КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Курсова Робота

Факторизація графів

Автор:
Тарас Цугрій

Науковий керівник:
Професор Сергій Лук'янович Кривий

24 травня 2009 р.

Зміст

1 Основні поняття теорії графів

Теорія графів є однією з центральних тем дискретної математики, яка дивовижним чином поєднує практику з теорією, наочність та заплутаність методів, історію і сучасність. Її застосування особливо помітне в теоріях інформатики та комунікацій, плануванні доріг та бізнес процесів тощо. Будучи по суті звичайними множинами із визначеними бінарними відношеннями, графи дозволяють моделювати процеси будь-якої складності. Разом із простотою графи є надзвичайно зручні для візуального представлення, а тому часто дозволяють людині візуально розв'язавши задачу, формалізувати отриманий результат у зручному для подальшої обробки мові.

1.1 Графи

Граф (ненаправлений) $G = (V, E)$ складається із скінченної множини вершин V і множини $E \subseteq \binom{V}{2}$ пар $\{u, v\}$, $u \neq v$, які носять назву ребра. Зазвичай ребро $\{u, v\}$ позначають просто як $uv \in E$.

Для графа $G = (V, E), u, v \in V$ використовують наступну термінологію:

- Якщо $uv \in E$, то кажуть, що u та v суміжні
- Ребро $uu \in E$ називається петлею
- Ребра, що з'єднують одну й ту саму пару вершин, називають кратними (паралельними) ребрами
- Якщо $u \in V, k \in E$ і $u \in k$, то u і k називають інцидентними, а u - кінцем k
- Ребра $k, l \in E$ називають інцидентними, якщо вони мають спільний кінець, тобто $k \cap l \neq \emptyset$
- Множину сусідів $u \in V$ позначають $N(u)$
- Кількість сусідів вершини u позначають $deg(u) = |N(u)|$ і називають її порядком
- Вершина u, для якої виконується $deg(u) = 0$ ізольована
- Вершини та ребра графа також називають його елементами
- Число вершин $|V|$ - порядок графа
- Число ребер $|E|$ - розмір графа

Додатково вирізняють такі важливі графи:

1. $|V| = n$ $E = \binom{V}{2}$ (всі вершини з'єднані ребрами) - повний граф $K_n = (V, E)$
2. Граф $G = (L + R, E)$ називають дводольним, якщо V складається з двох множин L і R, що не перетинаються, тобто $L \cap R = \emptyset$ і кожне ребро складається з вершин, одна з яких належить L, а друга - R. Якщо ж між усіма вершинами L і R існують всі ребра, то такий граф називають повним дводольним $K_{L,R}$, або $K_{m,n}$, якщо $|L| = m, |R| = n$.
3. Узагальненням повного дводольного є повний k-дольний граф $K_{n_1,\ldots,n_k}$ у якого:
   - $V = V_1 + \ldots + V_k$ та $V_i \cap V_j = \emptyset$ для всіх $i \neq j$
   - $|E_i| = n_i(i = 1, \ldots, k)$
   - $E = \{uv : xu \in E_i, v \in E_j, i \neq j\}$
4. Гіперкубом Q_n називається граф, вершинами якого є всі послідовності 0,1 довжини n, тобто $|E| = 2^n$. Між усіма вершинами u та v існують ребра, якщо послідовності 0,1 цих вершин відрізняються тільки у одному місці.

Додаткові означення:

- Шляхом P_n в графі є послідовність вершин, що не повторяються $u_1, u_2, \dots, u_n$, таких, що $u_i u_{i+1} \in E, i = \overline{1, \dots, n-1}$.
- Циклом C_n графу є шлях P_n у якого $u_n u_1 \in E$.
- Граф $H(V', E')$, у якого $V' \subseteq V$ та $E' \subseteq E$ називається підграфом графа $G(V, E)$.
- Якщо $\exists u \exists v : |\{u, v\}| > 1, u, v \in V$, тобто між двома вершинами існує більше одного ребра, то такий граф називають мультиграфом.
- Якщо мультиграф має петлі, тобто $\exists u \in V : uu \in E$, то такий граф ще називають псевдографом.
- Граф називають r-регулярним, якщо для всіх його вершин $u \in V$ виконується $deg(u) = r$
- Графи $G = (V, E)$ та $G' = (V', E')$ називаються ізоморфними $G \cong G'$, якщо існує бієкція $\varphi : E \to E'$ така, що виконується $uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in K'$.

Важливі властивості графів:

- Нехай $G = (V, E)$ граф, тоді вірне твердження

$$\sum_{u \in V} deg(u) = 2|K|$$

- Число вершин, у яких непарний порядок, парне

Література

[1] George D. Greenwade. The Comprehensive Tex Archive Network (CTAN). *TUGBoat*, 14(3):342–351, 1993.