^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$$

и найдем критические точки из условия равенства нулю частных производных функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x(x;\, y;\, \lambda) = 0, \\ L'_y(x;\, y;\, \lambda) = 0, \\ L'_\lambda(x;\, y;\, \lambda) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 6(3x + y - 9) + \dfrac{\lambda x}{2} = 0, \\ 2(3x + y - 9) + \dfrac{2\lambda y}{9} = 0, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0. \end{cases}$$

Для решения системы выразим из первого и второго уравнений $3x + y - 9 = -\dfrac{\lambda x}{12}; 3x + y - 9 = -\dfrac{\lambda y}{9}$, откуда получим $\dfrac{\lambda x}{12} = \dfrac{\lambda y}{9}$. Следовательно, либо $\lambda = 0$, либо $x = \dfrac{4y}{3}$.

При $\lambda = 0$ получим систему $\begin{cases} 3x + y - 9 = 0, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \end{cases}$ которая не имеет решений, так как прямая и эллипс не пересекаются.

Если $x = \dfrac{4y}{3}$, то подставляя это соотношение в уравнение эллипса, получим

$$\frac{16y^2}{9 \cdot 4} + \frac{y^2}{9} = 1; \qquad \frac{5y^2}{9} = 1; \qquad y_{1;\,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}; \qquad x_{1;\,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, получим две критические точки $A\left(\frac{4}{\sqrt{5}};\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ и $B\left(-\frac{4}{\sqrt{5}};-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. (Заметим, что значение λ можно однозначно определить из первого или второго уравнений системы, но необходимости в этом нет.)

Вычислим значение расстояния до прямой для каждой из критических точек:

$$d(A)=d\left(\frac{4}{\sqrt{5}};\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\left|3\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}-9\right|}{\sqrt{10}}=\frac{\left|3\sqrt{5}-9\right|}{\sqrt{10}}=\frac{9-3\sqrt{5}}{\sqrt{10}};$$

$$d(B)=d\left(-\frac{4}{\sqrt{5}};-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\left|-3\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}-9\right|}{\sqrt{10}}=\frac{\left|-3\sqrt{5}-9\right|}{\sqrt{10}}=\frac{9+3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}.$$

Таким образом, из всех точек эллипса точка $A\left(\frac{4}{\sqrt{5}};\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ наименее удалена от прямой, а точка $B\left(-\frac{4}{\sqrt{5}};-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ – наиболее. •

Нахождение наименьшего и наибольшего значений (глобальных экстремумов) функции двух переменных в области

Для ФНП, как и для функций одной переменной, справедлива теорема Вейерштрасса.

Т 4 [Вейерштрасса]. Если ФНП непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она ограничена в этой области и достигает в ней наибольшего и наименьшего значений.

Эти значения (глобальные экстремумы функции в области) достигаются либо в точках локального экстремума, расположенных внутри области, либо на границе этой области.

Таким образом, для нахождения наибольшего и наименьшего значений ФНП в области нужно:

1) найти критические точки функции и выбрать те, которые входят в область;

2) найти наименьшее и наибольшее значения функции на границе области;

3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наименьшее и наибольшее.

Пример 5. Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в области $D: \frac{x^2}{2} \le y \le 2; x \ge 0.$

Решение. Построим область D (см. рис. 14).

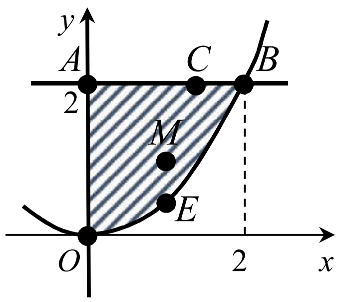

Рис. 14. Область $D: \frac{x^2}{2} \le y \le 2; x \ge 0$

Найдем критические точки. Для этого найдем частные производные первого порядка

$$z'_x = 6x^2 - 6y; \quad z'_y = -6x + 6y,$$

приравняем их к 0 и решим систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ -6x + 6y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x = y. \end{cases}$$

Получим

$$x^2 - x = 0; \quad x(x-1) = 0,$$

откуда $x_1 = 0; x_2 = 1,$ а значит, $y_1 = 0; y_2 = 1,$ т. е. имеем две критические точки $O(0;0)$ и $M(1;1).$

Обе эти точки принадлежат области D: точка $O(0;0)$ лежит на границе области, а точка $M(1;1)$ внутри области (в этом можно убедиться, подставив координаты точки в условия, определяющие область, либо по рис. 14).

Запомним точки $O(0;0)$ и $M(1;1)$ как точки, в которых функция может принимать наименьшее или наибольшее значения в области *D*.

Исследуем границу области. Она распадается на три участка: отрезок *OA*, отрезок *AB* и дуга параболы *OB*. Найдем точки, в которых могут достигаться наименьшее и наибольшее значения функции на каждом из участков границы.

1. Отрезок *OA* задается уравнением $x=0$ при $y\in[0;2]$. Подставив $x=0$ в функцию, получим задачу нахождения наименьшего и наибольшего значений функции $z=3y^2$ на отрезке $[0;2]$.

Так как $z'=6y=0$ при $y=0$, критическая точка совпадает с концом отрезка. Следовательно, наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке *OA* достигаются на концах отрезка, т. е. в точках $O(0;0)$ и $A(0;2)$.

2. Отрезок *AB*: $y=2$; $x\in[0;2]$. Подставив $y=2$, получим функцию $z=2x^3-12x+12$ на отрезке $[0;2]$.

Найдем критические точки:

$$z'=6x^2-12=0; \qquad x^2=2; \qquad x_{1;2}=\pm\sqrt{2}.$$

Здесь $x_1=-\sqrt{2}\notin[0;2]$, а значению $x_2=\sqrt{2}\in[0;2]$ соответствует точка $C(\sqrt{2};2)$.

Итак, наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке *AB* достигаются в одной из точек $A(0;2)$, $B(2;2)$, $C(\sqrt{2};2)$.

3. Дуга *OB*: $y=\dfrac{x^2}{2}$; $x\in[0;2]$. Подставив $y=\dfrac{x^2}{2}$; получим функцию

$$z=2x^3-6x\cdot\frac{x^2}{2}+3\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=\frac{3}{4}x^4-x^3$$

на отрезке $[0;2]$.

Найдем критические точки:

$$z'=3x^3-3x^2=0; \qquad 3x^2(x-1)=0,$$

откуда $x_1 = 0; x_2 = 1$. Обе точки принадлежат отрезку $[0; 2]$. Поскольку эти точки лежат на параболе $y = \frac{x^2}{2}$, то $y_1 = 0; y_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, это точки $O(0; 0)$ и $E\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Таким образом, наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке OB достигаются в одной из точек $O(0; 0)$, $E\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $B(2; 2)$.

Найдем значения функции во всех полученных точках:

$$z(O) = z(0; 0) = 0;$$

$$z(M) = z(1; 1) = 2 - 6 + 3 = -1;$$

$$z(A) = z(0; 2) = 0 - 0 + 12 = 12;$$

$$z(B) = z(2; 2) = 16 - 24 + 12 = 4;$$

$$z(C) = z(\sqrt{2}; 2) = 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 12 = 12 - 8\sqrt{2};$$

$$z(E) = z\left(1; \frac{1}{2}\right) = 2 - 3 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Поскольку $12 - 8\sqrt{2} < 12$ и $12 - 8\sqrt{2} = 8 \cdot (1{,}5 - \sqrt{2}) > 0$, то делаем вывод: наименьшее значение функции в области D равно $z_{\text{наим}} = z(1; 1) = -1$, наибольшее значение $z_{\text{наиб}} = z(0; 2) = 12$. •