Лабораторная работа №2 (М-105)
Теоритическая часть

Цель работы: изучение свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы, внутр. упруг. связью. Определение амплитудно-частотных характеристик этой колеб. системы.

Пусть есть мс: два маятника соединённых упругой связью (рис 1).
Положение системы будет определятся двумя незав. угл. коорд. φ_1 и φ_2.
Маятники - стержни и нанизаны на них тела m_1 и m_2 ($m_{стерж} \ll m_{тела}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ моменты инерции маятников отн. O_{z_1} и O_{z_2}:
$$J_1 = m_1 L_1^2 \quad J_2 = m_2 L_2^2 \quad \text{на рист } L \text{ от оси стержн.}$$
скреплены пружиной $F(t)$ -гармон. воздействие приложену к одному из маятников $\Rightarrow$ вынужденные колебания.
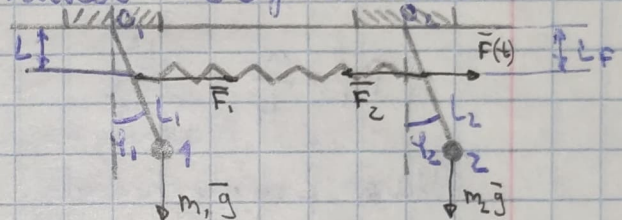

рис 1

Свободные колебания связанных маятников

Основное ур-е динамики вращ. движения твёрдого тела вокруг неподв. оси O_z:

(1) $\boxed{J_z \varepsilon_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}}$, где J_z - момент инерции

$\varepsilon_z = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ - угл. ускор. тела

$\sum_{i=1}^{n} M_{iz}$ - сумма моментов сил относит O_B

Если стержни невесомы, то:
(2) $\boxed{m_1 L_1 \ddot{\varphi}_1 = -m_1 g L_1 \sin\varphi_1 + F_1 \cos\varphi_1}$
      момент силы тяж. маятника

Момент на 1 маят. со стороны пружины:

$M_{12} = F_1 L \cos\varphi$, но $F_1 = k \Delta x = kL(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$

Импульсными св. Вашими пружинами можно
пренебречь $2b \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$$

Т.к. Углы малы (в данной работе):

$$\sin\varphi \approx \varphi \qquad \cos\varphi \approx 1 \quad (*)$$

(2) и (*): $\boxed{m_1 L_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g L_1 \varphi_1 - kL^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0}$ (3) или

$$\boxed{\ddot{\varphi}_1 + P_{11}\varphi_1 - P_{12}\varphi_2 = 0} \quad (4)$$

$$P_{11} = \frac{g}{L} + \frac{kL^2}{m_1 L_1^2} \qquad P_{12} = \frac{kL^2}{m_1 L_1^2}$$

Для 2 маятника:

$$\boxed{\ddot{\varphi}_2 + P_{22}\varphi_2 - P_{21}\varphi_1 = 0} \quad (5)$$

$$P_{22} = \frac{g}{L_2} + \frac{kL_2^2}{m_2 L_2^2} \qquad P_{21} = \frac{kL^2}{m_2 L_2^2}$$

Свободные колебания характеризуются собств. круг.
Частотами w_{I} и w_{II} (зависят от $L_1, L_2, L, m_1, m_2, k, no$)

$$\varphi_1 = A_1' \cos(w_{\mathrm{I}} t + d_1) \qquad \varphi_2 = A_2' \cos(w_{\mathrm{I}} t + d_1) \text{ -первое гл.}$$
колебание системы (определ-ся нач. условия)
Второе:

$$\varphi_1 = A_1'' \cos(w_{\mathrm{II}} t + d_2) \qquad \varphi_2 = A_2'' \cos(w_{\mathrm{II}} t + d_2)$$

Главные колебания возникают только при опр.
нач. усл. В случае произвольного возбуждения ма-
ятников колебания происходят на обеих ч. час-
тотах w_{I} и w_{II}:

$$\varphi_1 = B_1 \cos(w_{\mathrm{I}} t + d_1) + D_1 \cos(w_{\mathrm{II}} t + d_2) \quad (6)$$
$$\varphi_2 = B_2 \cos(w_{\mathrm{I}} t + d_1) + D_2 \cos(w_{\mathrm{II}} t + d_2) \quad (7)$$

Из (5),(4) и (6),(7):

$$B_1 = \frac{P_{12}}{P_{12} - w_{\mathrm{I}}^2} B_2 \qquad D_1 = \frac{P_{12}}{P_{11} - w_{\mathrm{II}}^2} D_2$$

Коэфф. опред-ся чу наз усл. системы:
Если одинаковы, то $L_1 = L_2 = L$ $m_1 = m_2 = m$

(8) $\omega_I = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ (9) $\omega_{II} = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2kl^2}{ml^2}}$

Тогда $P_{11} = P_{22}$, $P_{12} = P_{21}$

Следовательно у (4) и (5):

$(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + \dfrac{g}{l}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$

$(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{2kl^2}{ml^2}\right)(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$

Если $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$ $\eta = \varphi_1 - \varphi_2$, то: $\begin{cases} \ddot{\psi} + \omega_I^2 \psi = 0 \\ \ddot{\eta} + \omega_{II}^2 \eta = 0 \end{cases}$

Итак. В случае одинаковых маятников частота первого главного колеб-я соотв. синфазному колеб-ю маятников, а частота второго - противофазному.

Синфазные колеб-я могут быть получены, если пружина не будет деформироваться => будут одинаковы φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ у маятников. Частота этого колебания определяется по формуле (8).

Колеб. будут противофазными, если в нач. момент t маятники отклонить в разные стороны на равные углы, сообщить им скорости равные по модулю v_0. В этом случае упругие силы со стороны пружины влияют на процесс => из (8) и (9) $\omega_{II} > \omega_I$

Если парам. системы подогнать так, что второе слаг. под радикалом в (9) << 1-го (т.е. $\dfrac{2kl^2}{(ml^2)} \ll \dfrac{g}{l}$), то $\omega_{II} \approx \omega_I$. Тогда будем наблюдать биение $A \neq const$ (рис 2)

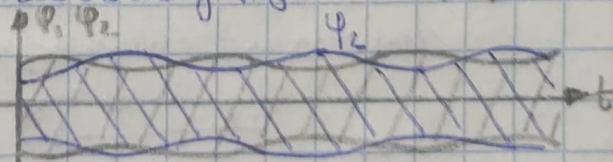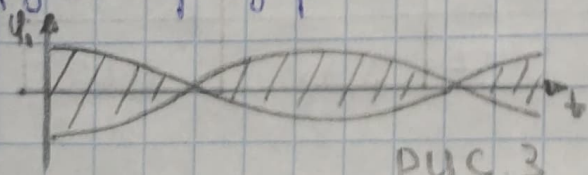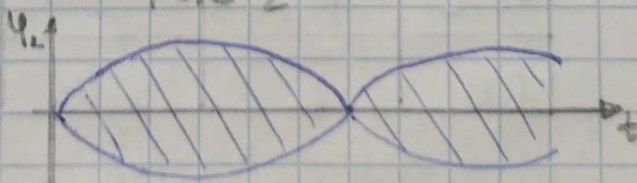Будут наиболее наглядны, если в нач. момент t один маятник отклонить, а другой придержать.

рис 2

рис 3

Время T определяет период биений;
Для одной и той же маш. системы = const

$$T = \frac{2a}{(\omega_{II} - \omega_I)} \quad (10) \qquad \omega_{II}^2 - \omega_I^2 = 2\frac{K}{m} \cdot \frac{a^2}{l^2} \quad (11)$$

(11) можно использовать для нахож. к

Практическая часть
Исследование свободных синфазных колеб.
Ход работы:
1. Измерим расстояние L от оси вращ. каждого маятника до центра его диска (≈ 97 см)
2. Привели действия в соотв. с пунктами 4-6 порядка работы на установках
3. Отклонили оба маятника в одну сторону на одинаковый малый угол ($\approx 8°$) от верт. и отпустили.
4. Подождали ≈ 30 с для установки синхронных колебаний
5. Определили период и экст. чисел циклов и циклич. частоту: $T_{1,c}^3$ и $\omega_1^3 c^{-1}$ (где $T_1^3 = \frac{t_n^3}{n}$; $\omega^3 = \frac{2\pi}{T_{1,0}^3}$; t_n - время колебаний, n - число колеб.)

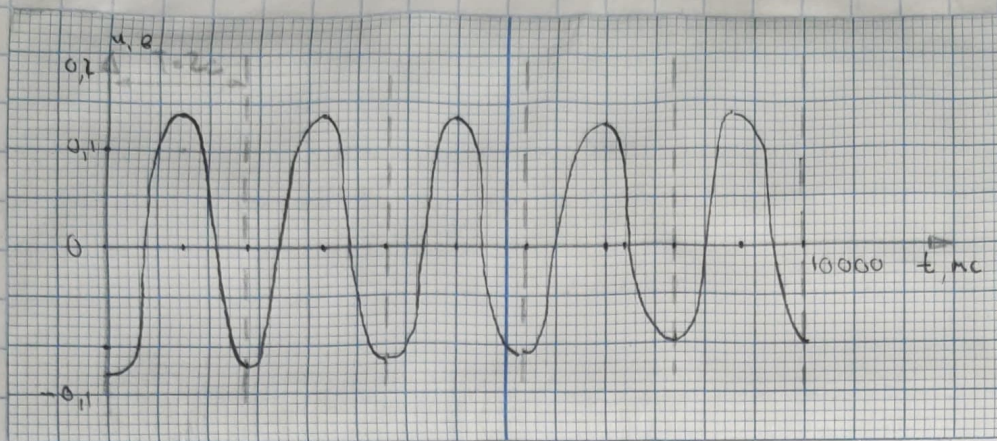$$T_1^3 \approx 2 c \quad \omega_1^3 = \frac{2\pi}{T_1^3} \approx \frac{2\pi}{2c} = \pi c^{-1} = 3,14 c^{-1}$$

6. $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ - нашли частоту синфазных колеб.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9,81}{0,97}} c^{-1} = 3,18$$

7. Рассмотрим отн. погрешность опред-я частоты синфазных колеб.

$$\varepsilon_{\omega_1} = \frac{|\omega_1 - \omega_1^3|}{\omega_1} \cdot 100\% = \frac{|3,18 - 3,14|}{3,18} \cdot 100\% = 1,26\%$$

t_δ, c	T_1^3, c	$\omega_1^3 c^{-1}$	$L, м$	$\omega_1 c^{-1}$	$\varepsilon, \%$
60	2	3,14	0,97	3,18	1,26

Исследование свободных антифазных колебаний

Ход работы:

1. Измерили $L' = 44,5$ см

2. $T_{||}^{?} = \frac{t\sigma}{n} = \frac{60c}{31,5} \approx 1,9c$ $W_{||}^{3} = \frac{2\Pi}{T_?} \approx 3,31c$

3. Отклонили маятники на равные углы в противоположные стороны от полож. равновесия

$$\varepsilon = \frac{|W_{||} - W_{||}^?|}{W_n} \cdot 100\%$$

4. По формулам: $W_n = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2\kappa}{m \cdot L^2}} c^{-1} = \sqrt{10,10 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 0,7}{1 \cdot 0,97}} =$
$= 3,38 c^{-1}$ $\Rightarrow \varepsilon = \frac{|3,38 - 3,31|}{3,38} \cdot 100\% = 2,07\%$

t_n, c	$T_v^?$	W_1, c^{-1}	$L, м$	$L', м$	$W_{||}, c^{-1}$	$\varepsilon, \%$
60	1,9	3,31	0,97	0,445	3,38	2,07

Исследование биений

1. Определение периода одного биения

$$T^э = \frac{t_5}{n} \quad - \text{в таблице}$$

2. Среднее значение периода биений

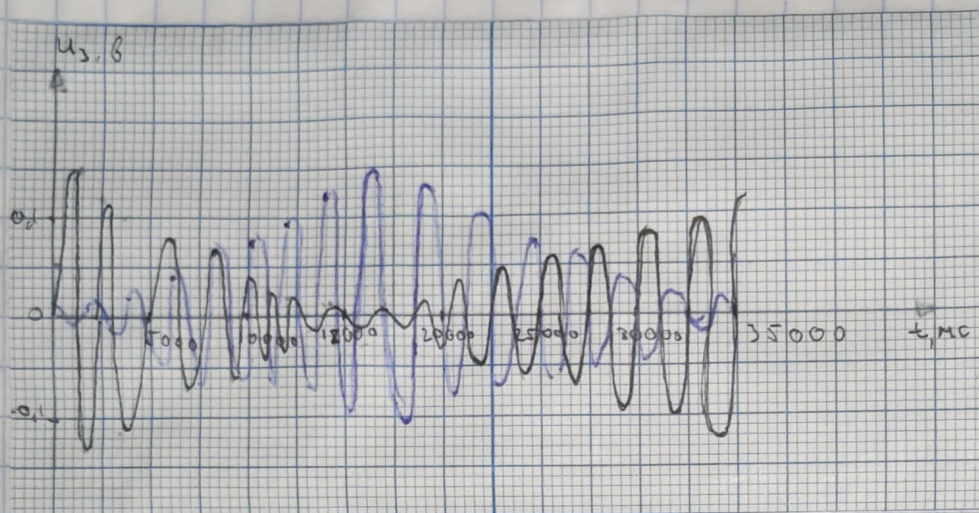$$\langle T \rangle = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \hat{T}_i = \frac{17,5}{5} = 3,5 c$$

3. $T = \frac{2\pi}{(w_1 - w_1)} = 36,94$

4. $\varepsilon = \frac{|T - \langle T \rangle|}{T} \cdot 100\% = 4,71$

Ход работы:

Отклонили 1-й маятник на ~10°, 2-й в противоположную на ~5°. Отпустим оба маятника. Определим экси. данные, проанализ. и запишем в табл. Однократным изм. получаем T_0

N	t_5, c	$T_i^э, c$	$\langle T \rangle, c$	T, c	$\varepsilon_i, \%$	T^0, c
1.	60	36				
2.	60	34				
3.	60	36	35,2	36,94	4,71	36,3
4.	60	34,5				
5.	60	35,5				

Вывод: Мы изучили свободные колебания мех. системы с двумя степенями свободы и упругой внутр. связью. Определили ампли-туд - частотные характеристики этой системы