

# ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. Генеральная совокупность и выборка
2. Статистический ряд и его графическое изображение
3. Эмпирическая функция распределения
4. Точечное оценивание параметров распределения. Свойства точечных оценок
5. Интервальное оценивание параметров распределения
6. Элементы регрессионного и корреляционного анализа
7. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства
8. Определение коэффициентов уравнения линейной регрессии методом наименьших квадратов

## 1. Генеральная совокупность и выборка

Теория вероятностей и математическая статистика занимаются анализом закономерностей случайных массовых явлений. В теории вероятностей определяются вероятности тех или иных событий по известным вероятностям более простых событий, числовые характеристики случайных величин или вероятности, связанные с этими величинами, по известным законам распределения этих случайных величин. На практике для нахождения законов распределения случайных величин необходимо использовать экспериментальные данные. **Основной задачей математической статистики** является разработка методов получения вероятностных характеристик случайных явлений на основе результатов эксперимента.

Исходными понятиями математической статистики являются понятия генеральной и выборочной совокупностей.

**Выборка (случайная выборка, выборочная совокупность)** - множество значений результатов наблюдений над одной и той же случайной величиной при одних и тех же условиях. Элементы выборки называются **выборочными значениями**. Количество проведенных наблюдений называется **объемом выборки**.

**Генеральной совокупностью** называется множество всех возможных наблюдений над случайной величиной при данном комплексе условий.

В большинстве случаев генеральная совокупность бесконечна (можно производить сколь угодно много наблюдений).

В задаче контроля качества данной партии товаров объем генеральной совокупности равен объему этой партии. Если обследование

всей партии невозможно, то о качестве партии судят по случайной выборке товаров из этой партии.

Назначение статистических методов в том, чтобы по выборке ограниченного объема сделать вывод о свойствах генеральной совокупности в целом.

Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки «правильно» его представляли, т.е. выборка должна быть **репрезентативной** (представительной). Считается, что это требование выполняется, если объем выборки достаточно велик и все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку, т.е. при отборе сохраняется принцип случайности. Такую выборку называют **случайной выборкой**.

## 2. Статистический ряд и его графическое изображение

Пусть имеется выборка объема  $n$ :  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Вариационным рядом** выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется способ её записи, при котором её элементы упорядочены (как правило, в порядке не убывания):  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Разность  $\omega$  между максимальным и минимальным элементами называется **размахом выборки**:

$$\omega = x_{\max} - x_{\min}.$$

Как правило, некоторые выборочные значения могут совпадать, поэтому часто выборку представляют в виде статистического ряда.

Пусть в выборке элемент  $x_i$  встречается  $n_i$  раз. Число  $n_i$  называется **частотой** выборочного значения  $x_i$ , а  $\frac{n_i}{n}$  — **относительной частотой**.

Очевидно, что  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , где  $k$  — число различных элементов выборки. Последовательность пар  $(x_i^*; n_i)$ , где  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$  — различные выборочные значения, а  $n_1, n_2, \dots, n_k$  — соответствующие им частоты, называется **статистическим рядом**. Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит различные выборочные значения  $x_i^*$ , а вторая — их частоты  $n_i$ .

При большом объёме (больше 30) выборки её элементы объединяют в группы (разряды), представляя результаты опытов в виде **интервального (группированного) статистического ряда**. Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивают на  $k$  непере-

секающихся интервалов. Число интервалов выбирается произвольно и, как правило,  $5 \div 10 \leq k \leq 20 \div 25$ . Вычисления значительно упрощаются, если интервалы имеют одинаковую длину  $h \approx \frac{\omega}{k}$ . В дальнейшем будет рассматриваться именно этот случай. После того, как частичные интервалы выбраны, определяют частоты  $n_i$  – количество элементов выборки, попавших в  $i$ -й интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу) и относительные частоты  $\frac{n_i}{n}$ . Полученные данные сводятся в таблицу:

### Интервальный статистический ряд

Интервалы наблюдаемых значений СВ $\xi$	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	...	$[x_{k-1}; x_k]$
Середины интервалов	$x_1^*$	$x_2^*$	...	$x_k^*$
Частоты	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$
Относительные частоты	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

В ряде случаев для наглядного представления выборки используют полигон и гистограмму относительных частот (частот).

**Полигоном частот** группированной выборки называется ломаная с вершинами в точках  $(x_i^*; n_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , а **полигон относительных частот** – ломаная линия с вершинами в точках  $(x_i^*; \frac{n_i}{n})$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

**Гистограммой относительных частот (частот)** группированной выборки называют ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, построенных на интервалах группировки так, что площадь каждого прямоугольника равна соответствующей данному интервалу относительной частоте (частоте). Площадь гистограммы относительных частот равна 1.

При достаточно большом объёме выборки и достаточно малых интервалах группировки гистограмма относительных частот является статистическим аналогом плотности распределения наблюдаемой случайной величины. Поэтому по виду гистограммы можно выдвинуть предположение (гипотезу) о распределении изучаемой случайной величины.

### 3. Эмпирическая функция распределения

**Эмпирической функцией распределения** называется функция  $F^*(x)$ , определяющая для каждого значения  $x$  относительную частоту наблюдения значений, меньших  $x$ :

$$F^*(x) = \sum_{x_i^* < x} \frac{n_i}{n}.$$

Основное значение эмпирической функции распределения в том, что она используется в качестве оценки теоретической функции распределения  $F(x) = P(\xi < x)$  наблюдаемой случайной величины  $\xi$  и обладает всеми свойствами функции распределения дискретной случайной величины:

- 1)  $0 \leq F^*(x) \leq 1$ ;
- 2)  $F^*(x)$  – неубывающая непрерывная слева кусочно-постоянная функция;
- 3) если  $x_1$  – наименьшее, а  $x_n$  – наибольшее значения статистического ряда, то  $F^*(x) = 0$  при  $x \leq x_1$  и  $F^*(x) = 1$  при  $x > x_n$ .

Эмпирическая функция распределения  $F^*(x)$  является случайной: для разных выборок она получается разной. Если график  $F^*(x)$  строится по группированным данным, то скачки происходят в точках, соответствующих серединам интервалов группировки.

### 4. Точечное оценивание параметров распределения. Свойства точечных оценок

Выборка представляет собой ряд наблюдений над одной и той же случайной величиной. Для содержательного статистического анализа экспериментальных данных необходимо знать распределение этой величины.

Во многих случаях можно считать, что наблюдаемая величина имеет нормальное распределение. Например, при измерениях одного и того же показателя на нескольких однотипных объектах колебания результатов будут вызваны незначительными случайными погрешностями в технологии изготовления или измерения. Если случайные колебания значений некоторой величины вызваны большим числом случайных причин, более или менее равноправных, то на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей можно считать, что эта величина имеет нормальное распределение.

Нормальное распределение полностью определяется двумя параметрами – математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Математическое ожидание и дисперсия являются основными числовыми характеристиками любой случайной величины. Математическое ожидание – это в некотором смысле (т. е. с учетом большей и меньшей вероятности различных значений) среднее значение случайной величины. Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Поэтому при статистическом анализе выборки в первую очередь стремятся оценить математическое ожидание и дисперсию.

Пусть имеется выборка объема  $n$ :  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . По результатам этого ограниченного числа наблюдений невозможно *вычислить* числовые характеристики наблюдаемой случайной величины, а можно только *оценить* их.

Одна из задач математической статистики состоит в нахождении оценок неизвестных параметров по выборке. В качестве оценки параметра берут ту или иную функцию  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  выборки (выборочных значений), которая называется **статистикой** или **выборочной функцией**.

**Точечной оценкой** параметра  $\theta$  называется любая статистика  $\hat{\theta}_n$ , предназначенная для оценки этого параметра и определяемая одним числом. Подчеркнем, что точечная оценка практически никогда не совпадает с истинным значением параметра, она может только оценивать его с большей или меньшей точностью.

Для любого параметра можно предложить разные оценки. Так, в качестве оценки для математического ожидания можно использовать первый элемент выборки, среднее арифметическое наибольшего и наименьшего элементов выборки, среднее арифметическое всех элементов выборки и т. д.

**Задача статистического оценивания параметров** заключается в том, чтобы из всего множества оценок выбрать в некотором смысле наилучшую. Это означает, что распределение случайной величины  $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  должно концентрироваться около истинного значения параметра  $\theta$ .

**Замечание.** Если, имея выборку  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значений некоторой случайной величины, повторно провести  $n$  независимых наблюдений над этой случайной величиной, то новая выборка  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ , вообще говоря, не будет совпадать с первоначальной. Поэтому выбороч-

ные значения можно рассматривать как случайные величины. **Основное предположение математической статистики:** выборочные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются независимыми в совокупности одинаково распределёнными случайными величинами. Следовательно, любая статистика и любая оценка  $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  также являются случайными величинами.

Качество точечной оценки характеризуется следующими основными свойствами.

1. Оценка  $\hat{\theta}$  называется **несмещённой**, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру:  $M[\hat{\theta}] = \theta$ . Разность  $M[\hat{\theta}] - \theta$  называется **смещением**.

Требование несмещённости гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценивании. Оно особенно важно при малом числе наблюдений (в случае выборок объема не более 30).

2. Оценка  $\hat{\theta}_n$  называется **состоятельной**, если при увеличении объёма выборки  $n$  оценка  $\hat{\theta}_n$  сходится по вероятности к  $\theta$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta - \hat{\theta}_n| < \varepsilon) = 1.$$

Это свойство означает, что при большом объеме выборки практически достоверно, что  $\hat{\theta}_n \approx \theta$ . Чем больше объем выборки, тем более точные оценки можно получить.

3. Пусть  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  – две различные **несмещённые** оценки параметра. Если для дисперсий  $D[\hat{\theta}_1]$  и  $D[\hat{\theta}_2]$  выполняется условие  $D[\hat{\theta}_1] < D[\hat{\theta}_2]$ , то говорят, что оценка  $\hat{\theta}_1$  более эффективна, чем оценка  $\hat{\theta}_2$ . Оценка с наименьшей дисперсией называется **эффективной**.

Это означает, что распределение эффективной оценки наиболее тесно сконцентрировано около истинного значения параметра.

Кроме этих свойств имеются и другие. К сожалению, не всегда можно найти статистики, которые имели бы все указанные свойства.

### Формулы для расчёта основных числовых характеристик выборки

Для не группированной выборки	Для группированного статистического ряда
Выборочное среднее	
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^* n_i$

<b>Выборочная дисперсия</b>	
$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ $D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$	$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^2 n_i$ $D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^*)^2 n_i - (\bar{x})^2$
<b>Несмещённая оценка дисперсии</b>	
$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$	
$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ $s^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x})^2 n_i$ $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i^*)^2 n_i - \frac{n}{n-1} (\bar{x})^2$

**Выборочное среднее**  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  (среднее арифметическое элементов выборки) характеризует центр распределения (рассеивания) изучаемой случайной величины и является несмещённой и состоятельной оценкой, а в случае выборки из нормального распределения также и эффективной оценкой для математического ожидания наблюдаемой случайной величины.

Выборочная дисперсия  $D_B$  характеризует степень разброса (рассеивания) выборочных значений относительно среднего и является состоятельной, но смещённой (дает заниженное значение) оценкой дисперсии изучаемой случайной величины. В связи с этим вместо нее вводится **несмещенная оценка дисперсии**  $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$ .

## 5. Интервальное оценивание параметров распределения

Точечные оценки не дают информации о степени близости оценки к истинному значению оцениваемого параметра. Чтобы получить информацию о точности и надежности оценки, используют интервальные оценки.

**Интервальной оценкой** параметра  $\theta$  называется интервал, границы которого  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  являются функциями выборочных значений и который с заданной вероятностью  $\gamma$  накрывает истинное значение оцениваемого параметра  $\theta$ :

$$P(\hat{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < \theta < \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \gamma.$$

Интервал  $(\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2)$  называется **доверительным интервалом**; число  $\gamma$  – **доверительной вероятностью** или **надёжностью** интервальной оценки; значение  $\alpha = 1 - \gamma$  – **уровнем значимости**.

В практике важную роль играет величина (длина) доверительного интервала, поскольку чем меньше его длина, тем точнее оценка. Если длина доверительного интервала достаточно велика, то оценка мало пригодна для практики.

Величина доверительного интервала существенно зависит от объема выборки (уменьшается с ростом  $n$ , т. е. чем больше объем выборки, тем более точную оценку можно получить) и от доверительной вероятности  $\gamma$  (величина доверительного интервала увеличивается с приближением  $\gamma$  к 1, т. е. чем более надежный вывод мы хотим получить, тем меньшую точность мы можем гарантировать).

Выбор доверительной вероятности определяется конкретными условиями. Обычно используются значения 0,90; 0,95; 0,99; 0,9973, т. е. такие, чтобы получить интервал, который с большой вероятностью накроет истинное значение оцениваемого параметра.

**Доверительный интервал для математического ожидания  $m$  в случае выборки из нормального распределения с известной дисперсией  $\sigma^2$**  определяется соотношением

$$\bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где  $n$  – объем выборки;  $\bar{x}$  – выборочное среднее;  $\alpha$  – уровень значимости;  $u_\alpha$  – квантиль нормального распределения, удовлетворяющая уравнению  $\Phi(u_\alpha) = \gamma/2$  и определяемая из таблицы функции Лапласа;

$u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$  – точность оценки.

**Доверительный интервал для математического ожидания  $m$  в случае выборки из нормального распределения с неизвестной дисперсией  $\sigma^2$**  определяется формулой

$$\bar{x} - t_{\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{\alpha; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где  $n$  – объем выборки;  $\bar{x}$  – выборочное среднее;  $s^2$  – несмещенная оценка дисперсии;  $\alpha$  – уровень значимости,  $t_{\alpha; n-1}$  – квантиль распределения Стьюдента, удовлетворяющая уравнению  $P(|t_{n-1}| \geq t_{\alpha; n-1}) = \alpha$  для случайной величины  $t_{n-1}$ , имеющей распределение Стьюдента с числом степеней свободы  $k = n - 1$ .



**Доверительный интервал для дисперсии  $\sigma^2$  в случае выборки из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием** определяется соотношением

$$\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1}} < \sigma^2 < \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}},$$

где  $n$  – объем выборки;  $s^2$  – несмещенная оценка дисперсии;  $\alpha$  – уровень значимости;  $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1}$  и  $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}$  – квантили распределения  $\chi^2$  с числом степеней свободы  $k = n - 1$ .

## 6. Элементы регрессионного и корреляционного анализа

Пусть на основании экспериментальных данных (по выборке объема  $n$  связанных пар наблюдений  $(x_i, y_i)$ ) изучается связь между двумя величинами. Две случайные величины могут быть: 1) независимыми; 2) связаны функциональной зависимостью, когда каждому значению одной из них соответствует строго определенное значение другой; 3) связаны **статистической** зависимостью, при которой каждому значению одной из них соответствует множество возможных значений другой, т.е. изменение одной из величин влечет изменение **распределения** другой, в частности, может изменяться **среднее значение** другой.

*Пример.* Статистической является зависимость урожайности некоторой культуры от количества вносимых удобрений или количества осадков; зависимость спроса на товар от его цены; надежности автомобиля от его возраста и т. д.

Статистическая зависимость возникает из-за того, что на зависимую переменную влияют какие-то неучтенные или неконтролируемые факторы.

При изучении статистической зависимости обычно ограничиваются исследованием усредненной зависимости: как в среднем будет изменяться значение одной величины при изменении другой. Такая зависимость называется **регрессионной**. Более строго, регрессионная зависимость между двумя случайными величинами – это функцио-

нальная зависимость между значениями одной из них и условным математическим ожиданием другой.

Основным методом исследования статистических зависимостей является **корреляционно-регрессионный** анализ.

**Корреляционный анализ** состоит в определении **степени связи** между случайными величинами.

Целью **регрессионного анализа** является установление **формы зависимости** между наблюдаемыми величинами и определение по экспериментальным данным уравнения зависимости, которое называют **выборочным (эмпирическим) уравнением регрессии**, а также прогнозирование с помощью уравнения регрессии среднего значения зависимой переменной при заданном значении независимой переменной.

Вид эмпирической функции регрессии определяют исходя из:  
1) соображений о физической сущности исследуемой зависимости;  
2) опыта предыдущих исследований; 3) характера расположения точек на **корреляционном поле**, которое получается, если отметить на плоскости все точки с координатами  $(x_i, y_i)$ , соответствующие наблюдениям.

Наибольший интерес представляет линейное эмпирическое уравнение регрессии  $y = ax + b$ , т. к. 1) это наиболее простой случай для расчетов и анализа; 2) при нормальном распределении функция регрессии является линейной.

## 7. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства

Количественной мерой линейной связи между двумя наблюдаемыми величинами служит **выборочный коэффициент корреляции**.

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ ,  $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$  - выборочные средние  $x$ ,  $y$ ,  $xy$

соответственно,  $\sigma_x = \sqrt{D_{ax}} = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$ ,  $\sigma_y = \sqrt{D_{ay}} = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}$ ,  $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ ,

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

**Свойства выборочного коэффициента корреляции.**

$$1. -1 \leq r_{xy} \leq 1$$

2. Если  $|r_{xy}| \approx 1$ , то значения  $x$  и  $y$  связаны линейной зависимостью;
3. Если значения  $x$  и  $y$  независимы, то  $|r_{xy}| \approx 0$ .
4. Если  $r_{xy} > 0$ , то с ростом одной величины увеличивается другая, если  $r_{xy} < 0$ , то, наоборот, уменьшается.

**Проверка значимости коэффициента корреляции** - это проверка того, что коэффициент корреляции значимо отличается от нуля. Т. к. выборка произведена случайно, нельзя утверждать, что если выборочный коэффициент корреляции  $r_{xy} \neq 0$ , то и коэффициент корреляции генеральной совокупности  $\rho \neq 0$ . Это зависит от соотношения объема выборки и значения  $r_{xy}$ . Если выборка из нормального распределения, то проверка производится по **критерию Стьюдента**: если

$$t_{расч} = |r_{xy}| \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} > t_{табл} = t_{\alpha, n-2},$$

где  $t_{\alpha, n-2}$  - квантиль  $t$ -распределения Стьюдента (определяется по таблице), то при заданном уровне значимости  $\alpha$  (допускается, что вывод может быть ошибочным с небольшой вероятностью  $\alpha$ ) коэффициент корреляции считается значимо отличающимся от нуля, а следовательно, связь между величинами  $x, y$  признается статистически значимой.

Подчеркнем, что коэффициент корреляции является мерой именно *линейной* зависимости. В случае нелинейной зависимости связь между величиной коэффициента корреляции и близостью точек корреляционного поля к некоторой линии не прослеживается. Поэтому в практических задачах при выборе вида эмпирической функции регрессии обязательно учитывают характер расположения точек на корреляционном поле.

## 8. Определение коэффициентов уравнения линейной регрессии методом наименьших квадратов

Наиболее распространенным методом нахождения коэффициентов эмпирического уравнения регрессии  $\hat{y} = ax + b$  по выборке  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  является **метод наименьших квадратов (МНК)**. Суть этого метода в том, что коэффициенты  $a$  и  $b$  выбирают так, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений  $y_i$  от предсказы-

ваемых по уравнению  $\hat{y}_i = ax_i + b$  была минимальной. Таким образом, минимизируется функция

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)^2 \rightarrow \min_{a, b}.$$

Необходимым условием существования минимума данной функции двух переменных является равенство нулю ее частных производных по неизвестным параметрам  $b, a$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i) x_i = 0. \end{cases}.$$

Отсюда получаем **систему нормальных уравнений**:

$$\begin{cases} nb + a \sum x_i = \sum y_i, \\ b \sum x_i + a \sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов широко применяется при статистической обработке результатов измерений.