ex 32

Donnerstag, 10. November 2022 17:26

On target: N_{on} in t_{on}

Off target: N_{off} in t_{off}

$\alpha = \frac{t_{on}}{t_{off}}$; $b = \langle N_{off} \rangle$; s photons from source

a) $\langle N_{on} \rangle = \frac{t_{on}}{t_{off}} \langle N_{off} \rangle + s = \underline{\alpha b + s}$

wegen unterschiedlicher Messzeit

b) Da es sich um Zählraten handelt, sind N_{on} und N_{off} Poisson-Verteilt. allg: $P(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$P_{off} = \frac{b^{N_{off}}}{N_{off}!} e^{-b}$$

$$P_{on} = \frac{(\alpha b + s)^{N_{on}}}{N_{on}!} e^{-(\alpha b + s)}$$

c)
$$\begin{aligned}
L(b,s) &= P_{off} \cdot P_{on} \\
&= \frac{b^{N_{off}}}{N_{off}!} e^{-b} \cdot \frac{(\alpha b + s)^{N_{on}}}{N_{on}!} e^{-(\alpha b + s)} \\
&= \underline{\frac{s^{N_{off}} (\alpha b + s)^{N_{on}}}{N_{off}! N_{on}!} \exp(-b - (\alpha b + s))}
\end{aligned}$$

d) $-\ln(L(b,s)) = -N_{off} \ln(b) - N_{on} \ln(\alpha b + s) + \ln(N_{off}!) + \ln(N_{off}!) + (1+\alpha) b + s := \varphi(b,s)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial b} &\overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \text{Gleichungen für } s \text{ und } b$$

$$\boxed{\Rightarrow \hat{s} = N_{on} - \alpha N_{off} \; ; \; \hat{b} = N_{off}}$$

e)
$$G_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2} = \frac{1}{N_{off}} + \frac{\alpha^2}{N_{on}}$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial s} = -\frac{\alpha}{N_{on}}$$

$$G_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 s} = \frac{1}{N_0}$$

$$\Rightarrow cov = G^{-1} = \frac{1}{\det(G)} \begin{pmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{pmatrix}$$

$$\det(G) = G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21} = \frac{1}{N_{on} N_{off}}$$

$$\boxed{\text{Eingesetzt: } cov = \begin{pmatrix} N_{off} & -\alpha N_{on} \\ -\alpha N_{off} & N_{on} + \alpha^2 N_{off} \end{pmatrix}}$$

Die Kovarianzmatrix gibt Fehler zu den Werten an, die mit der Likelihoodfunktion geschätzt wurden.

Die Fehler sind nicht exakt, da die Formel zur Berechnung mit einer Reihenentwicklung hergeleitet wurde und Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden.