

**Теоретический минимум по дисциплине «МАТЕМАТИКА»
(II семестр, специальности ПОИБМС, ДЭВИ)**

1. Комплексные числа. Многочлены.

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
2. Действительная и мнимая части комплексного числа.
3. Модуль и аргумент комплексного числа.
4. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
5. Показательная форма записи комплексного числа.
6. Связь между алгебраической и тригонометрической формами записи комплексного числа.
7. Число, комплексно сопряженное данному.
8. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи.
9. Теорема Безу.
10. Основная теорема алгебры.

2. Линейные пространства. Линейные операторы.

11. Определение линейного пространства.
12. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства.
13. Базис линейного пространства.
14. Размерность линейного пространства.
15. Координаты элемента линейного пространства в заданном базисе.
16. Как составляется матрица перехода от одного базиса к другому?
17. Преобразование координат при изменении базиса.
18. Определение линейного оператора.
19. Как составляется матрица линейного оператора?
20. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
21. Собственные значения и собственные векторы матрицы.
22. Характеристическое уравнение матрицы.
23. Как найти собственные значения матрицы?
24. Определение евклидова пространства.
25. Норма вектора евклидова пространства, ее свойства.
26. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
27. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве.
28. Квадратичная форма.
29. Матрица квадратичной формы.
30. Канонический вид квадратичной формы.

3. Неопределенный интеграл.

31. Что называется первообразной для функции $f(x)$?
32. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
33. Основные свойства неопределенного интеграла.
34. Таблица интегралов.

35. Формула интегрирования по частям.
36. Основные классы интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.
37. Что называется рациональной дробью?
38. Что называется правильной рациональной дробью? Что называется неправильной рациональной дробью?
39. В каком виде нужно представить неправильную рациональную дробь для того, чтобы ее проинтегрировать?
40. В каком виде нужно представить правильную рациональную дробь для того, чтобы ее проинтегрировать?
41. Четыре типа простейших рациональных дробей.
42. Алгоритм интегрирования рациональных дробей.
43. Что такое универсальная тригонометрическая подстановка?
44. Записать формулы понижения степени для $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$.
45. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n - целые числа.
46. Интегралы вида $\int R \left(x; (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}; (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}; \dots \right) dx$.
47. Интегралы вида $\int R \left(x; \sqrt{ax^2+bx+c} \right) dx$.
48. Примеры неберущихся интегралов.

4. Определенный интеграл и его обобщения.

49. Что называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$? Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$?
50. Геометрический смысл определенного интеграла.
51. Основные свойства определенного интеграла.
52. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении функции на отрезке.
53. Формула Ньютона-Лейбница.
54. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.
55. Свойства интегралов от четных и нечетных функций по симметричному относительно нуля промежутку.
56. Формулы для вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
57. Формулы для вычисления объемов тел вращения.
58. Формулы для вычисления длин дуг кривых.
59. В чем заключается особенность несобственного интеграла 1-го рода?
60. Определение несобственного интеграла 1-го рода.
61. При каких значениях α сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$?
62. В чем заключается особенность несобственного интеграла 2-го рода?
63. Определение несобственного интеграла 2-го рода.

64. При каких значениях α сходится интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$?
65. Геометрический смысл двойного интеграла.
66. Формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.
67. Физический смысл двойного интеграла.

5. Ряды.

68. Что называется рядом? Что называется общим членом ряда?
69. Что называется n -й частичной суммой ряда? Что называется n -м остатком ряда?
70. Что называется суммой ряда? В каком случае ряд называется сходящимся? расходящимся?
71. Необходимый признак сходимости ряда.
72. Основные свойства числовых рядов.
73. Какие признаки используются для исследования сходимости числовых рядов с положительными членами?
74. Признак Даламбера.
75. Предельный признак сравнения.
76. Непредельный признак сравнения.
77. Интегральный признак Коши.
78. Какой ряд называется гармоническим? Сходится ли гармонический ряд?
79. Какой ряд называется обобщенным гармоническим рядом?
80. При каком условии обобщенный гармонический ряд является сходящимся? расходящимся?
81. Какой ряд называется знакопеременным?
82. Какой ряд называется знакопеременным?
83. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
84. При каком условии знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся?
85. При каком условии знакопеременный ряд называется условно сходящимся?
86. Признак Лейбница.
87. Что называется степенным рядом?
88. Что называется областью сходимости степенного ряда? Что называется радиусом сходимости степенного ряда?
89. Как найти интервал сходимости степенного ряда?
90. Теорема Абеля.
91. Что называется рядом Тейлора для функции $f(x)$?
92. Что называется рядом Маклорена для функции $f(x)$?
93. Разложение в ряд Маклорена функции e^x .
94. Разложения в ряд Маклорена функций $\sin x$ и $\cos x$.
95. Разложение в ряд Маклорена функции $\ln(1+x)$.

96. Разложения в ряд Маклорена функций $\frac{1}{1+x}$ и $\frac{1}{1-x}$.

6. Ряды Фурье.

97. Что называется рядом Фурье для периодической функции с периодом $T = 2l$?

98. По каким формулам определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$?

99. Что называется рядом Фурье для периодической функции с периодом $T = 2\pi$?

100. По каким формулам определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической с периодом $T = 2\pi$ функции $f(x)$?

101. Достаточное условие сходимости ряда Фурье (теорема Дирихле).

102. Какой вид имеет ряд Фурье для четной периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$? По каким формулам определяются коэффициенты этого ряда?

103. Какой вид имеет ряд Фурье для нечетной периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$? По каким формулам определяются коэффициенты этого ряда?

104. Комплексная форма ряда Фурье.

7. Дифференциальные уравнения.

105. Что называется дифференциальным уравнением (ДУ)? Что называется порядком ДУ?

106. Что называется решением ДУ?

107. Что называется общим решением ДУ? Что называется частным решением ДУ?

108. Что называется задачей Коши для ДУ 1-го порядка? Сформулировать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка.

109. Что называется задачей Коши для ДУ 2-го порядка? Сформулировать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка.

110. Что называется ДУ с разделяющимися переменными? Указать метод его решения.

111. Какое ДУ 1-го порядка называется однородным? Указать метод его решения.

112. Какое ДУ 1-го порядка называется линейным? Указать метод его решения.

113. Какие ДУ 2-го порядка допускают понижение порядка?

114. Что называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2-го порядка?

115. Что называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2-го порядка?

116. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ.

117. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня?
118. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет два совпадающих корня?
119. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет комплексные корни?
120. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ.
121. Методы нахождения частного решения ЛНДУ.
122. При каких условиях для решения ЛНДУ применяется метод неопределенных коэффициентов?
123. Что называется правой частью специального вида для ЛНДУ с постоянными коэффициентами?
124. Теорема о наложении решений.

**Типовые задания по дисциплине «МАТЕМАТИКА»
(II семестр, специальности ПОИБМС, ДЭВИ)**

Вариант 1.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 4 + i$. Найти $3z_1 + 2\overline{z_2}$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$;
изобразить на комплексной плоскости числа z_1 , z_2 , $\overline{z_2}$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $\overline{x_1} = 1$, $\overline{x_2} = 1 + t$, $\overline{x_3} = 1 + t^2$, $\overline{x_4} = 1 + t^3$.

3. Найти координаты элемента $\overline{a} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ в базисе $\overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
 $\overline{e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейного пространства квадратных матриц 2-го порядка.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(\sqrt{x} - 9)^2}{\sqrt{x}} dx.$

6. $\int \sqrt{(3x - 5)^3} dx.$

7. $\int \frac{dx}{9 - 4x^2}.$

8. $\int x \sin(x^2) dx.$

9. $\int x^2 5^{x^3} dx.$

10. $\int \frac{xdx}{(9 - 4x^2)^2}.$

11. $\int \frac{(1 - 2 \operatorname{ctg} x)^3}{\sin^2 x} dx.$

12. $\int \frac{\ln^2(x + 2)}{x + 2} dx.$

13. $\int \frac{(9 - 4x)dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}.$

14. $\int x \sin 2x dx.$

15. $\int x 5^{\frac{x}{2}} dx.$

16. $\int \arcsin 4x dx.$

17. $\int \frac{(2x - 1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 9}}.$

18. $\int \frac{3x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 - 1)} dx.$

19. $\int \frac{dx}{3\sqrt[6]{3x - 4} + \sqrt{3x - 4}}.$

20. $\int \sin^3 x \cos^8 x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

$$21. \int_0^5 \ln(x+5) dx.$$

$$22. \int_1^{64} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$23. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) dt.$$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 - 1}.$$

$$25. \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2 - 6x + 10$, $x - y - 1 = 0$.

27. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 3$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}.$$

$$29. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{4n-5}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+2^3} - \frac{1}{1+2^4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n \sqrt{n}}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x|$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. e^{x+3y} dy = x dx.$$

$$37. (y - xy') \cos \frac{y}{x} = x.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. (x^2 + 1)y' + 4xy = 3, y(0) = 4. \quad 39. y'' + 4y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 4.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 2x - 1$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2, y'(0) = 0$.

Вариант 2.

1. Вычислить $\frac{i(5-3i) + \overline{2-i} \cdot (3+i)}{3-4i}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,
 $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
3. Найти координаты многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в базисе $2t + t^5, t^3 - t^5, t + t^3$ пространства нечетных многочленов степени не выше 5.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы

5. $\int \frac{(2x-3)^2}{x^3} dx$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4x-3)^3}}$.
7. $\int \frac{3dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.
8. $\int x \cos(3x^2 + 4) dx$.
9. $\int e^{3x} \sqrt{1-2e^{3x}} dx$.
10. $\int \frac{3x dx}{(4-9x^2)^3}$.
11. $\int \frac{3 \sin x dx}{4 \cos x + 9}$.
12. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg^3 x}$.
13. $\int \frac{(5x-3) dx}{4-9x^2}$.
14. $\int x \cos \frac{x}{2} dx$.
15. $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$.
16. $\int x^2 \arctg x dx$.
17. $\int \frac{(2x-1) dx}{2x^2 - 8x + 30}$.
18. $\int \frac{5x-8}{x^3 + 4x} dx$.
19. $\int \frac{dx}{5x - 4\sqrt{x}}$.
20. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}$.

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^1 x e^{-3x+1} dx$.
22. $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}$.
23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin 2t dt$.

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

24. $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$.
25. $\int_0^2 \frac{x dx}{4-x^2}$.

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = \pm 2$ и осью Ox .

27. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^5}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{4}}{5} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{n}$.

33. Вычислить $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x+1$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

36. $(xy + x^2y)y' = 1 + y^2$.

37. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

38. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$, $y(1) = e^3$. **39.** $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

Вариант 3.

1. Вычислить $\frac{i^3(3i+2) - i^6(6-2i)}{1+3i}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $2t + t^5$, $t^3 - t^5$, $t + t^3$.
3. Найти координаты элемента $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -4 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int (\sqrt{2x} - 1)(2x + \sqrt{2x} + 1)dx.$
6. $\int \sqrt[5]{3-5x}dx.$
7. $\int \frac{dx}{4x^2 + 81}.$
8. $\int x \sin(3x^2 - 2)dx.$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x+\pi}{3}}.$
10. $\int \frac{x^3 dx}{(4x^4 + 81)^6}.$
11. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$
12. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4 x}}{x} dx.$
13. $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{4x^2 + 81}}.$
14. $\int x e^{3x-2} dx.$
15. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}.$
16. $\int \arcsin 3x dx.$
17. $\int \frac{(2x-1)dx}{3x^2 - 2x + 6}.$
18. $\int \frac{3x^2 - 15}{(x+1)(x^2 + 5x + 6)} dx.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x-9\sqrt{2-5x}}}.$
20. $\int \sin^7 x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$
22. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$
23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^4 t dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + 1}.$$

$$25. \int_1^e \frac{dx}{x \ln^5 x}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $x + y - 4 = 0$.

27. Вычислить $\iint_D (x + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y^2 = x$, $y = x$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

$$29. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n - 5}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 x^5 \cos \frac{x}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x + 2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - |x|$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.
В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. y - xy' = 2(1 + x^2 y').$$

$$37. (x + 2y)dx - xdy = 0.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. (1 - x)(y' + y) = e^{-x}, y(0) = 2.$$

$$39. y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = -2$.

Вариант 4.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система векторов $\bar{x}_1 = (-2; 1; 1; 3)$, $\bar{x}_2 = (-2; 7; 0; 4)$, $\bar{x}_3 = (-7; 4; 6; -10)$, $\bar{x}_4 = (8; 9; -3; -4)$.

3. Найти координаты элемента $g(x) = 4x^2 + x - 9$ в базисе $2x^2 + 3x + 1$, $-3x^2 + 2x + 4$, $x^2 - x - 5$ линейного пространства многочленов степени не выше 2.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -9 & -18 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы

5. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}} dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-5x)^3}}.$

7. $\int \frac{3dx}{16+25x^2}.$

8. $\int x \sin \frac{x^2}{4} dx.$

9. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{2-5x^4}}.$

10. $\int \frac{3x dx}{16+25x^4}.$

11. $\int \sqrt[3]{\ln x} \frac{dx}{x}.$

12. $\int \cos x e^{\sin x} dx.$

13. $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{16+25x^2}}.$

14. $\int x \cos \frac{x}{4} dx.$

15. $\int (x-2)4^{\frac{x}{2}} dx.$

16. $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx.$

17. $\int \frac{x dx}{4x^2 + 3x - 1}.$

18. $\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x+2)(x^2+1)} dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x}}.$

20. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \sqrt{1+x^2} dx.$

22. $\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

23. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin \left(2t - \frac{\pi}{4} \right) dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^4}.$$

$$25. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x = y - y^2 + 6$ и осью Oy .

27. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 4 - y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = \frac{1}{2}x^2, y = 2$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{3^n n!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{4+n^2} \right)^2.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{8 \cdot 9} - \frac{1}{16 \cdot 17} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 x^5 \sin \frac{x}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} -x + 0,5, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 5$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. (x+4)dy - xydx = 0.$$

$$37. y' = 2x(x^2 + y).$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. (x+3y)dy = (x-y)dx, y(1) = 1. \quad 39. y'' - 2y' - 8y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 8y = 2x - 3, \text{ удовлетворяющее начальным условиям}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Вариант 5.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 2i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел

$$\overline{z_1}, \overline{z_2}, z_1^2, \frac{z_1^2}{z_2}.$$

2. Определить, является ли линейно независимой система векторов $\bar{a}_1 = (-1; 1; 0; 3)$, $\bar{a}_2 = (-1; 3; 1; -1)$, $\bar{a}_3 = (1; 2; -1; 2)$, $\bar{a}_4 = (0; -1; 0; 1)$.

3. Найти координаты многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в базисе $t + t^5$, $t^3 + t^5$, $t + t^3$ линейного пространства нечетных многочленов степени не выше 5.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора

с матрицей $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 7 & 9 & 5 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы

5. $\int \frac{(2\sqrt{x} - 3)^3}{\sqrt{x}} dx.$

6. $\int \sqrt[4]{2 - 3x} dx.$

7. $\int \frac{dx}{9x^2 - 16}.$

8. $\int \frac{(5 + 4^x)^2 dx}{3^{2x}}.$

9. $\int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}.$

10. $\int \frac{4x^2 dx}{\sqrt{(9x^3 - 16)^3}}.$

11. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[4]{3 \cos x - 4}} dx.$

12. $\int \frac{dx}{x(2 \ln x - 3)^2}.$

13. $\int \frac{(9 - x) dx}{\sqrt{9 + 2x^2}}.$

14. $\int (3x + 4) \cos x dx.$

15. $\int x^7 \log_7 x dx.$

16. $\int x \cdot \arccos x^2 dx.$

17. $\int \frac{(x + 7) dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}.$

18. $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x^2 - 1)} dx.$

19. $\int \frac{dx}{3\sqrt{x} - 2x}.$

20. $\int \frac{5 + \sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^1 x e^{-x} dx.$

22. $\int_1^2 \frac{\sqrt{2+x}}{x} dx.$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \left(2t + \frac{\pi}{6} \right) dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

24. $\int_2^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x dx.$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $x = y^2 + 2y - 3$ и осью Oy .

27. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $y = 1$, $x = 0$, если поверхностная площадь равна $\gamma(x; y) = x^2 + 2y^2$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)!}{n^7}$. **29.** $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{4n^4 - 5}}$.

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{3^2}{4 \cdot 5} + \frac{3^3}{8 \cdot 9} - \frac{3^4}{16 \cdot 17} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}$. **32.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$.

33. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0,5x + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

36. $y - xy' = 1 + x^2 y'$. **37.** $y^2 dx + x^2 dy = 2xy dx$.

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

38. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 2$. **39.** $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y = 5x - x^2$,

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Вариант 6.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + 2i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $\frac{z_1^2}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Найти координаты многочлена $f(x) = 1 + x^2 - 2x^3$ в базисе 1 , $x + 1$, $x^2 + 1$, $x^3 + 1$ линейного пространства многочленов степени не выше 3.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(4-3x)^2}{x^2} dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x-8)^2}}.$

7. $\int \frac{6dx}{\sqrt{7-16x^2}}.$

8. $\int x^2 e^{3x^3+4} dx.$

9. $\int 5^{3-4x} dx.$

10. $\int \frac{3x dx}{(7-16x^2)^2}.$

11. $\int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}.$

12. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$

13. $\int \frac{(4x-3)dx}{7-16x^2}.$

14. $\int 2x e^{3x+4} dx.$

15. $\int \frac{\log_3 x dx}{\sqrt[3]{x}}.$

16. $\int \arcsin \frac{x}{4} dx.$

17. $\int \frac{(x-6)dx}{x^2-8x+17}.$

18. $\int \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 5}{x^3 + x} dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4} + 2\sqrt[4]{3x+4}}.$

20. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x}.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx.$

22. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$

23. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 t dt}{\sqrt[3]{\sin t}}.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

$$25. \int_0^{0.5} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2x - y = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $y = 4$.

27. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $z + x = 6$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 6$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^7 \left(\frac{9}{2}\right)^n.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n-2}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} - \frac{1}{4 \cdot \sqrt{6}} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = x$ при $1 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. y' + y + y^2 = 0.$$

$$37. y' - y = e^x.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. y^2 + x^2 y' = xy y', y(1) = 1. \quad 39. y'' - y' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 10y = x - 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 10$.

Вариант 7.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$. Записать эти числа в алгебраической форме записи, изобразить на комплексной плоскости, найти $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $\frac{z_1^2}{z_2}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система векторов $\vec{a}_1 = (1; 2; 3; 5; 0)$, $\vec{a}_2 = (2; 2; -3; -4; 1)$, $\vec{a}_3 = (3; 4; -1; -4; -1)$, $\vec{a}_4 = (4; 7; 7; 3; 5)$.
3. Найти координаты многочлена $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$ в базисе $1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3, (x - 1)^4$ пространства многочленов степени не выше 4.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \left(\sqrt{x}\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right) dx.$ 6. $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}.$ 7. $\int \frac{dx}{25x^2+9}.$
8. $\int x \sin 6x^2 dx.$ 9. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 4)}.$ 10. $\int \frac{x^3 dx}{(25x^4 + 9)^5}.$
11. $\int \frac{e^{2x}}{2 + e^{4x}} dx.$ 12. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}.$ 13. $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{25x^2+9}}.$
14. $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx.$ 15. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}.$ 16. $\int \arccos \frac{2x}{7} dx.$
17. $\int \frac{(2x+1)dx}{5x^2-2x+10}.$ 18. $\int \frac{x^3-6x+3}{x^3-x^2-6x} dx.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$ 20. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx.$ 22. $\int_1^9 x^3 \sqrt{1-x} dx.$ 23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{\pi}^{+\infty} \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$25. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

27. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{5^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + 1}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2^2 \cdot 3} - \frac{1}{2^4 \cdot 5} + \frac{1}{2^6 \cdot 9} - \frac{1}{2^8 \cdot 17} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n2^n}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 x^5 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3-x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x + 2$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. y^2 \ln x dx - (y-1)x dy = 0.$$

$$37. xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. xy' + y + xe^{-x^2} = 0, y(1) = 0.$$

$$39. y'' + 9y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Вариант 8.

1. Даны комплексные числа $z_1 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$, $z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$. Записать эти числа в алгебраической форме записи, изобразить на комплексной плоскости, найти $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $\frac{z_1^2}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $1 + 2x^2 + x^3$, x , $2 - 3x + 3x^2 - x^3$, $3 + 4x + 4x^2 + 2x^3$.

3. Найти координаты матрицы $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -9 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{1}{3x} \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x^2} + 2 \right) dx.$

6. $\int e^{3-4x} dx.$

7. $\int \frac{3dx}{4+9x^2}.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{4x-\pi}{3}}.$

9. $\int x\sqrt{2-3x^2} dx.$

10. $\int \frac{3x^3 dx}{4+9x^4}.$

11. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln^2 x}}.$

12. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx.$

13. $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{4+9x^2}}.$

14. $\int (3-2x) \sin 2x dx.$

15. $\int (x-2)4^{2x} dx.$

16. $\int \sqrt[3]{x^2} \ln x dx.$

17. $\int \frac{(x-5)dx}{2x^2+x-4}.$

18. $\int \frac{x^3+x+5}{(x-1)(x^2+1)} dx.$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x-9}}.$

20. $\int \sin^3 2x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

$$21. \int_0^{0,5} \arcsin x dx.$$

$$22. \int_0^{63} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt{x+1}}.$$

$$23. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t dt.$$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$25. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 10x - 16$, $y = x + 2$.

27. Вычислить $\iint_D (x+y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{2^n(n+2)!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 3} - \frac{1}{3^4 \cdot 4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,25} x \cos \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 10 - x$ при $5 < x < 15$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. (x+x^2)udx + dy + y^2 dy = 0.$$

$$37. xy' + y = \ln x.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. y = xy' + x e^{\frac{y}{x}}, y(1) = 0.$$

$$39. y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = 4$.

Вариант 9.

1. Вычислить $\frac{i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4}{8 + 4i}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система векторов $\bar{a}_1 = (-1; 2; 0; 1)$, $\bar{a}_2 = (3; 0; -1; -2)$, $\bar{a}_3 = (1; 1; 1; 1)$, $\bar{a}_4 = (0; -2; 3; 0)$.
3. Найти координаты многочлена $g(x) = 4 + x + 8x^2 - 5x^3$ в базисе $x + 3x^2 - x^3$, $2x^3 + x - 2$, $3 + x - x^2$, $x + 2x^2 + x^3$ пространства многочленов степени не выше 3.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(x^5 + 2)^2}{\sqrt{x}} dx$.
6. $\int \frac{6}{\sqrt[5]{(1-2x)^3}} dx$.
7. $\int \frac{dx}{100 - 10x^2}$.
8. $\int \frac{18dx}{e^{1-3x}}$.
9. $\int 5x \cos(\pi + x^2) dx$.
10. $\int \frac{2 \cos x dx}{\sin^2 x + 3}$.
11. $\int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.
12. $\int \frac{\sqrt[3]{2 + \ln x^7}}{x} dx$.
13. $\int \frac{8x^2}{3 - 4x^3} dx$.
14. $\int (3x - 1) \sin 2x dx$.
15. $\int x e^{\frac{3-x}{2}} dx$.
16. $\int x \operatorname{arccotg} x dx$.
17. $\int \frac{(2x + 7) dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$.
18. $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$.
19. $\int \frac{dx}{9 + \sqrt{3x - 4}}$.
20. $\int \cos^4 x dx$.

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_1^{e^3} x \ln x dx$.
22. $\int_{-1}^0 \frac{3}{x^2 + 2x + 2} dx$.
23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \left(4t + \frac{\pi}{6} \right) dt$.

В заданиях 24-26 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

24. $\int_{-\infty}^0 \frac{4dx}{x^2 + 9}$.
25. $\int_{-4}^4 \frac{dx}{(x+1)^3}$.

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x - 2y = 4$, $x + y - 5 = 0$, $y = 0$.

27. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $x + y + z = 3$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 1 - x^2, y = 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n n!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[8]{\frac{n}{(7n-1)^3}}$.

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} - \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 7}} - \frac{1}{\sqrt{7 \cdot 9}} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$.

33. Вычислить $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4x - 3, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 0.5, & \text{если } x = 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 1; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

36. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$.

37. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$.

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

38. $x^2 y' + xy + 1 = 0, y(1) = 2$. **39.** $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = 3$.

Вариант 10.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 2 - i$. Найти $z_1(3z_1 + 2\overline{z_2}) + \frac{5}{z_2}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $x + 3x^2 - x^3$, $2x^3 + x - 2$, $3 + x - x^2$, $x + 2x^2 + x^3$.
3. Найти координаты матрицы $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} \right)^3 dx$.
6. $\int \sqrt[8]{(7-4x)^3} dx$.
7. $\int x^2(2x^3 + 4)^3 dx$.
8. $\int \frac{5+4^x}{8^{2x}} dx$.
9. $\int \frac{2dx}{\cos^2 \frac{\pi-3x}{4}}$.
10. $\int \frac{x}{5x^2-1} dx$.
11. $\int \frac{(1-2\operatorname{ctg} x)^3}{\sin^2 x} dx$.
12. $\int \frac{\ln^2(7x+2)}{7x+2} dx$.
13. $\int \frac{(1-4x)dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.
14. $\int (2x-5)\cos 4x dx$.
15. $\int (3-x)e^{3-x} dx$.
16. $\int \arccos 8x dx$.
17. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$.
18. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)} dx$.
19. $\int \frac{dx}{4\sqrt[4]{2x-3} + \sqrt{2x-3}}$.
20. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$.

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^1 \ln^2(x+5) dx$.
22. $\int_0^3 \sqrt{\frac{6+x}{6-x}} dx$.
23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \left(2t - \frac{2\pi}{3} \right) dt$.

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}.$$

$$25. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 8x + 18$, $2x + y - 18 = 0$.

27. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 1$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = 4 - x - y$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4n+5}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2n}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{2 \cdot 3}{2^2} + \frac{3 \cdot 4}{2^3} - \frac{4 \cdot 5}{2^4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{\sqrt{n^3+1}}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,25} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 5-x, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{если } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 5x - 1$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. y' = (2y+1) \operatorname{tg} x.$$

$$37. y'x \ln x = y + 3 \ln x.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. xy' - y = \sqrt{xy}, y(1) = 4. \quad 39. y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' - 8y = e^x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

Вариант 11.

1. Вычислить $\frac{(2-i)^2 + \overline{3+4i}}{2(i+3)}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система векторов $\bar{e}_1 = (-1; -1; 1; 0)$, $\bar{e}_2 = (1; 3; 2; -1)$, $\bar{e}_3 = (0; 1; -1; 0)$, $\bar{e}_4 = (3; -1; 2; 1)$.
3. Найти координаты матрицы $\bar{d} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2}{7x} dx.$
6. $\int x^2 \sqrt{(x^3 - 5)^3} dx.$
7. $\int \frac{1+x}{16-4x^2} dx.$
8. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+3\sin^2 x}} dx.$
9. $\int (e^{2x} + 5)^3 e^{2x} dx.$
10. $\int \sin \frac{3}{x} \frac{dx}{4x^2}.$
11. $\int \frac{2 + \cos 2x}{\sin^2 x} dx.$
12. $\int \frac{\ln^2(2-3x)}{3x-2} dx.$
13. $\int \frac{(8-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $\int (x+2) \sin 7x dx.$
15. $\int (x+1) 9^{\frac{x}{2}} dx.$
16. $\int \arccos \frac{x}{2} dx.$
17. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 6x + 5} dx.$
18. $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2 + 3x + 2)} dx.$
19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x+9}}.$
20. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^1 \frac{\arctg x}{(1+x)^2} dx.$
22. $\int_8^{64} \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx.$
23. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$25. \int_{-1}^1 \frac{dx}{5x+1}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$, $x + 3y = 3$.

27. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x^2$, $9y = x^2$, $y = 2$, $x \geq 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n5^n}.$$

$$29. \sum_{n=11}^{\infty} \sqrt{\frac{n-10}{n+100}}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+10)^n}{2^n + 1}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3x - 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -3 < x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. dy = \sin^2 x \operatorname{tg} y dx.$$

$$37. (y + \sqrt{xy})dx = xdy.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. xy' + x^2 = 3y, y(1) = -2. \quad 39. y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' = 72e^{2x}$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3, y'(0) = 0$.

Вариант 12.

1. Даны комплексные числа $z_1 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$, $z_2 = 6 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$. Записать эти числа в алгебраической форме записи, изобразить на комплексной плоскости, найти $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $\frac{z_1^2}{z_2}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти координаты многочлена $f(x) = 2x + 6x^2 + 3x^3$ в базисе $1 + 2x^2 + x^3$, x , $2 - 3x + 3x^2 - x^3$, $3 + 4x + 4x^2 + 2x^3$ пространства многочленов степени не выше 3.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(2\sqrt{x} + 9)^2}{x^2} dx$. 6. $\int \frac{2}{(3x-5)^3} dx$. 7. $\int \frac{dx}{100-4x^2}$.
8. $\int 80x(4x^2-1)^7 dx$. 9. $\int x^5 e^{x^6} dx$. 10. $\int \frac{(5+\sin x)dx}{\cos^2 x}$.
11. $\int \frac{\sqrt{4\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$. 12. $\int \frac{1+3\ln(x+2)}{x+2} dx$. 13. $\int \frac{(5-4x)dx}{\sqrt{25+4x^2}}$.
14. $\int (x-5)\sin \frac{x}{3} dx$. 15. $\int x 9^{\frac{x}{2}} dx$. 16. $\int \operatorname{arctg} 4x dx$.
17. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}$. 18. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-1)} dx$.
19. $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4} dx$. 20. $\int \sin^3 7x \cos^6 7x dx$.

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^4 \frac{6}{1+\sqrt{x}} dx$. 22. $\int_2^3 \frac{2x^5-1}{2x^2-x} dx$. 23. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) dt$.

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{2x^2 - 5x + 3}.$$

$$25. \int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2y = (x+3)^2$, $y = 0$, $2x + 18y - 9 = 0$.

27. Вычислить $\iint_D x^2 y dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = 1$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{6}{5 \cdot 7} - \frac{8}{7 \cdot 9} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 1)x^n}{n!}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n n}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 x \ln(1+x^6) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - x$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. dx = \sin^2 x \operatorname{tg} y dy.$$

$$37. y' + y = 2e^x.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}, y(1) = 0,5.$$

$$39. y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' - 6y = 3 \cos x + 19 \sin x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}, \text{удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = 6.$$

Вариант 13.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $\frac{z_1^2}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти координаты многочлена $f(x) = x^4 - 5x^2$ в базисе $x^4 - 2x^2 + 1$, $2x^4 + 1$, $x^2 - x^4 + 1$ пространства четных многочленов степени не выше 4.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 7 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int x^2(2x+1)(5x-3)dx$.

6. $\int \sqrt{(7x-5)^5} dx$.

7. $\int \frac{9}{e^{1-4x}} dx$.

8. $\int x \sin(3-2x^2) dx$.

9. $\int \frac{\arctg x + 4}{1+x^2} dx$.

10. $\int \frac{x^2 dx}{(9-4x^3)^3}$.

11. $\int \operatorname{ctg}(2-3x) dx$.

12. $\int \frac{1+\sqrt{1+3\ln x}}{3x} dx$.

13. $\int \frac{(1-4x)dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

14. $\int (x+3) \cos \frac{2x}{3} dx$.

15. $\int x 8^{\frac{x}{3}} dx$.

16. $\int \arccos 4x dx$.

17. $\int \frac{dx}{3x^2 - 12x - 14}$.

18. $\int \frac{3x^3 + 1}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

19. $\int \frac{\sqrt{2x-3} dx}{x}$.

20. $\int \cos^4 x dx$.

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_1^2 x \log_2 x dx$.

22. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{3x+1} + \sqrt{3x+1}}$.

23. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3^x}{1+9^x} dx$.

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+2)^2}. \quad 25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos 2x}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $9y = x^2$, $y = 4x^2$, $y - 2 = 0$.

27. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, если поверхностная площадь равна $\gamma(x; y) = 2x + 5y + 10$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!}. \quad 29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{5} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n. \quad 32. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n^4}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

$$\text{функции и суммы ряда: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ (\pi - x)/2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$,

$$\text{если } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ -1, & \text{если } 1 < x < 2; \end{cases} \text{ построить графики функции и суммы ряда.}$$

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. xy' - y = y^2. \quad 37. y = xy' - x e^{\frac{y}{x}}.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. xy' - y = x^2, y(1) = -2. \quad 39. y'' + 4y' - 5y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 0.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 3e^{-3x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y = \cos 6x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Вариант 14.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2i$, $z_2 = 4 + 4\sqrt{3}i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $\frac{z_1^2 + 2z_1}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Найти координаты элемента $g(x) = 4x^2 + x - 9$ в базисе $2x^2 + 3x + 1$, $-3x^2 + 2x + 4$, $x^2 - x - 5$ пространства многочленов степени не выше 2.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(2x+3)^3}{\sqrt{x^5}} dx.$

6. $\int \frac{5x^2}{x^2 + 100} dx.$

7. $\int \frac{(1-2x)dx}{1-2x^2}.$

8. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} dx.$

9. $\int \frac{\sin 6x}{\cos^4 6x} dx.$

10. $\int \frac{x^3 dx}{(8+3x^4)^2}.$

11. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{1-x} dx.$

12. $\int \frac{\cos 2x + 5}{\cos^2 x} dx.$

13. $\int \frac{(25-4x)dx}{\sqrt{25-4x^2}}.$

14. $\int x \sin \frac{2x}{5} dx.$

15. $\int (2x+1)3^{2x} dx.$

16. $\int \arcsin 5x dx.$

17. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{3x^2+x-5}}.$

18. $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx.$

19. $\int \frac{x\sqrt{3-x}dx}{7}.$

20. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx.$

22. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

23. $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x dx.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

$$25. \int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^3}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x = y^2$, $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$.

27. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $x + 2y + z = 4$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: x = 2y^2, x + 2y = 4$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n!)^2}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^3 + 1}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sin 1 - \sin \frac{1}{2^2} + \sin \frac{1}{3^2} - \sin \frac{1}{4^2} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} x^n.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{3n+1}}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 5x+1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 < x < 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. 3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0.$$

$$37. (2x+1)y' = 4x+2y.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. y' = \frac{y}{x} - 1, y(1) = 2.$$

$$39. y'' - 6y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 6.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 25y = e^{5x}$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 8y = -x^2, \text{удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Вариант 15.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 5i$, $z_2 = 4 + 3i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел

$$\overline{z_1}, \overline{z_2}, z_2^2, \frac{z_1^2 + 10z_1}{z_2}.$$

2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $2x^5 + x^3$, $4x^5 + 3x^3 - 4x$, $x^5 + 5x^3 - 3x$.

3. Найти координаты матрицы $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{7x} dx.$

6. $\int e^x (e^{2x} + 3)^2 dx.$

7. $\int \frac{5dx}{\sqrt{9x^2 - 7}}.$

8. $\int \frac{8x}{\sin^2(x^2 + \pi)} x dx.$

9. $\int x^2 5^{x^3} dx.$

10. $\int \frac{x^3 dx}{(16 - x^4)^2}.$

11. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}} dx.$

12. $\int \frac{x - \sqrt[5]{\ln^2 x}}{3x} dx.$

13. $\int \frac{(4x+5)dx}{81x^2+1}.$

14. $\int x^2 \sin x dx.$

15. $\int \frac{x}{3^x} dx.$

16. $\int \arcsin \frac{x}{7} dx.$

17. $\int \frac{2dx}{\sqrt{10-6x-3x^2}}.$

18. $\int \frac{2x^2 - 6x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx.$

19. $\int \frac{dx}{3x - 4\sqrt{x}}.$

20. $\int \left(\sin \frac{2x}{3} - \cos \frac{2x}{3} \right)^2 dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^4 \frac{3}{1 + \sqrt{2x+1}} dx.$

22. $\int_1^{e^3} \frac{5}{x\sqrt{1+\ln x}} dx.$

23. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}.$$

$$25. \int_{-4}^4 \frac{dx}{(x+2)^2}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-4)^2$, $y = 16 - x^2$ и осью Ox .

27. Вычислить $\iint_D (x+y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 8$, $y = 0$, $x = 3$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)4^n}{n+2}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{2n^2-1}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n \sqrt{n+1}}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,5} (1 - e^{-x^2}) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 1-4x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 3$ при $-4 < x < 4$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}.$$

$$37. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

38. $x^2 y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 3$. 39. $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{4x}$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Вариант 16.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 2 + 3i$. Найти $\overline{z_1}, \overline{z_2}, 3\overline{z_1} - 2z_2, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$; изобразить на комплексной плоскости числа

$$z_1, z_2, \overline{z_2}, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

3. Найти координаты многочлена $f(x) = x^3 - 4x^2$ в базисе $3 + x^2 - x^3, 3x^2 - x^3 + x - 1, 1 - x^2, 2 - x + 2x^2 + x^3$ пространства многочленов степени не выше 3.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -10 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int (\sqrt{x} - 3)(2x^2 + \sqrt{2x} + 1)dx.$

6. $\int \frac{4xdx}{\sqrt[5]{(x^2 - 3)^3}}.$

7. $\int \frac{3^{3x} + 2}{4^x} dx.$

8. $\int x^2 \sin(3x^3 + 4)dx.$

9. $\int \frac{2x + 7\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx.$

10. $\int \frac{(5+x)dx}{\sqrt{1+9x^2}}.$

11. $\int \frac{10\sin x dx}{\sqrt{5\cos x + 1}}.$

12. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}.$

13. $\int \frac{(x-13)dx}{4x^2 - 2}.$

14. $\int x \cos(3x + 4)dx.$

15. $\int x \ln(2x - 1)dx.$

16. $\int (x + 2) \operatorname{arctg} x dx.$

17. $\int \frac{3xdx}{2x^2 + x - 6}.$

18. $\int \frac{20 - x}{x^3 + x^2 - 20x} dx.$

19. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$

20. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin^2 x - 4\cos^2 x}.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$

22. $\int_0^7 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^0 e^{5x+1} dx.$$

$$25. \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin 2x}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$.

27. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2y = \sqrt{x}$, $x + y = 5$, $x = 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+2)!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{4}{1^2} - \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} - \frac{4}{7^2} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 x^2 \left(1 - \cos \frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x - 3$ при $-3 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. \operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0.$$

$$37. y = x(y' - x \cos x).$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. y dx + 2\sqrt{xy} dy = x dy, y(1) = 4.$$

$$39. y'' - 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - y' - 6y = -(4x + 1)e^{2x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 10y = x - 2, \text{ удовлетворяющее начальным условиям}$$

$$y(0) = 5, y'(0) = 0.$$

Вариант 17.

1. Вычислить $\frac{(3+4i)^2 + i(1+2i)^3}{2-3i}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система векторов $\bar{e}_1 = (-1; -1; -2; 1; 0)$, $\bar{e}_2 = (1; 3; 0; 2; -1)$, $\bar{e}_3 = (0; 1; 1; -1; 0)$.
3. Найти координаты многочлена $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$ в базисе $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4$ пространства многочленов степени не выше 4.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int 4x \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$
6. $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{(2x^2 - 3)^3}}.$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - x^2}}.$
8. $\int x^2 e^{1-x^3} dx.$
9. $\int \frac{e^{3x}}{5 - e^{3x}} dx.$
10. $\int \frac{3x dx}{(4 - 9x^2)^3}.$
11. $\int \frac{3 \sin x dx}{(5 \cos x + 1)^2}.$
12. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} dx}{1 + x^2}.$
13. $\int \frac{5 \sin(\ln x) dx}{4x}.$
14. $\int (x^2 + 2x) \sin x dx.$
15. $\int x^5 \log_9 x dx.$
16. $\int \frac{x^6}{x^2 - 1} dx.$
17. $\int \frac{(2x-1) dx}{2x^2 - 8x + 30}.$
18. $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3(x+1)} dx.$
19. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$
20. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - \cos^2 x}.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^1 \frac{x}{2e^x} dx.$
22. $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{3x+1}}.$
23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \left(2t - \frac{\pi}{3} \right) dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

24. $\int_{-\infty}^0 \frac{2x+3}{x^2+1} dx.$
25. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{4x}.$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $7x^2 - 9y + 9 = 0$, $5x^2 - 9y + 27 = 0$.

27. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 1$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = 3x^2 + 2y^2 + 1$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n-1}}.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{n^4 + 1}}.$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+3} - \frac{2}{1+3^2} + \frac{3}{1+3^3} - \frac{4}{1+3^4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n.$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^n \sqrt{n+1}}.$

33. Вычислить $\int_0^1 \frac{e^{-x^3} - 1}{x^3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 3$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1,5, \\ -1, & \text{если } 1,5 < x < 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

36. $1 + (1 + y')e^y = 0.$

37. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y.$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

38. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = e$. **39.** $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 3 \cos 2x - 6 \sin 2x.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 3, y'(0) = 5.$$

Вариант 18.

1. Найти значение выражения $\frac{z^3 - i^5(z-1)^2}{z-2}$, если $z = 1 + 2i$.
2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $x^4 - 2x^2 + 1$, $2x^4 + 1$, $x^2 - x^4 + 1$.
3. Найти координаты матрицы $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(2\sqrt[4]{x} - 3)^2 + \sqrt{x}}{x} dx.$ 6. $\int x^2(3 - x^3)^5 dx.$ 7. $\int \frac{(1 - 2^x)^2 dx}{8^{2x}}.$
8. $\int \frac{e^x}{8 - 7e^x} dx.$ 9. $\int \cos x \sin 2x dx.$ 10. $\int \frac{1 + 3x dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$
11. $\int \operatorname{ctg}^2 5x dx.$ 12. $\int \frac{dx}{(5 + \ln^2 x)x}.$ 13. $\int \frac{3 \sin x dx}{4 \cos^2 x - 81}.$
14. $\int x^2 \cos 4x dx.$ 15. $\int \ln(5 + 2x) dx.$ 16. $\int \operatorname{arctg} 3x dx.$
17. $\int \frac{x^3 dx}{x^2 + 2x + 3}.$ 18. $\int \frac{6x^2 - 1}{x^3 - 4x} dx.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3} + 2\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[6]{2x+3}}.$ 20. $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_{-1}^2 x e^{-x/2} dx.$ 22. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}.$ 23. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2t \sin^2 2t dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^0 3^{2x} dx.$$

$$25. \int_0^7 \frac{x dx}{49 - x^2}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $3x - y - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $y - 3 = 0$.

27. Вычислить $\iint_D xy^3 dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y^2 = 1 - x$, $x = 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n-1}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{(n+1)(3n+1)^3}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{2}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n-1}} x^n.$$

$$32. \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n-2)^2}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,25} \cos \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - |x|$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда. В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. (1 + e^{3y})x dx = e^{3y} dy.$$

$$37. dy = (2e^x - y) dx.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. y' = \frac{(x-y)y}{x^2}, y(1) = 0,5. \quad 39. y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' - 24y = 6 \cos 3x - 33 \sin 3x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Вариант 19.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $z_1^2 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти координаты многочлена $g(x) = 7x^5 - 5x^3 - 3x$ в базисе $2x^5 + x^3$, $4x^5 + 3x^3 - 4x$, $x^5 + 5x^3 - 3x$ пространства нечетных многочленов степени не выше 5.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -12 & -10 & 4 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{2x^3 - 5x + 7\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}} dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-5)^5}}.$

7. $\int \frac{9}{2^{4x-3}} dx.$

8. $\int x^2 \sin(3 - 2x^3) dx.$

9. $\int \frac{\operatorname{tg} x + 4}{\sin^2 x} dx.$

10. $\int \frac{2x dx}{(9 - x^2)^3}.$

11. $\int \operatorname{tg} 3x dx.$

12. $\int \frac{\sqrt{1 + 2 \ln x}}{3x} dx.$

13. $\int \frac{(7x + 2) dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

14. $\int (11x + 3) \sin 2x dx.$

15. $\int \frac{x}{25^{\frac{x}{2}}} dx.$

16. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx.$

17. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + x + 2}}.$

18. $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2-1)} dx.$

19. $\int \frac{\sqrt{2x+9} dx}{x}.$

20. $\int \sin^4 5x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_1^5 x^2 \log_5 x dx.$

22. $\int_0^{15} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1} + \sqrt{x+1}}.$

23. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_0^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2-2x+5)^2}. \quad 25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos 2x}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $x = 0$, $x = 5\pi/4$.

27. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y^2$, $x + y = 5$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}. \quad 29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n-1}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{3^2 \cdot 2} + \frac{5}{3^3 \cdot 3} - \frac{5}{3^4 \cdot 4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}. \quad 32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!n^2}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,25} x^2 \cos 4\sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 6x - 5, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$,

$$\text{если } f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } -4 < x < 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x < 4; \end{cases} \quad \text{построить графики функции и суммы ряда.}$$

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. (xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0. \quad 37. xy' + x + y = 0.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}, y(1) = 0. \quad 39. y'' + 8y' + 16y = 0, y(0) = -1, y'(0) = -1.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = 70e^{4x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y = 5x - x^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Вариант 20.

1. Даны комплексные числа $z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_1}^2$, $\overline{z_1}^2 z_2$, $\frac{\overline{z_1}^2}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $3+x^2-x^3$, $3x^2-x^3+x-1$, $1-x^2$, $2-x+2x^2+x^3$.

3. Найти координаты матрицы $\overline{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $\overline{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$\overline{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{a_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{a_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора

с матрицей $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 12 & 8 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{10}{x} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{7}{x^2} + e \right) dx.$

6. $\int \sin x e^{3+4\cos x} dx.$

7. $\int \frac{(32^x - 2^x) dx}{4^x}.$

8. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x}.$

9. $\int x(5+8x^2)^9 dx.$

10. $\int \frac{3x dx}{4+9x^4}.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin^3 x}}.$

12. $\int \frac{\cos x}{1+9\cos^2 x} dx.$

13. $\int \frac{(x-7)dx}{\sqrt{4+16x^2}}.$

14. $\int (3+x) \sin 5x dx.$

15. $\int (x+2) 8^{2x} dx.$

16. $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx.$

17. $\int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}.$

18. $\int \frac{6x^3 - x - 3}{x^3 - x} dx.$

19. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$

20. $\int \sin 2x \cos 6x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

$$21. \int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx.$$

$$22. \int_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$23. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t dt.$$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$25. \int_1^{e^2} \frac{5}{x\sqrt{\ln x}} dx.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $x = -\pi$, $x = \pi/2$, $y - 1 = 0$.

27. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 1 - x^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 3 - x$, $y = 0$, $x = \pm 1$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3 + 1}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{2}{4 \cdot 5} + \frac{3}{8 \cdot 9} - \frac{4}{16 \cdot 17} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{3^n}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3n^3}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,1} \frac{1 - e^{-4x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 1 + x$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. (y + x^2 y)y' - y^2 = 1.$$

$$37. xy' = 2y + x^4.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. xy' + y \ln \frac{y}{x} = y, y(1) = e^3. \quad 39. y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 8e^{3x}$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 4x + 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$.

Вариант 21.

1. Даны комплексные числа $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, $z_2 = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_2^2 , $\overline{z_1 z_2^2}$, $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти координаты многочлена $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 8x + 3$ в базисе $3x^2 + x^3 - 1$, $x^2 - x$, $2 + 3x + x^2$, $1 + x + x^2 + 2x^3$ пространства многочленов степени не выше 3.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 4 & -4 & 12 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int 5x \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 2 \right)^2 dx.$

6. $\int \frac{x^2}{6^{1-4x^3}} dx.$

7. $\int \frac{(9-3x)dx}{1-16x^2}.$

8. $\int \frac{(3\ln^2 x + 7)dx}{x \ln x}.$

9. $\int (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 dx.$

10. $\int (5^x + 2)^3 dx.$

11. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + 2 \cos x)^5}.$

12. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin^2 x} dx.$

13. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{4+49x^2}}.$

14. $\int x^2 \cos 5x dx.$

15. $\int (x+1)e^{2x} dx.$

16. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx.$

17. $\int \frac{(2x-9)dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}.$

18. $\int \frac{x^5}{x^3+1} dx.$

19. $\int \frac{(1+\sqrt{x})dx}{(1+\sqrt[3]{x})^6 \sqrt{x^5}}.$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{6} \right) dt.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx.$

22. $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}.$

23. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^3 t}.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_2^{+\infty} e^{-5x} dx.$$

$$25. \int_{-1}^0 \frac{dx}{(1+x)^3 \sqrt{1+x}}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$.

27. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 1 - y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: x = y^2, x = 2y^2 + 1, y = \pm 1$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2 \cdot n!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n-1}}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{\sqrt{n^5 + 4}}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}(x-1)^n}{n^2}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,36} \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

$$\text{функции и суммы ряда: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$,

$$\text{если } f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -2 < x < 0, \\ -0.5, & \text{если } x = 0, \\ x/2, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases} \quad \text{построить графики функции и суммы ряда.}$$

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. y' = 2xy + x.$$

$$37. (x - y)ydx - x^2 dy = 0.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. (x+1)y' + y = x^3 + x^2, y(0) = 1. \quad 39. y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 16y = 80e^{2x}$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = 2x - 3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Вариант 22.

1. Даны комплексные числа $z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$, $z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Записать эти числа в алгебраической форме записи, изобразить на комплексной плоскости числа $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_2^2 , $z_1 z_2^2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $2t + t^5$, $t^3 - t^5$, $t + t^3$.

3. Найти координаты матрицы $\overline{x} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $\overline{a_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{a_2} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{a_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{a_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ -4 & -8 & 12 \\ -2 & -6 & 10 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{\sqrt{x} + (4-3x)^3}{5x^2} dx.$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(7x^2-8)^2}}.$

7. $\int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{7-36x^2}}.$

8. $\int (5^{2x} - 1)(5^{-2x} + 1)dx.$

9. $\int (\operatorname{tg} x + 2)^2 dx.$

10. $\int \frac{3xdx}{7-6x^2}.$

11. $\int 3 \cos^2 \frac{x}{4} dx.$

12. $\int \sqrt{\frac{\arccos^7 x}{1-x^2}} dx.$

13. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{3\sqrt{x}}.$

14. $\int x^2 e^{3x} dx.$

15. $\int \frac{\log_9 x dx}{\sqrt{x}}.$

16. $\int \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} dx.$

17. $\int \frac{6xdx}{5-12x-9x^2}.$

18. $\int \frac{4x+5}{x^3+x^2} dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}(1+\sqrt[3]{2x+3})}.$

20. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4 \sin x \cos x}.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^{\pi/4} x \cos x \sin x dx.$

22. $\int_{25}^{49} \frac{dx}{x-4\sqrt{x}}.$

23. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{8x^2 + 1}.$$

$$25. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$.

27. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $4z = y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 2x, x + y = 9, y = 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+1)^3}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{3!} - \frac{3^3}{4!} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+4)}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n)^2 (x-1)^n.$$

33. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 6x - 2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x + 2$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. 2xyu' + x^2 = 1.$$

$$37. xy' - 2y + x^2 = 0.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. xdy + 2\sqrt{xy}dx = ydx, y(1) = 4. \quad 39. y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 15e^x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = -1, y'(0) = 14.$$

Вариант 23.

1. Даны комплексные числа $z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$, $z_2 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$. Записать эти числа в алгебраической форме записи, изобразить на комплексной плоскости, найти $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $\frac{z_1^2}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система векторов $\vec{e}_1 = (-3; 2; 0; -1)$, $\vec{e}_2 = (2; 1; 2; 2)$, $\vec{e}_3 = (1; -1; 1; 0)$, $\vec{e}_4 = (0; 2; 0; 1)$.

3. Найти координаты матрицы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 12 \\ -4 & 3 & -12 \\ -2 & 4 & -11 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \left(7\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+3)^3}}.$

7. $\int \frac{dx}{16x^2 - 9}.$

8. $\int x^2 \sin x^3 dx.$

9. $\int \frac{\ln 5x}{3x \ln x} dx.$

10. $\int \frac{x^3 dx}{5x^4 + 9}.$

11. $\int \frac{e^{2x}}{(1+3e^{2x})^4} dx.$

12. $\int \frac{dx}{\arccos^3 x \sqrt{1-x^2}}.$

13. $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{25-x^2}}.$

14. $\int (x+4)e^{\frac{x}{2}} dx.$

15. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

16. $\int x \operatorname{arccotg} 2x dx.$

17. $\int \frac{(x+1)dx}{4x^2+2x-3}.$

18. $\int \frac{x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 - 4} dx.$

19. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt[3]{x}+1}.$

20. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos x}.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

$$21. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \cos x dx.$$

$$22. \int_1^{28} x \sqrt[3]{1-x} dx.$$

$$23. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin t \sin 3t dt.$$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$25. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 3$, $x + y - 4 = 0$.

27. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = 4x + 5y + 2$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 8}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2!} - \frac{8}{4!} + \frac{27}{6!} - \frac{64}{8!} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(n+2)}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n n}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 x^5 \cos \frac{x}{4} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 9x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } -3 < x < 0, \\ 1,5, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } 0 < x < 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. y' - xy^2 = 2xy.$$

$$37. (2x^2 + xy)y = xy + y^2.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. (x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x, y(\sqrt{2}) = 2. \quad 39. y'' - 2y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6.$$

$$40. \text{Найти общее решение дифференциального уравнения } y'' - 16y = 24e^{4x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = y'(0) = 2.$$

Вариант 24.

1. Вычислить $\frac{5i - 3i^2 + 2i^3 - 4i^4}{3 - 2i}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $2x^2 + 3x + 1, -3x^2 + 2x + 4, x^2 - x - 5$.
3. Найти координаты матрицы $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -8 \\ -4 & -7 & 8 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \left(\frac{2 - \sqrt{x}}{x^2} \right)^3 dx.$
6. $\int (2^x + 5^{2x})^2 dx.$
7. $\int \frac{dx}{2x^2 + 9}.$
8. $\int \operatorname{tg}^2 5x dx.$
9. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x - 25x}.$
10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2 + 3x^3}}.$
11. $\int \frac{e^x dx}{49 + e^{2x}}.$
12. $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$
13. $\int \frac{(x - 3) dx}{\sqrt{2x^2 + 9}}.$
14. $\int (4 + 5x) \sin 3x dx.$
15. $\int x^3 \ln(x - 2) dx.$
16. $\int x \arcsin x^2 dx.$
17. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}.$
18. $\int \frac{x^2 - 3x - 12}{x^3 - 7x^2 + 12x} dx.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt[3]{2x - 1}}.$
20. $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^{\ln 5} x e^x dx.$
22. $\int_1^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1 + x}.$
23. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \cos x}.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}.$$

$$25. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $x + y + 2 = 0$, $x - y - 2 = 0$.

27. Вычислить $\iint_D xy^3 dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 4x$ ($y \geq 0$).

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{n!}.$$

$$29. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{(n-1)(3n-1)^3}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sin 1 - \sin \frac{1}{2^3} + \sin \frac{1}{3^3} - \sin \frac{1}{4^3} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{6^n}.$$

33. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+4x^2)}{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} x/3 - 3, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 1 - |x|$ при $-3 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. (1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy.$$

$$37. xy' + y = \sin x.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. 2xyu' + x^2 + y^2 = 0, y(1) = 0.$$

$$39. y'' - 4y' + 8y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 2, y'(0) = 7.$$

Вариант 25.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 3i$. Найти $z_1(2z_1 - \overline{z_2}) + \frac{1}{z_1^2}$.
2. Определить, является ли линейно независимой система векторов $\vec{e}_1 = (-1; 3; 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (2; 0; 1; -2)$, $\vec{e}_3 = (0; -1; 1; 3)$, $\vec{e}_4 = (1; 2; 1; 0)$.
3. Найти координаты матрицы $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 8 \\ -12 & -3 & -8 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(8 - \sqrt{x})^3}{5\sqrt{x}} dx.$
6. $\int \frac{5dx}{\sqrt[3]{(7x-8)^2}}.$
7. $\int \frac{xdx}{7 + 28x^2}.$
8. $\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4} dx.$
9. $\int \frac{3^{2x} - 2}{4^x} dx.$
10. $\int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{7+28x^2}}.$
11. $\int \cos^4 x \sin 2x dx.$
12. $\int \frac{e^{4\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$
13. $\int \sqrt{\frac{3 \arccos x}{1-x^2}} dx.$
14. $\int (x^2 - 1)e^{-x} dx.$
15. $\int x \log_5(2x+3) dx.$
16. $\int \arcsin \frac{x}{5} dx.$
17. $\int \frac{xdx}{5-12x+9x^2}.$
18. $\int \frac{dx}{x^4-81}.$
19. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x}}.$
20. $\int \cos^2 10x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_{-\pi/4}^0 x \sin 2x dx.$
22. $\int_{27}^{125} \frac{dx}{2 - \sqrt[3]{x}}.$
23. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 81}.$$

$$25. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $y = 0$, $x = -3$.

27. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $x = \sqrt{25 - y^2}$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{4n^2 + 4n + 1}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3^2} + \frac{\sqrt{3}}{3^3} - \frac{\sqrt{4}}{3^4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt[3]{n}}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{4^n}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{x^5} \sin \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 10x - 3, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } -4 < x < 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } x = 0, \\ 1 + x, & \text{если } 0 < x < 4; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. (xy - x)^2 dy + y(1 - x)dx = 0. \quad 37. (x^2 - 2xy)y = xy - y^2.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. y' = \sin^2 x + y \operatorname{ctg} x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \quad 39. y'' + 4y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 4.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 14y' + 49y = 72 \sin 7x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Вариант 26.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$. Найти $\frac{z_1^2}{z_2} + \frac{\overline{z_1}}{z_1 - 1} z_2$.
2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти координаты многочлена $f(x) = 1 + x^2 - 2x^3$ в базисе $1, x + 1, x^2 + 1, x^3 + 1$ линейного пространства многочленов степени не выше 3.
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 3 & -8 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \left(\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x} \right)^2 dx.$
6. $\int \sqrt[5]{(7+4x)^3} dx.$
7. $\int \frac{dx}{5x^2 - 1}.$
8. $\int \frac{(5 + e^{6x})dx}{e^{2x}}.$
9. $\int \frac{1}{\sin^2(\pi - 6x)} dx.$
10. $\int \frac{x^2 dx}{(1 - 2x^3)^4}.$
11. $\int \frac{\operatorname{ctg} 8x}{2} dx.$
12. $\int \frac{(\ln 7x + 2)dx}{x}.$
13. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{5x^2 - 1}} dx.$
14. $\int x \cos 4x dx.$
15. $\int (2x + 5)e^{-3x} dx.$
16. $\int x \arctg x^2 dx.$
17. $\int \frac{7x dx}{\sqrt{2 - 3x - x^2}}.$
18. $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$
19. $\int \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx.$
20. $\int (2 + \sin x)^3 dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x^3} dx.$
22. $\int_1^2 x \sqrt{2 - x} dx.$
23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x dx.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

24. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 8x + 20}.$
25. $\int_{-1}^3 \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 4} dx.$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 11$, $x = 0$, $x - 3 = 0$, $y + 2 = 0$.

27. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = y^2$, $x + y = 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2n^2-1}.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+4n+8}.$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} - \frac{7}{4!} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)x^n}{7^n}.$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n(n+7)}.$

33. Вычислить $\int_0^2 \cos \frac{x^3}{16} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда:
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{4}, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 4x - 3$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

36. $xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}.$

37. $(xy' - 1) \ln x = 2y.$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

38. $(x+2y)dx + xdy = 0$, $y(1) = 0$. **39.** $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = 20xe^x.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Вариант 27.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 2i$. Найти и изобразить на комплексной плоскости числа $5z_1 - 2\overline{z_2}$, $z_1 z_2$, $z_1^2 - z_2^2$, $\frac{2}{z_1} + \frac{13}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти координаты многочлена $5 - t^2 + 2t^4$ в базисе $2 + t^4$, $t^2 - t^4$, $1 + t^2$ пространства четных многочленов степени не выше 4.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ -4 & 3 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int x \left(3 + \frac{2}{x} \right)^3 dx.$

6. $\int e^x \sqrt[5]{4 + 7e^x} dx.$

7. $\int x(2x^2 + 4)^5 dx.$

8. $\int \frac{1 - 16^x}{3^{2x}} dx.$

9. $\int \frac{2dx}{\sin^2 \frac{\pi + 3x}{4}}.$

10. $\int \frac{x + 2}{25x^2 - 1} dx.$

11. $\int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^5} dx.$

12. $\int (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 dx.$

13. $\int \frac{(1 - 5x)dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$

14. $\int (x \cos x)^2 dx.$

15. $\int (3 - x)e^x dx.$

16. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{7} dx.$

17. $\int \frac{(x + 5)dx}{\sqrt{3 - 6x - x^2}}.$

18. $\int \frac{3x + 1}{(x - 1)(x^2 - x - 12)} dx.$

19. $\int \frac{x^2 dx}{(2 + 5x)\sqrt{2 + 5x}}.$

20. $\int \cos^4 3x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 5x dx.$

22. $\int_1^4 \frac{9x - 1}{3\sqrt{x} + 1} dx.$

23. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2}.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_0^{+\infty} x 2^{-x} dx.$$

$$25. \int_{0.5}^e \frac{dx}{x \ln x}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$, $y = 9 - x$.

27. Вычислить $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$ по области D , ограниченной линиями $xy = 1$, $y = x$, $y = 2$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^2 - 2n + 5}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 6n + 13}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{2}{3^4} + \frac{3}{5^4} - \frac{4}{7^4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4^n} x^n.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n} (x-4)^n.$$

33. Вычислить $\int_0^2 \sin \frac{x^2}{4} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x/5 - 2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - x$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. 2x^2 y y' + y^2 = 2.$$

$$37. 2x^3 dy = y(2x^2 - y^2) dx.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. x^2 y' = 2xy + 3, y(1) = 0. \quad 39. y'' + 2y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = 12e^{4x}.$$

41. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = -2, y'(0) = -2.$$

Вариант 28.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Изобразить на комплексной плоскости эти числа, найти модули и аргументы этих чисел, а также чисел $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $2z_1 + 3iz_2$, $\frac{z_1^3}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $1 - x^4$, $x - x^4$, $x^2 - x^4$, $x^3 - x^4$, x^4 .

3. Найти координаты вектора $\vec{a} = (7; 2; 5; 1)$ в базисе $\vec{e}_1 = (-1; -1; 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (1; 3; 2; -1)$, $\vec{e}_3 = (0; 1; -1; 0)$, $\vec{e}_4 = (3; -1; 2; 1)$ пространства \mathbf{R}^4 .

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 \\ -12 & -5 & -6 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int x(\sqrt{x} - 3)^3 dx.$

6. $\int \sqrt[4]{2 - 13x} dx.$

7. $\int \frac{dx}{2x^2 - 50}.$

8. $\int \frac{27^{5x} + 4^x}{3^{2x}} dx.$

9. $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4}.$

10. $\int (\sin 3x - \cos 3x)^2 dx.$

11. $\int \frac{\sin x}{\cos x + 4} dx.$

12. $\int \frac{dx}{x(4 - 9\ln^2 x)}.$

13. $\int \frac{(9 - x)dx}{\sqrt{9 + 2x^2}}.$

14. $\int (x - 3)^2 \cos x dx.$

15. $\int x^2 \log^2_7 x dx.$

16. $\int \arccos \frac{x}{\sqrt{5}} x dx.$

17. $\int \frac{(2x + 1)dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}.$

18. $\int \frac{x^2 + 2}{(x - 3)(x^2 - 4x + 4)} dx.$

19. $\int \frac{dx}{5\sqrt{x + 2x}}.$

20. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^2 x^3 e^{-x^2} dx.$

22. $\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$

23. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

$$25. \int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

27. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $x = 0$, $x + y = 1$, $x + 2y + 2 = 0$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x^2$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n^2 + 3}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 100}{100n^2 + 4}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{\sqrt{3}}{1 \cdot 2} - \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 2^2} + \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 2^3} - \frac{\sqrt{6}}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx^n}}{2n(2n+1)}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

33. Вычислить $\int_0^1 \sin \frac{x^2}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 12$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} -1/2, & \text{если } -6 < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 6; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. y^2 y' + xy^2 y' + x dx = 0.$$

$$37. y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. 2x^3 y' = y(2x^2 - y^2), y(1) = 1.$$

$$39. y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' - 8y = xe^x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 16y = 32e^{4x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

Вариант 29.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 - i$. Изобразить на комплексной плоскости числа $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, z_1^2 , $z_1 z_2$, $2z_1 - 5\overline{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Определить, является ли линейно независимой система матриц $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти координаты многочлена $f(x) = x^4 + 7x^2 + 3$ в базисе $-2x^4 - x^2 + 2$, $2x^4 + x^2 - 3$, $x^4 + x^2 + 1$ пространства четных многочленов степени не выше 4.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & 10 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(2 - 3\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx.$

6. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{2 + 3x^2}} dx.$

7. $\int \frac{(1-x)dx}{8x^2 - 16}.$

7. $\int \frac{(2 - e^{5x})^2 dx}{e^{5x}}.$

9. $\int x^2 e^{7-4x^3} dx.$

10. $\int \frac{\sin x dx}{3\cos^2 x + 4}.$

11. $\int \cos \frac{4}{x} \frac{dx}{x^2}$

12. $\int \frac{\ln 3x dx}{9x}.$

13. $\int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{9+x^2}}.$

14. $\int x^2 e^{4x} dx.$

15. $\int \ln(1+x^2) dx.$

16. $\int x \operatorname{arctg} 5x dx.$

17. $\int \frac{7dx}{3x^2 + 5x + 1}.$

18. $\int \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2} - \sqrt{3+2x}}.$

20. $\int \frac{\sin x}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (x+4) \cos x dx.$

22. $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 \left(8t + \frac{\pi}{12} \right) dt.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$24. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}.$$

$$25. \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}.$$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x - 2)^2$, $y = (x - 4)^2$ и осью Ox .

27. Вычислить $\iint_D xy^2 dx dy$ по области D , ограниченной линиями $x = 2 - y^2$, $x = 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n-1}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(n^2+1)^3}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+1^2} - \frac{3}{1+2^2} + \frac{5}{1+3^2} - \frac{7}{1+4^2} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} x^n.$$

$$32. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n-2)^2}.$$

33. Вычислить $\int_0^2 \sin \frac{x^3}{16} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3 - 8x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$,

$$\text{если } f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } -2 < x < 0, \\ 2, & \text{если } x = 0, \\ 4, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases} \quad \text{построить графики функции и суммы ряда.}$$

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. x^2 y' = y' + xy.$$

$$37. x^2 dx + 2xy dy + y^2 dx = 0.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. y' = x^2(3y + e^{x^3}), y(0) = 1. \quad 39. y'' - 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 36y = \sin 2x$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = 8e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = -8$.

Вариант 30.

1. Найти значение выражения $\frac{z^3 - 2z^2 + 5z \cdot i^4}{z}$, если $z = 1 + 2i$.
2. Определить, является ли линейно независимой система многочленов $3x^2 + x^3 - 1$, $x^2 - x$, $2 + 3x + x^2$, $1 + x + x^2 + 2x^3$.
3. Найти координаты вектора $\vec{a} = (6; 3; 8; -1)$ в базисе $\vec{e}_1 = (-1; -1; 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (1; 3; 2; -1)$, $\vec{e}_3 = (0; 1; -1; 0)$, $\vec{e}_4 = (3; -1; 2; 1)$ пространства \mathbf{R}^4 .
4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -4 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

В заданиях 5-20 найти неопределенные интегралы.

5. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{x^5} dx.$
6. $\int \sin 11x dx.$
7. $\int \operatorname{tg}^2 8x dx.$
8. $\int x \cos \frac{\pi + 3x^2}{4} dx.$
9. $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
10. $\int \frac{3 \sin x dx}{5 - 2 \cos x}.$
11. $\int \frac{8}{1 + \cos x} dx.$
12. $\int \frac{\sqrt[3]{(6 + \ln x)^7}}{2x} dx.$
13. $\int \frac{e^{2x} + 5}{e^{1-x}} dx.$
14. $\int x \ln(2x + 3) dx.$
15. $\int x^2 \sin 7x dx.$
16. $\int x \operatorname{arcctg} x dx.$
17. $\int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{5x^2 + 3x + 2}}.$
18. $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x - 1)^2(x^2 + 4)} dx.$
19. $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx.$
20. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx.$

В заданиях 21-23 вычислить определенные интегралы.

21. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$
22. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx.$
23. $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^4} dx.$

В заданиях 24-25 вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

24. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{3^{2x}}.$
25. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}.$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = 2$.

27. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 1$, $x^2 = y$, $y = 2$, $x = 0$.

В заданиях 28-29 исследовать сходимость числового ряда.

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n+1)5^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{n+n}}.$$

30. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$$

В заданиях 31-32 найти область сходимости степенного ряда.

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}.$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (x+6)^n.$$

33. Вычислить $\int_0^{0,25} \sqrt{x} \sin 2\sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

34. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 7x-1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

35. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 3$ при $-4 < x < 4$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

$$36. xdy + xudy + ydx = xudy.$$

$$37. xy' + y = \ln x + 1.$$

В заданиях 38-39 решить задачу Коши.

$$38. y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y(1) = 2. \quad 39. y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 6.$$

40. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' - 12y = (20x - 8)e^{4x}$.

41. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 2$.