24. Элементы математической статистики

1. При проверке партии изделий получены следующие данные по сортам:

1 2 1 2 1 1 2 3 4 2

1 1 2 1 3 2 1 4 1 2

Требуется:

а) записать вариационный ряд;

б) составить статистический ряд;

в) построить полигон частот;

г) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

д) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

2. По выборке 39, 41, 40, 40, 43, 41, 44, 42, 41, 41, 43, 42, 39, 40, 42, 43, 41, 42, 41, 39 требуется:

а) записать вариационный ряд;

б) составить статистический ряд;

в) построить полигон частот;

г) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

д) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

3. По данному статистическому ряду

x_i^*	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

требуется:

а) построить полигон частот;

б) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

в) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

4. Имеются данные о распределении рабочих по тарифным разрядам:

Тарифный разряд	1	2	3	4	5
Количество рабочих	4	6	16	26	48

Требуется:

а) построить полигон частот;

б) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

в) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

5. На телефонной станции производились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Результаты наблюдений в течение часа представлены в виде статистического ряда:

x_i^*	0	1	2	3	4	5	6
n_i	8	17	16	10	6	2	1

Требуется:

а) построить полигон частот;

б) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

в) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

6. При 5 проверках октанового числа одного и того же сорта бензина получены следующие результаты: 43, 44, 40, 39, 44. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

7. После 6 заездов автомобиля были получены следующие значения его максимальной скорости в м/с: 27, 38, 30, 37, 35, 31. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии максимальной скорости автомобиля.

8. Для определения точности измерительного прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, было произведено 5 независимых измерений, результаты которых приведены ниже:

Номер измерения	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2858	2763

Найти несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений.

9. Из большой партии по схеме случайной повторной выборки было проверено 150 изделий с целью определения процента влажности древесины, из которой изготовлены эти изделия. Получены следующие результаты:

$[x_{i-1}; x_i)$	$[11;13)$	$[13;15)$	$[15;17)$	$[17;19)$	$[19;21)$
n_i	8	42	51	37	12

Требуется:

а) построить гистограмму относительных частот (можно ли по виду гистограммы предположить, что наблюдаемая случайная величина имеет нормальное распределение?);

б) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

в) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

10. По данным интервального статистического ряда

$[x_{i-1}; x_i)$	$[17; 23)$	$[23; 29)$	$[29; 35)$	$[35; 41)$	$[41; 47)$	$[47; 53)$	$[53; 59)$
n_i	6	15	22	26	16	10	5

требуется:

а) построить гистограмму относительных частот (можно ли по виду гистограммы предложить, что наблюдаемая случайная величина имеет нормальное распределение?);

б) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

в) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

11. По данным интервального статистического ряда

$[x_{i-1}; x_i)$	$[0,2; 0,6)$	$[0,6; 1,0)$	$[1,0; 1,4)$	$[1,4; 1,8)$	$[1,8; 2,2)$
n_i	8	32	40	16	4

требуется:

а) построить гистограмму относительных частот (можно ли по виду гистограммы предложить, что наблюдаемая случайная величина имеет нормальное распределение?);

б) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

в) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

12. По результатам 28 измерений найдена смещенная оценка дисперсии $D_{\text{в}} = 0,81.$ Найти несмещенную оценку дисперсии.

13. По результатам 30 наблюдений вычислены суммы: $\sum_{i=1}^{30} x_i = 9; \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 15.$ Найти: **а)** выборочное среднее и выборочную дисперсию; **б)** несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

14. Для определения процентного содержания воды в некотором продукте из большой партии взята выборка объема 25, по результатам которой получено: $\overline{x}_1 = 7,2; s_1^2 = 1,85.$ Чтобы уточнить результаты, из этой же партии взяли еще 20 проб, причем оказалось $\overline{x}_2 = 7,5; s_2^2 = 1,15.$ Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии для объединенной выборки.

15. а) Как изменятся выборочное среднее, выборочная дисперсия, несмещенная оценка дисперсии, если каждый элемент выборки увеличить на одно и то же число a?

б) Как изменятся выборочное среднее, выборочная дисперсия, несмещенная оценка дисперсии, если каждый элемент выборки умножить на одно и то же число a?

16. Оценить математическое ожидание нормального распределения с заданной надежностью $\gamma = 0,95,$ если:

а) среднеквадратическое отклонение равно 2 и по выборке объема 10 найдено выборочное среднее, равное 5,4;

б) по выборке объема 12 найдены несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии: $\overline{x} = 16{,}8$; $s^2 = 2{,}25$.

17. Найти доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$, если:

а) среднеквадратическое отклонение равно 3 и по результатам 25 независимых наблюдений найдено выборочное среднее, равное 20,12;

б) по выборке объема 9 найдены несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии: $\overline{x} = 14{,}2$; $s^2 = 5{,}76$.

18. Среднее значение расстояния до ориентира по 4 независимым измерениям равно 2250 м, среднеквадратическая ошибка измерительного прибора $\sigma = 40$ м, систематическая ошибка отсутствует. Найти 95%-ый доверительный интервал для измеряемой величины, считая ошибку измерения нормально распределенной случайной величиной.

19. При 6 измерениях концентрации получены следующие результаты (в процентах): 1,24; 1,18; 1,25; 1,32; 1,09; 1,24. Требуется оценить ожидаемое значение концентрации и построить 95%-ый доверительный интервал, предполагая, что результаты являются независимыми случайными величинами и имеют нормальное распределение, причем: **а)** дисперсия известна и равна $6 \cdot 10^{-3}$; **б)** дисперсия неизвестна.

20. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью 0,98 точность оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины была 0,2, если среднеквадратическое отклонение этой случайной величины равно 1,2?

21. Глубина дорожки подшипника измеряется оптическим глубиномером, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки подчинены нормальному распределению со среднеквадратическим отклонением 20 мк. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы с вероятностью 90% можно было гарантировать, что ошибка определения глубины не превосходит 15 мк?

22. Для определения высоты полета на самолете установлено три высотомера, которые в некоторый момент времени дали результаты: 3689 м, 3740 м, 3710 м. Сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с надежностью 0,95 ошибка при определении средней высоты была в пределах 50 м, если считается, что ошибки высотомеров нормальны?

23. Даны результаты 5 независимых равноточных измерений толщины металлической пластинки: 2,015; 2,020; 2,025; 2,020; 2,015. Требуется:

а) оценить с помощью доверительного интервала истинную толщину пластинки при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$;

б) найти минимальное число измерений, которое надо выполнить, чтобы с надежностью 0,95 можно было утверждать, что предельная погрешность точечной оценки истинной толщины металлической пластинки не превышает 0,003.

24. Произведено 5 независимых равноточных измерений для определения заряда электрона. Опыты дали следующие результаты (в абсолютных электростатических единицах):

$$4{,}781\cdot 10^{-10};\quad 4{,}795\cdot 10^{-10};\quad 4{,}792\cdot 10^{-10};\quad 4{,}769\cdot 10^{-10};\quad 4{,}779\cdot 10^{-10}.$$

Требуется:

а) определить подходящее значение для заряда электрона и найти доверительные границы при надежности 99%;

б) найти минимальное число опытов, которое надо провести, чтобы с надежностью 0,99 можно было утверждать, что предельная ошибка в определении заряда электрона не превышает 10^{-12}.

25. По данным 16 независимых равноточных измерений физической величины найдены несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии: $\overline{x} = 23{,}161$; $s^2 = 0{,}16$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины и точность измерений σ с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

26. При анализе точности фасовочного автомата было проведено 24 контрольных взвешивания пятисотграммовых пачек кофе. По результатам измерений рассчитано выборочное среднеквадратическое отклонение $s = 0{,}8$ г. Требуется оценить точность σ фасовочного автомата с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

27. При взвешивании груза были получены следующие результаты: 129, 125, 130, 122, 135, 125, 120, 130, 127. Определить среднеквадратическую ошибку взвешивания и построить для нее доверительный интервал с надежностью 0,9.

28. При 12 000 бросаний монеты Пирсон получил 6019 выпадений герба. Совместим ли этот результат на уровне значимости 0,01 с гипотезой о том, что монета правильная?

29. По результатам 1200 бросаний кубика

x_i^*	1	2	3	4	5	6
n_i	205	205	190	220	180	200

проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о том, что кубик правильный.

30. Результаты исследования прочности на сжатие 200 образцов бетона представлены в виде интервального статистического ряда:

$[x_{i-1}; x_i)$	[19; 20)	[20; 21)	[21; 22)	[22; 23)	[23; 24)	[24; 25)
n_i	10	26	56	64	30	14

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о нормальном распределении прочности на сжатие.

31. Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о нормальном распределении в задаче **9**.

32. Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о нормальном распределении в задаче **11**.

33. Отсчет по шкале измерительного прибора оценивается приблизительно в долях деления шкалы. Приведено 200 результатов отсчета последней цифры между соседними делениями шкалы. Установить с помощью критерия χ^2, согласуются ли при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ наблюдения с законом равномерного распределения, при котором вероятность появления любой цифры 0,1.

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

34. Приводятся данные об отказах аппаратуры за 10 000 часов:

Число отказов i	0	1	2	3	4	5
Количество случаев n_i	427	235	72	21	1	1

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона.

35. Во время Второй мировой войны на Лондон упало 535 самолетов-снарядов. Вся территория Лондона была разделена на 576 участков площадью 0,25 км^2. В таблице приведено число участков n_i, на которые упало i снарядов:

i	0	1	2	3	4	5
n_i	229	211	93	35	7	1

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о том, что число снарядов, упавших на участок, имеет распределение Пуассона.

36. На станке-автомате изготавливаются детали с номинальным контролируемым размером $a = 12$ мм. Известно, что распределение контролируемого размера является нормальным со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}5$ мм. Отдел технического контроля в течение смены произвел измерение 36 случайно отобранных деталей и подсчитал средний размер контролируемого параметра $\bar{x} = 11,7$ мм. Можно ли утверждать, что станок-автомат изготавливает детали уменьшенного размера и поэтому требуется произвести подналадку станка? (Принять уровень значимости равным $\alpha = 0,05$.)

37. Техническая норма предусматривает в среднем 40 с на выполнение определенной технологической операции на часовом конвейере. От работниц, работающих на этой операции, поступили жалобы, что они в действительно затрачивают на эту операцию больше времени. Для проверки жалобы произведены хронометрические измерения времени выполнения этой технологической операции у 16 работниц и получены следующие результаты: $\bar{x} = 42$ с, $s^2 = 9,5$ с^2. Можно ли по имеющимся данным на уровне значимости $\alpha = 0,05$ отклонить гипотезу о том, что действительное среднее время исполнения этой операции соответствует норме?

38. В одном из цехов анализируется работа листопрокатного стана по результатам контроля качества продукции. Основным показателем качества является толщина готового стального листа, номинал которой 2,11 мм. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0,05$ считать, что продукция соответствует номиналу?

x_i	2,04	2,06	2,08	2,09	2,1	2,11	2,12	2,14
n_i	1	1	2	4	10	8	3	1

Вспомогательные величины:

$\sum x_i = 16,74; \sum x_i^2 = 35,0358; \sum x_i n_i = 63; \sum x_i^2 n_i = 132,31.$

39. Проверка скорости полимеризации проводится на нескольких образцах полимеров. Предполагаемая скорость полимеризации составляет 24% в час. В восьми опытах получены следующие результаты:

23,6; 22,8; 25,7; 24,8; 26,4; 24,3; 23,9; 25.

Можно ли утверждать на уровне значимости $\alpha = 0,05$, что полученные результаты не совместимы с предполагаемым значением средней скорости?

40. На 40 шатунах контролировался их размер, который должен быть равен 35,12 мм, и отмечались отклонения от 35,1 мм. По результатам измерений получены следующие данные: $\bar{x} = 17,15$ мк, $s^2 = 20,61$ мк^2 (1 мк = 0,001 мм). Согласуется ли этот результат на уровне значимости $\alpha = 0,05$ с предположением о том, что среднее значение отклонений рассматриваемого размера во всей партии можно считать равным 20 мк?

41. В автоматическом токарном цехе некоторый станок производит цилиндрические болты определенного типа. Из одной партии болтов взята выборка объемом 20 и произведены измерения длины каждого болта, по которым рассчитаны статистические характеристики $\overline{x} = 18$ мм, $s^2 = 0{,}000784$ мм^2, $s = 0{,}028$ мм. Контролер по опыту знает точность (а тем самым и среднее квадратическое отклонение как меру рассеивания) станка при производстве болтов данного типа, которая в общем приблизительно равна $\sigma = 0{,}02$ мм. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ по выборочным результатам заключить, что станок дает допустимый разброс для данной партии или же расчетное значение $s = 0{,}028$ мм указывает на несоответствие точности станка предъявленным требованиям?

42. На рабочем месте несколько раз фиксируется время выполнения рабочим определенной операции, чтобы сделать вывод о равномерности его работы. По выборке объема 9 рассчитаны статистические характеристики $\overline{x} = 83$ мин, $s^2 = 4{,}04$ мин^2. Мерой равномерности работы можно считать дисперсию σ^2. Необходимо проверить на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, существенно ли отличается дисперсия, рассчитанная по данным одного рабочего, от дисперсии $\sigma^2 = 3{,}0$ мин^2, выведенной на основании большого числа измерений продолжительности одной и той же операции.

43. Оценивается качество работы двух стабилизаторов температуры: с усовершенствованием и без него. Эффективность стабилизаторов температуры измеряется даваемой ими дисперсией температур. Для оценки дисперсии первого стабилизатора проведено 5 опытов, второго – 7. Выборочные дисперсии оказались соответственно равны 0,016 и 0,07. Необходимо выяснить по результатам эксперимента, можно ли при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ считать усовершенствование эффективным.

44. Двумя методами произведены измерения одной и той же физической величины. Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ считать, что оба метода обеспечивают одинаковую точность?

Метод	$\overline{x_i}$	s_i^2	n_i
1-й	10,28	0,00084	10
2-й	10,3	0,00041	8

45. Для проверки точности двух станков проведены измерения некоторого признака выпускаемых ими однотипных деталей. По результатам 25 измерений деталей, изготовленных первым станком, получено стандартное отклонение $s_1 = 7{,}98$ мк, а по результатам 30 измерений деталей, изготовленных вторым станком, получено стандартное отклонение $s_2 = 5{,}71$ мк. Можно ли на основании этих величин при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ сделать вывод о том, что точность второго станка выше точности первого?

46. Из текущей продукции горизонтальноковочной машины за семь дней ее работы отобрано семь проб, по одной пробе в смену, численностью 17 штамповок каждая. По данным каждой из этих проб подсчитаны выборочные дисперсии (в мм^2):

0,067; 0,136; 0,168; 0,068; 0,066; 0,102; 0,137.

Требуется на уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу об отсутствии разладки машины по рассеиванию размеров штамповок за семь смен ее работы.

47. Исследовалась работа промышленного агрегата по процессу извлечения гелия из природного Оренбургского газа. Целью работы установки является более полное (близкое к 100%) извлечение гелия. Испытывались два технологических режима для того, чтобы выбрать лучший по признаку наибольшего процента извлечения гелия. Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0,05$ считать, что обе технологии дают одинаковые результаты?

Технология	$\overline{x_i}$	s_i^2	n_i
1-я	99,2	0,14	60
2-я	99,34	0,123	80

48. Реклама утверждала, что из двух типов пластиковых карт «American Express» и «Visa» богатые люди предпочитают первый. Другими словами, среднемесячные платежи одного среднестатистического обладателя «American Express» существенно (статистически значимо) превышают среднемесячные платежи одного среднестатистического обладателя карты «Visa». С целью статистической проверки этой гипотезы были обследованы среднемесячные платежи 32 обладателей карт «American Express» и 30 обладателей карт «Visa», в результате чего получено $\overline{x_1} = 563\,\$$, $s_1^2 = 32706\ \$^2$ – для «American Express»; $\overline{x_2} = 485\,\$$, $s_2^2 = 39741\ \$^2$ – для «Visa». Предварительный анализ законов распределения месячных расходов как среди обладателей «American Express», так и «Visa», показал, что оба закона распределения достаточно хорошо описываются нормальной моделью. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0,1$ считать утверждения рекламы справедливыми?

49. Определение концентрации SiO_2 в мартеновском шлаке проводилось весовым (5 опытов) и фотокалориметрическим (6 опытов) методами. Для первого метода получены следующие значения среднего и дисперсии: 20,5 и 0,0529; для второго метода: 21,3 и 0,16. Свидетельствует ли при уровне значимости $\alpha = 0,1$ различие между средними значениями о систематическом расхождении между результатами применения первого и второго методов?

50. Проведен эксперимент для определения, на какой из сигналов человек реагирует быстрее: на свет или на звук. Каждому из 8 испытуемых в случайном порядке поочередно подавались два сигнала: световой и звуковой. Интенсивность сигналов была неизменна в течение всего эксперимента. Увидев или услышав сигнал, испытуемый должен был нажать на кнопку. Время между сигналом и реакцией испытуемого (в миллисекундах) регистрировал прибор. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ считать время реакции на свет и звук одинаковым?

Испытуемый	1	2	3	4	5	6	7	8
Реакция на свет	155	156	178	160	164	169	155	122
Реакция на звук	200	191	197	183	174	176	155	115

Вспомогательные величины: $\sum x_{1i} = 1259; \sum x_{1i}^2 = 200011;$
$\sum x_{2i} = 1391; \sum x_{2i}^2 = 247281; \sum \Delta x_i = -132; \sum (\Delta x_i)^2 = 4338.$

51. Выдвинута гипотеза, согласно которой применение нового типа резца сокращает время обработки деталей некоторого типа. Проведено по 10 измерений времени, затрачиваемого на обработку таких деталей старым и новым резцом. Верна ли гипотеза при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$?

Старый тип резца	58	58	56	38	70	38	42	75	68	67
Новый тип резца	57	55	63	24	67	43	33	68	56	54

Вспомогательные величины: $\sum x_{1i} = 570; \sum x_{1i}^2 = 34154;$
$\sum x_{2i} = 520; \sum x_{2i}^2 = 28922; \sum \Delta x_i = 50; \sum (\Delta x_i)^2 = 732.$

52. Выпускаемый промышленностью поливинилбутираль (ПВБ) может содержать до 2-3% сорбированной на его поверхности остаточной влаги. Количественное определение влаги проводится по ГОСТ 11736-68 методом электрометрического титрования. При большой чувствительности и достаточной точности этот метод продолжителен по времени, так как включает стадию растворения полимера. Исследовалась возможность определения влаги непосредственно в порошкообразных образцах ПВБ методом газовой хроматографии. Даны результаты определения влаги (%) двумя методами для семи образцов. Можно ли использовать более простой метод газовой хроматографии вместо метода электрометрического титрования? (Принять уровень значимости равным $\alpha = 0{,}05$.)

Хроматографическое определение	0,51	1,17	0,28	0,99	0,96	0,85	0,66

Электрометрическое титрование	0,49	1,19	0,27	1	1	0,88	0,65

Вспомогательные величины: $\sum x_{1i} = 5{,}42; \sum x_{1i}^2 = 4{,}7672;$

$\sum x_{2i} = 5{,}48; \sum x_{2i}^2 = 4{,}926; \sum \Delta x_i = -0{,}06; \sum (\Delta x_i)^2 = 0{,}0036.$

53. Одной из важных характеристик качества колумбийской кормовой патоки является число градусов плотности Брикса. Это показатель количества твердого вещества в патоке и основной фактор, рассматриваемый при ее производстве. Поставщиками патоки являются два различных района страны. Приведены 8 выборочных показателей для каждого из районов. Одинаково ли среднее число градусов Брикса для этих двух районов? (Принять уровень значимости равным $\alpha = 0{,}05$.)

1-й район	81,6	81,3	82	79,6	78,4	81,8	80,2	80,7
2-й район	81,8	84,7	82	85,6	79,9	83,2	84,1	85

Вспомогательные величины: $\sum x_{1i} = 645{,}6; \sum x_{1i}^2 = 52110{,}74;$

$\sum x_{2i} = 666{,}3; \sum x_{2i}^2 = 55520{,}75; \sum \Delta x_i = 20{,}7; \sum (\Delta x_i)^2 = 85{,}51.$

В задачах **54** – **62** *требуется:*

а) *построить корреляционное поле (точечную диаграмму);*

б) *найти выборочный коэффициент корреляции и проверить его значимость при уровне значимости* $\alpha = 0{,}05$;

в) *определить, если это целесообразно, коэффициенты эмпирического линейного уравнения регрессии, построить прямую на корреляционном поле.*

54. Исследовать зависимость *y* от *x* по результатам 4 наблюдений:

x	1	2	3	4
y	2	4	5	7

55. Исследовать зависимость *y* от *x* по результатам 5 наблюдений:

x	1	1,5	3	4,5	5
y	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

56. При контроле качества пищевых продуктов для определения концентрации тех или иных веществ находят эмпирическое уравнение зависимости оптической плотности раствора от концентрации. Исследовать эту зависимость по имеющимся данным для определения концентрации фосфора в мясных изделиях:

Концентрация раствора, мг/кг	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10

Оптическая плотность раствора	0,035	0,070	0,150	0,140	0,175

57. Исследовать эмпирическую зависимость времени валки дерева от его диаметра по результатам испытаний, приведенным ниже:

Диаметр дерева, см	24	26	28	30	32	34	36
Время валки, с	49	53	54	56	61	62	65

58. Для разработки методики прогнозирования морозостойкости кирпича керамического на заводе проводился сбор статистической информации. Для изделий определялись: морозостойкость кирпича y, циклы; резервная пористость x_1, %; водопоглощение под вакуумом x_2, %; водопоглощение при атмосферном давлении x_3, %. Опытные данные приведены в таблице:

y	30	30	76	41	60	54	65	40
x_1	19,5	18,5	37,9	25,8	31,7	33,1	34	27,2
x_2	18,4	17,9	18,9	19	18,7	18,2	18,9	19,2
x_3	15,4	15,4	13,7	15,1	15,4	14,2	14,1	15,1

По имеющимся данным определить, если это целесообразно, уравнение эмпирической линейной регрессии для зависимости морозостойкости кирпича y от резервной пористости x_1.

Вспомогательные величины: $\sum x_{1i} = 227,7; \sum x_{1i}^2 = 6820,89;$

$\sum y_i = 396; \sum y_i^2 = 21598; \sum x_{1i} y_i = 12065,6.$

59. По данным задачи **58** определить, если это целесообразно, уравнение эмпирической линейной регрессии для зависимости морозостойкости кирпича y от водопоглощения под вакуумом x_2.

Вспомогательные величины: $\sum x_{2i} = 149,2; \sum x_{2i}^2 = 2783,96; \sum x_{2i} y_i = 7405,7.$

60. По данным задачи **58** определить, если это целесообразно, уравнение эмпирической линейной регрессии для зависимости морозостойкости кирпича y от водопоглощения при атмосферном давлении x_3.

Вспомогательные величины: $\sum x_{3i} = 118,4; \sum x_{3i}^2 = 1755,64; \sum x_{3i} y_i = 5795,6.$

61. Определить, если это целесообразно, уравнение эмпирической линейной регрессии для зависимости y от x по приведенным данным:

x \ y	10	20	30	40
0,4	2	-	4	14
0,6	-	3	6	6
0,8	3	12	-	-

62. Определить, если это целесообразно, уравнение эмпирической линейной регрессии для зависимости y от x по приведенным данным:

x \ y	$[-10; 0)$	$[0; 10)$	$[10; 20)$	$[20; 30)$
$[-2; 0)$	3	-	10	20
$[0; 2)$	22	20	5	-

63. Методом наименьших квадратов определить коэффициенты эмпирического квадратичного уравнения зависимости прочности σ склеивания древесного шпона с поверхностью древесностружечной плиты от давления p запрессовки:

p, МПа	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4
σ, кН/м	3,21	3,88	3,76	3,42	2,84

В задачах **64** – **66** *по приведенным данным требуется:*

а) *построить корреляционное поле и по характеру расположения точек выбрать одну из следующих аппроксимирующих функций:*

1) $y = b_0 + b_1 x$; *2)* $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$; *3)* $y = b_0 + \dfrac{b_1}{x}$; *4)* $y = b_0 + b_1 \ln x$;

5) $y = a\,\mathrm{e}^{bx}$; *6)* $y = ax^b$; *7)* $y = \dfrac{1}{b_0 + b_1 x}$;

б) *сделать замену переменных, если это необходимо для получения линейной модели; построить корреляционное полк в новой системе координат, вычислить выборочный коэффициент корреляции и проверить его значимость при уровне значимости* $\alpha = 0{,}05$;

в) *оценить коэффициенты линейного (в случае 2) – квадратичного) уравнения регрессии по методу наименьших квадратов, построить прямую (в случае 2) - параболу) на графике;*

г) *получить уравнение регрессии в натуральных переменных.*

64.

x_i	0,2	0,6	1,7	3,2	6,0	8,2	10,0
y_i	23,0	9,0	4,2	3,0	2,4	2,1	2,1

65.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1,4	8,4	12,6	14,1	12,5	8,4	1,4

66.

x_i	$-2,5$	$-1,2$	0,0	1,0	1,5	2,0	2,5
y_i	0,02	0,1	0,8	3,9	8,8	19,0	44,0

Ответы. **1. а)** 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4;

б)

x_i^*	1	2	3	4
n_i	9	7	2	2

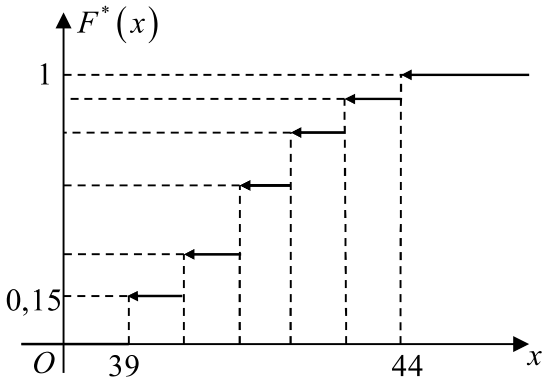
г) $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ 0{,}45, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}8, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0{,}9, & \text{если } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{если } x > 4; \end{cases}$ **д)** $\overline{x} = 1{,}85$; $s^2 \approx 0{,}976$.

2. а) 39, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 44;

б)

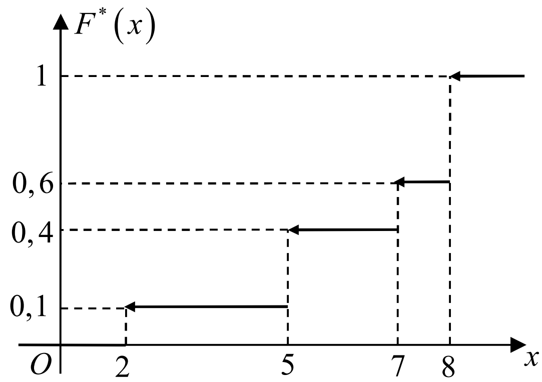
x_i^*	39	40	41	42	43	44
n_i	3	3	6	4	3	1

г) $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 39, \\ 0{,}15, & \text{если } 39 < x \le 40, \\ 0{,}3, & \text{если } 40 < x \le 41, \\ 0{,}6, & \text{если } 41 < x \le 42, \\ 0{,}8, & \text{если } 42 < x \le 43, \\ 0{,}95, & \text{если } 43 < x \le 44, \\ 1, & \text{если } x > 44; \end{cases}$



д) $\overline{x} = 41{,}2$; $s^2 \approx 2{,}063$.

3. б) $F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ 0{,}1, & \text{если } 2 < x \le 5, \\ 0{,}4, & \text{если } 5 < x \le 7, \\ 0{,}6, & \text{если } 7 < x \le 8, \\ 1, & \text{если } x > 8; \end{cases}$



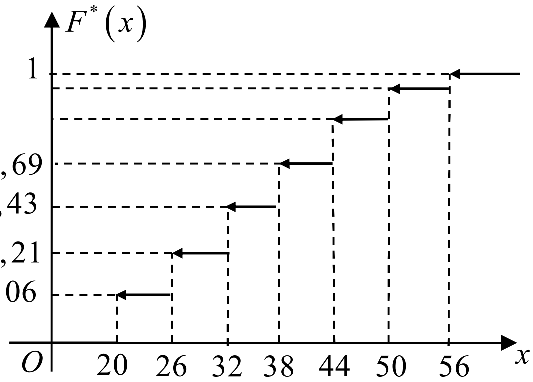
в) $\overline{x}=6,3;$ $s^2\approx 4,01.$ **4. б)** $F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ 0,04, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0,1, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0,26, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 0,52, & \text{если } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{если } x>5;\end{cases}$ **в)** $\overline{x}=4,08;$

$s^2\approx 1,246.$ **5. б)** $F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 0,13, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0,42, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0,68, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0,85, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 0,95, & \text{если } 4<x\le 5,\\ 0,98, & \text{если } 5<x\le 6,\\ 1, & \text{если } x>6;\end{cases}$ **в)** $\overline{x}\approx 1,983;$ $s^2\approx 1,983.$

6. $\overline{x}=42;$ $s^2=5,5.$ **7.** $\overline{v}=33$ м/с; $s^2\approx 18,8$ м^2/с^2. **8.** $\overline{x}=2809$ м; $s^2=1508,5$ м^2.

9. б) $F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 12,\\ 0,053, & \text{если } 12<x\le 14,\\ 0,333, & \text{если } 14<x\le 16,\\ 0,673, & \text{если } 16<x\le 18,\\ 0,92, & \text{если } 18<x\le 20,\\ 1, & \text{если } x>20;\end{cases}$ **в)** $\overline{x}=16,04;$ $s^2\approx 4,27.$

10. б) $F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 20,\\ 0,06 & \text{если } 20<x\le 26,\\ 0,21, & \text{если } 26<x\le 32,\\ 0,43, & \text{если } 32<x\le 38,\\ 0,69, & \text{если } 38<x\le 44,\\ 0,85, & \text{если } 44<x\le 50,\\ 0,95, & \text{если } 50<x\le 56,\\ 1, & \text{если } x>56;\end{cases}$



в) $\overline{x}$ = 36,86; s^2 = 84,87. **11. б)** $F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,4,\\ 0,08 & \text{если } 0,4<x\le 0,8,\\ 0,4, & \text{если } 0,8<x\le 1,2,\\ 0,8, & \text{если } 1,2<x\le 1,6,\\ 0,96, & \text{если } 1,6<x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2;\end{cases}$

в) $\overline{x}$ = 1,104; $s^2\approx 0,146$. **12.** 0,84. **13. а)** $\overline{x}=0,3;\ D_в=0,41;$ **б)** $\overline{x}=0,3;\ s^2\approx 0,424$. **14.** $\overline{x}\approx 7,333;\ s^2\approx 1,528$. **15. а)** $\overline{x}$ увеличится на a; $D_в$ и s^2 не изменятся; **б)** $\overline{x}$ умножится на a; $D_в$ и s^2 умножатся на a^2.

16. а) (4,16; 6,64); **б)** (15,85; 17,75). **17. а)** (18,57; 21,67); **б)** (11,512; 16,888). **18.** (2210,8 м; 2289,2 м). **19. а)** (1,158; 1,282); **б)** (1,138; 1,302). **20.** $n\ge 196$. **21.** $n\ge 5$. **22.** $n\ge 4$. **23. а)** (2,014; 2,024); **б)** 11. **24. а)** $\overline{x}\approx 4,783\cdot 10^{-10}$; $(4,761\cdot 10^{-10};\ 4,805\cdot 10^{-10})$; **б)** 24. **25.** $22,948<a<23,374$; $0,295<\sigma<0,619$. **26.** (0,62 г; 1,12 г). **27.** s = 4,58; (3,3; 7,8).

28. $\chi^2_{расч}\approx 0,12;\ \chi^2_{0,01;\,1}=6,6$. **29.** $\chi^2_{расч}=4,75;\ \chi^2_{0,05;\,5}\approx 10,99$. **30.** $\overline{x}=22,1;\ s^2\approx 1,53;$ $\chi^2_{расч}\approx 0,8491;\ \chi^2_{0,05;\,3}=7,8$. **31.** $\chi^2_{расч}\approx 2,1361;\ \chi^2_{0,05;\,2}=5,9915$. **32.** $\chi^2_{расч}\approx 0,5675;\ \chi^2_{0,05;\,1}=3,8415$. **33.** $\chi^2_{расч}\approx 24,9;\ \chi^2_{0,05;\,9}=16,92$. **34.** $n=757;\ \overline{x}=0,6;$ $\chi^2_{расч}\approx 3,316;\ \chi^2_{0,05;\,2}=5,99$. **35.** $n=576;\ \overline{x}\approx 0,93;$ $\chi^2_{расч}\approx 1,02;\ \chi^2_{0,05;\,3}=7,8$.

36. $H_0: a=12$ ($\sigma^2=0,25$ известна); $\overline{H}: a<12$. $u_{расч}=3,6;$ $u_{табл}=u_{0,1}=1,645$. Следует признать, что станок изготавливает детали уменьшенного размера.

37. $H_0: a=40$ (σ^2 не известна); $\overline{H}: a>40$. $t_{расч}=2,6;\ t_{табл}=t_{0,1;\,15}\approx 1,75$. Гипотеза о соответствии действительного среднего времени норме должна быть отвергнута.

38. $H_0: a=2,11$ (σ^2 не известна); $\overline{H}: a\ne 2,11$. Учитывая, что дан сгруппированный статистический ряд, вычисляем $n=\sum n_i=30;$ $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum x_i n_i=2,1;$ $s^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 n_i-n\overline{x}^2\right)=\frac{1}{29}(132,31-30\cdot 2,1^2)=0,000345.$ $t_{расч}=2,95;\ t_{табл}=t_{0,05;\,29}\approx t_{0,05;\,30}=2,04$. Гипотеза о соответствии продукции номиналу должна быть отвергнута.

39. $H_0: a=24$ (σ^2 не известна); $\overline{H}: a\ne 24$. $t_{расч}=1,37;$ $t_{табл}=t_{0,05;\,7}\approx\frac{1}{8-5}(2t_{0,05;\,8}+t_{0,05;\,5})=2,4$. Нет оснований утверждать, что полученные результаты несовместимы с предполагаемым значением средней скорости полимеризации.

40. $H_0 : a = 20$ (σ^2 не известна); $\overline{H} : a \neq 20$. $t_{\text{расч}} = 3{,}97$; $t_{\text{табл}} = t_{0{,}05;\,39} \approx 2{,}02$. Гипотезу о равенстве отклонений рассматриваемого размера 20 мк следует отвергнуть.

41. $H_0 : \sigma^2 = 0{,}0004$; $\overline{H} : \sigma^2 > 0{,}0004$. $\chi^2_{\text{расч}} = 37{,}24$; $\chi^2_{\text{табл}} = \chi^2_{0{,}05;\,19} \approx 31{,}41$. Точность станка не соответствует предъявленным требованиям.

42. $H_0 : \sigma^2 = 3$; $\overline{H} : \sigma^2 \neq 3$. $\chi^2_{\text{расч}} = 10{,}77$; $\chi^2_{0{,}975;\,8} = 2{,}1797$; $\chi^2_{0{,}025;\,8} = 17{,}535$. Существенного отличия дисперсии нет.

43. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\overline{H} : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$. $F_{\text{расч}} = 4{,}083$; $F_{\text{табл}} = F_{0{,}05;\,6;\,4} = 9{,}2$. Нет оснований считать дисперсии неоднородными. Следовательно, усовершенствование неэффективно.

44. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\overline{H} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. $F_{\text{расч}} = 2{,}05$; $F_{\text{табл}} = F_{0{,}025;\,9;\,7} \approx \dfrac{1}{4}(5{,}6 + 5{,}46 + 4{,}43 + 4{,}3) = 4{,}95$. Нет оснований считать, что точность методов различна.

45. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\overline{H} : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. $F_{\text{расч}} = 1{,}95$; $F_{\text{табл}} = F_{0{,}05;\,24;\,29} \approx 1{,}97$. Нет оснований считать, что точность второго станка выше точности первого.

46. $H_0 : \sigma_i^2 = \text{const}$; $\overline{H} : \sigma_i^2 \neq \text{const}$. $F_{\text{расч}} = 2{,}55$; $F_{\text{табл}} = F_{0{,}025;\,16;\,16} \approx 2{,}86$. Нет оснований считать дисперсии неоднородными; разладка машины не наблюдается.

47. $H_0 : a_1 = a_2$; $\overline{H} : a_1 \neq a_2$. Вспомогательная гипотеза $H_0' : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\overline{H'} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. $F_{\text{расч}} = 1{,}14$; $F_{\text{табл}} = F_{0{,}025;\,59;\,79} \approx 1{,}6$ (нет оснований считать дисперсии неоднородными). $t_{\text{расч}} = 2{,}27$; $t_{\text{табл}} = t_{0{,}05;\,138} \approx 1{,}976$. Гипотеза о том, что обе технологии дают одинаковые результаты, отвергается.

48. $H_0 : a_1 = a_2$; $\overline{H} : a_1 > a_2$. Вспомогательная гипотеза $H_0' : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\overline{H'} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. $F_{\text{расч}} = 1{,}22$; $F_{\text{табл}} = F_{0{,}025;\,29;\,31} \approx 2{,}175$ (нет оснований считать дисперсии неоднородными). $t_{\text{расч}} = 1{,}62$; $t_{\text{табл}} = t_{0{,}1;\,60} = 1{,}67$. Нет оснований считать, что среднемесячные платежи обладателей карт «American Express» статистически значимо превышают среднемесячные платежи обладателей карт «Visa».

49. $H_0 : a_1 = a_2$; $\overline{H} : a_1 \neq a_2$. Вспомогательная гипотеза $H_0' : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\overline{H'} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. $F_{\text{расч}} = 3{,}02$; $F_{\text{табл}} = F_{0{,}05;\,5;\,4} \approx 6{,}275$ (нет оснований считать дисперсии неоднородными). $t_{\text{расч}} = 3{,}94$; $t_{\text{табл}} = t_{0{,}1;\,9} \approx 1{,}835$. Следует признать, что между результатами применения двух методов имеются систематические расхождения.

50. $H_0: a_{\Delta x} = 0$; $\overline{H}: a_{\Delta x} \neq 0$. $t_{\text{расч}} = 2,66$; $t_{\text{табл}} = t_{0,05;\,7} \approx 2,4$. Время реакции на свет и звук следует признать различным.

51. $H_0: a_1 = a_2$; $\overline{H}: a_1 > a_2$. Вспомогательная гипотеза $H_0': \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\overline{H'}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. $F_{\text{расч}} = 1,13$; $F_{\text{табл}} = F_{0,025;\,9;\,9} \approx 4,065$ (нет оснований считать дисперсии неоднородными). $t_{\text{расч}} = 0,8$; $t_{\text{табл}} = t_{0,1;\,18} \approx 1,73$. Нет оснований считать, что применение нового типа резца сокращает время обработки деталей.

52. $H_0: a_{\Delta x} = 0$; $\overline{H}: a_{\Delta x} \neq 0$. $t_{\text{расч}} = 7$; $t_{\text{табл}} = t_{0,05;\,6} \approx 2,48$. Методы дают разные результаты, использовать более простой метод нельзя.

53. $H_0: a_1 = a_2$; $\overline{H}: a_1 \neq a_2$. Вспомогательная гипотеза $H_0': \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\overline{H'}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. $F_{\text{расч}} = 2,43$; $F_{\text{табл}} = F_{0,025;\,7;\,7} \approx 5,13$ (нет оснований считать дисперсии неоднородными). $t_{\text{расч}} = 3,19$; $t_{\text{табл}} = t_{0,05;\,14} \approx 2,15$. Следует признать, что среднее число градусов Брикса для двух районов различно.

54. б) $r \approx 0,992$; значимо отличается от 0; **в)** $\hat{y} = 0,5 + 1,6x$.

55. б) $r \approx 0,912$; значимо отличается от 0; **в)** $\hat{y} = 1,024 + 0,202x$.

56. б) $r \approx 0,94$; значимо отличается от 0; **в)** $\hat{y} = 0,009 + 1,75x$.

57. б) $r \approx 0,988$; значимо отличается от 0; **в)** $\hat{y} = 18,036 + 1,304x$.

58. б) $r \approx 0,964$; значимо отличается от 0; **в)** $\hat{y} = -\,17,01 + 2,337x_1$.

59. б) $r \approx 0,387$; $t_{\text{расч}} = 1,03 < t_{\text{табл}} = t_{0,05;\,6} \approx 2,48$, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ коэффициент корреляции следует признать незначимым, определение линейного уравнения зависимости величины y от x_2 нецелесообразно, прогнозирование морозостойкости изделий по водопоглощению под вакуумом невозможно.

60. б) $r \approx -0,8$; значимо отличается от 0; **в)** $\hat{y} = 340,15 - 19,64x_3$.

61. б) $r \approx -0,657$; значимо отличается от 0; **в)** $\hat{y} = 52,96 - 41,3x$.

62. б) $r \approx -0,754$; значимо отличается от 0; **в)** $\hat{y} = 10,31 - 8,93x$.

63. $\hat{\sigma} = 3,39 + 1,42p - 1,28p^2$.

64. $\hat{y} = 1,684 + \dfrac{4,275}{x}$.

65. $\hat{y} = -\,8,4 + 11,206x - 1,4012x^2$.

65. $\hat{y} = 0,8263\mathrm{e}^{1,5642x}$.