РЯДЫ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. **Исследование сходимости числового ряда по определению.**
2. **Исследование сходимости знакопостоянных числовых рядов.**
3. **Исследование сходимости знакопеременных числовых рядов.**
4. **Степенные ряды.**
5. **Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.**

1. Исследование сходимости числового ряда по определению

Пример 1. Найти сумму ряда или доказать, что ряд расходится:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-3^n}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n$.

Решение. а) Представим каждый член ряда в виде разности и найдем сумму ряда как разность сумм бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(0,4)^n-\sum_{n=1}^{\infty}(0,6)^n=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{разность сумм}\\ \text{бесконечно убывающих}\\ \text{геометричеких прогрессий}\end{array}\right|\frac{0,4}{1-0,4}-\frac{0,6}{1-0,6}=-\frac{5}{6}.$$

б) Найдем сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ по определению, вычислив частичные суммы ряда и найдя их предел.

Заметим, что $\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$, поэтому

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=$$
$$=1-\frac{1}{2n+1};$$
$S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1\Rightarrow$ ряд сходится, его сумма равна 1.

в) Вычислим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n=1+2+3+\ldots n=\frac{n(n+1)}{2},$$

поэтому $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty\Rightarrow$ ряд расходится.

2. Исследование сходимости знакопостоянных числовых рядов

Пример 1. Выяснить, сходится или расходится ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5n^2+3}{2n^2-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3n-1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2^n}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+4}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[6]{n+1}}{n^2+2n+4}$.

Решение. а) Проверим, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^2+3}{2n^2-1}=\frac{5}{2}\neq 0,$ необходимый признак сходимости ряда не выполняется, данный ряд расходится.

б) Применим признак Даламбера. Имеем: $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, поэтому

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Так как $l=0<1$, то данный ряд сходится.

в) Применим признак Даламбера. Имеем:

$$a_n = \frac{2^n}{3n-1},\ a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3(n+1)-1} = \frac{2^{n+1}}{3n+2},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{3n+2} \cdot \frac{3n-1}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} \cdot \frac{3n-1}{3n+2} = 2\frac{3n-1}{3n+2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{3n-1}{3n+2} = 2.$$

Так как $l = 2 > 1$, то данный ряд расходится.

г) Применим интегральный признак Коши. Функция $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$ непрерывна, положительна и убывает при $x \geq 1$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)\ln^2(x+2)} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{d(\ln(x+2))}{\ln(x+2)} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln(x+2))\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(\ln(\ln(A+2)) + \ln(\ln 3)\right) = +\infty$$

Таким образом, несобственный интеграл расходится. Значит, данный ряд расходится.

д) Применим непредельный признак сравнения. Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится (поскольку $q = \frac{1}{2} < 1$). Имеем $\frac{1}{n+2^n} < \frac{1}{2^n}$. Значит, данный ряд сходится.

е) Применим предельный признак сравнения. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. Имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{n+1}{n^2+2n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+2n+4} = 1 \neq 0; \neq \infty$. Значит, данный ряд расходится.

ж) Используем предельный признак сравнения. Поскольку $\dfrac{\sqrt[6]{n+1}}{n^2+2n+4}=\dfrac{n^{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt[6]{1+\frac{1}{n}}}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}\sim\dfrac{1}{n^{\frac{11}{6}}}$ при $n\to+\infty$, то по предельному признаку сравнения данный ряд сходится как сравнимый с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{11}{6}}}$, который сходится ($\alpha=\dfrac{11}{6}>1$).

3. Исследование сходимости знакопеременных числовых рядов

Пример 1. Исследовать сходимость ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$; б) $1-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}+\ldots$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n^2+2n+4}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n}{n^3}$.

Решение. а) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ абсолютно сходящийся, потому что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{3}$.

б) Ряд $1-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}+\ldots$ сходится, потому что $S_1=1$, $S_2=0$, $S_3=\dfrac{1}{2}$, $S_4=0$, …, $S_{2n}=0$, $S_{2n+1}=\dfrac{1}{n+1}$, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0$.

Однако этот ряд не является абсолютно сходящимся, так как ряд $1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\ldots$ расходится. Действительно, имеем: $S_{2n}=2\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$. Так как выражение в скобках является n–й частичной суммой гармонического ряда, то $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\infty$.

в) Составим ряд из модулей членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+4}$.

Поскольку $\frac{n+1}{n^2+2n+4}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}\sim\frac{1}{n}$ при $n\to+\infty$, то по предельному признаку сравнения данный ряд расходится, как сравнимый с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

Применим признак Лейбница к исходному ряду. Имеем:

1) производная модуля общего члена ряда отрицательна: $\left(\frac{n+1}{n^2+2n+4}\right)'=\frac{-n^2-2(n-1)}{(n^2+2n+4)^2}<0$ и, стало быть, модули членов ряда монотонно убывают;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+4}=0$.

Условия признака Лейбница выполнены, и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+2n+4}$ сходится условно.

г) Рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\cos n|}{n^3}$. По непредельному признаку сравнения сравним этот ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$, который сходится ($\alpha=3>1$). Так как $\frac{|\cos n|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$, то ряд из модулей тоже сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

4. Степенные ряды

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cdot n!$; в) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}$; г) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+3)^n}{n}$;

д) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$; е) $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$; ж) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$; з) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Решение. а) Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем: $|u_n| = \dfrac{|x|^n}{n!}$, $|u_{n+1}| = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{|x|^n\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = |x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Значит, ряд абсолютно сходится на всей числовой оси и областью сходимости исходного ряда является промежуток $(-\infty,+\infty)$.

б) Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{n+1}\cdot(n+1)!}{|x|^n\cdot n!} = |x|\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$.

Значит, областью сходимости данного ряда является одна точка $\{0\}$.

в) Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n|x|^{2(n+1)}}{2^{n+1}|x|^{2n}} = \dfrac{|x|^2}{2}$. Значит, ряд абсолютно сходится, если $|x|^2 < 2$ или $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -\sqrt{2}$ или $x = \sqrt{2}$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 1$. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является промежуток $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

г) Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x+3|^{n+1}\cdot n}{|x+3|^n\cdot(n+1)} = |x+3|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |x+3|.$$

Значит, ряд абсолютно сходится, если $|x+3| < 1$ или $-4 < x < -2$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -2$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится.

При $x = -4$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является промежуток $[-4,-2)$.

д) Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2|x|^n}=|x|\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=|x|$.

Ряд абсолютно сходится, если $|x|<1$, или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ имеем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

При $x=-1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, который сходится абсолютно.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1,1]$.

е) Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{|x|^n}=|x|$.

Ряд абсолютно сходится, если $|x|<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ имеем расходящийся ряд.

При $x=-1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$, который также расходится.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является интервал $(-1;1)$.

ж) Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{n+2}\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot|x|^{n+1}}=|x|\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)}{(n+2)}=|x|$.

Ряд абсолютно сходится, если $|x|<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n+1}$, сравнимый с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$.

При $x=-1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, который сходится условно по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является промежуток $[-1;1)$.

з) Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+3}\cdot(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)\cdot|x|^{n+2}} = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{(n+3)} = |x|.$$

Ряд абсолютно сходится, если $|x|<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ имеем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, сравнимый с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

При $x=-1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$, который сходится абсолютно.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1,1]$.

Нетрудно видеть, что рассматриваемый ряд получается почленным интегрированием степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. При этом радиус сходимости и промежуток сходимости не изменились, а область сходимости расширилась, в частности, добавилась точка $x=1$.

5. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

Пример 1. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $\sin x$, в котором примем $x=1$. Тогда получим:

$$\sin 1 = 1-\frac{1}{3!}1^3+\frac{1}{5!}1^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}1^{2n+1}+\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}+\cdots$$

Стоящий справа ряд является знакочередующимся, модуль его общего члена $a_n = \frac{1}{(2n+1)!}$ убывает с ростом n и стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, а значит, сходится и его остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого отбрасываемого члена, поэтому первый из отбрасываемых членов должен быть по модулю меньше $\varepsilon = 0{,}001$. Так как $\frac{1}{5!} \approx 0{,}008 > 0{,}001$, а $\frac{1}{7!} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых: $\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0{,}842$. Допускаемая ошибка при этом меньше, чем первый отброшенный член, т.е. меньше 0,0002.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ с точностью до 0,1.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя в соответствующей формуле x на $-x$:

$$\sqrt{x} e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \right), \; x \in (-\infty, +\infty).$$

Интегрируя обе части последнего равенства на отрезке $[0, 1]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty, +\infty)$, получим:

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left. \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9} \frac{x^{\frac{9}{2}}}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{2}{2n+3} \frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{n!} + \ldots \right) \right|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{27} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n+3)n!} + \ldots .$$

Получили знакочередующийся ряд, модуль его общего члена $a_n = \frac{2}{(2n+3)n!}$ убывает с ростом n и стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, а значит, сходится и его остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого отбрасываемого члена, поэтому первый из отбрасываемых членов должен быть по модулю меньше $\varepsilon = 0{,}1$.

Так как $\frac{1}{7} = 0{,}14\ldots > 0{,}1$, а $\frac{1}{27} = 0{,}037\ldots < 0{,}1$, то с точностью до 0,1 имеем: $\int\limits_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \approx \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \approx 0{,}4$.

Пример 3. Методом последовательного дифференцирования найти три отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x + \frac{1}{y}$, $y(0) = 1$.

Решение. Ищем решение задачи Коши в виде ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

По условию, $y(0) = 1$. Из уравнения находим, что $y'(0) = 0 + \frac{1}{y(0)} = 1$. Дифференцируем исходное уравнение, помня, что x – независимая переменная, а y – функция от x:

$$y'' = 1 - \frac{1}{y^2}y', \; y''(0) = 1 - 1 = 0,$$

$$y''' = -\frac{y''y^2 - y' \cdot 2yy'}{y^4}, \; y'''(0) = 2.$$

Подставляя найденные значения в ряд, будем иметь

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \ldots = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$