Раздел 10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

§ 1. Понятие определенного интеграла, его геометрический и физический смысл, основные свойства

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

1. Задача о площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$), снизу осью Ox, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$.

Если разбить отрезок $[a; b]$ на достаточно большое число n частей точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, где

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

и на каждом частичном отрезке взять произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ (см. рис. 1), то площадь криволинейной трапеции может быть вычислена приближенно как сумма площадей прямоугольников, построенных на отрезках $[x_{i-1}; x_i]$, с высотами $f(c_i)$:

$$S_{\text{кр.трап}} \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

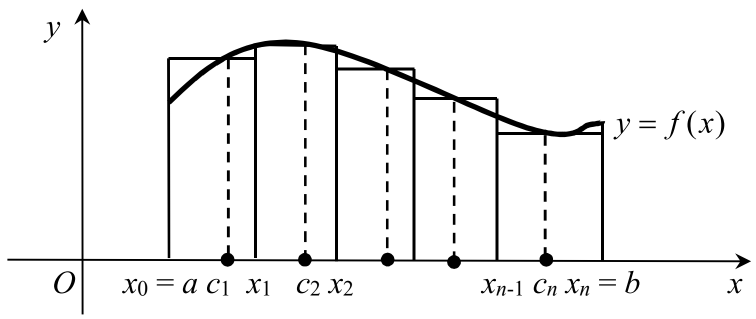


Рис. 1. Площадь криволинейной трапеции

Для более точного приближения нужно, чтобы все частичные отрезки были достаточно малы, настолько, чтобы на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ значения функции $f(x)$ во всех точках отрезка можно было считать практически равными $f(c_i)$. Для этого нужно, чтобы длины *всех* частичных отрезков стремились к 0, т. е.

$$d_n = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0.$$

2. Задача о работе переменной по величине силы $\vec{F}$, направленной вдоль оси Ox, при перемещении материальной точки по оси Ox от $x = a$ до $x = b$.

Пусть $F(x)$ – величина силы в точке x.

Известно, что работа силы, постоянной по величине и направлению, равна скалярному произведению силы и перемещения: $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi,$ причем в нашем случае $\cos\varphi = 1,$ поскольку сила и перемещение сонаправлены: $\vec{F} \uparrow\uparrow Ox, \vec{s} \uparrow\uparrow Ox.$

Если разбить отрезок $[a; b]$ на достаточно большое число n частей точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n,$ где

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

так, чтобы на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ величину силы можно было считать постоянной и равной $F(c_i),$ где $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ (см. рис. 2), то работа будет приблизительно равна

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

причем для более точного приближения нужно, чтобы длины *всех* частичных отрезков стремились к 0, т. е.

$$d_n = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0.$$

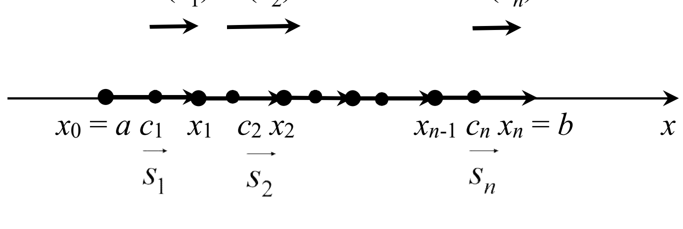


Рис. 2. Задача о работе переменной по величине силы $\vec{F}$

3. Задача о массе неоднородного стержня. Пусть на отрезке $[a;b]$ лежит стержень и известна функция $\gamma(x)$, выражающая плотность материала стержня в каждой точке $x \in [a;b]$. Будем считать, что стержень цилиндрический с постоянной площадью поперечного сечения, равной 1.

Известно, что масса тела постоянной плотности равна произведению плотности на объем. В нашем случае объем цилиндрического тела с поперечным сечением площади 1 численно равен высоте цилиндра, т. е. длине отрезка стержня.

Если разбить отрезок $[a;b]$ на достаточно большое число n частей точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, где

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

так, чтобы на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ плотность можно было считать постоянной и равной $\gamma(c_i)$, где $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ (см. рис. 3), то масса стержня будет приблизительно равна

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

причем для более точного приближения нужно, чтобы длины *всех* частичных отрезков стремились к 0, т. е.

$$d_n = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0.$$

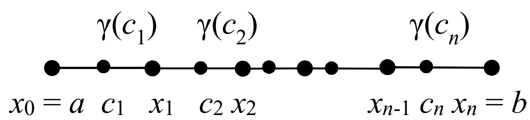


Рис. 3. Задача о массе неоднородного стержня

4. Задача о пути материальной точки, которая перемещается по прямой с переменной скоростью $v(t)$ от момента времени $t = a$ до момента времени $t = b$.

Если разбить промежуток времени $[a;b]$ на достаточно большое число n промежутков точками $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$, где

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b,$$

так, чтобы на каждом частичном промежутке $[t_{i-1}; t_i]$ скорость можно было считать постоянной и равной $v(c_i)$, где $c_i \in [t_{i-1}; t_i]$ (см. рис. 4), то путь, пройденный материальной точкой, будет приблизительно равен

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} v(c_i)(t_i - t_{i-1}),$$

причем для более точного приближения нужно, чтобы величины *всех* промежутков стремились к 0, т. е.

$$d_n = \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1}) \to 0.$$

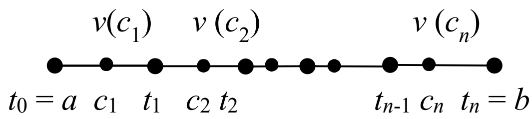


Рис. 4. Задача о пути

Определение определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ *определена* и *ограничена* на отрезке $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, где

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b;$$

обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$; возьмем на каждом частичном отрезке произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ (см. рис. 5) и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

которая называется ***интегральной суммой для функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a; b]$.

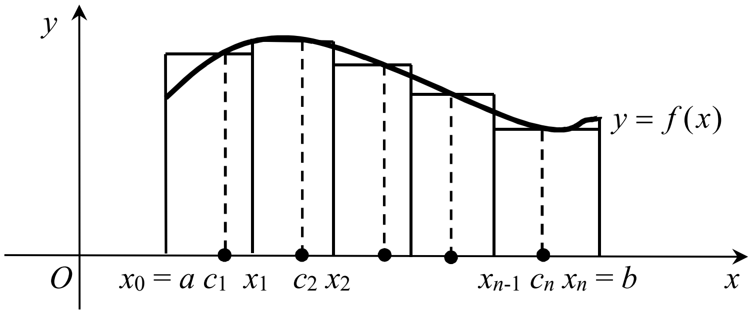


Рис. 5. Составление интегральной суммы для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$

Обозначим длину наибольшего частичного отрезка через

$$d_n = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i;$$

величина d_n называется ***диаметром разбиения*** $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Опр. 1. ***Определенным интегралом от функции*** $f(x)$ ***по отрезку*** $[a; b]$ называется предел интегральной суммы (1) при измельчении разбиения, т. е. при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{d_n \to 0} S_n}$$

при условии, что этот предел существует, конечен и *не зависит* ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора промежуточных точек c_i на частичных отрезках.

Числа a и b называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***; функция $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***; $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***; отрезок $[a; b]$ – ***отрезком интегрирования***.

Опр. 2. Если существует определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$, то функция $f(x)$ называется ***интегрируемой на отрезке*** $[a; b]$.

Необходимое и достаточные условия интегрируемости

Т 1 (необходимое условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$.

Т 2 (достаточное условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.

Т 3 (достаточное условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва 1-го рода, то она интегрируема на $[a;b]$.

Геометрический смысл определенного интеграла

С геометрической точки зрения, *определенный интеграл от неотрицательной функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a;b]$ *равен площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры, ограниченной сверху графиком функции* $y=f(x)$, *снизу осью Ox, сбоку – прямыми* $x=a$ *и* $x=b$ (рис. 6): $\boxed{S_{\text{кр.трап}} = \int\limits_a^b f(x)dx.}$

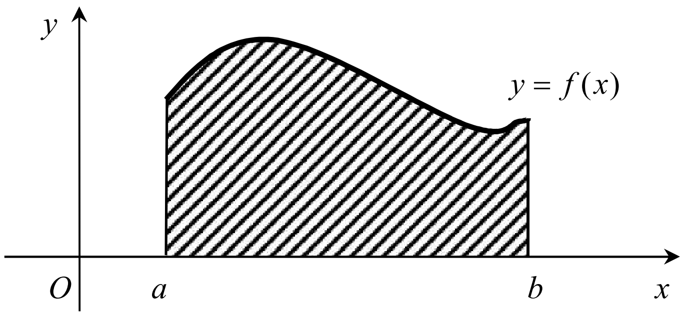
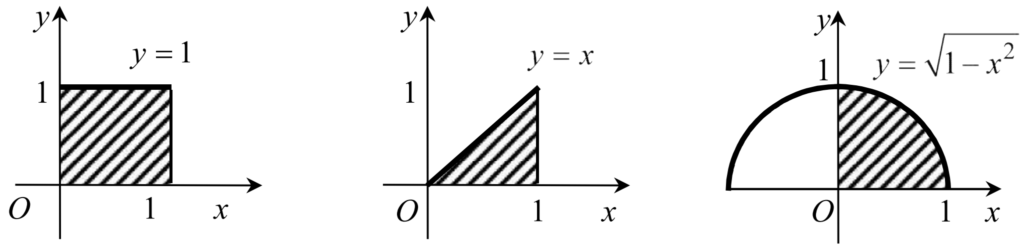


Рис. 6. Геометрический смысл определенного интеграла

Пример 1. Найдем интегралы, используя их геометрический смысл: **а)** $\int\limits_0^1 dx$; **б)** $\int\limits_0^1 xdx$; **в)** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Решение. **а)** Первый интеграл выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=1$ на отрезке

$[0;1]$, т. е. площадь квадрата со стороной 1 (рис. 7а), поэтому $\int_0^1 dx = 1$.



а — $\int_0^1 dx$ равен площади квадрата

б — $\int_0^1 xdx$ равен площади треугольника

в — $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ равен площади четверти круга

Рис. 7. Криволинейные трапеции к примеру 1

б) Криволинейная трапеции под графиком функции $y = x$ на отрезке $[0;1]$ – прямоугольный треугольник, оба катета которого равны 1 (рис. 7б), поэтому $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

в) Рассмотрим линию $y = \sqrt{1-x^2}$. Возведя обе части в квадрат, получим $y^2 = 1 - x^2$, или $x^2 + y^2 = 1$, т. е. уравнение окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Исходное уравнение задает верхнюю половину окружности. Таким образом, искомый интеграл выражает площадь четверти круга радиуса 1 (рис. 7в), поэтому $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$. ●

Физический смысл определенного интеграла

1. *Работа переменной по величине силы* $F(x)$, *действующей вдоль оси Ох от точки* $x = a$ *до точки* $x = b$, *равна определенному интегралу по отрезку* $[a; b]$ *от величины силы*: $A = \int_a^b F(x)dx.$

2. Если неотрицательная функция $\gamma(x)$ выражает линейную плотность стержня в каждой точке $x \in [a; b]$, то *масса неоднородного стержня равна определенному интегралу по отрезку* $[a; b]$ *от плотности*: $m = \int_a^b \gamma(x)dx.$

3. *Путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от* $t = a$ *до* $t = b$, *равен определенному интегралу от скорости:* $S = \int_a^b v(t)dt.$

Основные свойства определенного интеграла

1. По определению полагают

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0;}$$

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.}$$

2. ***Линейность определенного интеграла***:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k = \text{const});$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Докажем первое равенство, используя определение определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(c_i)\Delta x_i = k \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx.$$

Поскольку второй предел существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора промежуточных точек c_i на частичных отрезках, то также существует и конечен первый предел, а следовательно определен интеграл в левой части равенства.

Второе равенство доказывается аналогично. $\triangleleft$

3. ***Аддитивность определенного интеграла***:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Замечание. Это свойство справедливо при *любом* расположении точек *a*, *b*, *c* друг относительно друга.

4. Если $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

Доказательство следует из определения определенного интеграла, поскольку

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \geq 0. \triangleleft$$

5. ***Монотонность определенного интеграла***: если $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

Упражнение 1. Доказать, используя свойство 4.

6. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (если $a < b$).

Доказательство. Применяя свойство 5 к очевидным неравенствам $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, получаем

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

а значит, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \triangleleft$

7. ***Оценка определенного интеграла***: если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).}$$

Упражнение 2. Доказать, используя свойство 5.

Замечание. Если $f(x) \ge 0$ при всех $x \in [a;b]$, то свойство 7 иллюстрируется геометрически: площадь криволинейной трапеции заключена между площадями прямоугольников, построенных на отрезке $[a;b]$ с высотами m и M (рис. 8).

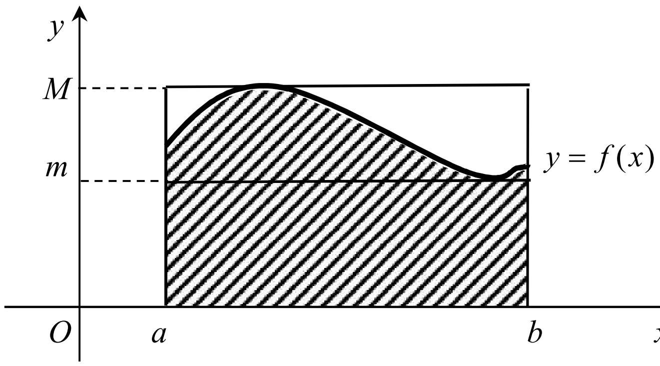


Рис. 8. Оценка определенного интеграла

8. (теорема о среднем для определенного интеграла). Если функция $f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $c \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса она ограничена на $[a;b]$, т. е. существуют такие m и M, что $m \le f(x) \le M$ при всех $x \in [a;b]$. Тогда по свойству 7

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a);$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Обозначим $C = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$ Это значение расположено между m и M. Следовательно, по второй теореме Больцано–Коши найдется такая точка $c \in [a;b]$, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \lhd \qquad (2)$$

Замечание. Теорема о среднем имеет простой геометрический смысл для неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$: площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника, построенного на отрезке $[a;b]$ и имеющего высоту $f(c)$ при некотором $c \in [a;b]$.

§ 2. Основные методы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. Тогда для каждого $x \in [a;b]$ определен интеграл $\int_a^x f(t)dt$ и можно рассмотреть функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, определенную на отрезке $[a;b]$, – ***интеграл с переменным верхним пределом***.

Т 1 (о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x),$$

т. е. производная интеграла функции $f(x)$ по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу.

Доказательство. По определению производной,

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим приращение функции. В силу свойства аддитивности определенного интеграла и теоремы о среднем получим

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x$$

при некотором *c*, лежащем между *x* и $x+\Delta x$. Следовательно,

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ c\to x}} f(c)=f(x),$$

поскольку при $\Delta x\to 0$ точка *c*, лежащая между *x* и $x+\Delta x$, стремится к точке *x*, а функция $f(x)$ непрерывна по условию. ◁

Упражнение 1. Найти $\left(\int_{x^2}^{1}\frac{\ln x}{x}dx\right)'$.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она имеет первообразную на этом отрезке; в частности, интеграл с переменным верхним пределом $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$ на этом отрезке. Тогда $\int\limits_a^x f(t)dt$ и $F(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$, а значит, они отличаются только на постоянное слагаемое, т. е.

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

При $x = a$ получим $\int\limits_a^a f(t)dt = F(a) + C$, т. е. $F(a) + C = 0$, откуда $C = -F(a)$.

При $x = b$ получим $\int\limits_a^b f(t)dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$.

Таким образом, *если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, *то*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),}$$

где $F(x)$ *– какая-либо первообразная для* $f(x)$ *на этом отрезке*.

Эта формула называется ***формулой Ньютона-Лейбница.*** Она выражает связь между определенным и неопределенным интегралами и является основным методом вычисления определенного интеграла.

Пример 1. Вычислим:

а) $\int\limits_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2;$

б) $\int\limits_1^2 (3x^2 - 2)dx = (x^3 - 2x)\Big|_1^2 = (2^3 - 2\cdot 2) - (1^3 - 2\cdot 1) = 5;$

в) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2\sqrt{3+6} - 2\sqrt{3+1} = 2.$•

Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.}$$

Пример 2. Вычислим

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3x+1)\cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x+1 & du = 3dx \\ dv = \cos 2x\,dx & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3x+1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = \frac{\frac{3\pi}{4}+1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 + \frac{3}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{3\pi+4}{8} + \frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cos 0 = \frac{3\pi+4}{8} - \frac{3}{4} = \frac{3\pi-2}{8}. \bullet$$

Замена переменной в определенном интеграле

Т 2. 1) Если функция $x = \varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[t_1; t_2]$;

2) $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b,$ и множеством значений функции $\varphi(t)$ на отрезке $[t_1; t_2]$ является отрезок $[a; b]$;

3) функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.}$$

Замечание. При замене переменной в определенном интеграле необходимо пересчитывать пределы интегрирования, чтобы их значения соответствовали новой переменной, но не нужно возвращаться к исходной переменной.

Пример 3. Вычислим

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{l} x = t^2; \quad dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \\ x = 9 \Rightarrow t = 3 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2(t - \ln|t+1|)\Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4) - 2(2 - \ln 3) =$$

$$= 2 - 2\ln 4 + 2\ln 3 = 2 - 2\ln\frac{4}{3}. \bullet$$

Свойства интегралов от четных и нечетных функций по симметричному относительно 0 промежутку

Утв. 1. 1) Если $f(x)$ – *четная* функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$$

2) если $f(x)$ – *нечетная* функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Доказательство. 1) По свойству аддитивности

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

В первом интеграле сделаем замену $t = -x$:

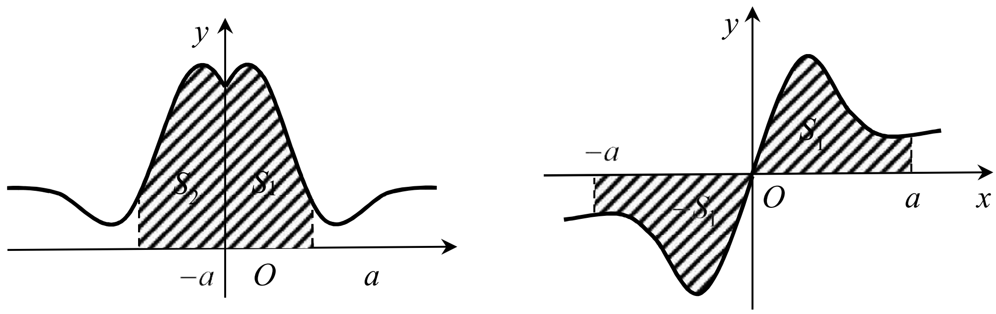
$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \left| \begin{array}{l} t = -x; dt = -dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = -a \Rightarrow t = a \end{array} \right| = -\int_a^0 f(-t)dt = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt.$$

Переобозначив переменную, получаем результат.

2) Второй случай доказывается аналогично. $\lhd$

Упражнение 2. Доказать пункт 2).

Рис. 9 иллюстрирует доказанное свойство.



а — случай четной функции $f(x)$: $S = 2S_1$, так как $S_1 = S_2$

б — случай нечетной функции $f(x)$

Рис. 9. Свойства интегралов в симметричных пределах

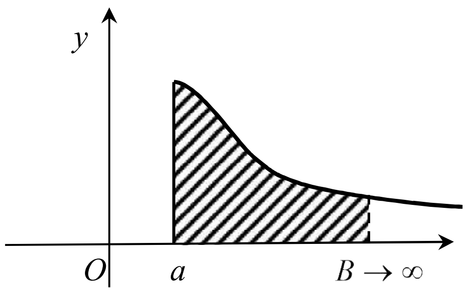
Пример 4. $\int_{-2}^{2} x^3 \sqrt[5]{x^2 - 1}\,dx = 0.$ •

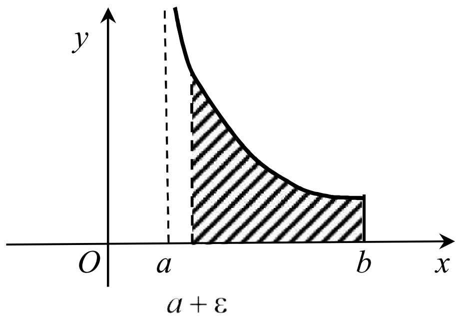
Упражнение 3. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx.$

§ 3. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла мы предполагали, что: 1) пределы интегрирования конечны; 2) подынтегральная функция ограничена на отрезке интегрирования.

Несобственный интеграл является обобщением понятия определенного интеграла на случай бесконечного промежутка интегрирования (рис. 10а) или неограниченной подынтегральной функции (рис.10б). Основная идея построения несобственного интеграла: отступить от особенности внутрь отрезка интегрирования, а затем перейти к пределу.





а
Бесконечный промежуток интегрирования

б
Подынтегральная функция неограничена на отрезке [a; b]

Рис. 10. Построение несобственного интеграла

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (несобственные интегралы 1-го рода)

Опр. 1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a; B]$, где $B \geq a$. ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом*** называется предел

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx;}$$

причем если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Пример 1. Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^B = \lim_{B\to+\infty} (\ln B - 0) = +\infty,$$

т. е. несобственный интеграл расходится. •

Пример 2. Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha \neq 1$.

Решение.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B x^{-\alpha}dx = \lim_{B\to+\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(\frac{B^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right)=\frac{1}{-\alpha+1}\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{B^{\alpha-1}}-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha>1,\\ \infty, & \text{если } \alpha<1.\end{cases}$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится, если $\alpha<1$, и сходится, если $\alpha>1$.•

Таким образом,

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}-\begin{cases}\text{сходится}, & \text{если } \alpha>1,\\ \text{расходится}, & \text{если } \alpha\le 1.\end{cases}} \tag{1}$$

Этот факт используется для исследования сходимости несобственных интегралов от более сложных функций путем сравнения с данным интегралом.

Несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования определяется аналогично определению 1.

Опр. 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[A;b]$, где $A\le b$, то ***несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом*** называется предел

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx;}$$

причем если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Опр. 3. ***Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования*** определяется как сумма

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)dx;}$$

причем несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если оба интеграла в правой части равенства сходятся, и ***расходящимся*** в противном случае.

Замечание. Доказано, что это определение не зависит от выбора промежуточной точки c.

Пример 3. Вычислим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}} \int_A^B \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}} \operatorname{arctg} x \Big|_A^B = \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}} (\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \operatorname{arctg} B - \lim_{A\to-\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \bullet$$

Замечание. $A \to -\infty$ и $B \to +\infty$ независимо друг от друга!

В некоторых случаях для интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, который расходится, рассматривают его ***сходимость в смысле главного значения***

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

(Это понятие и обозначение «v.p.» (от фр. *valeur principale* – главное значение) ввел О. Коши.)

Если несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то он сходится и в смысле главного значения. Обратное утверждение неверно.

Если несобственный интеграл расходится, то в смысле главного значения он может как сходиться, так и расходиться.

Пример 4. 1) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ сходится;

2) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$ сходится;

3) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^2+1}$ расходится. •

Упражнение 1. Показать, что несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^2+1}$ расходятся.

Признаки сравнения несобственных интегралов 1-го рода

Т 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом конечном промежутке, содержащемся в $[a;+\infty)$, и $0 \le f(x) \le g(x)$ при всех $x \in [a;+\infty)$. Тогда:

– из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

– из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Пример 5. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4}$.

Решение. Поскольку неравенство $0 \le \frac{1}{x^4+4} \le \frac{1}{x^4}$ справедливо при всех x, то $0 \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4} \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$.

Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ от большей функции сходится, поскольку это интеграл вида (1) с $\alpha = 4 > 1$. Следовательно, в силу теоремы 1 несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4}$ от меньшей функции также сходится. •

Упражнение 2. Найти первообразную для $\frac{1}{x^4+4}$.

Т 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом конечном промежутке, содержащемся в $[a;+\infty)$; $f(x) > 0, g(x) > 0$ при всех $x \in [a;+\infty)$ и существует конечный, отличный от 0 предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ $(A \ne 0, \ne \infty)$. Тогда несобственные интегралы

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ ведут себя в смысле сходимости одинаково, т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Т 3. Если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. (В этом случае интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***.)

Замечание 1. Для сравнения обычно используются интегралы вида (1).

Замечание 2. Аналогичные признаки сравнения верны и для несобственных интегралов по другим бесконечным промежуткам.

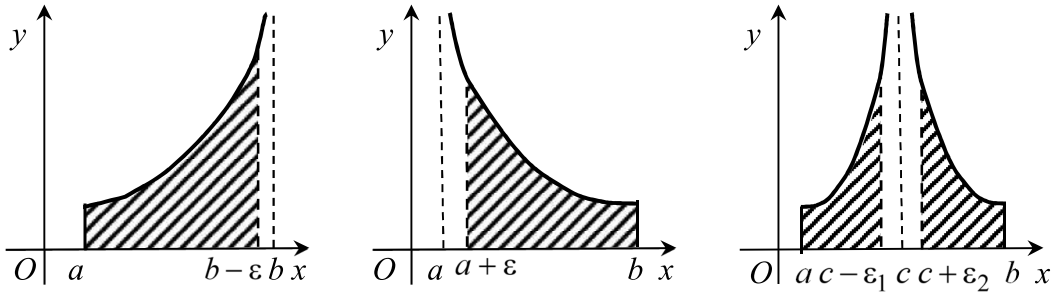
Несобственные интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода)

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке, содержащемся в $[a;b)$, и в точке b имеет бесконечный разрыв (т. е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$). В этом случае говорят, что функция $f(x)$ имеет ***особенность*** в точке $x=b$, а саму точку $x=b$ называют ***особой*** точкой.

Опр. 4. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке, содержащемся в $[a;b)$, и в точке b имеет особенность (рис. 11а). ***Несобственным интегралом 2-го рода*** от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b)$ называется предел

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;}$$

причем если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.



а — Особая точка $x = b$ – верхний предел интегрирования

б — Особая точка $x = a$ – нижний предел интегрирования

в — Особая точка $x = c$ внутри отрезка интегрирования

Рис. 11. Построение несобственного интеграла 2-го рода

Пример 6. Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ неограничена в окрестности точки $x = 4$ (эта точка является особой). Для вычисления несобственного интеграла нужно отступить от особенности *внутрь* отрезка интегрирования, поэтому интеграл должен быть рассмотрен в пределах от 0 до $4-\varepsilon$:

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{(x-4)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Bigg|_0^{4-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{4-\varepsilon-4} - \frac{1}{4}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{4}\right) = +\infty,$$

т. е. несобственный интеграл расходится. •

Упражнение 3. Показать, что

$$\boxed{\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} - \begin{cases} \text{расходится,} & \text{если } \alpha \ge 1, \\ \text{сходится,} & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}} \qquad (2)$$

Сравнить с (1).

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции, имеющей особенность на нижнем пределе интегрирования (рис. 11б).

Опр. 5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке, содержащемся в $(a;b]$, и в точке a имеет особенность (в том смысле, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$). ***Несобственным интегралом 2-го рода*** от функции $f(x)$ на промежутке $(a;b]$ называется предел

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;}$$

причем если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Упражнение 4. Показать, что

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}-\begin{cases}\text{расходится,} & \text{если } \alpha\ge 1,\\ \text{сходится,} & \text{если } \alpha<1.\end{cases}} \tag{3}$$

Сравнить с (1) и (2).

Определение несобственного интеграла от функции, имеющей особенность *внутри* отрезка интегрирования, дается аналогично определению 3 несобственного интеграла с двумя бесконечными пределами интегрирования путем представления в виде суммы двух несобственных интегралов (рис. 11в).

Опр. 6. Пусть функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв (*особенность*) в точке $c\in[a;b]$ и интегрируема на любых отрезках, содержащихся в $[a;c)$ и $(c;b]$. ***Несобственный интеграл 2-го рода*** от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ определяется как сумма

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;}$$

причем несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если оба интеграла в правой части равенства сходятся, и ***расходящимся*** в противном случае.

Пример 7. Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to+0}3\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}3\sqrt[3]{x}\Big|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(-3\sqrt[3]{\varepsilon_1}+3\right)+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(3-3\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)=6,$$

т. е. интеграл сходится.•

Замечание. $\varepsilon_1\to+0$ и $\varepsilon_2\to+0$ независимо друг от друга!

Для расходящегося интеграла от функции, имеющей особенность в точке $c\in[a;b]$ вводится понятие ***главного значения*** по формуле

$$\mathrm{v.p.}\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right).$$

Признаки сравнения для несобственных интегралов 2-го рода формулируются аналогично признакам сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.

Т 4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом конечном промежутке, содержащемся в $[a;b)$, и $0\le f(x)\le g(x)$ при всех $x\in[a;b)$. Тогда:

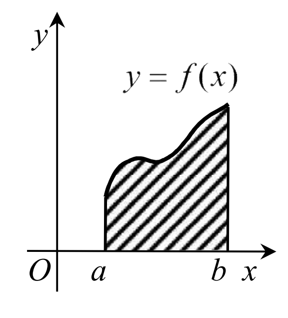
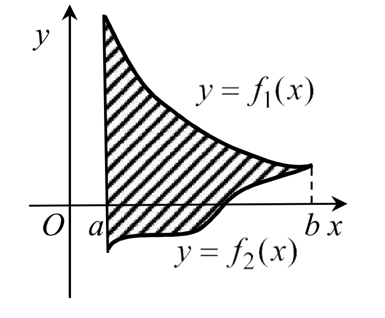
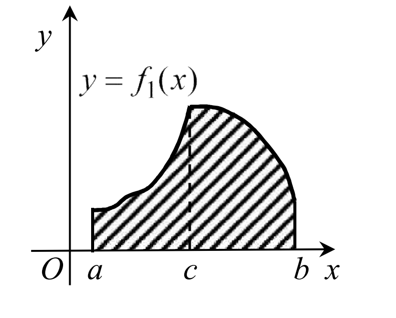
– из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$;

– из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx.$

Упражнение 5. Сформулировать предельный признак сравнения несобственных интегралов 2-го рода аналогично теореме 2.

§ 4. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

		
$S = \int\limits_a^b f(x)dx$	$S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$	$S = \int\limits_a^c f_1(x)dx + \int\limits_c^b f_2(x)dx$

Пример 1. Найдем площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2$ и прямой $y = x$.

Решение. Построим линии и определим фигуру, площадь которой нужно найти (рис. 12).

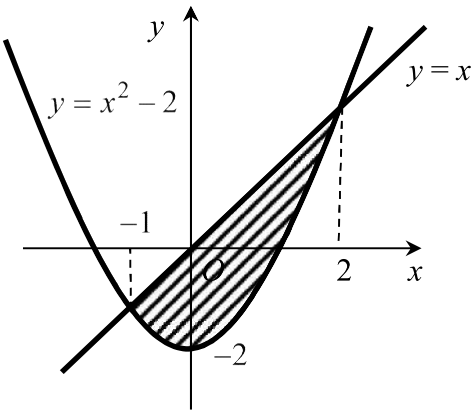


Рис. 12. Фигура, ограниченная параболой и прямой

Фигура ограничена сверху прямой, а снизу параболой, поэтому ее площадь будет находиться по формуле $S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$, где $y = f_1(x)$ – уравнение верхней линии (прямой), $y = f_2(x)$ – уравнение нижней линии (параболы). Чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения линий, решив систему:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = x^2 - 2; \end{cases}$$

$$x^2 - 2 = x;$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет корни $x_1 = -1; x_2 = 2.$ Это абсциссы точек пересечения параболы и прямой (заметим, что ординаты точек находить не обязательно).

Итак, искомая площадь равна

$$S = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \left(2 - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) =$$

$$= 2 + 4 + 2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4{,}5. \bullet$$

Пример 2. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x,\ y = \dfrac{1}{x^2},\ x = 3$ и осью абсцисс.

Решение. Построим линии и определим фигуру, которая ограничена всеми четырьмя линиями, включая ось абсцисс (рис. 13). (Чтобы правильно определить заданную фигуру, все линии, указанные в условии, выделяем на чертеже более жирно.)

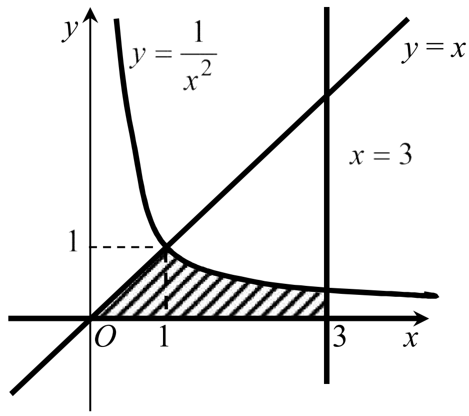
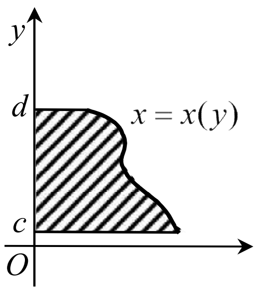
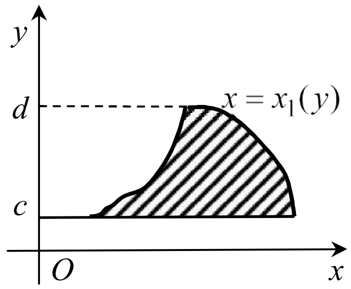
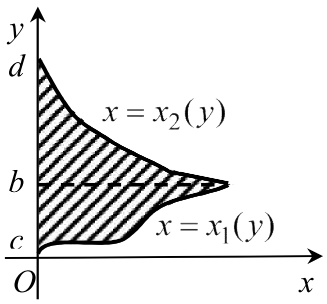


Рис. 13. Фигура, разбитая на две криволинейные трапеции, прилежащие к оси Ox

Фигура прилежит к оси Ox (ограничена снизу осью Ox), а ее верхняя граница идет сначала по прямой $y = x$, а затем по линии $y = \dfrac{1}{x^2}$. Эти линии пересекаются при $x = 1$, поэтому разобьем фигуру на две вертикальной прямой $x = 1$ и вычислим искомую площадь как сумму двух площадей:

$$S = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{1}{x}\right|_1^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{6}. \bullet$$

Отметим, что в некоторых случаях удобнее интегрировать по переменной y.

		
$S = \int_c^d x(y) dy$	$S = \int_c^d (x_1(y) - x_2(y)) dy$	$S = \int_c^b x_1(y) dy + \int_b^d x_2(y) dy$

Пример 3. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 4,\ x + y = 2.$

Решение. Построив параболу $y^2 = x + 4$ и прямую $x + y = 2$ (рис. 14), видим, что фигура ограничена справа прямой, а слева параболой. Площадь фигуры удобнее будет находить по формуле $S = \int_c^d (x_1(y) - x_2(y)) dy$, где $x = x_1(y)$ – уравнение прямой, $x = x_2(y)$ – уравнение параболы. (Отметим, что в уравнениях линий здесь следует выразить x через y: $x = 2 - y$; $x = y^2 - 4$.)

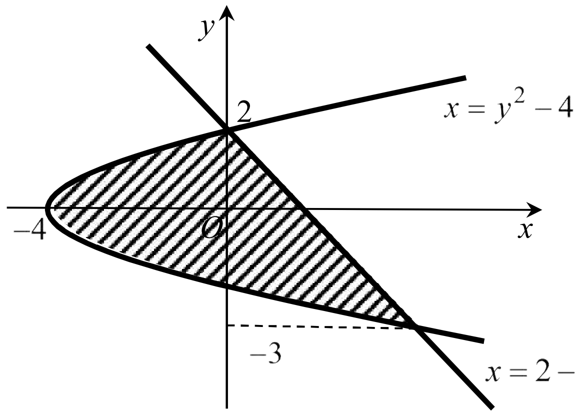


Рис. 14. Фигура, ограниченная параболой и прямой

Чтобы определить пределы интегрирования, найдем ординаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y^2 = x + 4, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 - 4, \\ x = 2 - y; \end{cases}$$

$$y^2 - 4 = 2 - y;$$

$$y^2 + y - 6 = 0.$$

Отсюда $y_1 = 2; y_2 = -3.$ Следовательно,

$$S = \int_{-3}^{2} (2 - y - y^2 + 4)dy = \int_{-3}^{2} (6 - y - y^2)dy = 6y\Big|_{-3}^{2} - \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-3}^{2} - \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-3}^{2} =$$

$$= 12 + 18 - \left(4 - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} + 9\right) = 30 - 4 - 9 + 4 + \frac{1}{2} - 2 - \frac{2}{3} = 19 - \frac{1}{6} = 18\frac{5}{6}. \bullet$$

Если криволинейная трапеция на отрезке $[a; b]$ (см. рис. 6) ограничена снизу осью Ox (прилежит к оси Ox), а сверху линией, заданной *параметрически*:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то, выполнив замену в интеграле $S_{\text{кр. трап.}} = \int_{a}^{b} f(x)dx,$ получим следующую формулу:

$$\boxed{S_{\text{кр.трап}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,}$$

где $x(t_1) = a; x(t_2) = b.$

Пример 4. Найдем площадь, ограниченную эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \; 0 \le t \le 2\pi.$

Решение. Эллипс с полуосями a и b (рис. 15) располагается симметрично относительно осей координат, поэтому достаточно вычислить площадь той части эллипса, которая располагается в первой координатной четверти, а затем умножить результат на 4.

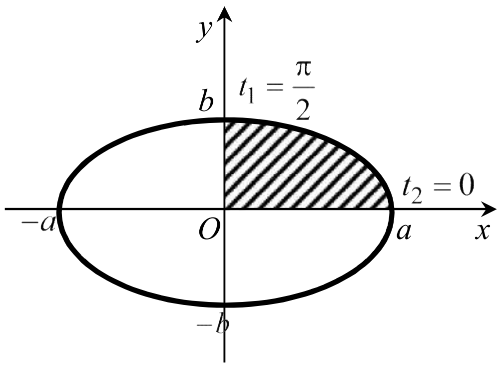


Рис. 15. Эллипс с полуосями *a* и *b*

Для этой части фигуры переменная x изменяется от $x = 0$ до $x = a$. Определим соответствующие значения параметра t:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} a\cos t = 0, \\ b\sin t = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t = 0, \\ \sin t = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{cases} x = a, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a\cos t = a, \\ b\sin t = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos t = 1, \\ \sin t = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t_2 = 0.$$

Таким образом, площадь фигуры равна

$$S=4\int_0^a y(x)dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)x'(t)dt=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(-a\sin t)dt=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 tdt=$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2ab\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt\right)=2ab\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=2ab\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)\right)=\pi ab.$$

Итак, площадь эллипса с полуосями a и b равна $S_{эл}=\pi ab.$ Заметим, что в частном случае при $a=b=R$ получим площадь круга πR^2.●

Пример 5. Найдем площадь, ограниченную петлей линии
$$\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$$

Решение. Построим линию по точкам. Для этого составим таблицу, в которой вычислим значения координат x и y для выбранных значений параметра t, а затем пронумеруем точки по возрастанию параметра t и соединим их в полученном порядке.

Предварительно найдем некоторые характерные точки, в частности, точки пересечения кривой с осями координат.

В точках пересечения с осью Ox координата $y=0,$ поэтому $3t-t^3=0,$ или $t(3-t^2)=0,$ откуда $t_1=0; t_{2;\,3}=\pm\sqrt{3}.$ Соответственно, $x_1=0; x_{2;\,3}=9,$ т. е. кривая имеет самопересечение в точке $(9;0)$ при $t=\pm\sqrt{3}.$

Находя точки пересечения с осью Oy: $x=0,$ или $3t^2=0,$ получаем одно значение $t=0,$ т. е. точку $(0;0).$

Отметим также, что функция $x=3t^2$ – четная, а $y=3t-t^3$ – нечетная функция, поэтому линия будет симметрична относительно оси Ox.

Составим таблицу и построим кривую (рис. 16).

t	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	1	-1	2	-2	3	-3

x	0	9	9	3	3	12	12	27	27
y	0	0	0	2	–2	–2	2	–18	18
Точка	A_5	A_7	A_3	A_6	A_4	A_8	A_2	A_9	A_1

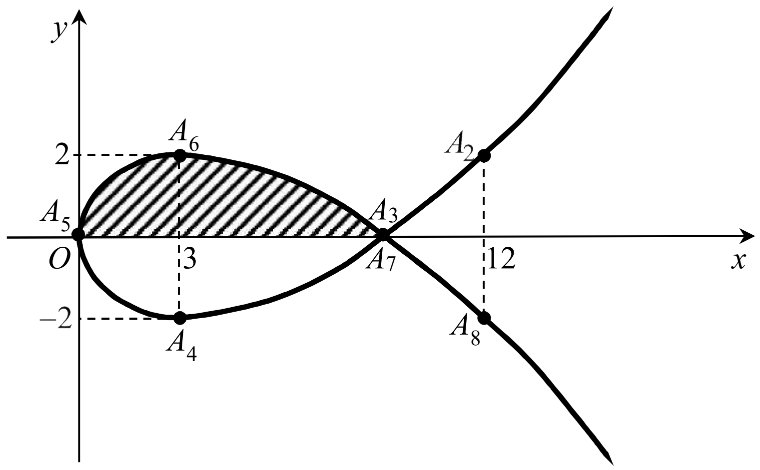


Рис. 16. Вычисление площади фигуры, ограниченной петлей

Фигура расположена симметрично относительно оси Ox, поэтому вычислим площадь ее верхней половины и умножим результат на 2. Эта часть фигуры ограничена сверху кривой $A_5A_6A_7$, поэтому переменная t будет изменяться от $t = 0$ (в точке A_5) до $t = \sqrt{3}$ (в точке A_7). Таким образом,

$$S = 2\int_0^9 y(x)dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} y(t)x'(t)dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} (3t - t^3)6tdt = 12\int_0^{\sqrt{3}} (3t^2 - t^4)dt =$$

$$= 12\left(t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 12\left(3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{72\sqrt{3}}{5}. \bullet$$

Вычисление длин дуг кривых

Пусть функция $y = f(x)$ и ее производная $f'(x)$ *непрерывны* на отрезке $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, где

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Пусть этим точкам соответствуют точки $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ на кривой (см. рис. 17). Проведем отрезки $M_0M_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}M_n$. Если длины всех частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ стремятся к 0, то длина ломаной $M_0M_1M_2...M_{n-1}M_n$ приближается к длине дуги кривой.

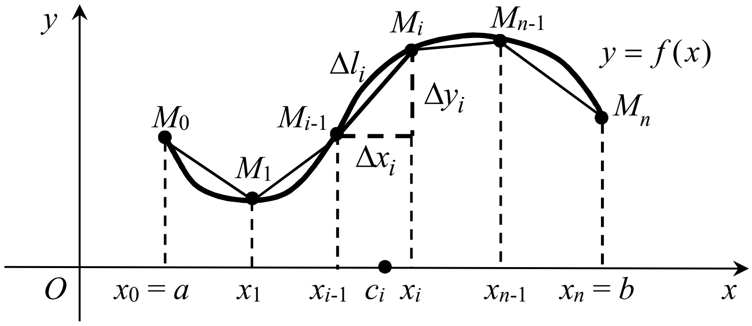


Рис. 17. Вычисление длины дуги кривой

Обозначим длину частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; приращение функции на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ равно $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$; длина отрезка $M_{i-1}M_i$ может быть выражена по теореме Пифагора как $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. По теореме Лагранжа $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i$ при некотором $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, поэтому

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i))^2(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Обозначив диаметр разбиения через $d_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, получаем, что длина дуги кривой равна пределу

$$l = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i,$$

т. е. пределу (при измельчении разбиения) интегральной суммы для функции $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ на отрезке $[a; b]$. Следовательно,

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.} \qquad (1)$$

Пример 6. Вычислить длину дуги кривой $y^2=(2-x)^3$, отсекаемой прямой $x=0$.

Решение. Заданная кривая – это полукубическая парабола с областью определения $D(y)=(-\infty;2]$. Выразив y, получим $y=\pm(2-x)^{\frac{3}{2}}$, т. е. линия симметрична относительно оси Ox. Найдем длину l_1 одной ветви $y=(2-x)^{\frac{3}{2}}$, расположенной в верхней полуплоскости, при этом по условию $0\le x\le 2$. Вычисляя производную $y'=-\dfrac{3}{2}\sqrt{2-x}$ и подставляя в (1), получаем

$$l_1=\int_0^2\sqrt{1+\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2-x}\right)^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{9}{4}(2-x)}dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4+9(2-x)}{4}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{22-9x}dx=-\frac{1}{18}\left.\frac{(22-9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2=-\frac{1}{27}\left(4^{\frac{3}{2}}-22^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{22\sqrt{22}-8}{27}.$$

Тогда длина всей кривой $l=\dfrac{44\sqrt{22}-16}{27}$.●

Если кривая задана *параметрически* уравнениями

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$$

причем функции $x(t), y(t)$ и их производные непрерывны на отрезке $[t_1;t_2]$ и $x'(t)\neq 0$ при $t\in[t_1;t_2]$, то по правилу дифференцирования параметрически заданной функции имеем

$$f'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

поэтому

$$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\frac{(y'(t))^2}{(x'(t))^2}}=\frac{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}{|x'(t)|}.$$

Учитывая, что $dx = x'(t)dt,$ получим формулу

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,} \qquad (2)$$

причем здесь всегда $t_1 < t_2$.

Упражнение 1. Получить формулу (2), сделав замену переменной в (1) с учетом того, что в силу ограничений на функцию $x(t)$ ее производная сохраняет знак на всем отрезке $[t_1; t_2]$, так что если $x'(t) > 0$ на $[t_1; t_2]$, то $|x'(t)| = x'(t)$ и $x(t_1) = a; x(t_2) = b,$ а если $x'(t) < 0$ на $[t_1; t_2]$, то $|x'(t)| = -x'(t)$ и $x(t_1) = b; x(t_2) = a.$

Рассматривая длину кривой на отрезке $[a; x]$ с переменным правым концом, по формуле (1) получим функцию зависимости длины кривой от x:

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

откуда по теореме о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу получим выражение ***дифференциала длины дуги*** в виде

$$dl = l'(x)dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Аналогично из (2) получаем выражение дифференциала длины дуги кривой, заданной параметрически:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Эти формулы используются при вычислении криволинейных интегралов 1-го рода.

Вычисление объемов пространственных тел по известным площадям поперечных сечений

Пусть пространственное тело ограничено плоскостями $x = a$ и $x = b$ и известна функция $S(x),$ выражающая площадь сечения этого тела плоскостью $x = \text{const},$ причем функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Как и раньше, разобьем отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n,$ где

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Если длины всех частичных отрезков достаточно малы, то каждый слой тела, отвечающий отрезку $[x_{i-1}; x_i]$, можно рассматривать приблизительно как цилиндр с основанием $S(c_i)$ при некотором $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (см. рис. 18).

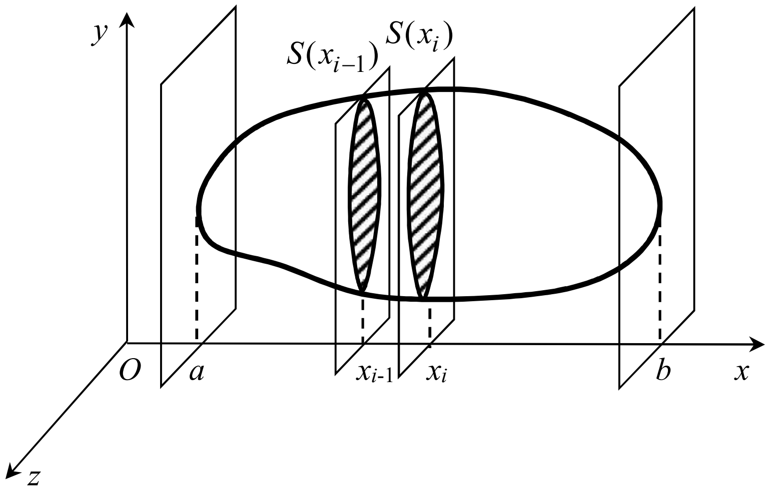


Рис. 18. Вычисление объема пространственного тела с известными площадями поперечных сечений

Измельчая диаметр разбиения $d_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0,$ получаем в пределе объем пространственного тела: $V = \lim\limits_{d_n \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i,$ т. е.

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx.} \tag{3}$$

Пример 7. Вычислим объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 19).

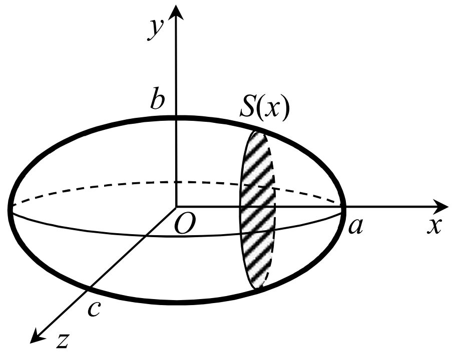


Рис. 19. Эллипсоид с полуосями a, b, c

Решение. В сечении при фиксированном x получаем линию

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

или

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

т. е. эллипс с полуосями $a(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\, b(x)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Из результатов примера 4 следует, что площадь этого эллипса равна

$$S(x)=\pi a(x)b(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Тогда объем эллипсоида найдем по формуле (3):

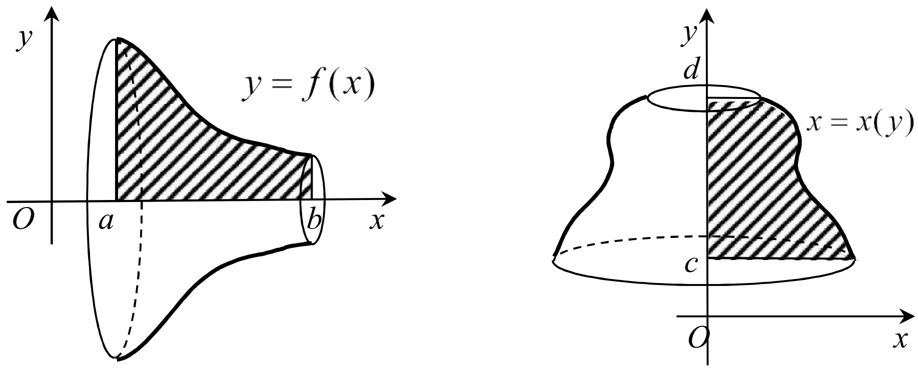
$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$=2\pi bc\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=2\pi bc\left(a-\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc.\bullet$$

Вычисление объемов тел вращения

Пусть пространственное тело получено вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ (рис. 20а). Тогда площадь $S(x)$ поперечного сечения при фиксированном x – это площадь круга радиуса $f(x)$, поэтому $S(x) = \pi f^2(x)$ и *объем тела вращения* равен

$$\boxed{V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)dx.}$$



а
Вращение вокруг оси Ox

б
Вращение вокруг оси Oy

Рис. 20. Тело вращения

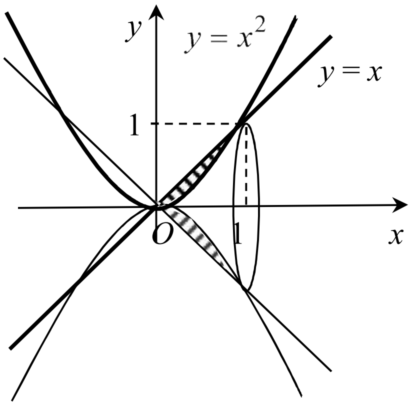
Аналогично, объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = x(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 20б), вычисляется по формуле

$$\boxed{V_{Oy} = \pi\int_c^d x^2(y)dy.}$$

Пример 8. Найдем объемы тел, которые получаются при вращении криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x$: **а)** вокруг оси Ox; **б)** вокруг оси Oy.

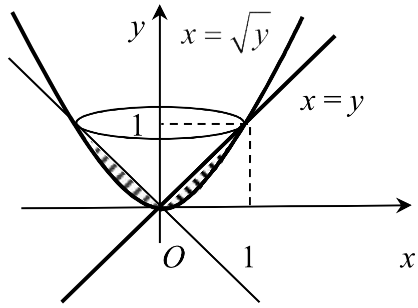
Решение. **а)** Объем тела, которое получается при вращении криволинейной трапеции вокруг оси Ox, вычисляется интегрированием по переменной x. Фигура ограничена сверху прямой $y = x$, а снизу параболой $y = x^2$ (рис. 21а), поэтому объем тела вращения равен разности двух объемов:

$$V_{Ox}=V_1-V_2=\pi\int_0^1 x^2dx-\pi\int_0^1 (x^2)^2\,dx=\pi\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1-\pi\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{15}.$$



а

Вращение вокруг оси Ox



б

Вращение вокруг оси Oy

Рис. 21. Вращение криволинейной трапеции

б) Объем тела, которое получается при вращении криволинейной трапеции вокруг оси Oy, вычисляется интегрированием по переменной y, при этом рисунок проектируется на Oy и в уравнениях линий переменная x выражается через y. Фигура ограничена справа параболой $x=\sqrt{y}$, а слева прямой $x = y$ (рис. 21б), объем тела вращения равен разности двух объемов:

$$V_{Oy}=V_1-V_2=\pi\int_0^1\left(\sqrt{y}\right)^2 dy-\pi\int_0^1 y^2dy=\pi\int_0^1 y\,dy-\pi\int_0^1 y^2dy=$$

$$=\pi\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1-\pi\frac{y^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.\bullet$$

Упражнение 2. Вывести с помощью определенного интеграла формулы для вычисления объемов цилиндра, конуса, усеченного конуса.

Вычисление площадей поверхностей тел вращения

Пусть функция $y=f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Можно показать, что площадь поверхности, образованной вращением линии $y = f(x), a \le x \le b$, вокруг оси Ox, равна

$$S_{Ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Аналогично, если функция $x = x(y)$ и ее производная $x'(y)$ непрерывны на отрезке $[c; d]$, то площадь поверхности, образованной вращением линии $x = x(y), c \le y \le d$, вокруг оси Oy, равна

$$S_{Oy} = 2\pi\int_c^d x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy.$$

Упражнение 3. Вывести с помощью определенного интеграла формулы для вычисления площадей боковых поверхностей цилиндра, конуса, усеченного конуса.

§ 5. Приближенное вычисление определенного интеграла

Предположим, что рассматривается задача вычисления интеграла $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,01. Геометрически это означает, что нужно найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ на отрезке $[0; 1]$ (рис. 22). Однако интеграл $\int \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ – неберущийся. Поэтому для решения таких задач используются различные приближенные формулы, основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

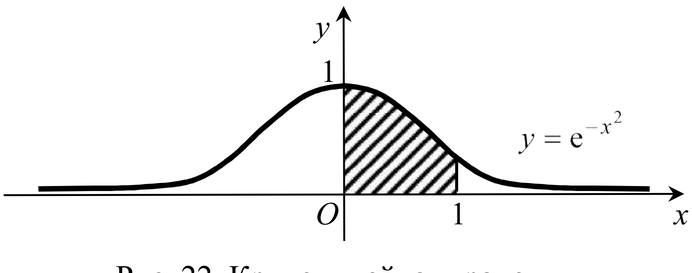


Рис. 22. Криволинейная трапеция

Формула прямоугольников (формула средних прямоугольников)

Для вычисления интеграла $I=\int\limits_a^b f(x)dx$ разбивают отрезок $[a;b]$ точками $x_0=a, x_1, x_2, ..., x_n=b$ на n равных отрезков длины $h=\dfrac{b-a}{n}$ (соответственно $x_i=x_0+ih, 1\le i\le n$) и заменяют площадь криволинейной трапеции на каждом частичном отрезке на площадь прямоугольника высоты $\tilde{y}_i=f(c_i)$, где $c_i=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$ – середина отрезка $[x_{i-1};x_i]$, тогда (см. рис. 23)

$$I=\int\limits_a^b f(x)dx\approx S_n^{\text{пр}}=h\sum_{i=1}^{n}\tilde{y}_i.$$

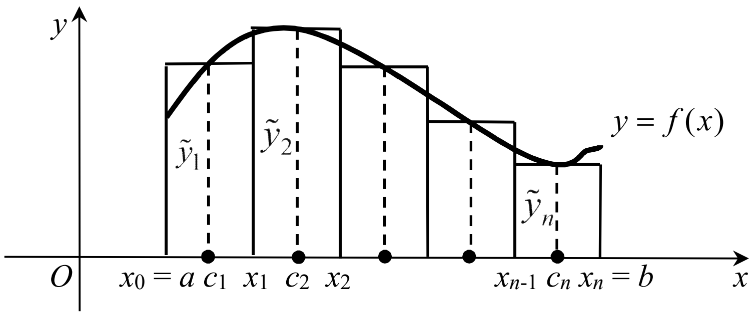


Рис. 23. Приближенное вычисление определенного интеграла методом средних прямоугольников

Доказано, что абсолютная погрешность метода средних прямоугольников определяется неравенством

$$\left|R_n\right|=\left|I-S_n^{\text{пр}}\right|\le\frac{(b-a)^3M_2}{24n^2},$$

где $M_2=\max\limits_{x\in[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$.

Формула трапеций

Формула трапеций получается при замене на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ площади криволинейной трапеции площадью обычной трапеции.

Обозначим $h = \dfrac{b-a}{n}$; $x_0 = a$; $x_i = x_0 + ih, 1 \le i \le n$; $y_i = f(x_i)$.

Тогда (см. рис. 24)

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx S_n^{\text{тр}} = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right).$$

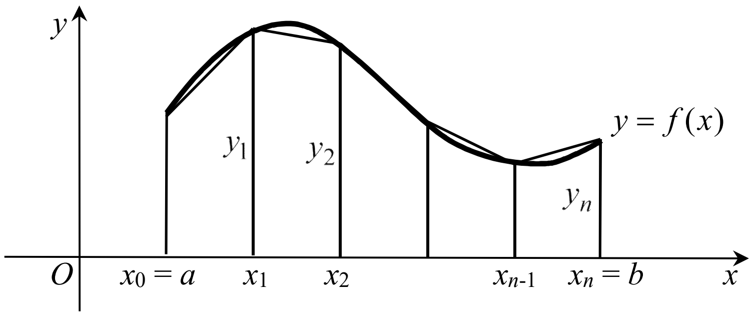


Рис. 24. Приближенное вычисление определенного интеграла методом трапеций

Доказано, что абсолютная погрешность метода трапеций определяется неравенством

$$\left|R_n\right| = \left|I - S_n^{\text{тр}}\right| \le \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2},$$

где $M_2 = \max\limits_{x\in[a;\, b]} \left|f''(x)\right|$.

Формула парабол (формула Симпсона)

Формула Симпсона получается при замене на каждом частичном отрезке графика функции $f(x)$ параболой.

То́мас Си́мпсон
(англ. *Thomas Simpson*)
(1710–1761)

английский математик.
Член Лондонского королевского общества, профессор Вулиджской военной академии. Был ткачом шелковых тканей, математику изучил самостоятельно.
Основные труды по геометрии, тригонометрии и математическому анализу. Один из основоположников теории ошибок.

При этом отрезок $[a;b]$ разбивают на *четное* число $2n$ частичных отрезков и на каждой паре частичных отрезков заменяют график функции параболой, построенной по трем точкам, отвечающим концам отрезков. Обозначим $h=\dfrac{b-a}{2n}$; $x_0=a$; $x_i=x_0+ih, 1\le i\le 2n$; $y_i=f(x_i)$. Тогда (см. рис. 25)

$$I=\int_a^b f(x)dx\approx$$

$$\approx S_{2n}^{\text{пар}}=\frac{h}{3}(y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})).$$

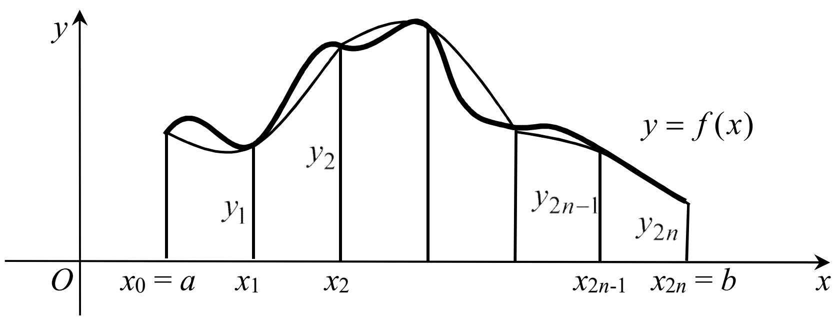


Рис. 25. Приближенное вычисление определенного интеграла методом парабол

Доказано, что абсолютная погрешность метода Симпсона определяется неравенством

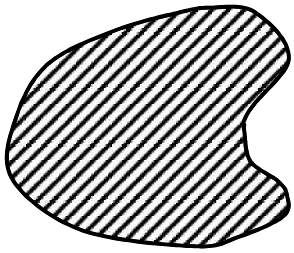
$$\left|R_{2n}\right| = \left|I - S_{2n}^{\text{пар}}\right| \le \frac{(b-a)^5 M_4}{180(2n)^4},$$

где $M_4 = \max\limits_{x\in[a;b]}\left|f^{IV}(x)\right|$.

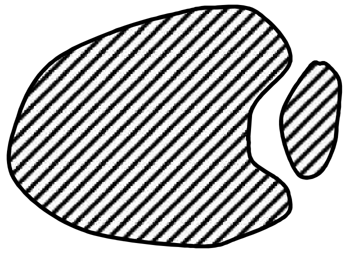
Упражнение. На сколько частей нужно разбить отрезок интегрирования, чтобы вычислить $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,01, применяя: а) метод средних прямоугольников; б) метод трапеций; в) метод парабол?

§ 6. Интеграл по фигуре как обобщение понятия определенного интеграла

Опр. 1. Множество точек называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить линией, все точки которой принадлежат данному множеству (рис. 26).



а
Связное множество



б
Несвязное множество

Рис. 26. Связное и несвязное множества

Опр. 2. Под ***геометрической фигурой*** Φ будем понимать одно из следующих связных (включая границу) множеств:

(А) отрезок $[a;b]$ на числовой прямой;

(Б) область D на плоскости (плоская область);

(В) пространственная область Ω, ограниченная замкнутой поверхностью, – тело в пространстве;

(Г) линия L на плоскости или в пространстве;

(Д) поверхность σ в пространстве.

Опр. 3. ***Диаметром*** $d(\Phi)$ фигуры Φ называется максимальное расстояние между двумя точками этой фигуры.

Будем рассматривать фигуры конечного диаметра, т. е. ***ограниченные фигуры***.

Опр. 4. Под ***мерой*** $\mu(\Phi)$ геометрической фигуры будем понимать:

(А) длину отрезка $[a;b]$;

(Б) площадь S_D плоской области D;

(В) объем V_Ω тела Ω;

(Г) длину l_L линии L;

(Д) площадь S_σ поверхности σ.

Интеграл по фигуре (ИФ) является обобщением понятия определенного интеграла на случай различных геометрических фигур.

Пусть во всех точках множества Φ определена и непрерывна функция $f(M), M \in \Phi$.

Разобьем фигуру Φ на n частичных (элементарных) фигур $\Phi_i, 1 \le i \le n,$ с мерами $\Delta\mu_i$; обозначим через $d(\Phi_i)$ диаметр фигуры Φ_i; на каждой элементарной фигуре выберем произвольную точку $M_i \in \Phi_i$ (см. рис. 27) и вычислим значение функции в этой точке: $f(M_i)$. Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i. \tag{1}$$

Эта сумма называется ***n-ой интегральной суммой для функции*** $f(M)$ ***по фигуре*** Φ.

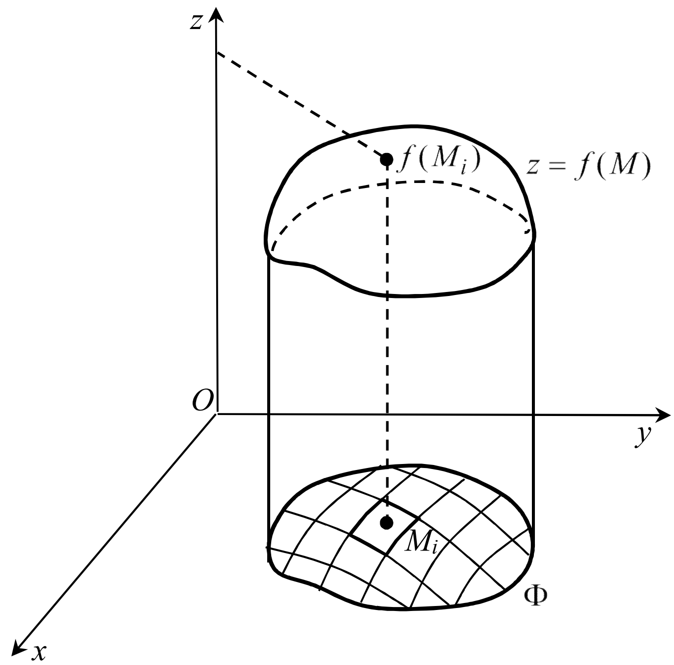


Рис. 27. Составление интегральной суммы для функции $f(M)$ по фигуре Ф

Обозначим через $d_n = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Phi_i)$ ***диаметр разбиения*** – наибольший из диаметров элементарных фигур, составляющих разбиение.

Опр. 5. ***Интегралом от функции*** $f(M)$ ***по фигуре*** Ф называется предел интегральной суммы (1) при измельчении разбиения, т. е. при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:

$$\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu = \lim_{d_n\to 0} S_n$$

при условии, что этот предел существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения фигуры Ф на элементарные фигуры, ни от выбора точек M_i на элементарных фигурах.

Опр. 6. Функция $f(M)$ называется ***интегрируемой по фигуре*** Ф ***с мерой*** μ, если существует интеграл от функции $f(M)$ ***по фигуре*** Ф.

Т 1. Если фигура Ф связная, ограниченная и содержит граничные точки, а функция $f(M)$ непрерывна на множестве Ф, то эта функция интегрируема на Ф.

Названия и обозначения интегралов по фигуре

(А) Если $\Phi = [a; b] \subset \mathbb{R}$, то ИФ – это определенный интеграл по отрезку $[a; b]$: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

(Б) Если $\Phi = D \subset \mathbb{R}^2$ (плоская область), то ИФ называется ***двойным интегралом*** по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x; y)dxdy$.

(В) Если $\Phi = \Omega \subset \mathbb{R}^3$ (тело в пространстве), то ИФ называется ***тройным интегралом*** по пространственной области Ω и обозначается $\iiint\limits_\Omega f(x; y; z)dxdydz$.

Интегралы (Б) и (В) называются ***кратными интегралами***.

(Г) Если $\Phi = L \subset \mathbb{R}^2$ или $\Phi = L \subset \mathbb{R}^3$, то ИФ называется ***криволинейным интегралом 1-го рода,*** или ***криволинейным интегралом по длине дуги*** и обозначается $\int\limits_L f(x; y)dl$ в случае кривой на плоскости или $\int\limits_L f(x; y; z)dl$ в случае кривой в пространстве.

(Д) Если Φ – поверхность σ в пространстве, то ИФ называется ***поверхностным интегралом 1-го рода,*** или ***поверхностным интегралом по площади поверхности*** и обозначается $\iint\limits_\sigma f(x; y; z)dS$.

Свойства ИФ

1. ИФ от единицы равен мере фигуры:

$$\int\limits_\Phi d\mu = \mu(\Phi).$$

2. ***Линейность***:

$$\int\limits_\Phi kf(M)d\mu = k\int\limits_\Phi f(M)d\mu \quad (k = \text{const});$$

$$\int\limits_\Phi (f(M) \pm g(M))d\mu = \int\limits_\Phi f(M)d\mu \pm \int\limits_\Phi g(M)d\mu.$$

3. ***Аддитивность***: если фигуру Φ можно разбить на две фигуры Φ_1 и Φ_2 так, что их общая часть имеет меру 0: $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$,

$\mu(\Phi_1 \cap \Phi_2) = 0$ (см. рис. 28), то ИФ по Φ можно представить в виде суммы ИФ по Φ_1 и ИФ по Φ_2:

$$\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu = \int\limits_{\Phi_1} f(M)d\mu + \int\limits_{\Phi_2} f(M)d\mu.$$

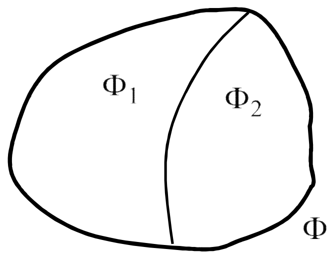


Рис. 28. Разбиение фигуры Φ на две фигуры

4. Если $f(M) \geq 0$ при всех $M \in \Phi$, то $\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu \geq 0.$

5. ***Монотонность***: если $f(M) \geq g(M)$ при всех $M \in \Phi$, то $\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu \geq \int\limits_{\Phi} g(M)d\mu.$

6. $\left|\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu\right| \leq \int\limits_{\Phi} |f(M)|\,d\mu.$

7. ***Оценка ИФ***: если $\tilde{m} = \min\limits_{M\in\Phi} f(M)$; $\tilde{M} = \max\limits_{M\in\Phi} f(M)$ – наименьшее и наибольшее значения функции $f(M)$ на фигуре Φ, т. е. $\tilde{m} \leq f(M) \leq \tilde{M}$ при всех $M \in \Phi$, то

$$\tilde{m}\mu(\Phi) \leq \int\limits_{\Phi} f(M)d\mu \leq \tilde{M}\mu(\Phi).$$

8. (Теорема о среднем). Если функция $f(M)$ непрерывна на фигуре Φ, то существует такая точка $M_0 \in \Phi$, что

$$\int\limits_{\Phi} f(M)d\mu = f(M_0)\mu(\Phi).$$

Геометрический смысл ИФ

Во-первых, как указано в свойстве 1, ИФ от единицы равен мере фигуры: $\boxed{\int\limits_{\Phi} d\mu = \mu(\Phi).}$ Это означает следующее.

(А) *Определенный интеграл от единицы равен длине отрезка интегрирования*: $\int\limits_a^b dx = b - a$.

(Б) *Двойной интеграл от единицы равен площади области интегрирования*: $\iint\limits_D dxdy = S_D$.

(В) *Тройной интеграл от единицы выражает объем тела интегрирования*: $\iiint\limits_\Omega dxdydz = V_\Omega$.

(Г) *Криволинейный интеграл 1-го рода от единицы выражает длину кривой интегрирования*: $\int\limits_L dl = l_L$.

(Д) *Поверхностный интеграл 1-го рода от единицы выражает площадь поверхности интегрирования*: $\iint\limits_\sigma dS = S_\sigma$.

Укажем теперь геометрический смысл ИФ от неотрицательной функции для случаев двойного интеграла и криволинейного интеграла 1-го рода в случае кривой на плоскости.

(Б) Пусть $f(x;\, y) \geq 0$ при всех $M(x;\, y) \in D$. Назовем ***криволинейным цилиндром*** тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x;\, y)$, снизу областью *D*, лежащей в плоскости *Oxy*, а по бокам – цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области *D*, а образующие параллельны оси *Oz* (рис. 29).

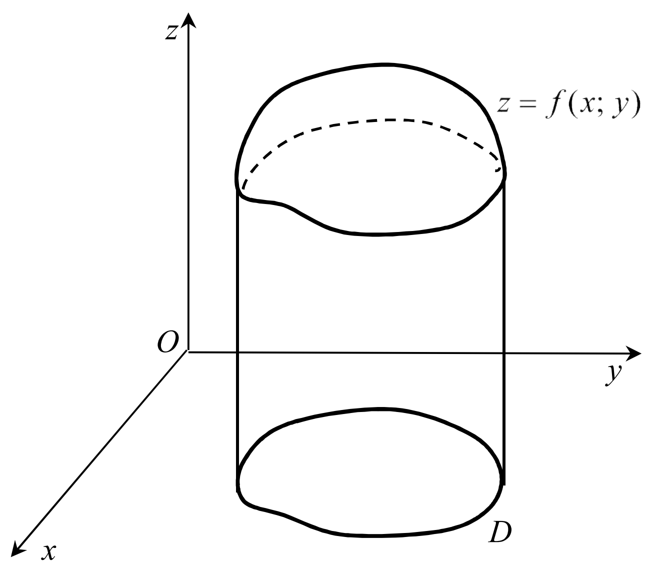


Рис. 29. Криволинейный цилиндр

Тогда *двойной интеграл от функции* $f(x;y)$ *по области D выражает объем криволинейного цилиндра*:

$$\boxed{V_{\text{кр.цил}} = \iint\limits_D f(x;y)dxdy.}$$

(Г) Пусть L – кривая, лежащая в плоскости Oxy, и $f(x;y) \geq 0$ при всех $M(x;y) \in L$. Рассмотрим цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит линия L, а образующие параллельны оси Oz (рис. 30). Тогда *криволинейный интеграл 1-го рода от функции* $f(x;y)$ *по линии L выражает площадь той части этой цилиндрической поверхности, которая ограничена снизу линией L, а сверху поверхностью* $z = f(x;y)$:

$$\boxed{S_{\text{цил.пов}} = \int\limits_L f(x;y)dl.}$$

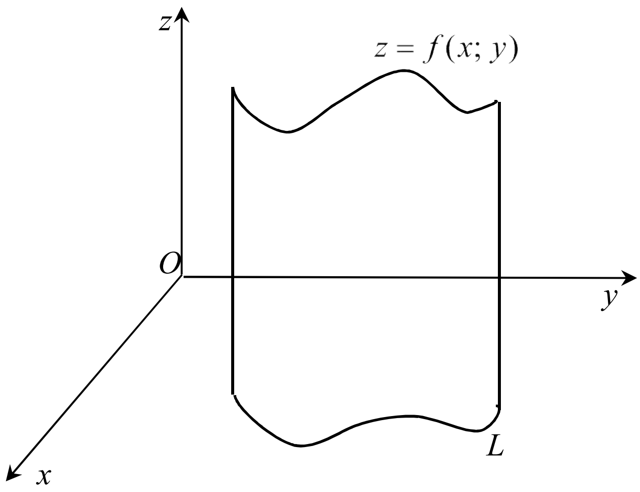


Рис. 30. Цилиндрическая поверхность

Физический смысл ИФ

Пусть *неотрицательная* функция $\gamma(M)$ выражает плотность фигуры Φ в точке M. Тогда ИФ от плотности $\gamma(M)$ равен массе фигуры: $\boxed{\int\limits_{\Phi} \gamma(M)d\mu = m_{\Phi}.}$ Это означает следующее.

(А) *Масса стержня равна определенному интегралу от линейной плотности стержня*: $m_{[a;\,b]} = \int\limits_a^b \gamma(x)dx.$

(Б) *Масса плоской пластинки равна двойному интегралу от плотности пластинки:* $m_D = \iint\limits_D \gamma(x;\, y)dxdy.$

(В) *Масса пространственного тела равна тройному интегралу от плотности этого тела*: $m_{\Omega} = \iiint\limits_{\Omega} \gamma(x;\, y;\, z)dxdydz.$

(Г) *Масса кривой равна криволинейному интегралу 1-го рода от плотности этой кривой*: $m_L = \int\limits_L \gamma(x;\, y;\, z)dl.$

(Д) *Масса поверхности равна* поверхностному *интегралу 1-го рода от плотности, заданной в каждой точке этой поверхности*: $m_{\sigma} = \iint\limits_{\sigma} \gamma(x;\, y;\, z)dS.$

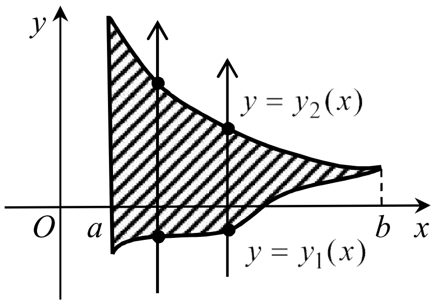
§ 7. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов (если область интегрирования имеет несложную форму).

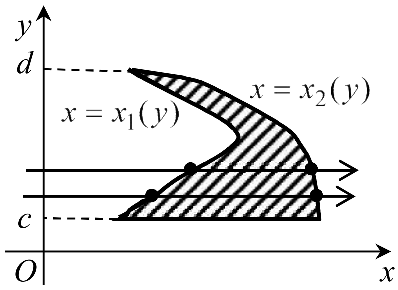
Опр. 1. Область D называется ***правильной в направлении оси** Oy*, если она ограничена снизу и сверху двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, а с боков – вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, причем $y_1(x) \le y_2(x)$ при всех $x \in [a; b]$ (см. рис. 31а). При этом линия $y = y_1(x)$ называется ***линией входа***, а $y = y_2(x)$ – ***линией выхода***, поскольку каждая прямая $x = \text{const}, x \in (a; b)$, параллельная оси Oy, пересекает границу области D не более двух раз, «входя» в область через линию $y = y_1(x)$ и «выходя» через $y = y_2(x)$.

В этом случае область может быть задана следующим образом:

$$D = \{(x; y) : y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}. \qquad (1)$$



а
Область, правильная в направлении оси Oy



б
Область, правильная в направлении оси Ox

Рис. 31. Области, правильные в направлении оси Oy или Ox

Опр. 2. Область

$$D = \{(x; y) : x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\} \qquad (2)$$

называется ***правильной в направлении оси** Ox* (см. рис. 31б); линия $x = x_1(y)$ называется ***линией входа***, а $x = x_2(y)$ – ***линией вы-***

хода. В этом случае каждая прямая $y = \text{const}$, $y \in (c; d)$, параллельная оси Ox, пересекает границу области D не более двух раз, «входя» в область через линию $x = x_1(y)$ и «выходя» через $x = x_2(y)$.

Отметим, что область, изображенная на рис. 31б, не является правильной в направлении оси Oy, но является правильной в направлении оси Ox.

Если область D не является правильной ни в направлении оси Oy, ни в направлении оси Ox, ее разбивают на несколько областей (см., например, рис. 32).

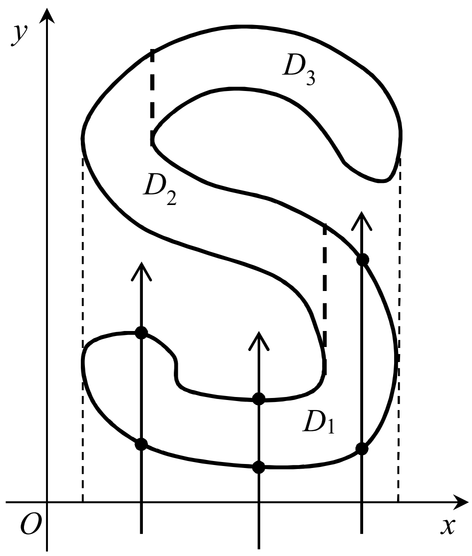


Рис. 32. Разбиение на области, правильные в направлении оси Oy

Рассмотрим область D вида (1), которая является правильной в направлении оси Oy и проектируется на отрезок $[a; b]$ оси Ox.

Пусть на области D определена некоторая функция $f(x; y) \geq 0$. Тогда, в соответствии с геометрическим смыслом, двойной интеграл от функции $f(x; y)$ по области D выражает объем криволинейного цилиндра (см. рис. 33): $V_{\text{кр.цил}} = \iint\limits_D f(x; y)dxdy$.

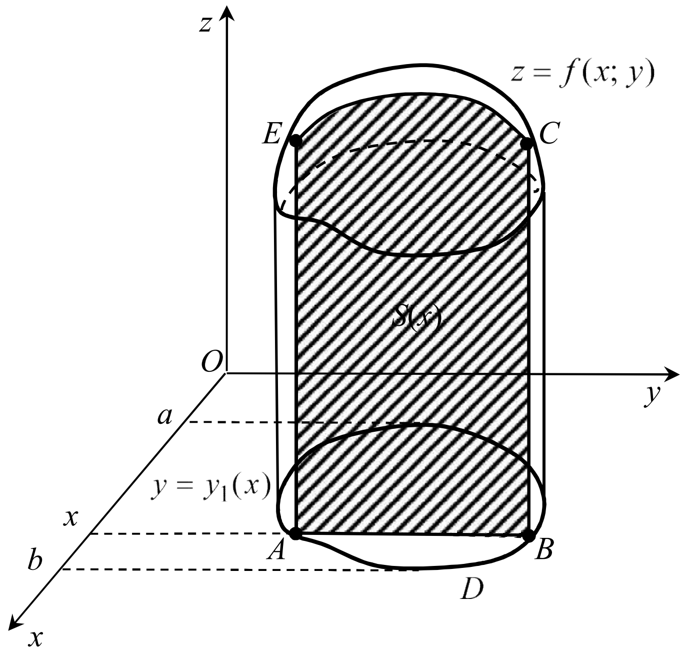


Рис. 33. Вычисление объема криволинейного цилиндра

С другой стороны, этот объем можно найти по формуле $V_{\text{кр.цил}} = \int\limits_a^b S(x)dx$, где $S(x)$ – площадь сечения криволинейного цилиндра плоскостью $x = \text{const}$, перпендикулярной оси Ox (рис. 9). В сечении получим криволинейную трапецию $ABCE$, ограниченную снизу отрезком AB, по бокам – прямыми, параллельными Oz, сверху – графиком функции $z = f(x; y)$ при фиксированном x (рис. 34); ее площадь равна

$$S(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y)dy.$$

Поэтому

$$V_{\text{кр.цил}} = \iint\limits_D f(x; y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y)dy \right) dx.$$

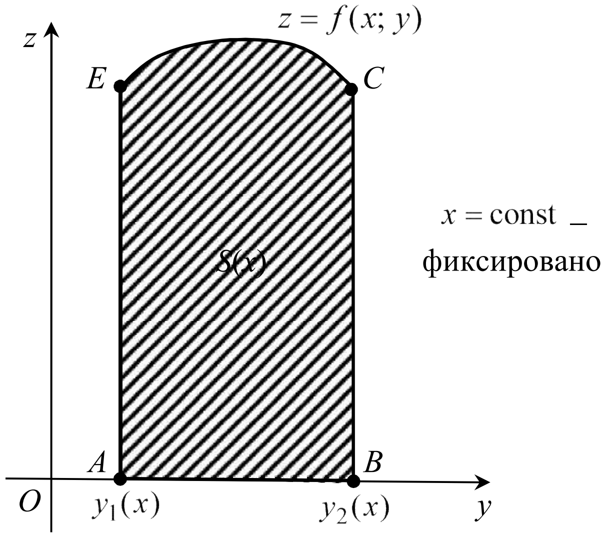


Рис. 34. Криволинейная трапеция *ABCE*

Обычно это равенство записывают в виде

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)\,dy. \qquad (3)$$

Формулу (3) называют ***формулой сведения двойного интеграла к повторному***; правую часть (3) называют ***повторным интегралом*** с внешним интегрированием по переменной x и внутренним – по y. Сначала вычисляется внутренний интеграл как обычный определенный по переменной y, при этом переменная x считается постоянной, а затем – внешний по переменной x.

Если область D задается формулой (2), т. е. является правильной в направлении оси Ox и проектируется на отрезок $[c;d]$ оси Oy (см. рис. 31б), то

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)\,dx. \qquad (4)$$

Замечание. В повторном интеграле (3) или (4) *внешние пределы всегда постоянны*, а *внутренние*, как правило, *зависят о той переменной, по которой берется внешний интеграл*.

Упражнение. В каком случае (для какой области D) пределы во внутреннем интеграле постоянны?

Пример 1. Вычислим $\iint\limits_D (x+y)dxdy,$ если область D ограничена линиями $y=x^2, y=x+1, x=0, x=1.$

Решение. 1 способ. Построим линии и определим область интегрирования D (рис. 35).

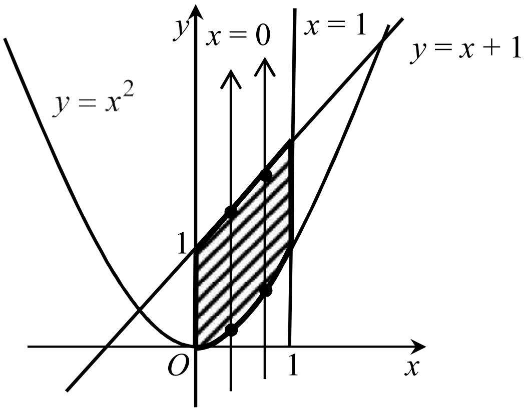


Рис. 35. Область D

Область D является правильной в направлении оси Oy и проектируется на отрезок $[0;1]$ оси Ox: $0 \le x \le 1; x^2 \le y \le x+1$. Линией входа является парабола $y=x^2$, а линией выхода – прямая $y=x+1$, поэтому

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x+1}(x+y)dy = \int\limits_0^1 dx \cdot \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{x+1} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2} - \left(x \cdot x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} \right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 + x + \frac{(x+1)^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{(x+1)^3}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{8}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}-\left(0+0+\frac{1}{6}-0-0\right)=1\frac{13}{20}.$$

2 способ. Область D является также правильной в направлении оси Ox (см. рис. 36). При этом $0\le y\le 2.$ Однако в этом случае линией входа является:

$$x=0 \text{ при } 0\le y\le 1;\; x=y-1 \text{ при } 1\le y\le 2,$$

а линией выхода, соответственно,

$$x=\sqrt{y} \text{ при } 0\le y\le 1;\; x=1 \text{ при } 1\le y\le 2.$$

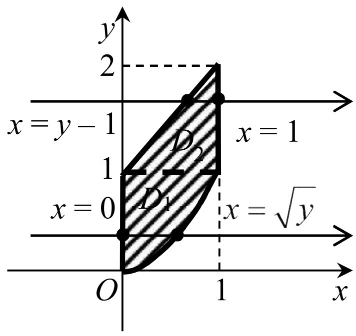


Рис. 36. Сведение двойного интеграла по области D к повторному с внешним интегралом по y

Поэтому нужно разбить область D на две области D_1 и D_2, тогда в силу свойства аддитивности двойной интеграл будет представлен в виде суммы двух интегралов:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}}(x+y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-1}^{1}(x+y)dx=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\cdot\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_0^{\sqrt{y}}+\int\limits_1^2 dy\cdot\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{y-1}^{1}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}\right)dy+\int\limits_1^2\left(\frac{1}{2}+y-\left(\frac{(y-1)^2}{2}+y(y-1)\right)\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}-\frac{(y-1)^3}{6}-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+1+2-\frac{1}{6}-\frac{8}{3}+2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=1\frac{13}{20}.\bullet$$

Таким образом, прежде чем сводить интеграл к повторному, следует проанализировать к какому из двух удобнее свести.

Пример 2. Вычислим $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 e^{-x^2}\,dx$.

Решение. Интеграл $\int e^{-x^2}\,dx$ неберущийся, поэтому мы не можем найти первообразную во внутреннем интеграле.

Восстановим область интегрирования и изменим порядок интегрирования, взяв внешний интеграл по x, а внутренний по y.

Как видно из условия, область интегрирования D проектируется в отрезок $[0;1]$ на оси Oy (см. пределы внешнего интеграла) и ограничена линиями $x=y$ и $x=1$ (пределы внутреннего интеграла), т. е.

$$D=\{(x;y): y\le x\le 1, 0\le y\le 1\}.$$

Построим линии и определим область интегрирования D (рис. 37).

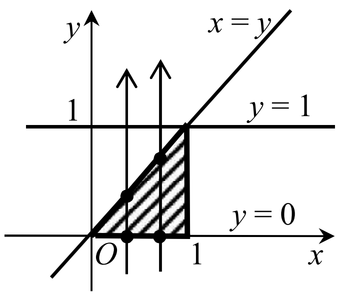


Рис. 37. Область D

Область D является правильной в направлении оси Oy и проектируется на отрезок $[0;1]$ оси Ox: $0\le x\le 1; 0\le y\le x$. Линией входа является прямая $y=0$, а линией выхода – прямая $y=x$, поэтому

$$\int_0^1 dy\int_y^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\int_0^1 dx\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\,dy=\int_0^1 dx\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,y\Big|_0^x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,xdx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,d(-x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathrm{e}}\approx 0{,}3161.\bullet$$

§ 8. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги)

Вычисление КРИ-1 осуществляется путем сведения к определенному интегралу. Для этого выражают дифференциал длины дуги dl и все координаты x, y, z через одну переменную, учитывая, что точка $(x;\,y;\,z)$ лежит на кривой L.

1. Пусть L – линия в пространстве, заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t_1\le t\le t_2. \\ z=z(t), \end{cases}$$

Тогда КРИ-1 вычисляется по формуле

$$\int_L f(x;\,y;\,z)dl=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t);\,y(t);\,z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt. \quad (1)$$

2. Если L – линия на плоскости, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t_1\le t\le t_2,$$

то, как частный случай формулы (1), получаем

$$\int_L f(x;\,y)dl=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t);\,y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \quad (2)$$

3. Пусть линия L в плоскости Oxy задается уравнением $y=y(x),\ x_1\le x\le x_2$. Тогда из (2) следует формула

$$\int_L f(x;y)dl = \int_{x_1}^{x_2} f(x;y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \qquad (3)$$

В некоторых случаях удобнее интегрировать по переменной y: если кривая интегрирования L задана уравнением $x = x(y),\ y_1 \le y \le y_2$, то

$$\int_L f(x;y)dl = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y);y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy.$$

Замечание. При сведении КРИ-1 к определенному интегралу интегрирование ведется всегда от меньшего значения параметра к большему: $t_1 \le t_2;\ x_1 \le x_2;\ y_1 \le y_2$.

Пример 1. Вычислим $\int_L x^2 y dl,$ где L – отрезок прямой между точками $A(2;0)$ и $B(0;3)$.

Решение. Уравнение линии L запишем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(2;0)$ и $B(0;3)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \qquad \frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{3-0}; \qquad \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3}.$$

Выразив y, получим уравнение линии L в виде $y = -\frac{3}{2}(x-2)$. При этом $x \in [0;2]$.

Вычислим дифференциал длины дуги по формуле

$$dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Поскольку $y' = -\frac{3}{2}$, то

$$dl = \sqrt{1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{9}{4}}dx = \frac{\sqrt{13}}{2}dx.$$

Тогда

$$\int_L x^2 y dl = \int_0^2 x^2\left(-\frac{3}{2}(x-2)\right)\frac{\sqrt{13}}{2}dx = -\frac{3\sqrt{13}}{4}\int_0^2 (x^3-2x^2)dx =$$

$$= -\frac{3\sqrt{13}}{4}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{3\sqrt{13}}{4}\left(4 - \frac{16}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{13}}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) = \sqrt{13}. \bullet$$