Ex 9

Exercise 9 *Confidence Intervals Short Questions* **4 p.**

- Given is a confidence interval $[x_1, x_2]$ of a parameter x at a confidence level α. What is the frequentist, what is the Bayesian interpretation of this interval?

- Frequentist interpretation: Verschiedene Messungen führen zu verschiedenen Intervallgrenzen $[x_1, x_2]$, diese Grenzen hängen also von x ab. Nur ein Teil α von diesen Intervallen enthält den Wert x_{true}. Hierbei ist α nicht die W-keit dafür, dass x_{true} in dem Intervall liegt.

- Bayesian interpretation: Hier ist α die W-keit dafür, dass x_{true} im Intervall liegt.

- What role does the prior in Bayesian statistics play?

- Durch prior wird bereits vorhandenes Wissen in die Verteilung miteingebracht, verändert also die posteriori:

$$\text{posteriori} = \text{likelihood} \cdot \frac{\text{prior}}{\text{evidence}}$$

- What freedom is there in choosing these intervals?

- Frequentist: Intervalle sind zusammenhängend, symmetrisch um den Erwartungswert oder das kürzeste oder das zentrale Intervall, wo rechts und links der gleiche Teil $1-\frac{\alpha}{2}$ liegt.

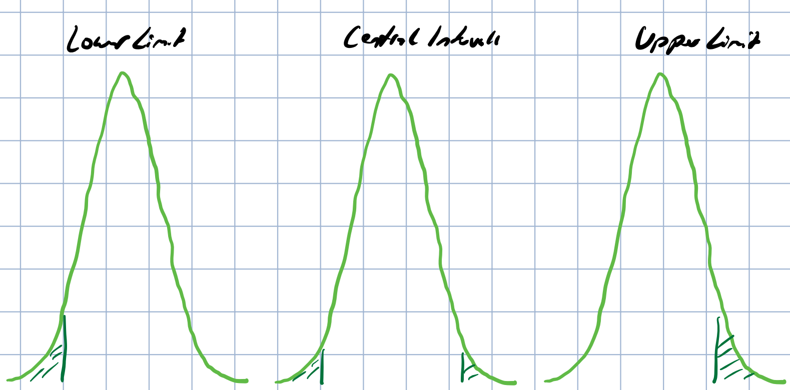
- Bayes: Intervalle können beliebig gewählt werden, auch "Löcher" sind zulässig, solange ein Teil α der Werte enthalten ist.

- What happens in the special case of symmetrical PDF?

- Frequentist: Intervall ist eindeutig und wieder symmetrisch, da das kürzeste, das symmetrische und das zentrale Intervall dieselben sind.

- What is the difference between intervals and upper/lower limits?

- lower/upper Limit nur eine Grenze, Intervall ist Intervall



In [1]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Ex 10

Given is the likelihood function for a measured value x at a given parameter a $L(X;a)$=1 1 mit a>0. (1) π 1+(x−a)2

a)

Using the Neyman construction, determine the central frequentist 90 % confidence interval for a when a value x = 10 was measured.

Likelihood funktion integerieren:

$$\int L(x,a) = \frac{1}{\pi}\arctan(x-a)$$

Symmetrisches Intervall bestimmen. Untere Grenze, indem integrieren bis x_{unten}, wo integral 0,05 ist:

$$\int_{-\infty}^{x_{unten}} L(x,a) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi}\arctan(x-a)|_{-\infty}^{unten} = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{\pi}(\arctan(x_{unten}-a) - \arctan(u-a)) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi}(\arctan(x_{unten}-a) - \frac{-\pi}{2}) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \arctan(x_{unten}-a) = 0.05\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{unten} = \tan(\frac{-9}{20}\pi) + a$$

$$\Rightarrow x_{unten} \approx -6.31 + a$$

Obere Grenze:

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\arctan(x-a)|_{x_{oben}}^{\infty} = 0.05$$

$$\Leftrightarrow x_{oben} = \tan(\frac{9}{20}) + a$$

$$\Rightarrow x_{oben} \approx 6.31 + a$$

In [2]:
```python
x = np.tan(9/20 * np.pi)
x
```

Out[2]:
```
6.313751514675041
```

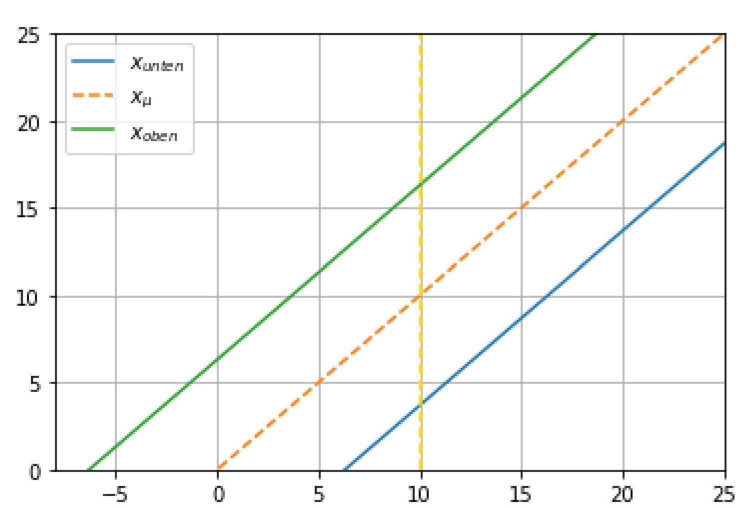
In [3]:
```python
def L(a,x=10):
    return 1/np.pi * 1/(1+(x-a)**2)

a = np.linspace(-10,25,1000)

fig, ax = plt.subplots(1,1)
ax.plot(a,-6.31+a, label = "$x_{unten}$")
ax.plot(a,a, ls = "dashed", label = "$x_{\mu}$")
ax.plot(a,6.31+a , label = "$x_{oben}$")
ax.set_xlim(-8,25)
ax.set_ylim(0,25)
plt.grid()
plt.legend()

ax.vlines(10, 0,25, ls = "dashed", color = "gold")
```

Out[3]:
```
<matplotlib.collections.LineCollection at 0x7f22e116f970>
```



Haben nicht verstanden was man machen muss, ist wahrscheinlich falsch der plot.