Задачи для подготовки к экзамену по дисциплине «МАТЕМАТИКА» (III семестр, специальности ПОИТ, ДЭВИ)

1. Сформулировать классическое определение вероятности. Какова вероятность того, что наудачу взятое шестизначное число содержит одинаковые цифры?
2. Сформулировать классическое определение вероятности. В мешке Деда Мороза 8 подарка с машинками, 7 — с куклами и 6 — с мишками. Дед Мороз наугад вынимает 6 подарков. Какова вероятность того, что среди вынутых нет подарка с машинками?
3. Что называется геометрической вероятностью? Какова вероятность того, что наудачу брошенная в правильный треугольник точка окажется внутри вписанного в него круга?
4. Сформулировать теорему умножения вероятностей. При подготовке к Новому году на четырех шарах нарисовали цифру 2 и на двенадцати шарах — цифру 0. Какова вероятность получить число 2022, если взять наугад 4 шара и развесить их в порядке вынимания?
5. Что называется суммой событий? Записать теорему сложения вероятностей. Стрелок произвел три выстрела по удаляющейся от него цели, причем вероятность попадания в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается в два раза. Какова вероятность того, что стрелок попал хотя бы два раза?
6. Какие события называются совместными? несовместными? противоположными? Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,8, третьим – 0,4. Каждый выстрелил по одному разу. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок не попал в цель.
7. Сформулировать теоремы сложения и умножения вероятностей. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности использования их в данный момент равны соответственно 0,9; 0,85; 0,95. Найти вероятность того, что в данный момент работают не более двух камер.
8. Что называется суммой событий? произведением событий? В первой урне 6 зеленых и 9 желтых шаров, во второй 8 зеленых и 7 желтых шаров. Из каждой урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что вынут хотя бы один желтый шар?
9. Что называется суммой и произведением событий? В первом ящике лежит 30 елочных игрушек, из них 10 шариков, во втором 20 игрушек, из них 5 шариков, в третьем 15 игрушек, из них 12 шариков. Из каждого ящика наудачу взяли по одной игрушке. Какова вероятность того, что среди вынутых игрушек только один шарик?
10. Записать теорему умножения вероятностей. В первом ящике лежит 30 елочных игрушек, из них 10 шариков, во втором 20 игрушек, из них 5 шариков, в третьем 15 игрушек, из них 12 шариков. Из каждого ящика наудачу взяли по одной игрушке. Какова вероятность, что все вынутые игрушки — шарики?
11. Что называется условной вероятностью? В мешке Деда Мороза 6 игрушечных

котиков и 9 зайчиков. Последовательно (без возвращения) извлекаются 3 игрушки. Найти вероятность того, что будут извлечены: а) 3 зайчика; б) 3 одинаковые игрушки.

12. Что называется суммой событий? произведением событий? В коробке лежат 8 золотистых и 7 серебристых новогодних шаров. Последовательно (без возвращения) извлекается три шара. Найти вероятность того, что все три шара будут: а) золотистыми, б) одного цвета.

13. Что называется суммой событий? Сформулировать теорему сложения вероятностей. В первой коробке с новогодними украшениями 6 красных и 9 синих шариков, во второй 7 синих и 5 зеленых. Из каждой коробки наугад взяли по 2 шара. Какова вероятность того, что взяли ровно два синих шара?

14. Что называется полной группой событий? В первой коробке с новогодними украшениями 6 красных и 9 синих шариков, во второй 7 синих и 5 зеленых. Из наугад взятой коробки извлекается три шара. Найти вероятность того, что все три шара будут синими.

15. Записать формулу полной вероятности и формулы Байеса. У Винни-Пуха в одном кармане 5 шоколадки с орехами и 3 с изюмом, во втором — 4 с орехами и 3 с изюмом. Из наугад выбранного кармана Винни-Пух достает одну шоколадку. Какова вероятность того, что она с изюмом?

16. Записать формулу полной вероятности. Семена для посева поступают из трех семеноводческих хозяйств, причем 1-е и 2-е хозяйства присылают по 30% всех семян. Всхожесть семян из 1-го хозяйства 95%, 2-го 85%, 3-го 80%. Определить вероятность того, что наудачу взятое семя не взойдет.

17. Записать формулу полной вероятности и формулы Байеса. С первого автомата на сборку поступает 30%, со второго — 45%, с третьего — 25% деталей. Среди деталей 1-го автомата 0,2% бракованных, 2-го — 0,4%, 3-го — 0,3%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь — небракованная.

18. Что называется полной группой событий? В первой коробке с новогодними украшениями 5 синих и 7 красных шариков, во второй 6 синих и 3 желтых. Из первой коробки наугад достали один шар и переложили во вторую, а затем из второй взяли 3 шара. Какова вероятность того, что взяли три синих шара?

19. Что называется схемой Бернулли? Всхожесть семян данного растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) ровно три; б) не менее трех.

20. Что называется схемой Бернулли? Какова при этом вероятность хотя бы одного попадания при пяти выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле 0,4?

21. Что называется схемой Бернулли? При слабом соединении сети вероятность удачной отправки сообщения в мессенджере составляет 0,85. Найти вероятность того, что из 6 отправленных сообщений не менее 2 не дойдут до адресата.

22. Что называется схемой Бернулли? В среднем 30% акций на аукционах продаются

по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 6 пакетов акций в результате торгов по первоначальной цене будет продано не более четырех пакетов.
23. Записать формулы Бернулли и Пуассона. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,003. Найти вероятность того, что после облучения из 2000 бактерий останется не более 4 бактерий.
24. Вероятность опечатки 0,002. Какова вероятность того, что из 1000 символов более трех символов набрано неверно?
25. Найти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ и вероятности $P(\xi=2)$, $P(\xi=3)$, $P(1<\xi\leq 4)$ по заданному закону распределения СВ ξ :

ξ	1	3	4	7
P	0,2	0,5	0,1	0,2

26. Записать формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины. Найти $M\xi$, $D\xi$, $P(|\xi-M\xi|>\sigma_\xi)$, если известен закон распределения случайной величины ξ.

ξ	1	2	3	4	5
P	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

27. Найти $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi>M\xi)$, построить график функции распределения случайной величины ξ, если известен ее закон распределения.

ξ	-3	1	2
P	0,3	0,3	p

28. По данному ряду распределения случайной величины ξ найти p, $M\xi$, $D\xi$, построить график функции распределения.

ξ	-2	0	1	4
p	0,2	0,2	p	0,2

29. Сформулировать определение и свойства функции распределения. По данному ряду распределения случайной величины ξ найти p, $M\xi$, $D\xi$, построить график функции распределения.

ξ	-3	-1	0	3
p	0,3	0,15	p	0,15

30. По ряду распределения случайной величины ξ найти p_1, числовые характеристики и функцию распределения.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,15	p_1	0,15	0,15	0,15

31. Как вычисляются математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины? Найти закон распределения и построить график функции распределения случайной величины ξ, если $\mathbf{M}\xi=1,8$ и ряд распределения имеет вид

ξ	0	2	4
P	p_1	p_2	0,3

32. Перечислить основные свойства математического ожидания и дисперсии. Найти числовые характеристики и $\mathbf{P}(\xi\in[-2;2])$, если случайная величина ξ задана функцией распределения: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leq -3,\\ 0,25x+0,25 & \text{при } -3<x\leq 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$
33. Сформулировать определение функции распределения. Найти числовые характеристики и $\mathbf{P}(\xi>1)$, если известна функция распределения случайной величины ξ:
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leq 0,\\ x^3/64, & \text{если } 0<x\leq 4,\\ 1, & \text{если } x>4.\end{cases}$$

34. Зная функцию распределения ξ: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ \frac{1}{8}(x^2 - 2x), & \text{если } 2 < x \le 4, \\ 1, & \text{если } x > 4, \end{cases}$

найти $M\xi,\ D\xi,\ P(\xi \le 3)$.

35. Найти a, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi > 0,5\}$, $P\{-1 < \xi \le 1\}$, $P\{\xi = -1,5\}$, если дана плотность распределения случайной величины ξ: $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -3, \\ a(x+3), & \text{если } -3 < x \le 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

36. Сформулировать определение и свойства функции распределения. Найти функцию распределения и $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{P}\{\xi > 1,5\}$, если дана плотность распределения: $p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9}, & \text{если } 0 < x \le 3, \\ 0, & \text{если } x \le 0 \text{ или } x > 3. \end{cases}$

37. Сформулировать определение и свойства функции распределения. Найти функцию распределения и $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{P}\{\xi > -0,5\}$, если дана плотность распределения: $p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}x^2, & \text{если } -2 < x \le 2, \\ 0, & \text{если } x \le -2 \text{ или } x > 2. \end{cases}$

38. Найти $\mathbf{P}(-4 \le \xi < 3)$, если случайная величина ξ имеет нормальное распределение и известны ее числовые характеристики: $\mathbf{M}\xi = -1,\ \mathbf{D}\xi = 16$.

39. Что называется нормальным распределением случайной величины? Найти числовые характеристики и вероятность $\mathbf{P}(\xi \in [-4; 0])$, если известна плотность распределения случайной величины ξ: $p(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x+4)^2}{4}}$.

40. Записать плотность нормального распределения, сформулировать правило трех сигм. Найти числовые характеристики и вероятность $\mathbf{P}(\xi \in [1; 10])$, если известна плотность распределения случайной величины ξ: $p(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{72}}$.

41. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с $M\xi = 0$. Найти среднее квадратичное отклонение, если $\mathbf{P}(\xi \le 1) = 0,85$.

42. Известны $M\xi = 1$ и $D\xi = 0,75$ случайной величины ξ, имеющей биномиальное распределение. Найти $\mathbf{P}(\xi > 1)$.

43. Найти $\mathbf{P}(2 \le \xi < 4)$, если случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с $\mathbf{M}\xi = 2,\ \mathbf{D}\xi = \frac{4}{3}$.

44. Записать формулы для вычисления математического ожидания дискретной и непрерывной случайной величины. Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение с $M\xi = 10,\ D\xi = 12$. Найти вероятность $\mathbf{P}(\xi \in [3; 9])$.

45. В каком случае случайные величины называются независимыми? некоррелированными? Какая связь между этими понятиями? Задан закон распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$. Найти значение p, числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

$\xi \vert \eta$	-4	0	4
-3	0.1	0.3	0,1
3	0	p	0.2

46. В каком случае случайные величины называются независимыми? некоррелированными? Какая связь между этими понятиями? Задан закон распределения двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$. Найти значение p, числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

$\xi \vert \eta$	-1	0	1
-4	0.1	0.1	0.1
4	p	0	0.2

47. В каком случае случайные величины называются независимыми? некоррелированными? Зная закон распределения двумерной случайной величины $(\xi;\ \eta)$, найти значение p, числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

$\xi \vert \eta$	-2	0	2
-2	0.1	0	0.1
0	p	0.2	0.2

48. Сформулировать определение и основные свойства функции распределения двумерной случайной величины. Найти плотность распределения случайной величины $(\xi;\ \eta)$ и $\mathbf{P}(-1 < \xi < 4,\ 0 \le \eta \le 1)$, если известна функция распределения

$$F_{\xi;\,\eta}(x,\ y) = \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-4x})(1-\mathrm{e}^{-6y}), & \text{если } x>0 \text{ и } y>0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

49. Сформулировать определение и основные свойства функции распределения двумерной случайной величины. Найти плотность распределения случайной величины $(\xi;\ \eta)$ и $\mathbf{P}(0 < \xi < 4,\ 0{,}2 \le \eta \le 2)$, если известна функция распределения

$$F_{\xi;\,\eta}(x,\ y) = \begin{cases} (1-x^{-5})(1-y^{-6}), & \text{если } x>1 \text{ и } y>1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

50. По данной выборке найти выборочные среднее и дисперсию, записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

3 6 4 1 2 8 5 3

51. Что называется несмещенной оценкой параметра? состоятельной оценкой? По данной выборке получить несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии, найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

0 4 4 3 2 5 8 8 2 6

52. Игральную кость подбросили 60 раз. Найти несмещенную оценку для математического ожидания, построить полигон относительных частот и график эмпирической функции распределения.

Число очков	1	2	3	4	5	6
n_i	10	15	7	10	5	13

53. По данному статистическому ряду найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, построить график эмпирической функции распределения.

x_i	-3	-1	0	3
n_i	6	18	12	4

54. Что называется несмещенной оценкой параметра распределения? По данному интервальному статистическому ряду

$[x_{i-1};x_i)$	$[-6;0)$	$[0;6)$	$[6;12)$	$[12;18)$
n_i	10	45	30	15

построить гистограмму относительных частот, найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

55. Что называется доверительным интервалом? доверительной вероятностью? Предполагая, что выборка взята из нормального распределения, получить 5-процентный доверительный интервал для математического ожидания:

$$-1;\ -2;\ \ 1;\ \ 7;\ \ 1;\ \ 4;\ \ 3;\ \ -1.$$

56. Предполагая, что выборка взята из нормального распределения, получить 5%-ный доверительный интервал для математического ожидания:

$$6;\ 8;\ 0;\ 4;\ 0;\ 16;6;\ 10;6;\ 4.$$

57. По интервальному статистическому ряду, предполагая, что выборка взята из нормального распределения, оценить математическое ожидание с надежностью $\gamma = 0,95$.

$[x_{i-1}; x_i)$	$[-2; 2)$	$[2; 6)$	$[6; 10)$	$[10; 14)$
n_i	4	18	12	6

58. Предполагая, что выборка взята из нормального распределения, оценить дисперсию с надежностью $\gamma = 0,95$:

$$-1;2;\ \ 1;\ \ 7;\ \ 1;\ \ 4;\ \ 0;\ \ 3.$$

59. Двумя методами произведены измерения одной и той же физическй величины. Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0,05$ считать, что оба метода обеспечивают одинаковую точность?

Метод	$\overline{x}$	s^2	n
A	13,8	8	16
B	12,2	5,4	9

60. Что называется простой гипотезой? сложной гипотезой? Что называется критерием значимости? Двумя методами произведены измерения одной и той же физическй величины. Определить при уровне значимости $\alpha = 0,05$, имеется ли реальное различие в результатах измерений.

Метод	$\overline{x}$	s^2	n
A	13,8	8	16
B	12,2	5,4	9

61. Для сравнения точности станков, производящих одинаковую продукцию, было отобрано с 1-го станка 16 единиц продукции, со 2-го — 13 единиц, в результате чего получено: $\overline{x}_1$=20,21; s_1^2=1,8; $\overline{x}_2$=20,22; s_2^2=0,6. Проверить при $\alpha = 0,05$ гипотезу об одинаковой точности станков.

62. Имеются данные (в микронах) об измерениях неровностей поверхностей, выполненных на двух микроскопах с заводскими номерами № 2021 и № 2022. Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0,05$ считать, что два прибора обеспечивают одинаковую точность измерений?

Микроскоп № 2021	1,8	1,9	2,4	2,0	–
Микроскоп № 2022	1,7	2,1	2,4	1,5	1,8

63. Имеются данные (в микронах) об измерениях неровностей поверхностей одних и тех же образцов на двух микроско-

Микроскоп № 2021	0,8	2,1	3,2	2,4	4,8
Микроскоп № 2022	1,5	1,9	3,1	2,6	4,4

пах с заводскими номерами № 2021 и № 2022. Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0,05$ считать, что между показаниями приборов нет систематических расхождений?

64. Для проверки работы двух станков проведены измерения размера выпускаемых ими однотипных изделий. Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0,05$ считать, что станки выпускают изделия одинакового размера?

Станок 1	20,14	20,16	20,22	20,12	
Станок 2	20,08	20,12	20,10	20,10	20,15

65. Имеются данные о дополнительных часах сна после приема снотворных А и В у четырех пациентов. Проверить при уровне значимости 0,05, существует ли значимая разница между действием снотворных А и В. Как изменилась бы процедура проверки гипотезы в случае, если бы в эксперименте были использованы 2 группы пациентов по 4 человека в каждой?

Пациент	1	2	3	4
Снотворное А	1,7	–0,2	0,4	1,8
Снотворное В	1,1	0	–0,1	1,9

66. Сформулировать основные свойства выборочного коэффициента корреляции. По наблюденным значениям (0; 4,5); (2; 3,5); (4; 5); (6; 7); (8; 6,5) найти выборочный коэффициент корреляции и проверить его значимость при $\alpha = 0,05$, предполагая, что выборка взята из нормального распределения.

67. По наблюденным значениям x и y найти выборочный коэффициент корреляции и проверить его значимость при $\alpha = 0,05$, предполагая, что выборка взята из нормального распределения.

x	1	2	3	4	5
y	7.5	8.5	7	5	5.5

68. По наблюденным значениям (0; 4,5); (2; 3,5); (4; 5); (6; 7); (8; 6,5) найти выборочное уравнение линейной регрессии y на x, построить прямую на корреляционном поле.

69. Найти выборочное уравнение линейной регрессии y на x, построить прямую на корреляционном поле.

x	2	4	6	8
y	2	4	5	7

70. По наблюденным значениям x и y найти выборочное уравнение линейной регрессии y на x, построить прямую на корреляционном поле.

x	1	2	3	4	5
y	7.5	8.5	7	5	5.5

71. Что называется каноническим разложением целого числа на простые множители? Сформулировать основную теорему арифметики. Найти НОД и НОК чисел 6868 и 8686.

72. Найти все решения диофантова уравнения $152x + 72y = 48$.

73. Что называется диофантовым уравнением? На прямой $16x + 40y = 72$ найти число точек с целочисленными координатами, лежащих между прямыми $x = -20$ и $x = 2022$.

74. Сформулировать теорему Эйлера. Найти остаток от деления 2021^{2022} на 25.

75. Что называется функцией Эйлера? В чем заключается теорема Эйлера? Найти последние две цифры числа 777^{5555}.

76. Что называется функцией Эйлера? В чем заключается теорема Эйлера? Найти последние две цифры числа 4567^{2022}.
77. Сколько решений по модулю m имеет сравнение $ax \equiv b(\mod m)$, в зависимости от значений коэффициентов? Решить сравнение $48x \equiv 104(\mod 40)$, используя: а) расширенный алгоритм Евклида; б) теорему Эйлера.
78. Сколько решений по модулю m имеет сравнение $ax \equiv b(\mod m)$, в зависимости от значений коэффициентов? Решить сравнение $55x \equiv 132(\mod 198)$, используя: а) расширенный алгоритм Евклида; б) теорему Эйлера.
79. Сформулировать основные свойства сравнений по модулю m. Решить систему сравнений $\begin{cases} 21x \equiv 20(\mod 15), \\ 18x \equiv 42(\mod 24), \\ 60x \equiv 24(\mod 63). \end{cases}$
80. Сформулировать основные свойства сравнений по модулю m. Решить систему сравнений $\begin{cases} 60x \equiv 132(\mod 24), \\ 40x \equiv 35(\mod 25), \\ 20x \equiv 12(\mod 26). \end{cases}$
81. Что называется классом вычетов по модулю m? Показать, что мультипликативная группа $\mathbf{Z}_{34}^*$ классов вычетов по модулю 34, взаимно простых с модулем, является циклической.
82. Сформулировать теорему Лагранжа о порядке подгруппы. В мультипликативной группе $(\mathbf{Z}_{27}^*, \times)$ классов вычетов, взаимно простых с модулем, найти циклическую подгруппу, порожденную элементом $\overline{5}$, и определить ее порядок.
83. Сформулировать теорему Лагранжа о порядке подгруппы. В мультипликативной группе $(\mathbf{Z}_{38}^*, \times)$ классов вычетов, взаимно простых с модулем, найти циклическую подгруппу, порожденную элементом $\overline{5}$, и определить ее порядок.
84. Показать, что мультипликативная группа $\mathbf{Z}_{40}^*$ классов вычетов по модулю 40, взаимно простых с модулем, не является циклической.
85. Что называется циклической подгруппой? Что называется порядком подгруппы? В мультипликативной группе матриц 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbf{Z}_5$ и ненулевым определителем найти циклическую подгруппу, порожденную элементом $A = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix}$, и определить ее порядок.
86. Что называется группой? абелевой группой? В мультипликативной группе матриц 2-го порядка с коэффициентами из $\mathbf{Z}_7$ и ненулевым определителем найти циклическую подгруппу, порожденную элементом $A = \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{2} \\ \overline{6} & \overline{1} \end{pmatrix}$, и определить ее порядок.
87. В мультипликативной группе матриц 3-го порядка с ненулевым определителем найти циклическую подгруппу, порожденную элементом $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

88. Что называется кольцом? Что называется кольцом с делителями нуля? Являются ли делители нуля обратимыми элементами кольца? В кольце $(\mathbf{Z}_{40}, +, \times)$ классов вычетов по модулю 40 найти элементы, обратные к элементам $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, если они существуют.
89. Что называется кольцом? Что называется коммутативным кольцом? Что называется кольцом с делителями нуля? Являются ли делители нуля обратимыми элементами кольца? В кольце $(\mathbf{Z}_{280}, +, \times)$ классов вычетов по модулю 280 найти элементы, обратные к элементам $\overline{10}$, $\overline{11}$, $\overline{12}$, если они существуют.
90. Что называется кольцом? Что называется коммутативным кольцом? Что называется кольцом с делителями нуля? Являются ли делители нуля обратимыми элементами кольца? В кольце $(\mathbf{Z}_{420}, +, \times)$ классов вычетов по модулю 420 найти элементы, обратные к элементам $\overline{19}$, $\overline{20}$, $\overline{21}$, если они существуют.