ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Общие понятия теории дифференциальных уравнений

Уравнения, связывающие между собой независимую переменную (переменные), искомую функцию и ее производные, называют ***дифференциальными уравнениями*** (ДУ). Порядок старшей производной, входящей в данное ДУ, называется ***порядком*** этого ДУ.

Если в ДУ искомая функция зависит от одной переменной, то ДУ называется ***обыкновенным***; если же функция нескольких переменных, то это ***ДУ с частными производными***.

Примеры:

1) $y'=4x$ – ДУ первого порядка;

2) $y''=\sin(x)$ – ДУ второго порядка;

3) $0\cdot y''+y'=\sin x$ – ДУ первого порядка;

4) $y'''+y'-2y=x^2-3cosx+5$ – ДУ третьего порядка;

5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – уравнение колебаний струны – ДУ второго порядка с частными производными относительно неизвестной функции $u=u(x,t)$.

В дальнейшем будем рассматривать только обыкновенные ДУ.

Дифференциальным уравнением n ***-го порядка*** называется уравнение вида $F\left(x; y; y' \ldots y^{(n)}\right) = 0$, связывающее независимую переменную x, искомую (которую необходимо найти) функцию $y = y(x)$ и ее производные до порядка n включительно. ***ДУ*** n***-го порядка, разрешенное относительно старшей производной,*** имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x; y; y'; y'' \ldots y^{(n-1)}\right). \quad (1)$$

Решением ДУ n-го порядка называется произвольная n раз дифференцируемая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая этому ДУ, т. е. при подстановке которой ДУ превращается в верное тождество.

График решения ДУ называется ***интегральной кривой*** этого ДУ.

Решить дифференциальное уравнение или (***проинтегрировать*** его) – это, значит, найти все его решения (все его интегральные кривые).

Пример 1. Решить ДУ первого порядка $y' = xe^{-x}$.

Решение. Интегрируем: $y = \int xe^{-x} dx$. Интегрируем по частям:

$$y = \int xe^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ e^{-x} dx = dv, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Пример 2. Решить ДУ второго порядка $y'' = \sin x$.

Решение. Интегрируем: $y' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$. Интегрируем повторно: $y = -\int (\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2$.

Примеры показывают, что данное ДУ может иметь много (бесчисленное множество) решений. Поэтому, чтобы из всего множества выделить конкретное решение, обычно задают дополнительные условия, в частности ставится

Начальная задача Коши. Рассмотрим ДУ (1) n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной и множество $X \times D$, где $X \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, на котором определена правая часть уравнения (1). Далее предположим, что в области $X \times D$ задана произвольная точка $\left(x_0; y_0^0; y_0^1; \ldots; y_0^{n-1}\right) \in X \times D$. В области $X \times D$ рассматривается задача: среди решений ДУ (1) найти такое, которое удовлетворяет следующим ***начальным условиям Коши***:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0^0 \\ y'(x_0)=y_0^1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1} \end{cases} \qquad (2)$$

Для ДУ первого порядка $y'=f(x;y)$ задача Коши допускает удобную *геометрическую интерпретацию*: среди интегральных кривых рассматриваемого ДУ найти ту, которая проходит через точку $(x_0;y_0)$ заданной области $X\times D$.

Пример. Решить начальную задачу Коши для ДУ второго порядка: $y''=6x;\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Решение. Интегрируем: $y'=3x^2+C_1$. Интегрируем повторно: $y=x^3+C_1x+C_2$. Здесь C_1,C_2 - произвольные постоянные, при любых их значениях полученная функция удовлетворяет данному уравнению. Определим значения произвольных постоянных C_1,C_2, при которых полученная функция удовлетворяет заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} 0=y(0)=0+C_1\cdot 0+C_2, \\ 1=y'(0)=0+C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_2=0, \\ C_1=1, \end{matrix}$$

откуда $y=x^3+x$ – искомое решение.

Функция $y=\phi(x,C_1;C_2...C_n)$, $x\in X$, зависящая от независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1,...,C_n$, называется ***общим решением*** ДУ (1) (в заданной области $X\times D$), если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) при фиксированных значениях произвольных постоянных эта функция является решением (на множестве X) этого ДУ,

2) в области $X\times D$ эта функция решает любую задачу Коши, т. е. для любой точки $\left(x_0;y_0^0;y_0^1;...;y_0^{n-1}\right)$ в области $X\times D$ система (2):

$$\begin{cases} \phi(x_0;C_1;...;C_n)=y_0^0, \\ \phi'(x_0;C_1;...;C_n)=y_0^1, \\ \vdots \\ \phi^{n-1}(x_0;C_1;...;C_n)=y_0^{n-1}; \end{cases}$$

разрешима относительно произвольных постоянных $C_1,...,C_n$.

Пример. Найти общее решение ДУ $y''' = \dfrac{2}{x^3}$.

Решение. Трижды интегрируя: $y'' = 2\int x^{-3}dx = -x^{-2} + C_1 \Rightarrow$ $y' = -\int (x^{-2} + C_1)dx = x^{-1} + C_1x + C_2$, получаем $y = \ln|x| + \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ – общее решение этого ДУ в области $X \times \mathbb{R}^2$, где $X = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Решение, получающееся из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется ***частным решением***.

Пример. Для ДУ $y' = 3x^2$ решение $y = x^3 + 25$ является частным.

Соотношение $\Phi(x; y; C_1; ...; C_n) = 0$ называется ***общим интегралом*** ДУ, если оно определяет общее решение $y = \varphi(x; C_1; ...; C_n)$ этого ДУ как неявную функцию переменной *x*.

2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: основные понятия

Дифференциальным уравнением (ДУ) 1***-го порядка*** называется уравнение вида $F(x; y; y') = 0$, связывающее независимую переменную *x*, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производную.

Общий вид ***ДУ*** 1***-го порядка***, ***разрешенного относительно производной***:

$$y' = f(x; y).$$

Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в дифференциальной форме

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0,$$

где $P(x; y)$ *и* $Q(x; y)$ известные функции.

Решением ДУ 1-го порядка называется произвольная дифференцируемая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая этому ДУ, т. е. при подстановке которой ДУ превращается в верное тождество.

Начальная задача Коши для ДУ 1***-го порядка*** записывается в виде

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

и заключается в том, чтобы найти такое решение ДУ $F(x;y;y')=0$, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Геометрический смысл задачи Коши для ДУ 1*-го порядка*: найти интегральную кривую ДУ, проходящую через точку (x_0, y_0).

Функция $y=\varphi(x,C)$, зависящая от независимой переменной x и произвольной постоянной C называется ***общим решением*** **ДУ 1-го порядка**, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) функция $y=\varphi(x,C)$ является решением этого ДУ при каждом фиксированном значении произвольной постоянной *C*;

2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0)=y_0$, можно найти такое значение постоянной $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Общее решение, записанное в неявном виде $\Phi(x;y;C)=0$, называется ***общим интегралом*** **ДУ**.

Частным решением ДУ 1-го порядка называется любая функция $y=\varphi(x,C_0)$, полученная из общего решения при фиксированном значении произвольной постоянной $C=C_0$. Уравнение $\Phi(x;y;C_0)=0$ называется ***частным интегралом*** **ДУ**.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка. Пусть задана задача Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x;y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Если правая часть $f(x;y)$ ДУ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$ непрерывны по совокупности переменных в некоторой области *D*, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого ДУ, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Точки, в которых нарушаются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши, называются ***особыми.*** Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется ***особым решением***.

Пример. Для ДУ $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ имеем: $\frac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}}$ или $\int\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}}=3\int dx$, или $3y^{\frac{1}{3}}=3(x+C)$, откуда $y=(x+C)^3$ – общее решение. В то же время решение $y\equiv 0$ является особым, так как в каждой точке (x_0,0) этого решения нарушается единственность решения задачи Коши, т. е. через эту точку проходят две интегральные кривые: парабола $y=(x-x_0)^3$ и прямая $y\equiv 0$ (ось *Ox*).

3. Основные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка и методы их решения

1. ***Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными*** – это ДУ вида

$$y'=P(x)\cdot Q(y),$$

в которых правая часть есть произведение функции, зависящей только от *x*, на функцию, зависящую только от *y*, или сводящиеся к ним ДУ вида

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dy+P_2(x)\cdot Q_2(y)dx=0.$$

ДУ с разделяющимися переменными интегрируются (решаются) путем разделения переменных, когда, учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$., ДУ с помощью алгебраических преобразований приводится к такому виду, что все функции, зависящие от переменной *x,* а также дифференциал *dx* этой переменной находятся в одной части уравнения, а функции, зависящие от *y,* и дифференциал *dy* - в другой). ДУ, записанное в указанном виде, называется ***уравнением с разделенными переменными***. ДУ с разделенными переменными решается путем интегрирования левой и правой частей уравнения.

$y'=P(x)\cdot Q(y)$ $\frac{dy}{dx}=P(x)\cdot Q(y)$ $\frac{dy}{Q(y)}=P(x)dx$	$P_1(x)\cdot Q_1(y)dy+P_2(x)\cdot Q_2(y)dx=0$ $P_1(x)\cdot Q_1(y)dy=-P_2(x)\cdot Q_2(y)dx$ $\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy=-\frac{P_2(x)}{P_1(x)}dx$
Далее интегрируем полученное уравнение	
$\int\frac{dy}{Q(y)}=\int P(x)dx$	$\int\frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy=-\int\frac{P_2(x)}{P_1(x)}dx$

В результате либо получим $y=\varphi(x;C)$ – общее решение, либо общий интеграл $\Phi(x;y;C)=0$.

Замечание. При делении на функции $P_1(x), Q_2(y), Q(y)$, мы считаем, что они не обращаются в ноль. Чтобы не потерять особые решения ДУ, необходимо:

1) решить уравнения $P_1(x)=0, Q_2(y)=0$ или $Q(y)=0$;

2) проверить, являются ли полученные решения решениями исходного ДУ;

3) проверить, могут ли эти решения быть получены из общего решения при некотором значении С, включая $C=\infty$. Если не могут, то это **особые решения.**

Пример. Найти общее решение ДУ: $xy'+y=0$.

Решение. Полагаем $y'=\dfrac{dy}{dx}$. Тогда $\dfrac{xdy}{dx}+y=0$

Разделяем переменные: $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем: $\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C| \Rightarrow \ln|y|=\ln\left|\dfrac{C}{x}\right| \Rightarrow y=\dfrac{C}{x}$.

Таким образом, $y=\dfrac{C}{x}$ - общее решение данного ДУ. Функция $y=0$ также является решением данного ДУ. Решение $y=0$ получается из общего при $C=0$, следовательно, не является особым решением. Итак, все решения данного ДУ задаются формулой $y=\dfrac{C}{x}$.

2. ***Однородное ДУ 1-го порядка*** – это ДУ, которое может быть записано в виде:

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x;y),$$

где $f(tx;ty)=f(x;y)$ для любого t (условие однородности).

Любое однородное ДУ 1-го порядка может быть представлено в виде $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Однородное ДУ интегрируется (сводится к ДУ с разделяющимися переменными) подстановкой

$$\boxed{y=u\cdot x,\ y'=xu'+u}.$$

3. ***Линейным ДУ (ЛДУ 1-го порядка)*** называют ДУ вида

$$a(x)y'+b(x)y+c(x)=0, \text{ где } a(x)\neq 0$$

(оно является линейным относительно искомой функции и ее производной).

Несложно понять, что линейное ДУ может быть записано в виде

$$y'=p(x)y+q(x),$$

где $p(x)=-\dfrac{b(x)}{a(x)}, q(x)=-\dfrac{c(x)}{a(x)}$.

Линейное ДУ интегрируется заменой (метод Бернулли, метод «u на v»)

$$\boxed{y=u\cdot v,\ y'=u'v+uv'},$$

где $u=u(x)$ – новая неизвестная функция, $v=v(x)$ – вспомогательная функция.

При решении линейного ДУ методом Бернулли:

- выполняем подстановку: $(u'v+uv')-p(x)\cdot(uv)=q(x)$;

- группируем слагаемые с u и выносим u за скобку: $u'v+u(v'-p(x)\cdot v)=q(x)$;

- выбираем функцию $v=v(x)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль.

В итоге приходим к системе ДУ с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v'-p(x)\cdot v=0 & (1) \\ u'v=q(x) & (2) \end{cases}.$$

Интегрируя первое уравнение, находим вспомогательную функцию $v=v(x)$ и подставляем ее во второе уравнение, откуда определяем функцию $u=u(x)$. При этом, находя функцию $v=v(x)$, произвольную постоянную C не добавляем (достаточно найти одну вспомогательную функцию $v=v(x)$, удовлетворяющую уравнению (1)), а при определении функции $u=u(x)$ произвольная постоянная C должна быть обязательно добавлена.

4. ***Уравнение Бернулли*** – это ДУ, которое может быть приведено к виду

$$y'=p(x)y+q(x)y^{\alpha}$$

(в частному случае при $\alpha=0$ это линейное ДУ, при $\alpha=1$ – ДУ с разделяющимися переменными).

Уравнение Бернулли интегрируется аналогично линейному ДУ подстановкой $\boxed{y=u\cdot v}$.

При определении типов ДУ 1-го порядка $y'=f(x;y)$ по виду правой части удобно пользоваться следующей таблицей.

Типы ДУ 1-го порядка

Вид правой части ДУ $y'=f(x;y)$	Тип (вид) ДУ	Метод решения ДУ
$f(x;y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$	ДУ с разделяющимися переменными	разделяем переменные и интегрируем
$f(x;y)=f(tx;ty)$	однородное ДУ	подстановка $y=ux$
$f(x;y)=$ $=\rho(x)\cdot y+q(x)$	линейное ДУ	подстановка $y=uv$
$f(x;y)=$ $=\rho(x)\cdot y+q(x)\cdot y^n$	уравнение Бернулли	подстановка $y=uv$

4. Дифференциальные уравнения 2-го порядка: основные понятия

Дифференциальным уравнением 2-го порядка называется уравнение вида

$$F(x;y;y';y'')=0.$$

Если ДУ 2-го порядка записано в виде

$$y''=f(x;y;y'),$$

то говорят, что ДУ 2-го порядка ***разрешено относительно второй производной.***

Общее решение ДУ 2-го порядка содержит две произвольные постоянные, т. е. имеет вид $y=\varphi(x,C_1,C_2)$.

Начальная задача Коши для ДУ** 2-**го порядка имеет вид

$$\begin{cases} y''=f(x;y;y'), \\ y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_1. \end{cases}.$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка. Если в ДУ $y''=f(x;y;y')$ правая часть $f(x;y;y')$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y;y')$, $\frac{\partial f}{\partial y'}(x;y;y')$ непрерывны по совокупности переменных в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0, y_1), то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого ДУ, удовлетворяющее начальным условиям $\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases}.$

5. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка

$F(x;y;y',y'')=0$ – общий вид ДУ 2-го порядка.

Существует два принципиально различных случая понижения порядка ДУ 2-го порядка – это, когда в ДУ: 1) отсутствует неизвестная функция y и 2) отсутствует независимая переменная x. Рассмотрим эти случаи.

В уравнении отсутствует *y*:	**В уравнении отсутствует *x*:**
$F(x;\ y';y'')=0$	$F(y;y';y'')=0$

Выполняем замену

$y'=z\ =z(x)$,	$y'=z\ =z(y)$,
тогда $y''=\frac{dz}{dx}=z'$	$y''=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z\cdot z'$

Подставляем в исходное ДУ и получаем ДУ 1-ого порядка:

$F(x;\ z;z')=0$	$F(y;z;z'z\ )=0$

Интегрируя полученное ДУ 1-го порядка, находим его общее решение:

$z=\varphi(x;C_1)$	$z=\varphi(y;C_1)$

Возвращаемся к исходным обозначениям:

$$z=\frac{dy}{dx}=\varphi(x;C_1) \qquad\qquad z=\frac{dy}{dx}=\varphi(y;C_1)$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$dy=\varphi(x;C_1)\,dx \qquad\qquad \frac{dy}{\varphi(y;C_1)}=dx$$

и интегрируем:

$$y=\int\varphi(x;C_1)\,dx=\psi(x;C_1;C_2) \qquad\qquad \psi(y;C_1;C_2)=\int\frac{dy}{\varphi(y;C_1)}=x$$

В результате получаем общее решение исходного ДУ 2-го порядка в виде

$$y=\psi(x;C_1;C_2) \qquad\qquad x=\psi(y;C_1;C_2)$$

Сравнивая два рассмотренных случая понижения порядка ДУ 2-го порядка, отметим, что в обоих случаях используется переход к новой неизвестной функции: $z=y'$, но в первом случае независимая переменная остается прежней – переменной x , а во втором случае независимой переменной становится переменная y.

6. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка: основные понятия

Теория ДУ высших порядков общего вида достаточно сложна. Однако существует важный частный случай – линейные ДУ, где многие вопросы теории ДУ разрешаются сравнительно просто.

Линейным ДУ (ЛДУ) n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot y'(x)+a_n(x)\cdot y(x)=f(x). \qquad (3)$$

Это уравнение содержит функцию $y(x)$ и ее производные в первой степени, поэтому говорят, что они входят в уравнение линейно. Функции $a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x)$ называются ***коэффициентами*** уравнения, а $f(x)$- ***свободным членом*** (или ***правой частью***) ЛДУ (3).

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ЛДУ. Если коэффициенты $a_1(x),\ldots,a_n(x)$, и правая часть $f(x)$ ЛДУ (3) непрерывны в окрестности точки x_0, то в этой окрестности существует единственное решение задачи Коши для этого ЛДУ.

Если $f(x)=0$, то уравнение называется ***однородным*** ЛДУ n-го порядка (ЛОДУ); если $f(x)\neq 0$, то ***неоднородным*** ЛДУ n-го порядка (ЛНДУ). Говорят, что ДУ

$$y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=0 \qquad (4)$$

является ЛОДУ, соответствующим ЛНДУ (3).

Теорема 1 (*свойство решений ЛОДУ*). Произвольная линейная комбинация $\alpha_1 y_1+...+\alpha_k y_k$ (где $\alpha_1,...,\alpha_k$ - числа) решений $y_1,...,y_k$ ЛОДУ также является решением этого ЛОДУ.

Теорема 2 (*свойство решений ЛНДУ*). Разность любых двух решений ЛНДУ является решением соответствующего ему ЛОДУ.

Решения $y_1=y_1(x),...,y_k=y_k(x)$, $x\in X$, ЛОДУ называются ***линейно независимыми*** на X, если никакая их нетривиальная линейная комбинация не является тождественно равной нулю на X, т. е.

$$\alpha_1 y_1(x)+...+\alpha_k y_k(x)\equiv 0, x\in X \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0,$$

и ***линейно зависимыми*** в противном случае, т. е. когда существуют такие числа $\alpha_1,...\alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что их линейная комбинация $\alpha_1 y_1(x)+...+\alpha_k y_k(x)\equiv 0$. В частности, ***две*** функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут ***линейно независимыми*** на X тогда и только тогда, когда $\frac{y_2}{y_1}\neq\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=const$, т. е. их отношение не сводится к тождественной постоянной на X.

Говорят, что решения $y_1=y_1(x),...,y_n=y_n(x)$ образуют ***фундаментальную систему решений*** ЛОДУ, если

1) это линейно независимые (на X) решения;

2) их число совпадают с порядком ЛДУ.

Пример. Проверить, что функции $y_1=e^{-x}\sin x, y_2=e^{-x}\cos x$ образуют фундаментальную систему решений однородного ЛДУ $y''+2y'+2y=0$.

Решение.

Так как $\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{-x}\cos x}{e^{-x}\sin x}=\mathrm{ctg}x\neq const$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы. Проверим, является ли функция $y_1(x)$ решением данного ДУ. Учитывая выражение для производных:

$$y_1'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(-\sin x+\cos x),$$

$$y_1''=-e^{-x}(-\sin x+\cos x)+e^{-x}(-\cos x-\sin x)=-2e^{-x}\cos x,$$

имеем

$$-2e^{-x}\cos x+2e^{-x}\left(-\sin x+\cos x\right)+2e^{-x}\sin x\equiv 0.$$

Т.е. функция $y_1\left(x\right)=e^{-x}\sin x$ удовлетворяет данному ДУ. Аналогично проверяется, что и $y_2\left(x\right)=e^{-x}\cos x$ – решение этого ДУ. Таким образом, $y_1=e^{-x}\sin x, y_2=e^{-x}\cos x$ – два линейно независимыми решения рассматриваемого ЛДУ 2-го порядка, и, следовательно, образуют его фундаментальную систему решений.

Теорема 3 (*критерий фундаментальной системы решений ЛОДУ*). Для того, чтобы система решений $y_1\left(x\right),...,y_n\left(x\right)$ ЛОДУ (4) образовывала фундаментальную систему решений этого ЛОДУ, необходимо и достаточно, чтобы их ***вронскиан*** $W\left(x\right)$:

$$W\left(x\right)=\begin{vmatrix} y_1\left(x\right) & ... & y_n\left(x\right) \\ y_1'\left(x\right) & ... & y_n'\left(x\right) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}\left(x\right) & ... & y_n^{(n-1)}\left(x\right) \end{vmatrix}$$ – определитель n-го порядка –

был не равен тождественно нулю на множестве X , т. е. $W\left(x_0\right)\neq 0$ хотя бы в одной точке x_0 множества X .

Теорема 4 (*о структура общего решения ЛОДУ*). Общее решение $y=y_{OO}\left(x\right)$ ЛОДУ n -го порядка (4) имеет вид

$$y=y_{OO}\left(x\right)=C_1y_1\left(x\right)+...+C_ny_n\left(x\right),$$

где функции $y_1=y_1\left(x\right),...,y_n=y_n\left(x\right)$ образуют фундаментальную систему решений этого ЛОДУ, $C_1,...,C_n$ - произвольные постоянные.

Теорема 5 (*о структура общего решения ЛНДУ*). Общее решение $y=y_{OH}\left(x\right)$ ЛНДУ n -го порядка (3) имеет вид

$$y=y_{OH}\left(x\right)=C_1y_1\left(x\right)+...+C_ny_n\left(x\right)+y_H\left(x\right),$$

где $y_1=y_1\left(x\right),...,y_n=y_n\left(x\right)$ – произвольная фундаментальная система решений соответствующего ЛОДУ (4), $C_1,...,C_n$ - произвольные постоянные, $y_H\left(x\right)$ – произвольно выбранное частное решение ЛНДУ (3).

Таким образом, для того, чтобы успешно интегрировать неоднородное ЛДУ, достаточно уметь находить фундаментальную систему решений однородного ЛДУ и частное решение неоднородного ЛДУ.

7. Решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка с постоянными действительными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0 \,(*),$$

где $p, q \in R$.

Решение такого уравнения сводится к решению уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad (**)$$

которое называется ***характеристическим уравнением*** уравнения (*). При решении характеристического уравнения возможны три случая:
1) $D > 0$ - характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
2) $D = 0$ - характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$;
3) $D < 0$ - характеристическое уравнение имеет два различных комплексных корня $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, где $i^2 = -1$ (i - мнимая единица).

общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$		
Знак дискриминанта характеристического уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид общего решения
$D > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_{oo} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$D = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_{oo} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
$D < 0$	$\lambda_{1,2} = a \pm bi$, где $i^2 = -1$	$y_{oo} = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$

Рассмотрим ЛОДУ n-го порядка с постоянными действительными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad где\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R.$$

Для нахождения общего решения составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

По найденным корням характеристического уравнения находим соответствующие им частные решения, пользуясь таблицей.

Корень характеристического уравнения	Кратность корня	Частные решения, соответствующие корню
λ - действительный	к=1 (простой)	$y = e^{\lambda x}$ - одно решение
λ – действительный	Кратность к>1	$y = e^{\lambda x}, y = xe^{\lambda x}, \ldots, y = x^{k-1}e^{\lambda x}$ - k решений
$\lambda_{1,2} = a \pm bi$ (пара комплексно сопряженных корней)	к=1 (простые)	$y = e^{ax}\cos bx, y = e^{ax}\sin bx$ - два решения
$\lambda_{1,2} = a \pm bi$ (пара комплексно сопряженных корней)	Кратность к>1	$y = e^{ax}\cos bx, y = e^{ax}\sin bx$ $y = xe^{ax}\cos bx, y = xe^{ax}\sin bx$ ………………………….. $y = x^{k-1}e^{ax}\cos bx, y = x^{k-1}e^{ax}\sin bx$ - всего $2k$ решений

Так как уравнение n-ой степени имеет ровно n корней, действительных или комплексных, с учетом их кратности, то получим ровно n частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Общее решение ЛОДУ n-го порядка равно линейной комбинации этих решений с произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$y_{OO} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n .$$

8. Решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Рассмотрим ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где

$$f\left(x\right)=e^{\alpha x}\left(P_n\left(x\right)\cos(\beta x)+Q_m\left(x\right)\sin(\beta x)\right)$$

- специальная правая часть. Здесь $P_n\left(x\right)$, $Q_m\left(x\right)$ – многочлены соответственно степени n и m, α и β – действительные числа. Число $\boxed{\alpha+\beta i}$ будем называть ***контрольной постоянной***.

Если правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, то частное решение ЛНДУ можно найти ***методом неопределенных коэффициентов.*** В соответствии с этим методом, частное решение ЛНДУ будем искать в виде:

$$\boxed{y_{чн}=x^k e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_\nu\left(x\right)\cos(\beta x)+\tilde{Q}_\nu\left(x\right)\sin(\beta x)\right),}$$

где $\nu=\max\{n;m\}$, $\tilde{P}_\nu$ и $\tilde{Q}_\nu$ – многочлены степени ν с неопределенными (пока неизвестными) коэффициентами, k – число совпадений контрольной постоянной $\alpha+\beta i$ с корнями характеристического уравнения, т.е.

1) $k=0$, если $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения;

2) $k=1$, если $\alpha+\beta i$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения;

3) $k=2$, если $\alpha+\beta i$ совпадает с двумя корнями характеристического уравнения($D=0$) и т. д.

Рассмотрим частные случаи

Вид правой части $f(x)$	Контрольная постоянная	Вид частного решения $y_{чн}$
$f(x)=\mathrm{P}_n\left(x\right)$	$\boxed{\alpha+\beta i=0}$	$y_{чн}=x^k\,\tilde{\mathrm{P}}_n\left(x\right)$
$f(x)=e^{\alpha x}\,\mathrm{P}_n\left(x\right)$	$\boxed{\alpha+\beta i=\alpha}$	$y_{чн}=x^k\,\mathrm{e}^{\alpha x}\tilde{\mathrm{P}}_n\left(x\right)$
$f\left(x\right)=P\cos(\beta x)+Q\sin(\beta x)$, где P и Q - известные числа	$\boxed{\alpha+\beta i=\beta i}$	$y_{чн}=x^k\left(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right)$, где A и B - неизвестные (пока) числа
$f\left(x\right)=e^{\alpha x}\left(P\cos(\beta x)+Q\sin(\beta x)\right)$, где P и Q - известные числа	$\boxed{\alpha+\beta i}$	$y_{чн}=x^k e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right)$, где A и B - неизвестные (пока) числа

Замечание: числа P или Q могут равняться нулю.

Удобно пользоваться следующей таблицей многочленов с неопределенными коэффициентами:

n	$\mathrm{P}_n(x)$
0	A
1	$Ax+B$
2	Ax^2+Bx+C
3	Ax^3+Bx^2+Cx+D

Для нахождения неопределенных коэффициентов подставляем $y_{чн}$ и его производные в исходное ЛНДУ и приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях.

Замечание. В некоторых случаях, когда правая часть не является специальной, ее удается представить в виде суммы специальных правых частей: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$. Тогда и частное решение ЛНДУ можно искать в виде суммы частных решений, соответствующих этим специальным правым частям: $y_{чн}(x)=y_{1чн}(x)+y_{2чн}(x)+\ldots+y_{nчн}(x)$. Это правило называется ***теоремой о наложении решений*** ЛНДУ.

9. Решение ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных нахождения частного решения ЛНДУ был предложен Лагранжем и годится для любой правой части.

Рассмотрим его на примере ЛНДУ 2-го порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

при условии, что известна фундаментальная система $y=y_1(x), y=y_2(x)$ решений соответствующего ЛОДУ.

По теореме о структуре общего решения, $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$.

Если $y=y_1(x), y=y_2(x)$ - частные решения соответствующего ЛОДУ, образующие фундаментальную систему решений, то $y_{OO}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. Тогда частное решение ЛНДУ ищется в виде

$$y_{чн}(x)=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x),$$

где $C_1(x),C_2(x)$ – некоторые вспомогательные функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \end{cases}.$$

10. Понятие о системах дифференциальных уравнений

Рассмотрим *систему ДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производной*

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \end{cases}$$

Начальная задача Коши содержит *n* начальных условий:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$

Решением системы ДУ называется совокупность *n* функций $y_1(x), ..., \; y_n(x)$, удовлетворяющих этой системе.

Общее решение системы ДУ – это *n* функций $y_1(x) = y_1(x; C_1, ..., C_n), ..., \quad y_n(x) = y_n(x, C_1, ..., C_n)$, которые зависят от *n* произвольных постоянных и при подстановке в систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Частное решение – решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных.

Наиболее простым методом решения систем ДУ является ***метод исключения*, или *метод сведения системы ДУ к одному ДУ.*** Этот метод заключается к сведению системы к одному ДУ относительно одной функции, причем порядок этого уравнения равен числу неизвестных функций в системе. схема метода:

Из одного уравнения выражается одна неизвестная функция и подставляется во все другие уравнения. В результате получаем новую систему из $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными функциями, затем исключается следующая неизвестная функция и т. д.