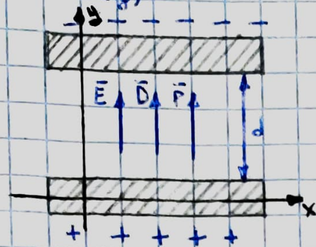
Измаилев Т.А. ИУ5-31Б Вариант 21

Задача 1.3 Тема №1 Электростатика

Плоский диэлектр. конденсатор заряжен до разности потенц. в U и расстояние между обкладками равно d.
Диэлектр. проницаемость меняется между обкладками по закону $\varepsilon = f(y)$



$E(y)$ - ? $P(y)$ - ? $D(y)$ - ?
σ'_n - ? σ_n - ? $\rho'(y)$ - ? E_{max} - ? C_s - ?

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{3d}}{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}$$

Защита

Решение:
Ниж. пластина заряжена положительно, а верхняя отрицательно.

$D = \varepsilon\varepsilon_0 E \qquad \bar{D} \uparrow\uparrow \bar{E}$

Применим т. Гаусса для вектора $\bar{D}$

$$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = \sum_{i=1} q$$

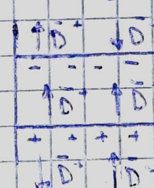
В качестве поверхности интегрирования возьмём прямой цилиндр с основанием $\parallel$ пластине

$$\oint D_n dS = \oint_{S_{бок}} D_n dS + 2\iint_{S_{осн}} D_n dS = 2DS_{осн}$$

$$q = \sigma S_{осн} \Rightarrow 2DS_{осн} = \sigma S_{осн} \Rightarrow D = \frac{\sigma}{2}$$

$$D = \frac{\sigma^+}{2} + \frac{\sigma^-}{2} = \sigma$$

По принципу суперпозиции:



$D_I = D^+ + D^- = 0$

$D_{II} = D^+ + D^- = \sigma$

$D_{III} = D^+ + D^- = 0$

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}{\sqrt{3d}}\right) \quad (1)$$

Разность потенциалов между обкладками равна U:

$$U = \int_0^d E\,dy = \int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}{\sqrt{3d}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} y\Big|_0^d - \frac{\sigma}{\sqrt{3d}\,\varepsilon_0}\int_0^d \sqrt{y}\,dy = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} - \frac{2}{3}\frac{\sigma}{\sqrt{3d}\,\varepsilon_0} y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} - \frac{2\sigma d\sqrt{d}}{3\sqrt{3d}\,\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{\sigma d}{3\sqrt{3}\varepsilon_0}(3\sqrt{3} - 2) \Rightarrow \sigma = \frac{3\sqrt{3}\varepsilon_0 U}{d(3\sqrt{3} - 2)}$$

$$E(y) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}{\sqrt{3d}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{3}\varepsilon_0 U}{d(3\sqrt{3} - 2)}\frac{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}{\sqrt{3d}} = \frac{3U(\sqrt{3d} - \sqrt{y})}{d\sqrt{d}(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{3\sqrt{3}U}{d(3\sqrt{3} - 2)} - \frac{3U\sqrt{y}}{d\sqrt{d}(3\sqrt{3} - 2)}$$

E_{max} при $y = 0 \Rightarrow E_{max} = \frac{3\sqrt{3}U}{d(3\sqrt{3} - 2)}$

$$C_s = \frac{C}{S} \qquad C = \frac{q}{U} \Rightarrow C_s = \frac{q}{US} = \frac{\sigma}{U} = \frac{3\sqrt{3}\varepsilon_0 U}{dU(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{3\sqrt{3}\varepsilon_0}{d(3\sqrt{3} - 2)}$$

$$\bar{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \bar{E} \qquad \bar{P} \uparrow\uparrow \bar{E}$$

Из (1): $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}{\sqrt{3d}} \Rightarrow P = \left(\frac{\sqrt{3d} - (\sqrt{3d} - \sqrt{y})}{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}\right)\varepsilon_0 E = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}\varepsilon_0 \bar{E} =$

$$= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}\varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3d} - \sqrt{y}}{\sqrt{3d}} = \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{3d}}$$

На нижней обкладке: $\sigma'_н = P^n_н$

$P^n_н = P(0) = 0$, т.к. $y = 0$, $P = \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{3d}}$ $\Rightarrow$ $\sigma'_н = 0$

На верхней обкладке:

$P_n = \frac{\sigma\sqrt{d}}{\sqrt{3d}} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$, т.к. $y = d$ $\Rightarrow$ $\sigma'_в = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $\left\{ \sigma = \frac{3\sqrt{3}\,\varepsilon_0 U}{d(3\sqrt{3}-2)} \right\}$ $\Rightarrow$ $\sigma'_в = \frac{3\varepsilon_0 U}{d(3\sqrt{3}-2)}$

По т. Гаусса:

$\operatorname{div}\overline{P} = -\rho'$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = -\rho'$

т.к. у $\overline{P}$ есть только y составляющая:

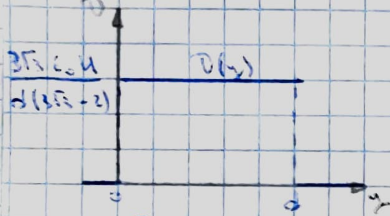
$\frac{\partial P_y}{\partial y} = -\rho'$ $\Rightarrow$ $\rho' = -\frac{\partial P_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{3d}}\right) = -\frac{\sigma}{\sqrt{3d}}\frac{1}{2\sqrt{y}} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{3dy}}$ $\Rightarrow$ $\rho' = -\frac{3\varepsilon_0 U}{2d\sqrt{dy}\,(3\sqrt{3}-2)}$

Проверка:

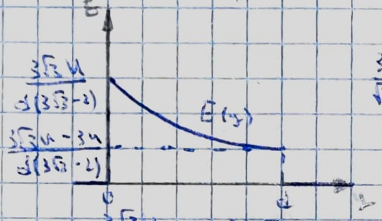
$q' = \iint\limits_S \sigma\, dS + \iiint\limits_V \rho'\, dV = \iint\limits_S \sigma\, dS - \int\limits_y \rho' S\, dy = \iint\limits_S \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\, dS - \int\limits_0^d \frac{\sigma S}{2\sqrt{3dy}}\, dy = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}S - \frac{\sigma S}{2\sqrt{3d}}\, 2\sqrt{y}\Big|_0^d = 0$ –

– сумма св. зарядов равна 0 $\Rightarrow$ σ' и ρ' найдены верно.

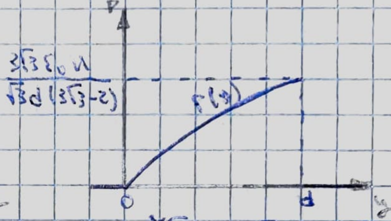
Графики распределения:



$D(y) = \frac{3\sqrt{3}\varepsilon_0 U}{d(3\sqrt{3}-2)} = \text{const}$



$E(y) = \frac{3\sqrt{3}U}{d(3\sqrt{3}-2)} - \frac{3U\sqrt{y}}{d\sqrt{d}(3\sqrt{3}-2)}$



$P(y) = \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{3d}} = \frac{3\sqrt{3}\varepsilon_0 U\sqrt{y}}{\sqrt{3d}\,d(3\sqrt{3}-2)}$