ex 32

Donnerstag, 10. November 2022 17:26

On target: N_{on} in t_{on}

Off target: N_{off} in t_{off}

$\alpha = \frac{t_{on}}{t_{off}}$; $b = \langle N_{off} \rangle$; s photons from source

a) $\langle N_{on} \rangle = \frac{t_{on}}{t_{off}} \langle N_{off} \rangle + s = \underline{\alpha b + s}$

wegen unterschiedlicher Messzeit

b) Da es sich um Zählraten handelt, sind N_{on} und N_{off} Poisson-Verteilt.

$$N_{off}(k) = \frac{s^k}{k!} e^{-s}$$

$$N_{on}(k) = \frac{(\alpha b + s)^k}{k!} e^{-(\alpha b + s)}$$

c)
$$\begin{aligned} h(b,s) &= N_{off}(k_1) \cdot N_{on}(k_2) \\ &= \frac{s^{k_1}}{k_1!} e^{-s} \cdot \frac{(\alpha b+s)^{k_2}}{k_2!} e^{-(\alpha b+s)} \\ &= \underline{\frac{s^{k_1}(\alpha b+s)^{k_2}}{k_1! k_2!} \exp(-\alpha b - 2s)} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -\ln(h(b,s)) &= -\ln\left(s^{k_1}(\alpha b+s)^{k_2}\right) - \ln(k_1! k_2!) + \alpha b + 2s \\ &= -k_1 \ln(s) - k_2 \ln(\alpha b+s) - \ln(k_1! k_2!) + \alpha b + 2s := \varphi(b,s) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = -k_2 \frac{\alpha}{\alpha b+s} + \alpha \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{k_2}{\alpha b+s} \Leftrightarrow \alpha b + s = k_2 \Leftrightarrow b = \frac{k_2 - s}{\alpha}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -k_1 \frac{1}{s} - k_2 \frac{1}{s} + 2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{s}(k_1 + k_2) \Leftrightarrow s = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

k_1 und k_2 sind die gemessenen Zählraten für On und Off Target.

$\rightarrow k_1 = N_{on}$, $k_2 = N_{off}$

$$\boxed{\Rightarrow \hat{s} = \frac{N_{on} + N_{off}}{2} \ ; \ \hat{b} = \frac{\frac{1}{2} N_{off} - N_{on}}{\alpha}}$$

e)
$$G_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2} = \frac{\partial}{\partial b}\left(-N_{off} \frac{\alpha}{\alpha b+s} + \alpha\right) = N_{off} \frac{\alpha^2}{\underbrace{(\alpha b+s)^2}_{\langle N_{on} \rangle^2}}$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(-N_{off} \frac{\alpha}{\alpha b+s} + \alpha\right) = N_{off} \frac{\alpha}{\underbrace{(\alpha b+s)^2}_{\langle N_o \rangle^2}}$$

$$G_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{1}{s}(N_{on} + N_{off}) + 2\right) = \frac{N_{on} + N_{off}}{s^2}$$

$$\Rightarrow cov = G^{-1} = \frac{1}{\det(G)} \begin{pmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{pmatrix}$$

$$\det(G) = G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21} = (N_{on} + N_{off})\left(\frac{\alpha^2}{s^2 \langle N_{on} \rangle^2}\right) - N_{off}^2 \frac{\alpha^2}{\langle N_{on} \rangle^4} := \gamma^{-1}$$

$$\boxed{\text{Eingesetzt: } cov = \gamma \begin{pmatrix} \frac{N_{on} + N_{off}}{2} & \frac{\alpha^2 N_{off}}{\langle N_{on} \rangle} \\ \frac{\alpha^2 N_{off}}{\langle N_{on} \rangle} & \frac{\alpha}{\langle N_{on} \rangle} \end{pmatrix}}$$

Die Kovarianzmatrix gibt Fehler zu den Werten an, die mit der Likelihoodfunktion geschätzt wurden.

Die Fehler sind nicht exakt, da die Formel zur Berechnung mit einer Reihenentwicklung hergeleitet wurde und Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden.

ALTE RECHNUNG:

$$\begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/\alpha & \frac{1}{2\alpha} \end{pmatrix}}_{:= B} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$cov(\hat{b}, \hat{s}) = B \begin{pmatrix} \sigma_{N_{on}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{N_{off}}^2 \end{pmatrix} B^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/\alpha & \frac{1}{2\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_1^2 & \frac{1}{2}\sigma_2^2 \\ -\frac{1}{\alpha}\sigma_1^2 & \frac{1}{2\alpha}\sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) & \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2\right) \\ \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2\right) & \frac{1}{\alpha^2}\left(\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) & \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\sigma_2^2}{2} - \sigma_1^2\right) \\ \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\sigma_2^2}{2} - \sigma_1^2\right) & \frac{1}{\alpha^2}\left(\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2\right) \end{pmatrix}$$

σ_1 und σ_2 sind die Fehler von k_1 und k_2 bzw. N_{on} und N_{off}