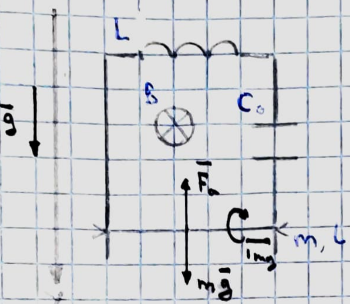
Цуканиев Т.А. ИУ5-31Б Вариант №21 (3)

Задача №31 Защита

По 2-ум гладким медным шинам, установленным вертикально в однородном магнитном поле B, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массы m, которая замыкает эл. цепь, приведённую на рис 1. Расстояние между шинами l. Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти закон движения перемычки Y(t) при условии, что начальная скорость, ток через индуктивность и заряд на конденсаторе равны 0, Y(0)=Y₀



Дано:
$L_0, C_0, m, L, B, Y(0) = Y_0$

Найти:
$y(t)$ - ?

Решение:

1) По II з. Ньютона: $m\vec a = m\vec g + \vec F_A$

O_y: $ma = mg - F_A$

$m\ddot y = mg - BLI \quad |:m$

$\ddot y = g - \frac{BLI}{m} \quad (1)$

2) $\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_{инд} &= \left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| \\ d\Phi &= BL\,dy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{E}_{инд} = \left|-\frac{BL\,dy}{dt}\right| = BL\dot y$

$\mathcal{E}_{инд} = U_C + U_L \Rightarrow \left\{ \mathcal{E}_{инд} = BL\dot y,\ U_C = \frac{q}{C_0},\ U_L = L_0\frac{dI}{dt} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow BL\dot y = \frac{q}{C_0} + L_0\frac{dI}{dt} \Rightarrow BL\dot y = \frac{q}{C_0} + L_0\dot I \quad (2)$

3) Из (1) и (2)

$$\begin{cases} \ddot y = g - \frac{BLI}{m} & |\cdot BL \\ BL\dot y = \frac{q}{C_0} + L_0\dot I & |\cdot dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BL\ddot y = BLg - \frac{B^2L^2I}{m} \\ BL\ddot y = \frac{dq}{C_0\,dt} + L_0\ddot I \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow BLg - \frac{B^2L^2I}{m} = \frac{I}{C_0} + L_0\ddot I \quad |:L_0$

$\ddot I + \frac{I}{L_0C_0} + \frac{B^2L^2I}{mL_0} = \frac{BLg}{L_0}$

$\ddot I + I\left(\frac{1}{L_0C_0} + \frac{B^2L^2}{mL_0}\right) = \frac{BLg}{L_0}$

4) Пусть $a = \frac{1}{L_0C_0} + \frac{B^2L^2}{mL_0} = \frac{m + B^2L^2C_0}{mL_0C_0}$ $\quad b = \frac{BLg}{L_0}$

Тогда $\ddot I + aI = b$ — ЛНДУ 2-го порядка:

Характеристическое ур-е:

$\lambda^2 + a = 0$

$\lambda^2 = -a$

$\lambda = \pm\sqrt{a}\, i$

$I_{оо} = e^0 (C_1 \cos(t\sqrt{a}) + C_2 \sin(t\sqrt{a})) =$
$= C_1 \cos(t\sqrt{a}) + C_2 \sin(t\sqrt{a})$

$I_{чн} = bt$

$I_{он} = I_{оо} + I_{чн} \Rightarrow I_{он} = C_1 \cos(t\sqrt{a}) + C_2 \sin(t\sqrt{a}) + bt$

Н.у.: $I(0) = 0 \quad q(0) = 0$

$\dot{I} = -C_1 \sin(t\sqrt{a})\sqrt{a} + C_2 \cos(t\sqrt{a})\sqrt{a} + b$

$0 = -C_1 \sin(0)\sqrt{a} + C_2 \cos(0)\sqrt{a} + b$

$0 = C_2\sqrt{a} + b \Rightarrow C_2 = -\frac{b}{\sqrt{a}} \qquad C_1 = 0$

Получаем: $I(t) = -\frac{b}{\sqrt{a}} \sin(t\sqrt{a}) + bt \quad (3)$

5) Подставим (3) в (1)

$\left.\begin{array}{l} \ddot{y} = g - \frac{BLI}{m} \\ I(t) = -\frac{b}{\sqrt{a}} \sin(t\sqrt{a}) + bt \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{y} = g - \frac{BL}{m}\left(-\frac{b}{\sqrt{a}} \sin(t\sqrt{a}) + bt\right)$

$\ddot{y} = g + \frac{BLb\sin(t\sqrt{a})}{m\sqrt{a}} - \frac{BLbt}{m}$

$\dot{y} = gt - \frac{BLb\cos(\sqrt{a}t)}{ma} - \frac{BLbt^2}{2m} + C_3 \quad (4)$

$y(t) = \frac{gt^2}{2} - \frac{BLb\sin(t\sqrt{a})}{m\sqrt{a^3}} - \frac{BLbt^3}{6m} + C_3t + C_4 \quad (5)$

Н.у.: $v(0) = 0, \; y(0) = y_0, \; \dot{y}(0) = 0$.

Из (4): $0 = 0 - 0 - \frac{BLb}{ma}\cos(t\sqrt{a}) + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{BLb}{ma}$

Из (5): $y_0 = 0 - 0 - \frac{BLb}{m\sqrt{a^3}}\sin(0) + 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = y_0$

Получаем: $y(t) = \frac{gt^2}{2} - \frac{BLbt^3}{6m} - \frac{BLb\sin(t\sqrt{a})}{m\sqrt{a^3}} + \frac{BLb}{ma}t + y_0$

6) Подставим $a = \frac{m + B^2L^2C_0}{mL_0C_0}$ и $b = \frac{BLg}{L_0}$.

$y(t) = \frac{gt^2}{2} - \frac{BLt^3\left(\frac{BLg}{L_0}\right)}{6m} - \frac{BL\left(\frac{BLg}{L_0}\right)\sin\left(t\sqrt{\frac{m+B^2L^2C_0}{mL_0C_0}}\right)}{m\sqrt{\left(\frac{m+B^2L^2C_0}{mL_0C_0}\right)^3}} + \frac{BL\left(\frac{BLg}{L_0}\right)}{m\left(\frac{m+B^2L^2C_0}{mL_0C_0}\right)} + y_0 =$

$= \frac{gt^2}{2} - \frac{B^2L^2gt^3}{6mL_0} - \frac{B^2L^2gC_0\sqrt{C_0}\sqrt{mL_0}}{\sqrt{(m+B^2L^2C_0)^3}}\sin\left(t\left(\frac{m+B^2L^2C_0}{mL_0C_0}\right)\right) + \frac{B^2L^2gC_0}{m+B^2L^2C_0}t + y_0$

7) Проверим, что $\lim\limits_{B\to 0}(y(t)) = \frac{gt^2}{2} + y_0$.

$\lim\limits_{B\to 0}(y(t)) = \frac{gt^2}{2} - \frac{0}{m^{3/2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{L_0C_0}}\right) + \frac{0}{m}t + y_0 = \frac{gt^2}{2} + y_0 \Rightarrow y(t)$ получен верно!