ПРОИЗВОДНАЯ

1. **Определение производной. Дифференцируемость функции**
2. **Техника дифференцирования**
3. **Производные высших порядков**
4. **Дифференциал функции**

1. Определение производной. Дифференцируемость функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a,\ b)$. Выберем точку $x_0 \in\ (a,\ b)$. Выберем другую точку $x = x_0 + \Delta x \in\ (a,\ b)$. Величина $\Delta x = x - x_0$ называется ***приращением аргумента***. Найдем соответствующее ***приращение функции*** $\Delta y\ =\ f(x_0\ +\ \Delta x) -\ f(x_0)\ = = f(x) - f(x_0)$.

Производной функции y = f (x) в точке x $_0$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует и конечен

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ используют символы: y', $f'(x)$, y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

где $o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Связь дифференцируемости функции и производной. Функция дифференцируема в данной точке тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная этой функции.

Таким образом, дифференцируемость функции в точке равносильна существованию производной функции в этой точке. Функция, имеющая конечную производную в каждой точке данного промежутка, называется ***дифференцируемой в этом промежутке***, а операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

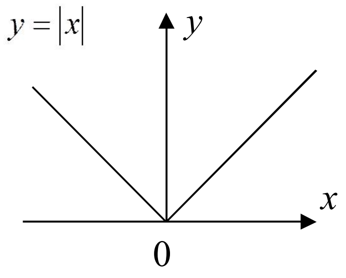
Связь дифференцируемости и непрерывности функции. Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в ней.

Обратное утверждение неверно, т. е. если функция непрерывна в точке, то она может быть не дифференцируема в этой точке.

Пример. Функция $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

В точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$



Односторонние пределы не равны между собой, так как при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to -0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to +0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Следовательно, производная в точке x=0 не существует.

2. Техника дифференцирования

Основные правила дифференцирования. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции независимой переменной x; c = const. Тогда

1. $(c)' = 0$; $(x)' = 1$.	2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $(cu)' = cu'$.	4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, где $v = v(x) \neq 0$.

Производная сложной функции. Рассмотрим сложную функцию вида $y = y(u(x))$**,** где $y = y(u)$, $u = u(x)$.

Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $y = y(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$, то функция $y = y(u(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\boxed{y'_x(x_0) = y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0) \text{ или символически } y'_x = y'_u \cdot u'_x.}$$

Производная обратной функции. Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна, строго монотонна на интервале (a,b) и в точке $x_0 \in (a,b)$ имеет конечную и неравную нулю производную. Тогда для обратной функции $x = x(y)$ в соответствующей точке $y_0 = y(x_0)$ также существует производная, равная $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Таблица производных. Пусть $u = u(x)$ – дифференцируемая функция независимой переменной x. Тогда

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u', \alpha = \text{const},\ u = u(x)$.	
2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$.	3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}u'$.
4. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$.	5. $\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$.
6. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}u'$.	7. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}u'$.
8. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.	9. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.
10. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.	
12. $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$.	11. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.
14. $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$.	13. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$.
15. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$.	

3. Производные высших порядков

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$ (обозначается $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$):

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ n = 1, 2, ...;\ f^{(0)} = f(x).$$

4. Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то её приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке представимо в виде $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке. Дифференциал обозначается dy (или $df(x)$) и равен произведению производной функции на приращение аргумента: $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Так как дифференциал независимой переменной x равен приращению этой переменной: $dx = x'\Delta x = \Delta x$, то

$$\boxed{dy = f'(x_0)dx.}$$