Численные методы решения нелинейных уравнений

Определить корни уравнения графически и уточнить один из них итерационными методами (методом деления отрезка пополам, методом Ньютона, методом простой итерации) с точностью 0,01:

1. $x^3+2x+2=0$
2. $x^3-2x+2=0$
3. $x^3+3x-1=0$
4. $x^3+x-3=0$
5. $x^3+2x+4=0$
6. $(x+1)^2=\frac{1}{x}$
7. $x=(x+1)^3$
8. $x^3+4x-4=0$
9. $x^3+6x-1=0$
10. $x^3+12x-12=0$
11. $x^3+0{,}4x-1{,}2=0$
12. $x^3+0{,}5x-1=0$
13. $x^3+2x-4=0$
14. $x^3+0{,}4x+2=0$
15. $x^3+9x-11=0$
16. $x^3+6x+3=0$
17. $x^3+5x-1=0$
18. $x^3+9x-3=0$
19. $x^3+10x-5=0$
20. $x^3+13x-13=0$
21. $x^3+7x-7=0$
22. $x^3+4x-2=0$
23. $x^3+5x-4=0$
24. $x^3+8x-6=0$
25. $x^3+2{,}5x-4=0$
26. $x^3+2{,}5x-5=0$
27. $x^3+5{,}5x-2=0$
28. $x^3+7x-3=0$
29. $x^3+8x-5=0$
30. $x^3+15x-10=0$
31. $\ln x-\frac{1}{x}=0$
32. $\cos x+2x-1{,}5=0$
33. $\ln x-\sin x=0$
34. $\ln x-\cos x=0$
35. $\cos x-x=0$
36. $\sin x+x-1=0$
37. $\ln x-\frac{x}{2}-\frac{m}{2}=0$
38. $x^3-5x^2+2x+8=0$
39. $\sin x-\sqrt{1-x^2}=0,\ \ 0\le x\le 1$
40. $x^3-2x^2-5x+6=0$

Дополнительные теоретические сведения (из учебника Калитикина, 1978 г.):

§ 2. Уравнение с одним неизвестным

1. Исследование уравнения. Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые корни уравнения

$$f(x) = 0. \tag{22}$$

Эта задача распадается на несколько задач. Во-первых, надо исследовать количество, характер и расположение корней. Во-вторых, найти приближенные значения корней. В-третьих, выбрать из них интересующие нас корни и вычислить их с требуемой точностью.

Первая и вторая задачи решаются аналитическими и графическими методами. Например, многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

имеет n комплексных корней, не обязательно различных, и все корни лежат внутри круга

$$|x_p| \leqslant 1 + \frac{1}{|a_n|} \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|).$$

Правда, эта оценка не оптимальная; модули всех корней могут быть много меньше правой части неравенства, в чем легко убедиться на примере многочлена $P(x) = \sum_{k=1}^{n} (x-k)$.

Когда ищутся только действительные корни уравнения, то полезно составить таблицу значений $f(x)$. Если в двух соседних узлах таблицы функция имеет разные знаки, то между этими узлами лежит нечетное число корней уравнения (по меньшей мере один). Если эти узлы близки, то, скорее всего, корень между ними только один. Но выявить по таблице корни четной кратности сложно.

По таблице можно построить график функции $y = f(x)$ и графически найти точки его пересечения с осью абсцисс. Этот способ более нагляден и дает неплохие приближенные значения корней. Во многих задачах техники такая точность уже достаточна. В технике еще популярны графические методы решения уравнений (номография). Построение графика зачастую позволяет выявить даже корни четной кратности.

Иногда удается заменить уравнение (22) эквивалентным ему уравнением $\varphi(x) = \psi(x)$, в котором функции $y_1 = \varphi(x)$ и $y_2 = \psi(x)$ имеют несложные графики. Например, уравнение $x \sin x - 1 = 0$ удобно преобразовать к виду $\sin x = 1/x$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями исходного уравнения.

Приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Рассмотрим наиболее эффективные из них.

2. Дихотомия (деление пополам). Пусть мы нашли такие точки x_0, x_1, что $f(x_0) f(x_1) \leqslant 0$, т. е. на отрезке $[x_0, x_1]$ лежит не менее одного корня уравнения. Найдем середину отрезка $x_2 = (x_0 + x_1)/2$ и вычислим $f(x_2)$. Из двух половин отрезка выберем ту, для которой $f(x_2) f(x_{\text{гран}}) \leqslant 0$, ибо один из корней лежит на этой половине. Затем новый отрезок опять делим пополам и выберем ту половину, на концах которой функция имеет разные знаки, и т. д. (рис. 26).

Если требуется найти корень с точностью ε, то продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

Дихотомия проста и очень надежна: к простому корню она сходится для любых непрерывных функций $f(x)$, в том числе недифференцируемых; при этом она устойчива к ошибкам округления. Скорость сходимости невелика: за одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое, т. е. уточнение трех цифр требует 10 итераций. Зато точность ответа гарантируется.

Перечислим недостатки метода. Для начала расчета надо найти отрезок, на котором функция меняет знак. Если в этом отрезке несколько корней, то заранее неизвестно, к какому из них сойдется процесс (хотя к одному из них сойдется). Метод неприменим к корням четной кратности. Для корней нечетной высокой кратности он сходится, но менее точен и хуже устойчив к ошибкам округления, возникающим при вычислении $f(x)$. Наконец, на системы уравнений дихотомия не обобщается.

Дихотомия применяется тогда, когда требуется высокая надежность счета, а скорость сходимости малосущественна.

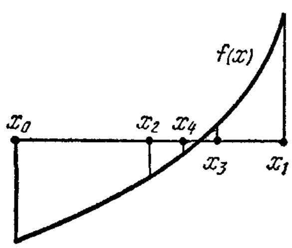

Рис. 26.

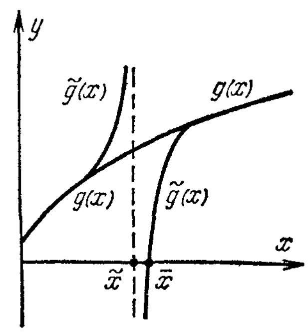

Рис. 27.

3. **Удаление корней.** Один из недостатков дихотомии — сходимость неизвестно к какому корню — имеется почти у всех итерационных методов. Его можно устранить удалением уже найденного корня.

Если $\bar{x}_1$ есть простой корень уравнения (22) и $f(x)$ липшиц-непрерывна, то вспомогательная функция $g(x)=f(x)/(x-\bar{x}_1)$ непрерывна, причем все нули функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, за исключением $\bar{x}_1$, ибо $g(\bar{x}_1)\neq 0$. Если $\bar{x}_1$ — кратный корень уравнения (22), то он будет нулем $g(x)$ кратности на единицу меньше; остальные нули обеих функций по-прежнему будут одинаковы.

Поэтому найденный корень можно удалить, т. е. перейти к функции $g(x)$. Тогда нахождение остальных нулей $f(x)$ сведется к нахождению нулей $g(x)$. Когда мы найдем какой-нибудь корень $\bar{x}_2$ функции $g(x)$, то этот корень тоже можно удалить, вводя новую вспомогательную функцию $\varphi(x)=g(x)/(x-\bar{x}_2)=f(x)/(x-\bar{x}_1)\times$ $\times(x-\bar{x}_2)$. Так можно последовательно найти все корни $f(x)$.

Строго говоря, мы находим лишь приближенное значение корня $\tilde{x}\approx\bar{x}$. А функция $\tilde{g}(x)=f(x)/(x-\tilde{x}_1)$ имеет нуль в точке $\bar{x}_1$ и полюс в близкой к ней точке $\tilde{x}_1$ (рис. 27); только на некотором расстоянии от этого корня она близка к $g(x)$. Чтобы это не сказывалось при нахождении следующих корней, надо вычислять каждый корень с высокой точностью, особенно если он кратный или вблизи него расположен другой корень уравнения.

Кроме того, в любом методе окончательные итерации вблизи определяемого корня рекомендуется делать не по функциям типа $g(x)$, а по исходной функции $f(x)$. Последние итерации, вычисленные по функции $g(x)$, используются при этом в качестве нулевого приближения. Особенно важно это при нахождении многих корней, ибо чем больше корней удалено, тем меньше нули вспомогательной функции $G(x) = f(x)/\prod\limits_i (x - \tilde{x}_i)$ соответствуют остальным нулям функции $f(x)$.

Учитывая эти предосторожности и вычисляя корни с 8—10 верными десятичными цифрами, зачастую можно определить десятка два корней, о расположении которых заранее ничего не известно (в том числе корней высокой кратности $p \sim 5$).

4. Метод простых итераций. Заменим уравнение (22) эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$. Это можно сделать многими способами, например, положив $\varphi(x) \equiv x + \psi(x) f(x)$, где $\psi(x)$ — произвольная непрерывная знакопостоянная функция. Выберем некоторое нулевое приближение x_0 и вычислим дальнейшие приближения по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{23}$$

Очевидно, если x_n стремится к некоторому пределу $\bar{x}$, то этот предел есть корень исходного уравнения.

Исследуем условия сходимости. Если $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, тогда

$$x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = (x_n - \bar{x})\, \varphi'(\xi), \tag{24}$$

где точка ξ лежит между точками x_n и $\bar{x}$. Поэтому если всюду $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$, то отрезки $|x_n - \bar{x}|$ убывают не медленней членов геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$ и последовательность x_n сходится при любом нулевом приближении. Если $|\varphi'(\bar{x})| > 1$, то в силу непрерывности $|\varphi'(x)|$ больше единицы и в некоторой окрестности корня; в этом случае итерации не могут сходиться. Если $|\varphi'(\bar{x})| < 1$, но вдали от корня $|\varphi'(x)| > 1$, то итерации сходятся, если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню; при произвольном нулевом приближении сходимости может не быть.

Эти рассуждения переносятся на липшиц-непрерывные функции практически без изменений.

Очевидно, что чем меньше q, тем быстрей сходимость. Вблизи корня асимптотическая сходимость определяется величиной $|\varphi'(\bar{x})|$ и будет особенно быстрой при $\varphi'(\bar{x}) = 0$.

Значит, успех метода зависит от того, насколько удачно выбрано $\varphi(x)$. Например, для извлечения квадратного корня, т. е. решения уравнения $x^2=a$, можно положить $\varphi(x)=a/x$ или $\varphi(x)={}^1/_2[x+(a/x)]$ и соответственно написать такие итерационные процессы:

$$x_{n+1}=\frac{a}{x_n} \quad \text{или} \quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right). \tag{25}$$

Первый процесс вообще не сходится, а второй сходится при любом $x_0>0$; сходится он очень быстро, ибо $\varphi'(\bar{x})=0$. Второй процесс используют при извлечении корня на клавишных машинах.

Каков практический критерий сходимости, т. е. когда надо прекращать итерации (23)? Из (24) видно, что если $\varphi'(x)<0$, то итерации попеременно оказываются то с одной, то с другой стороны корня, так что корень заключен в интервале (x_n, x_{n-1}). Это надежная, хотя несколько грубая оценка. Но она неприменима при $\varphi'(x)>0$, когда итерации сходятся к корню монотонно, т. е. с одной стороны.

Вблизи корня итерации сходятся примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем $q=(x_n-x_{n-1})/(x_{n-1}-x_{n-2})$. Чтобы сумма дальнейших ее членов не превосходила ε, должен выполняться критерий сходимости

$$\left|q\frac{x_n-x_{n-1}}{1-q}\right|=\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{|2x_{n-1}-x_n-x_{n-2}|}<\varepsilon. \tag{26}$$

При выполнении этого условия итерации можно прекращать.

Легко заметить, что выражение в левой части есть поправка Эйткена (4.24). Если последние три простые итерации уточнить процессом Эйткена, то это обычно заметно повышает точность расчета и позволяет ограничиться меньшим числом итераций.

Метод простых итераций и почти все другие итерационные методы имеют важное достоинство: в них не накапливаются ошибки вычислений. Ошибка вычислений эквивалентна некоторому ухудшению очередного приближения. Но это отразится только на числе итераций, а не на точности окончательного результата. Подобные методы устойчивы даже по отношению к грубым ошибкам (сбоям ЭВМ), если только ошибка не выбрасывает очередное приближение за пределы области сходимости.

При обработке эксперимента возникают *стохастические задачи*, где ошибки определения функции велики и носят случайный характер. Погрешность функции δf приводит к погрешности корня $\delta\bar{x}=\delta f(\bar{x})/f'(\bar{x})$. Однако поскольку ошибки носят случайный характер, то методами статистики можно определить корень гораздо более точно, чем по указанной оценке. Рассмотрим простые итерации

$$x_{n+1}=x_n-a_nf(x_n)\,\mathrm{sign}\,f'(x) \tag{27a}$$

при дополнительных условиях

$$a_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \tag{27б}$$

которым удовлетворяет, например, последовательность $a_n = (1/n)$. Доказано [47], что $x_n \to \bar{x}$ при $n \to \infty$ с вероятностью единица. Использование в формуле (27а) знака производной не означает, что надо вычислять эту производную: достаточно лишь определить ее знак по разности двух значений функции.

Напомним, что стремлением к пределу с вероятностью единица называется сходимость к пределу $\bar{x}$ в подавляющем большинстве случаев (т. е. при разных нулевых приближениях и разных выборах последовательностей a_n), хотя в отдельных случаях процесс может не сходиться или сходиться к другому пределу. Стохастические процессы сходятся медленно, поэтому к детерминированным задачам их нецелесообразно применять.

5. Метод Ньютона. Он называется также методом *касательных* или методом *линеаризации*. Если x_n есть некоторое приближение к корню $\bar{x}$, а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то уравнение (22) можно преобразовать следующим образом:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_n + (\bar{x} - x_n)) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n) f'(\xi).$$

Приближенно заменяя $f'(\xi)$ на значение в известной точке x_n, получим такой итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{28}$$

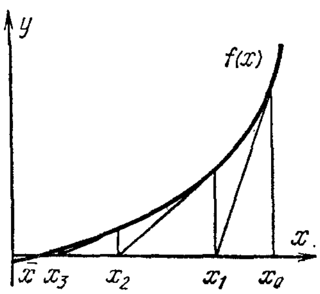

Рис. 28.

Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика $y = f(x)$ касательной к нему (рис. 28).

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, если положить $\varphi(x) = x - [f(x)/f'(x)]$. Тогда $\varphi'(x) = (ff''/f'^2)$. Если $\bar{x}$ есть p-кратный корень уравнения (22), то вблизи него $f(x) \approx a(x - \bar{x})^p$; отсюда нетрудно получить $\varphi'(\bar{x}) = (p-1)/p$, т. е. $0 \leqslant \varphi'(\bar{x}) < 1$. Для простого корня $p = 1$ и $\varphi'(\bar{x}) = 0$. Используя результаты п. 4, можно сформулировать следующие условия сходимости итераций (28). *Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню, ньютоновские итерации сходятся*; скорость сходимости велика для простого корня и соответствует скорости геометрической прогрессии для кратного корня. При произвольном нулевом приближении итерации сходятся, если всюду $|ff''| < (f')^2$; в противном случае сходимость будет не при любом нулевом приближении, а только в некоторой окрестности корня.

Сходимость вблизи любого корня монотонна, что легко видеть из рис. 28; но вдали от корня возможна немонотонность итераций. Отметим, что рис. 28 указывает еще на одно достаточное условие сходимости итераций. Пусть $f''(x) \geqslant 0$ справа от корня на отрезке $[\bar{x}, a]$; если x_0 выбрано также справа от корня на этом отрезке, то итерации (28) сходятся, причем монотонно. То же будет, если $f''(x) \leqslant 0$ слева от корня на отрезке $[b, \bar{x}]$, и на этом же отрезке выбрано нулевое приближение. Таким образом, итерации сходятся к корню с той стороны, с которой $f(x) f''(x) \geqslant 0$.

Оценим скорость сходимости вблизи простого корня. По определению простых итераций, $\bar{x} - x_n = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_{n-1})$. Разлагая правую часть по формуле Тейлора и учитывая равенство $\varphi'(\bar{x}) = 0$, получим

$$x_n - \bar{x} = {}^1/_2 (x_{n-1} - \bar{x})^2 \varphi''(\xi), \quad \xi \in (x_{n-1}, \bar{x}), \tag{29}$$

т. е. погрешность очередного приближения примерно равна квадрату погрешности предыдущего приближения. Например, если $(n-1)$-я итерация давала 3 верных знака, то n-я даст примерно 6 верных знаков, а $(n+1)$-я — примерно 12 знаков. Это иллюстрирует быструю сходимость вблизи корня. Разумеется, вдали от корня подобные соображения неприменимы.

Таблица 16

$f(x) \equiv x^2 - 4 = 0$

n	x_n, метод Ньютона	x_n, метод секущих
0	1,0000	1,0000
1	2,5000	2,5000
3	2,0500	1,8571
4	2,0001	1,9836

Если вычисляется корень высокой кратности, то $f'(x)$ в знаменателе формулы (28) становится малой вблизи корня. Чтобы не было потери точности, отношение $f(x)/f'(x)$ надо вычислять достаточно аккуратно. К остальным погрешностям расчета метод Ньютона хорошо устойчив.

Для нахождения корней произвольной дифференцируемой функции чаще всего применяют метод Ньютона, особенно если известны разумные начальные приближения для корней.

Пример. Рассмотрим решение уравнения $f(x) \equiv x^2 - a = 0$. Тогда общая формула метода Ньютона (28) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Мы получили вторую формулу (25), которая, как отмечалось раньше, позволяет очень быстро находить квадратный корень с помощью только сложения и деления. Для иллюстрации в таблице 16 приведен ход итераций при извлечении квадратного корня из $a = 4$. Видно, что сходимость очень быстрая; несмотря на неважное нулевое приближение, уже третья итерация дает точность 0,005%. Попутно можно заметить, что вблизи корня итерации сходятся с одной стороны, т. е. монотонно, хотя первая итерация дает переброс на другую сторону корня.

6. Процессы высоких порядков. В методе простых итераций выберем функцию $\varphi(x)$ так, чтобы выполнялось

$$\varphi'(\bar{x})=\varphi''(\bar{x})=\ldots=\varphi^{(p-1)}(\bar{x})=0, \quad \varphi^{(p)}(\bar{x})\neq 0. \tag{30}$$

Итерационный процесс (23) с такой функцией называют *стационарным процессом p-го порядка*. Скорость сходимости этого процесса вблизи корня можно получить из следующих равенств:

$$x_{n+1}-\bar{x}=\varphi(x_n)-\varphi(\bar{x})=\frac{1}{p!}(x_n-\bar{x})^p\,\varphi^{(p)}(\xi), \quad \xi\in(x_n, \bar{x}). \tag{31а}$$

Если $|\varphi^{(p)}(x)|\leqslant M_p$, то отсюда следует

$$|x_n-\bar{x}|\leqslant(M_p/p!)^{(p^n-1)/(p-1)}\,|x_0-\bar{x}|^{p^n}. \tag{31б}$$

Сходимость при $p=1$ называют линейной (это собственно метод простых итераций), при $p=2$ — квадратичной (например, метод Ньютона), а при $p=3$ — кубической. Очевидно, чем больше p, тем быстрей сходятся итерации вблизи корня; к сожалению, тем меньше область гарантированной сходимости этих приближений.

Фактически у процессов высокого порядка выход на их асимптотическую скорость сходимости (31) обычно наступает только тогда, когда итерации уже почти сошлись, т. е. для получения всех верных разрядов числа осталось сделать одну—три итерации. Поэтому такие процессы (за исключением метода парабол) редко употребляются.

7. Метод секущих *) [48]. В методе Ньютона требуется вычислять производную функции, что не всегда удобно. Можно заменить производную первой разделенной разностью, найденной по двум последним итерациям, т. е. заменить касательную секущей. Тогда вместо процесса (28) получим

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x_n-x_{n-1})\,f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}. \tag{32}$$

Для начала процесса надо задать x_0 и x_1 (рис. 29). Такие процессы, где для вычисления очередного приближения надо знать два предыдущих, называют *двухшаговыми*.

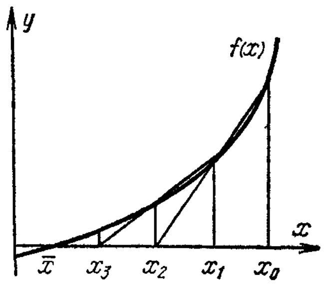

Рис. 29.

Эти, казалось бы, небольшие изменения сильно влияют на характер итераций. Например, сходимость итераций может быть немонотонной не только вдали от корня, но и в малой окрестности корня. Скорость сходимости также изменяется. Иллюстрацией служит приведенный в таблице 16 расчет по методу секущих; для удобства сравнения с методом Ньютона первые два

*) В математической литературе это название нередко употребляют для другого метода, который по его геометрической интерпретации следовало бы называть методом хорд.

приближения взяты одинаковыми. Видно, что метод секущих сходится медленнее.

Скорость сходимости можно оценить, разлагая все функции в (32) по формуле Тейлора с центром $\bar{x}$. Получим с точностью до бесконечно малых более высокого порядка

$$x_{n+1}-\bar{x}=a(x_n-\bar{x})(x_{n-1}-\bar{x}), \qquad a=\frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}. \tag{33}$$

Решение этого рекуррентного соотношения естественно искать в виде $x_{n+1}-\bar{x}=a^{\alpha}(x_n-\bar{x})^{\beta}$, аналогичном (29) или (31а). Подставляя эту форму в соотношение (33), получим

$$\alpha\beta=1, \quad \beta^2-\beta-1=0. \tag{34}$$

Только положительный корень β квадратного уравнения (34) соответствует убыванию ошибки, т. е. сходящемуся процессу. Следовательно, в методе секущих

$$\begin{gathered} x_{n+1}-\bar{x}=a^{1/\beta}(x_n-\bar{x})^{\beta}, \\ \beta={}^1/_2\left(\sqrt{5}+1\right)\approx 1{,}62, \quad (1/\beta)\approx 0{,}62, \end{gathered} \tag{35}$$

в то время как в методе Ньютона ошибка убывает быстрей (соответствуя $\beta=2$). Но в методе Ньютона на каждой итерации надо вычислять и функцию, и производную, а в методе секущих — только функцию. Поэтому при одинаковом объеме вычислений в методе секущих можно сделать вдвое больше итераций и получить более высокую точность.

В знаменателе формулы (32) стоит разность значений функции. Вдали от корня это несущественно; но вблизи корня, особенно корня высокой кратности, значения функции малы и очень близки. Возникает потеря значащих цифр, приводящая к «разболтке» счета. Это ограничивает точность, с которой можно найти корень; для простых корней это ограничение невелико, а для кратных может быть существенным.

Заметим, что приводить формулу (32) к общему знаменателю не следует: увеличится потеря точности в расчетах.

От «разболтки» страхуются так называемым *приемом Гарвика*. Выбирают не очень малое ε, ведут итерации до выполнения условия $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ и затем продолжают расчет до тех пор, пока $|x_{n+1}-x_n|$ убывают. Первое же возрастание обычно означает начало «разболтки»; тогда расчет прекращают и последнюю итерацию не используют.

8. Метод парабол. Метод секущих можно рассматривать как замену функции $f(x)$ интерполяционным многочленом первой степени, проведенным по узлам x_n, x_{n-1}. По трем последним итерациям можно построить интерполяционный многочлен второй степени, т. е. заменить график функции параболой. Запишем интерполяционный многочлен в форме Ньютона

$$\mathcal{P}_2(x) = f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}).$$

Приравнивая его нулю, получим квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, \tag{36а}$$

где

$$\begin{gathered} z = x - x_n, \quad a = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \\ b = a(x_n - x_{n-1}) + f(x_n, x_{n-1}), \quad c = f(x_n). \end{gathered} \tag{36б}$$

Тот из двух корней квадратного уравнения (36), который меньше по модулю, определяет новое приближение $x_{n+1} = x_n + z$.

Очевидно, для начала расчета надо задать три первых приближения x_0, x_1, x_2 (обычно наугад выбирают три числа), т. е. процесс является *трехшаговым*.

Метод парабол построен по образцу методов третьего порядка. Однако замена производных разделенными разностями приводит к существенному уменьшению скорости сходимости. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям в п. 7, можно показать, что вблизи простого корня выполняется соотношение

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \approx \left| \frac{f'''(\bar{x})}{6f'(\bar{x})} \right|^{0,42} |x_n - \bar{x}|^{1,84}, \tag{37}$$

т. е. сходимость даже медленнее квадратичной. Вблизи кратного корня сходимость еще медленнее (хотя и более быстрая, чем линейная). Заметим, что строить аналогичные методы с использованием интерполяционного многочлена еще более высокой степени невыгодно: сходимость все равно будет медленней квадратичной, а расчет сильно усложняется.

В методе парабол «разболтка» счета вблизи корня сказывается еще сильней, чем в методе секущих, ибо в расчете участвуют вторые разности. Тем не менее корни можно найти с хорошей точностью; для определения оптимального числа итераций удобно пользоваться приемом Гарвика, описанном в п. 7.

Метод парабол имеет важное достоинство. Даже если все предыдущие приближения действительны, уравнение (36) может привести к комплексным числам. Поэтому процесс может естественно сойтись к комплексному корню исходного уравнения. В методах простых итераций, касательных или секущих для сходимости к комплексному корню может потребоваться задание комплексного начального приближения (если $f(x)$ вещественна при вещественном аргументе).

Корни многочлена. Метод парабол оказался исключительно эффективным для нахождения всех корней многочлена высокой степени. Если $f(x)$ — алгебраический многочлен, то, хотя сходимость метода при произвольном начальном приближении и не доказана, на практике итерации всегда сходятся к какому-нибудь корню, причем быстро. Для многочлена частное $f(x)/(x-\bar{x})$ есть тоже многочлен; поэтому последовательно удаляя найденные корни, можно найти все корни исходного многочлена.

Замечание 1. Если $f(x)$ — многочлен высокой степени, то возникают дополнительные трудности. Многочлен быстро возрастает при увеличении аргумента, поэтому в программе для ЭВМ должна быть страховка от переполнения. Обычно вводят масштабные множители, величина которых связана с диапазоном изменения аргумента.

Замечание 2. Наибольшие по модулю корни многочлена высокой степени могут быть очень чувствительны к погрешности коэффициентов при старших степенях. Например, корнями многочлена

$$P_{20}(x) = \prod_{k=1}^{20} (x-k)$$

являются последовательные целые числа $\bar{x}_k = 1, 2, \ldots, 20$. А слегка измененный многочлен $\tilde{P}_{20}(x) = P_{20}(x) - 2^{-23}x^{19}$ имеет такие корни:

$$1{,}0;\ 2{,}0;\ \ldots;\ 8{,}0;\ 8{,}9;\ 10{,}1 \pm 0{,}6i;\ \ldots;\ 19{,}5 \pm 1{,}9i;\ 20{,}8$$

(здесь приведен только один знак после запятой). Кратные или близкие корни могут быть слабо устойчивыми даже при меньших степенях многочлена.

Замечание 3. Для удаления вычисленных корней надо делить многочлен. Это вносит погрешность округления в коэффициенты и влияет на точность нахождения следующих корней. На практике отмечено, что если сначала удалять меньшие по модулю корни, точность падает мало, но если начать удаление с больших корней, точность может упасть катастрофически. Поэтому за начальное приближение берут $x_0 = -1$, $x_1 = +1$. $x_2 = 0$; тогда итерации обычно сходятся к наименьшему по модулю корню. Его удаляют и по такому же начальному приближению ищут следующий корень и т. д. При такой организации вычислений потеря точности будет небольшой.

9. Метод квадрирования. Этот метод позволяет найти все корни многочлена. Запишем многочлен n-й степени двумя способами:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{l=1}^{n} (x - \bar{x}_l), \tag{38}$$

где $\bar{x}_l$ — корни многочлена. Сравнивая обе формы записи, получим *равенства*

Виета

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{k>l} \bar{x}_k \bar{x}_l = +\frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{k>l>m} \bar{x}_k \bar{x}_l \bar{x}_m = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \ \ldots \tag{39}$$

Предположим, что корни многочлена сильно различаются по абсолютной величине: $|\bar{x}_1| \gg |\bar{x}_2| \gg \ldots \gg |\bar{x}_n|$. Тогда из равенств Виета получаются приближенные значения корней

$$\bar{x}_1 \approx -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \ \bar{x}_2 \approx -\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \ \ldots, \ \bar{x}_n \approx -\frac{a_0}{a_1}. \tag{40}$$

Если модули корней мало различаются, то эти формулы слишком неточны. Но квадраты модулей будут различаться сильней, чем сами модули. Поменяем в многочлене (38) знаки всех корней, что эквивалентно смене знака у всех нечетных коэффициентов. Умножая измененный многочлен на исходный, получим

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right] \cdot \left[\sum_{l=1}^{n} (-1)^{n-l} a_l x^l\right] = a_n^2 \prod_{m=1}^{n} (x^2 - \bar{x}_m^2) \equiv Q_n(z), \quad z = x^2. \tag{41}$$

Многочлен $Q_n(z)$ имеет n-ю степень и называется *квадрированным многочленом*. Его корни равны квадратам корней исходного многочлена. Нахождение квадрированного многочлена сравнительно трудоемко; его коэффициенты можно вычислять по формулам

$$b_l = \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} (-1)^{l-m} a_{l+m} a_{l-m}, \quad \alpha = \min(l, \ n-l). \tag{42}$$

Для фактического выполнения этих вычислений удобно записать произведения коэффициентов с нужными знаками в форме таблицы 17; знаки ставятся в шахматном порядке. Произведения суммируются по косым строкам, как указано стрелками.

Таблица 17

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
a_0	a_0a_0	$-a_0a_1$	a_0a_2	$\ldots$	$\pm a_0a_n$
a_1	$-a_1a_0$	a_1a_1	$-a_1a_2$	$\ldots$	$\mp a_1a_n$
a_2	a_2a_0	$-a_2a_1$	a_2a_2	$\ldots$	$\pm a_2a_n$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_n	$\pm a_na_0$	$\mp a_na_1$	$\pm a_na_2$	$\ldots$	a_na_n

Для квадрированного многочлена корни по формулам (40), где вместо a_k надо вставить b_k, определятся точнее. Если результат будет мало отличаться от предыдущего, то на нем можно остановиться. Если отличие заметное, то квадрирование надо повторить. Повторяя квадрирование много раз, получим быстро сходящийся итерационный процесс (можно показать, что его сходимость будет квадратичной).

При различающихся по модулю корнях после многократного квадрирования выполняются соотношения

$$\left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right| \gg \left|\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}\right| \gg \ldots \gg \left|\frac{b_0}{b_1}\right|.$$

Если среди корней есть равные по модулю (в частности, кратные), то это соотношение нарушается. Например, если второй корень будет двукратным, то получим

$$\left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right| \gg \left|\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}\right| \sim \left|\frac{b_{n-3}}{b_{n-2}}\right| \gg \left|\frac{b_{n-4}}{b_{n-3}}\right| \gg \ldots$$

Если корни равны только по модулю, но $\bar{x}_k \neq \bar{x}_l$ (например, комплексно-сопряженные корни), то это случайное совпадение. Такие корни удобнее всего разделять сдвигом. Рассмотрим многочлен $R(x) = P_n(x-\xi)$, где ξ — случайно выбранное комплексное число. Корни многочлена $R(x)$ будут уже не равны между собой по модулю, ибо они отличаются от корней исходного многочлена на комплексную величину ξ.

Кратные корни разделить сдвигом нельзя. Для них надо составлять специальные формулы, явно учитывающие, какой корень какую кратность имеет. Определить кратность корней можно по поведению отношений соседних коэффициентов.

Обратный переход от корней квадрированных уравнений к корням исходного уравнения осуществляется последовательным извлечением квадратного корня. При этом появляются ложные корни; их надо обнаружить подстановкой в исходное уравнение и отбросить.

Метод квадрирования позволяет легко выполнить все расчеты на клавишных машинах. Он не требует задания какого-либо нулевого приближения. Но для программирования на ЭВМ этот метод не особенно удобен. Во-первых, после нескольких квадрирований в расчете возникают обычно большие числа, и возможно переполнение, от которого приходится страховаться введением масштабных множителей. Во-вторых, при наличии кратных корней требуется произвести довольно громоздкий логический анализ и применить нестандартные формулы вычисления.