Exercise 7

Mittwoch, 16. November 2022 17:13

a)

Likelihoodfunction:

$L(\hat{b} \mid x_i) = \prod_i f(x_i ; \hat{b}) = \prod_i \frac{1}{\hat{b}} = \frac{1}{\hat{b}^n}$

$\frac{\partial L}{\partial \hat{b}} = -n \frac{1}{\hat{b}^{n-1}} < 0 \quad \forall \; \hat{b} \in \mathbb{R}$

↳ Ableitung < 0 ⇒ L ist streng monoton fallend

· Da alle gemessenen x_i eine W-keit $\neq 0$ haben müssen

maximiert

$\boxed{\hat{b} = \max\{x_i\}}$

die Likelihood-Funktion

b)

Da die Wahrscheinlichkeit $P(x_i \in [0, b]) = 1$ ist folgt, dass $\hat{b} < b$ gilt.

→ Der Estimator ist biased.

„DeR SchÄTzeR ist eRwArTuNgsUnTrEu"

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x_i unter einer Schranke $\tilde{b} \geq b$ $(\tilde{b} \leq b)$ gemessen wird, ist

$P(x_i \leq \tilde{b}) = \int_0^{\tilde{b}} \frac{1}{b} \, dx = \frac{\tilde{b}}{b}$

Da alle Messwerte unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit $\hat{b} = \max(\{x_i\}) \leq \tilde{b}$ zu messen:

$P(\hat{b} \leq \tilde{b}) = \prod_i P(x_i \leq \tilde{b}) = \prod_i \frac{\tilde{b}}{b} = \left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^n$ (CDF)

Durch Ableiten nach $\tilde{b}$ folgt die PDF:

$P(\tilde{b}) = n \frac{\tilde{b}^{n-1}}{b^n}$

$\Rightarrow E(\hat{b}) = \int_0^b \tilde{b} \cdot P(\tilde{b}) \, d\tilde{b} = \int_0^b n \cdot \frac{\tilde{b}^n}{b^n} \, d\tilde{b} = \frac{n}{n+1} \left[\frac{\tilde{b}^{n+1}}{b} \right]_{\tilde{b}=0}^{\tilde{b}=b}$

$= \frac{n}{n+1} b$ (Dies zeigt auch $B(\hat{b}) = \langle \hat{b} \rangle - b = b \cdot \left(\frac{n}{n+1} - 1\right) > 0$ ⇒ biased)

⇒ Die Korrektur ist der Faktor $\frac{n+1}{n}$

⇒ $\underline{\hat{b} = \frac{n+1}{n} \cdot \max(\{x_i\})}$