

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните, почему системность является общим свойством материи.
2. Что такое системные представления?
3. Расскажите о системном подходе и системных исследованиях.
4. Раскройте термин «системный анализ».
5. Какие Вы знаете определения системного анализа?
6. Из каких этапов состоит системный анализ?
7. Как Вы представляете себе методику системного анализа?
8. Перечислите процедуры системного анализа.
9. В чем состоит формулирование проблемы при системном анализе?
10. Дайте определение цели системного анализа.
11. Каков порядок анализа структуры системы?
12. С какой целью осуществляется сбор данных о функционировании системы?
13. Какие Вы знаете методы анализа информационных потоков?
14. Зачем необходимо построение модели системы?
15. Как осуществляется проверка адекватности модели системы?
16. В чем состоит анализ неопределенности и чувствительности модели системы?
17. Расскажите о видах ресурсов, используемых при реализации задач системного анализа.
18. С какой целью выполняется формирование критериев для системного анализа?
19. Каким образом производится генерирование альтернатив при системном анализе?
20. Перечислите методы, используемые в системном анализе для проведения работы по формированию множества альтернатив.
21. Какие сложности возникают при решении задач выбора и принятия решений?
22. Каким образом осуществляется внедрение результатов системного анализа?

## Глава 4

### МОДЕЛИ АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ АСУ

В этой главе изложены цели и задачи структурного анализа АСУ с позиций организации, функций управления, используемых алгоритмов, с позиций используемых технических средств.

Рассмотрены три обычно используемых уровня описания структуры АСУ. Приводится аппарат формализации описания структуры, для чего излагаются минимально необходимые сведе-

ния из теории графов. Рассмотрен алгоритм упорядочивания, позволяющий формально разместить элементы структуры по уровням структуры. Изложена последовательность введения числовой функции, что позволяет определять максимальные и минимальные пути на структуре. Приведенный алгоритм декомпозиции структуры АСУ позволяет минимизировать число элементов, составляющих систему, исходя только из структурных свойств этой системы. Методика анализа потоков информации является мощным средством решения множества практических задач. Рассмотренные математические модели структурно-топологических характеристик систем позволяют количественно оценить качество структуры и ее элементов с позиций общесистемного подхода. Предложена методика построения моделей функционирования организационных систем.

В результате изучения материала данной главы студенты должны знать принципы, методы и средства системного анализа, основные классы моделей организационных структур, методы их формализации и алгоритмизации. Они должны уметь выполнять общесистемный анализ и необходимые общесистемные расчеты.

#### **4.1. Цели и задачи структурного анализа АСУ**

Одной из главных задач структурного анализа АСУ является построение наглядной формальной модели, отображающей процесс взаимодействия между элементами или подсистемами, составляющими систему, а также их взаимодействие с внешней средой.

При создании АСУ их структурные модели могут рассматриваться с различных позиций: с позиции организации, функций управления, используемых алгоритмов, используемых технических средств и т.п. В соответствии с этим могут быть выделены следующие аспекты структуры одной и той же системы и, как следствие, следующие модели:

- организационная структура и ее модель;
- функциональная структура и ее модель;
- алгоритмическая структура и ее модель;
- техническая структура и ее модель и т.п.

*Организационная структура.* Как правило, она отображает собой структуру управления, которая сложилась на объекте автоматизации (например, на предприятии) и которая совершенствуется при внедрении АСУ. Эта структура является основной и именно с нее следует начинать анализ и последующий синтез АСУ.

Основными элементами организационной структуры являются подразделения аппарата управления и отдельные лица-операторы, которые связаны с анализом документооборота и процедурой принятия управленческих решений.

Основные направления совершенствования организационной структуры:

- сокращение излишних подразделений или операторов;
- минимизация связей между этими элементами системы (подразделения и операторы);
- повышение пропускной способности этих связей;
- упорядочение документооборота;
- ликвидация циклов в движении документов и т.п.

При анализе организационной структуры решаются следующие задачи:

- описание состава организации и построение ее структурной схемы;
- определение функций отдельных подразделений и операторов;
- описание материальных и информационных связей;
- построение обобщенной структурной информационной модели организации.

*Функциональная структура.* Она отображает функции, выполняемые отдельными элементами системы (подразделениями и операторами) в составе организационной структуры. В принципе одной и той же организационной структуре может соответствовать несколько различных функциональных структур.

Основные направления совершенствования функциональной структуры:

- устранение параллелизма в выполнении функций управления;
- освобождение элементов системы от выполнения функций, не предусмотренных соответствующими должностными обязанностями;
- перераспределение функций управления с целью оптимизации;
- создание максимально четких контуров ответственности.

При анализе функциональной структуры решаются следующие основные задачи:

- изучаются функции управления в структурных подразделениях системы;
- выбирается состав функций, подлежащих автоматизации;
- определяется взаимосвязь этих функций;
- составляется обобщенная функциональная структура задач управления.

*Алгоритмическая структура.* Она отображает совокупность используемых алгоритмов и последовательность их декомпозиции, что позволяет в дальнейшем перейти к созданию программного обеспечения.

Основные направления совершенствования алгоритмической структуры:

- использование стандартных (типовых) алгоритмов обработки информации;
- повышение точности, скорости и надежности вычислений;
- сокращение требуемых объемов памяти;
- совершенствование отдельных алгоритмов.

При анализе алгоритмической структуры решаются следующие задачи:

- выделение комплексов задач, отдельных задач, алгоритмов, модулей алгоритмов и т. п.;
- определение их информационно-логической взаимосвязи;
- определение последовательности их реализации.

*Техническая структура.* Техническая структура отображает перечень и взаимосвязь технических устройств, используемых для построения системы. При анализе технической структуры решаются следующие задачи:

- определяются элементы, участвующие в основных информационных процессах: регистрация и подготовка информации, сбор и передача, хранение и обработка, воспроизведение и выдача;
- составляется формальная структурная модель системы технических средств с учетом топологии расположения элементов, информационной и энергетической их взаимосвязи, а также связи с внешней средой.

## **4.2. Уровни описания структуры АСУ**

Независимо от перечисленных аспектов рассмотрения системы, общая задача структурного анализа состоит в том, чтобы, исходя из заданного описания элементов и непосредственных связей между ними, получить заключение о структурных свойствах системы и ее основных подсистем. Применительно к автоматизированным системам используется три уровня их описания:

- наличие связей;
- наличие и направление связей;
- наличие и направление связей и вид и направление движения сигналов, которые определяются взаимодействием элементов.

На первом уровне, когда исходят лишь из наличия или отсутствия связей, изучаемой системе может быть поставлен в соответствие неориентированный граф, вершины которого отображают элементы системы, а ребра — существующие между элементами связи.

Основные задачи, решаемые на этом уровне:

- определение связности (целостности) системы. Если система оказывается несвязной, то ставят задачу выделения изолированных связанных подсистем со списками входящих в них элементов;
- выделение циклов;
- определение минимальных и максимальных последовательностей элементов (цепей), разделяющих элементы друг от друга.

На втором уровне, когда задано направление связей, изучаемой системе соответствует ориентированный граф, направление дуг которого совпадает с направлением связей.

Результаты структурного анализа на этом уровне оказываются более содержательными. К задачам анализа на этом уровне относятся:

- определение связности (целостности) системы;
- топологическая декомпозиция системы с выделением сильно связанных подсистем;
- нахождение входных и выходных полюсов системы и в соответствии с этим выделение пунктов приема и выдачи информации;
- выделение уровней в системе и определение их взаимосвязей;
- определение максимальных и минимальных путей;
- определение характеристик топологической значимости элементов;
- получение информации о слабых местах в структуре.

На третьем уровне описания связей не только учитывается наличие и направление связей, но и раскрывается состав и характер сигналов взаимодействия элементов. Система отображается с помощью специально вводимых схем или моделей сопряжения.

Основные задачи на этом уровне:

- определение характера сигналов (входные, выходные, управляющие и т.п.);
- построение моделей функционирования элементов системы и самой системы.

### 4.3. Формализация описания структуры методами теории графов

Принцип представления структуры в виде графа чрезвычайно прост. Чаще всего элементам системы ставят в соответствие вершины графа, а связям — ребра.

Рассмотрим некоторые основные определения, непосредственно связанные с задачами структурного анализа АСУ.

#### 4.3.1. Способы формализованного задания графа

*А. Графическое представление.*

Это наиболее наглядный способ представления отношений между элементами, его недостаток — относительная сложность использования ЭВМ для анализа.

*Б. Матричное представление.*

Матрица смежности вершин для неориентированного графа имеет вид:

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i, j = \overline{1, n},$$

где  $n$  — число вершин графа,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует связь между } i \text{ и } j \text{ вершинами;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для ориентированного графа матрица смежности

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i, j = \overline{1, n},$$

задается следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из вершины } i \text{ можно перейти в вершину } j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица инцидентий

$$B = \|b_{ij}\|, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m},$$

где  $n$  — число вершин,  $m$  — число ребер, определяется следующим образом:

для неориентированного графа:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-тая вершина инцидентна } j\text{-тому ребру} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

для ориентированного графа:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-тая вершина — начало } j\text{-того ребра;} \\ -1, & \text{если } i\text{-тая вершина — конец } j\text{-того ребра;} \\ 0, & \text{если } i\text{-тая вершина не инцидентна } j\text{-тому ребру.} \end{cases}$$

Рис. 4.1. иллюстрирует это положение.

#### *В. Множественное представление.*

В этом случае для ориентированного графа  $G(V)$  задается множество вершин  $V$  и соответствие  $G$ , которое показывает, как связаны между собой вершины. Для каждой вершины  $i$  соответствие  $G$  определяет множество вершин  $G(i)$ , в которые можно непосредственно попасть из вершины  $i$ . Это множество называется множеством правых инцидентий.

Множество  $G^{-1}(i)$  определяет все вершины, из которых можно непосредственно попасть в вершину  $i$ . Это множество называется множеством левых инцидентий.

Таким образом, ориентированный граф задается перечислением (списком) множеств вида  $G(i)$ , либо множеств вида  $G^{-1}(i)$  для всех вершин графа. Такой способ оказывается наиболее компактным и эффективным при задании исходной информации о структуре для решения задач синтеза, особенно для иерархических структур.

**Пример.** Пусть структура системы имеет вид, показанный на рис. 4.2. Необходимо представить ее рассмотренными способами.

Строим граф системы (рис. 4.3), матрицы смежности (табл. 4.1) и инцидентий (табл. 4.2).

Множественное задание структуры:  $G(1) = (2,3)$ ,  $G(2) = 0$ ,  $G(3) = (5,4)$ ,  $G(4) = (2)$ ,  $G(5) = (1,2)$ . Или  $G^{-1}(1) = (5)$ ,  $G^{-1}(2) = (1, 5, 4)$ ,  $G^{-1}(3) = (1)$ ,  $G^{-1}(4) = (3)$ ,  $G^{-1}(5) = (3)$ .

Таблица 4.1

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0
5	1	1	0	0	0

Таблица 4.2

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	-1	0	0	0	0
2	-1	0	0	-1	-1	0	0
3	0	-1	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1	0	-1
5	0	0	1	1	0	-1	0

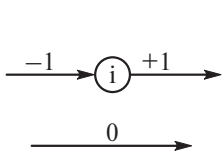


Рис. 4.1. Правило построения  $b_{ij}$

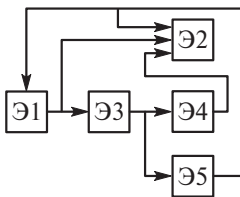


Рис. 4.2. Структура системы

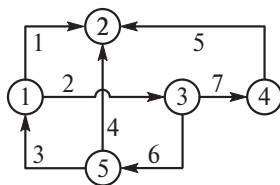


Рис. 4.3. Граф системы

**Определение цепи, пути, цикла, контура.** *Цепью* называется такая последовательность ребер  $E_0, E_1, \dots, E_{k-1}, E_k$ , когда каждое ребро  $E_{k-1}$  соприкасается одним из концов с ребром  $E_k$ . Цепь можно обозначить последовательностью вершин, которые она содержит. Например, для графа, представленного на рис. 4.4, цепью будет (1, 4, 3, 5) или (1, 3, 4) (рис. 4.5).

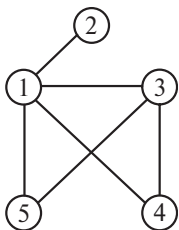


Рис. 4.4. Вид графа

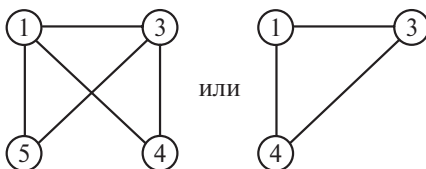


Рис. 4.5. Вид цепи

Понятие цепи обычно используется для неориентированных графов.

*Путем* называется такая последовательность дуг, когда конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей. Например, для графа (рис. 4.3) последовательность дуг (1, 3), (3, 4), (4, 2) является путем (рис. 4.6). Понятие пути обычно используется для ориентированных графов.

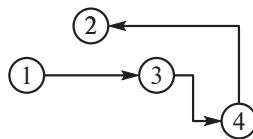


Рис. 4.6. Вид пути

*Циклом* называется такая конечная цепь, которая начинается и заканчивается в одной вершине. Например, на рис. 4.5 цепь (1, 4, 3) является циклом. Понятие цикла имеет смысл только для неориентированных графов.



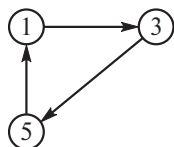


Рис. 4.7.  
Вид контура

**Контуром** называется такой конечный путь, у которого начальная вершина первой дуги совпадает с конечной вершиной последней дуги. Например, для графа (рис. 4.3) последовательность дуг (1, 3), (3, 5), (5, 1) есть контур (рис. 4.7).

**Длиной цепи (пути)** называют число ребер (дуг), входящих в цепь (путь) графа.

Матрица смежности вершин графа  $A$  является матрицей непосредственных путей графа, имеющих длину, равную единице. Общее число транзитных путей длиной  $\lambda$  может быть получено в результате возведения в  $\lambda$ -тую степень матрицы  $A$ :

$$A^\lambda = A^{\lambda-1} A.$$

Элемент матрицы  $A^\lambda a_{ij}(\lambda)$  определяет число путей длиной  $\lambda$  от вершины  $i$  к вершине  $j$ .

На рис. 4.8 приведен пример определения элементов матрицы.

**Степень вершины.** Число ребер, инцидентных вершине  $i$  неориентированного графа, называют *степенью вершины  $i$*  и обозначают  $\rho(i)$ .

Для графа, представленного на рис. 4.4:

$$\rho(1) = 4; \rho(2) = 1; \rho(3) = 3; \rho(4) = 2; \rho(5) = 2. \quad \sum_{i=1}^5 \rho(i) = 12.$$

Или в общем виде  $0,5 \sum_{i=1}^n = m$ , где  $n$  — число вершин,  $m$  — число ребер графа.

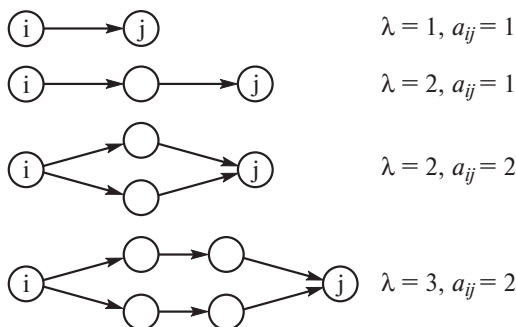


Рис. 4.8. Пример элементов матрицы  $A^\lambda$

Число дуг ориентированного графа, которые имеют начальной вершиной вершину  $i$ , называют полустепенью исхода вершины  $i$  и обозначают через  $\rho^+(i)$ . Аналогично, число дуг, которые имеют своей конечной вершиной вершину  $j$ , называют полустепенью захода вершины  $j$  и обозначают через  $\rho^-(j)$ . Для графа, представленного на рис. 4.3:

$$\rho^+(1) = 2; \rho^+(2) = 0; \rho^+(3) = 2; \rho^+(4) = 1; \rho^+(5) = 2; \sum_{i=1}^n \rho^+(i) = 7.$$

$$\rho^-(1) = 1; \rho^-(2) = 3; \rho^-(3) = 1; \rho^-(4) = 1; \rho^-(5) = 1; \sum_{j=1}^n \rho^-(j) = 7.$$

Или в общем виде  $\sum_{i=1}^n \rho^+(i) = \sum_{j=1}^n \rho^-(j)$ , где  $m$  — число дуг графа,

$n$  — число вершин графа.

**К понятию связности графа.** Для неориентированных графов вводится понятие слабой связности или просто связности. Граф  $G(V)$  называется слабо связным (связным), если для любых вершин графа  $i$  и  $j$  существует цепь из вершины  $i$  в вершину  $j$ .

Для ориентированных графов вводится дополнительное понятие сильной связности. Граф  $G(V)$  называется сильно связным, если для любых вершин графа  $i, j$  существует путь из вершины  $i$  в вершину  $j$ .

Граф на рис. 4.4 является слабо связным. На рис. 4.9 представлен сильно связный граф, на рис. 4.10 — несвязный, распадающийся на два сильно связных подграфа.

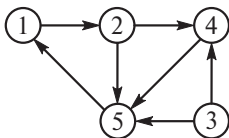


Рис. 4.9. Вид сильно связного графа

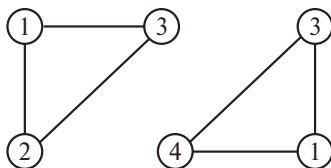


Рис. 4.10. Вид несвязного графа, распадающегося на два сильно связных подграфа

### 4.3.2. Порядковая функция на графе

Целью введения порядковой функции на графе без контуров является разбиение множества вершин графа на непересекающиеся подмножества, упорядоченные таким образом, что если вершина входит в подмножество с номером  $i$ , то следующая за ней вершина — в подмножество с номером, большим  $i$ . Полученные непересекающиеся подмножества называются *уровнями*.

Алгоритм упорядочения (или алгоритм введения порядковой функции) сводится к следующему:

- в подмножество нулевого уровня  $N_0$  включаются все вершины  $i$ , для которых  $G^{-1}(i) = 0$  (иначе говоря, для которых не существует множества левых инцидентий, или, еще проще, — вершины, в которые ниоткуда нельзя попасть). Проводится последовательная нумерация этих вершин:  $1, 2, \dots, i$ ;
- в подмножество первого уровня  $N_1$  включаются все вершины  $i$ , для которых  $G^{-1}(i) \in N_0$ , т. е. для которых вершины уровня  $N_0$  являются множеством левых инцидентий. Проводится последовательная нумерация этих вершин:  $i + 1, i + 2, \dots, i + r$ ;
- в подмножество второго уровня  $N_2$  включаются все вершины  $i$ , для которых  $G^{-1}(i) \in (N_0 \vee N_1)$ . Проводится последовательная нумерация вершин:  $i + r + 1, i + r + 2, \dots, i + r + p$ ;
- в подмножество третьего уровня  $N_3$  включаются все вершины  $i$ , для которых  $G^{-1}(i) \in (N_0 \vee N_1 \vee N_2)$ . Проводится последовательная нумерация вершин и т. д.

Данный процесс повторяется до тех пор, пока не будут пронумерованы все вершины графа.

Рассмотренный алгоритм нумерации приводит к тому, что в матрице смежности вершин графа  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ , т. е. матрица становится треугольной.

Для графов, имеющих контуры, сначала необходимо выделить сильно связанные подграфы (см. ниже «Топологическая декомпозиция структур»). И, рассматривая эти выделенные подсистемы как элементы системы, для них вводить порядковую функцию.

**Пример введения порядковой функции.** В результате обследования некоторой организационной системы был получен граф информационно-логической взаимосвязи между решаемыми задачами, представленный на рис. 4.11. Необходимо определить, в какой последовательности следует решать эти задачи, решение каких задач следует начинать одновременно,

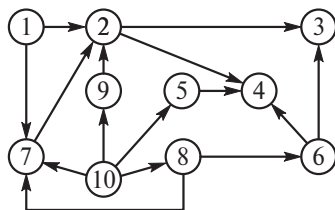


Рис. 4.11. Вид неупорядоченного графа

необходимое число копий решений, сколько тактов следует хранить результаты решения задачи.

Составляем матрицу смежности анализируемого графа (табл. 4.3).

Таблица 4.3

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

В соответствии с рассмотренным алгоритмом переходим к множественному представлению графа. (Напомним, что множество левых инциденций  $G^{-1}(i)$  определяет все вершины, из которых можно непосредственно попасть в вершину  $i$ .) Из исходного множественного представления удаляем пустое множество левых инциденций и соответствующие этому множеству вершины. Получаем следующий столбец, над которым проделываем аналогичную операцию и т. д. Удаляемым вершинам последовательно присваиваются новые номера.

$$\begin{aligned} G^{-1}(1) &= (0) \\ G^{-1}(2) &= (1, 7, 9) & G^{-1}(2) &= (7, 9) & G^{-1}(2) &= (7) \\ G^{-1}(3) &= (2, 6) & G^{-1}(3) &= (2, 6) & G^{-1}(3) &= (2, 6) \\ G^{-1}(4) &= (2, 5, 6) & G^{-1}(4) &= (2, 5, 6) & G^{-1}(4) &= (2, 6) \\ G^{-1}(5) &= (10) & G^{-1}(5) &= (0) \\ G^{-1}(6) &= (8) & G^{-1}(6) &= (8) & G^{-1}(6) &= (0) \\ G^{-1}(7) &= (1, 8, 10) & G^{-1}(7) &= (8) & G^{-1}(7) &= (0) \\ G^{-1}(8) &= (10) & G^{-1}(8) &= (0) \\ G^{-1}(9) &= (10) & G^{-1}(9) &= (0) \\ G^{-1}(10) &= (0) \\ \\ G^{-1}(2) &= (0) \\ G^{-1}(3) &= (2) & G^{-1}(3) &= (0) \\ G^{-1}(4) &= (2) & G^{-1}(4) &= (0) \end{aligned}$$

Результаты преобразований сведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Уровень	Условия включения	Включаемые вершины	Новая нумерация
$N_0$	$G^{-1}(i) = 0$	(1, 10)	(1, 2)
$N_1$	$G^{-1}(i) \in N_0$	(5, 8, 9)	(3, 4, 5)
$N_2$	$G^{-1}(i) \in N_0 \vee N_1$	(6, 7)	(6, 7)
$N_3$	$G^{-1}(i) \in N_0 \vee N_1 \vee N_2$	(2)	(8)
$N_4$	$G^{-1}(i) \in N_0 \vee N_1 \vee N_2 \vee N_3$	(3, 4)	(9, 10)

На основании табл. 4.4 строим преобразованный граф. Его вершины в новом обозначении размещаем по найденным уровням (внутри кружков помещаем новые обозначения, рядом — старые). Соединяем старые обозначения вершин дугами в соответствии с ранее найденной матрицей смежности.

Строим матрицу смежности упорядоченного графа (табл. 4.5). Убеждаемся в том, что она оказывается треугольной.

Таблица 4.5

$$A = \begin{vmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

где \*\*...\* — главная диагональ матрицы смежности.

Если рассматривать уровни как такты движения информации, то рис. 4.12 непосредственно дает ответы на вопросы, сформулированные в начале примера.

*Примечание.* Задача упорядочения может быть решена с помощью матрицы инцидентий. Алгоритм упорядочения в этом случае выглядит следующим образом:

1. Составляется матрица инцидентий по правилам, изложенным выше.
2. Из матрицы вычеркиваются строчки, состоящие только из 0 и +1, и столбцы, соответствующие +1.
3. Отмечается порядок вычеркивания.
4. На последнем этапе на соответствующем уровне размещаются оставшиеся вершины.
5. Уровень будет равен порядку вычеркивания минус единица.

В качестве **примера** рассмотрим граф, представленный на рис. 4.13.

На основании рис 4.13 строим матрицу инцидентий  $B = \|b_{ij}\|$  (табл. 4.6).

Таблица 4.6

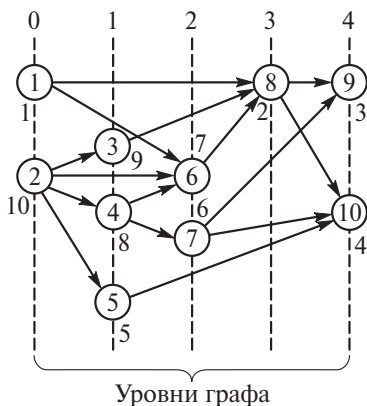
$$B = \|b_{ij}\| = \begin{vmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$


Рис. 4.12. Вид упорядоченного графа

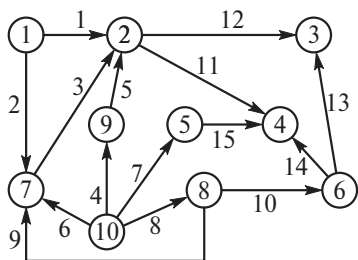


Рис. 4.13. Вид неупорядоченного графа

Первое вычеркивание. Вычеркнуты вершины 1 и 10 (табл. 4.7).  
 \* — обозначение пустой клетки.

Таблица 4.7

*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	-1	*	-1	*	*	*	0	0	+1	+1	0	0	0
*	*	0	*	0	*	*	*	0	0	0	-1	-1	0	0
*	*	0	*	0	*	*	*	0	0	-1	0	0	-1	-1
*	*	0	*	0	*	*	*	0	0	0	0	0	0	+1
*	*	0	*	0	*	*	*	0	-1	0	0	+1	+1	0
*	*	+1	*	0	*	*	*	-1	0	0	0	0	0	0
*	*	0	*	0	*	*	*	+1	+1	0	0	0	0	0
*	*	0	*	+1	*	*	*	0	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Второе вычеркивание. Вычеркнуты вершины 5, 8 и 9 (табл. 4.8).

Таблица 4.8

*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	-1	*	*	*	*	*	*	*	+1	+1	0	0	*
*	*	0	*	*	*	*	*	*	*	0	-1	-1	0	*
*	*	0	*	*	*	*	*	*	*	-1	0	0	-1	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	0	*	*	*	*	*	*	*	0	0	+1	+1	*
*	*	+1	*	*	*	*	*	*	*	0	0	0	0	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Третье вычеркивание. Вычеркнуты вершины 6 и 7 (табл. 4.9)

Таблица 4.9

*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	+1	+1	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	0	-1	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-1	0	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Результат четвертого вычеркивания. Вычеркнута вершина 2 (табл. 4.10).

Таблица 4.10

*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Оставшиеся вершины 3 и 4 размещаются на следующем уровне. Полученный результат использования алгоритма вычеркивания сводим в табл. 4.10 (а).

Таблица 4.10 (а)

Порядок вычеркивания	1	2	3	4	5
Вершины	1, 10	5, 8, 9	6, 7	2	3, 4
Уровни	0	1	2	3	4

### 4.3.3. Числовая функция на графе

Числовую функцию на графе задают обычно либо на вершинах, либо на дугах (ребрах) графа.

Числовая функция на вершинах графа считается заданной, если каждой  $i$ -той вершине  $a_i$  графа  $G(V)$ ,  $a_i \in V$ , ставится в соответствие некоторое число  $l_i = l(a_i)$  из некоторого множества  $L$ .

Числовая функция на дугах (ребрах) для ориентированного (неориентированного) графа считается заданной, если каждой дуге  $(a_i a_j)$  или ребру ставится в соответствие число  $q = q(a_i a_j)$  из некоторого множества  $Q$ . В некоторых случаях числовая функция на графе задается комбинированным способом как на вершинах, так и на дугах.



Значение функции на пути  $S$  через вершины  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, (a_i \in S)$  при задании числовой функции на вершинах графа определяется либо в соответствии с аддитивной формой

$$l_S = \sum_{a_i \in S} l(a_i),$$

либо в соответствии с мультипликативной формой

$$l_S = \prod_{a_i \in S} l(a_i),$$

Аналогичным образом определяется значение функции на пути через вершины  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, (a_i \in S)$  при задании числовой функции на дугах (ребрах) графа:

$$q_s = \sum_{(a_i a_j) \in S} q(a_i a_j),$$

$$q_s = \prod_{(a_i a_j) \in S} q(a_i a_j).$$

В соответствии с данными определениями может быть поставлена задача нахождения путей через множество вершин (дуг), обладающих определенным свойством, с максимальным (минимальным) значением числовой функции. Такие пути называются максимальными (минимальными). Определение максимальных (минимальных) путей на графе чаще всего формализуется в виде задачи динамического программирования. При этом предполагается, что все вершины в графе упорядочены, и контура в графе отсутствуют. Рассмотрим пример.

**Пример нахождения максимального пути.** Пусть в задаче календарного планирования возникла необходимость определения максимального пути из вершины  $a_1$  в вершину  $a_7$  для графа, представленного на рис. 4.13а.

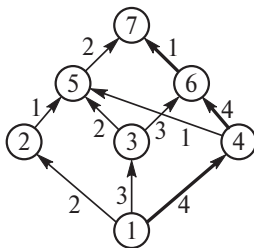


Рис. 4.13а. К нахождению пути максимальной длины

Для вершины  $a_1$  принимаем  $q_S^{\max}(a_1 a_1) = 0$ . Для вершин  $a_2, a_3, a_4$   $q_S^{\max}(a_1 a_2) = 2$ ;  $q_S^{\max}(a_1 a_3) = 3$ ;  $q_S^{\max}(a_1 a_4) = 4$ . Для вершины  $a_5$   $q_S^{\max}(a_1 a_5) = \max(2+1; 3+2; 4+1) = 5$ . Для вершины  $a_6$   $q_S^{\max}(a_1 a_6) = \max(3+3; 4+4) = 8$ . Для вершины  $a_7$   $q_S^{\max}(a_1 a_7) = \max(5+2; 8+1) = 9$ .

Значение функции на максимальном пути для данного примера равно девяти. Этот путь выделен жирными стрелками.

#### 4.4. Топологическая декомпозиция структур АСУ

Проведение топологической структуры АСУ, представленной в виде ориентированного графа  $G(V)$ , связано с выделением в этой структуре сильно связных подсистем. Напомним, что ориентированный граф  $G(V)$  называется сильно связным, если для любых вершин  $i, j$  существует путь из вершины  $i$  в вершину  $j$ .

Для рассмотрения основного алгоритма декомпозиции целесообразно ввести следующие понятия.

Множество вершин, достижимых из вершины  $i$ , называется *достижимым множеством*  $R(i)$ . Достижимое множество определяется следующим образом:

$$R(i) = (i) \vee G(i) \vee G^2(i) \vee \dots \vee G^\lambda(i) \vee \dots, \quad (4.1)$$

где  $G(i)$  — множество вершин, достижимых из вершины  $i$  с использованием пути длиной, равной единице;  $G^\lambda$  — множество вершин, достижимых из вершины  $i$  с помощью путей длиной  $\lambda$ .

При этом предполагается, что сама вершина  $i$  достижима с помощью пути, длиной 0 и включена во множество  $R(i)$ . Это предположение отражается в соотношении (4.1) введением  $(i)$ .

В соответствии с выражением (4.1) множество  $R(i)$  может быть получено последовательным слева направо объединением множеств до тех пор, пока текущее множество  $R(i)$  не перестанет увеличиваться по размеру при выполнении очередной операции объединения. Число объединений, естественно, зависит от вида графа, но, очевидно, всегда  $\lambda \leq n$ , где  $n$  — число вершин графа.

*Контрдостижимым множеством*  $Q(i)$  графа  $G(V)$  называется множество таких вершин, когда из любой вершины этого множества можно достигнуть вершину  $i$ .

Аналогично построению  $R(i)$  можно построить  $Q(i)$ , используя следующее выражение:

$$Q(i) = (i) \vee G^{-1}(i) \vee G^{-2}(i) \vee \dots \vee G^{-\lambda}(i) \vee \dots, \quad (4.2)$$

где  $G^{-1}(i)$  — множество вершин, из которых можно достигнуть  $i$ -тую вершину с помощью путей, длина которых равна единице,  $G^{-2}(i)$  — то же самое, но с помощью путей, длина которых равна двум и т.д. (рис. 4.14).

Так как  $R(i)$  является множеством вершин, достижимых из  $i$ -ой вершины, а  $Q(j)$  — множеством вершин, из которых можно достичь вершину  $j$ , то множество  $R(i) \cap Q(j)$  является множеством таких вершин, каждая из которых принадлежит по крайней мере одному пути, идущему от  $i$ -той вершины к  $j$ -той, что иллюстрируется рис. 4.15. Эти вершины называются существенными или неотъемлемыми относительно двух кольцевых вершин  $i$  и  $j$ .

В свою очередь, множество

$$R(i) \cap Q(j) \quad (4.3)$$

определяет сильно связный подграф графа  $G(V)$ , содержащий  $i$ -тую вершину, поскольку все существенные вершины, принадлежащие множеству (4.3), достижимы из  $i$ -той вершины и, кроме того, из каждой такой вершины достижима вершина  $i$ , т.е. все эти вершины взаимодостижимы (рис. 4.16).

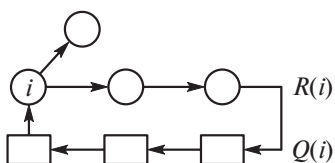


Рис. 4.14. Вид достижимых и контрдостижимых множеств

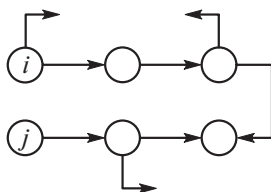


Рис. 4.15. Вид существенных вершин

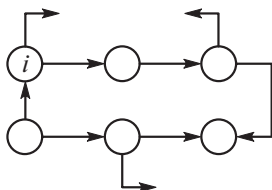


Рис. 4.16. Вид сильно связного подграфа

Из введенных выше определений имеем следующий алгоритм декомпозиции.

Алгоритм декомпозиции:

1. В исходном графе  $G(V)$  производим нумерацию вершин.
2. Для  $i$ -той вершины ( $i = 1$ ) определяем множество  $R(1)$  и множество  $Q(1)$ .
3. Находим сильно связный подграф  $G_1$ , включающий множество вершин  $V_1 = R(1) \cap Q(1)$ .
4. Все вершины, принадлежащие  $G_1(V_1)$ , удаляются из исходного графа  $G(V)$ .

Далее пункты 2, 3, 4 повторяются для  $i = 2, 3, 4, \dots$  до тех пор, пока все вершины исходного графа не будут сгруппированы в соответствующие сильно связные подграфы.

**Пример топологической декомпозиции.** Пусть в распределенной АСУ пункты обработки информации обмениваются данными так, как это изображено с помощью графа, представленного на рис. 4.17. Возникла необходимость в сокращении числа этих пунктов, исходя только из структурных свойств анализируемой системы. (Объединение будем производить без учета производительности, надежности и т. п., учитывая только структурные свойства схемы.)

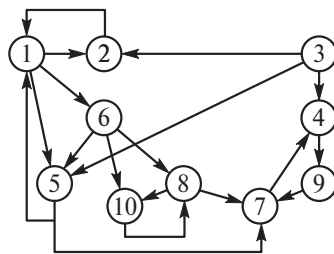


Рис. 4.17. Вид исходного графа

В соответствии с рассмотренным алгоритмом определяем множества  $R(i)$  и  $Q(i)$ .

Полагаем  $i = 1$  и находим, используя формулы (4.1) и (4.2), достижимое  $R(1)$  и контрдостижимое  $Q(1)$  множества:

$$R(1) = (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), \quad Q(1) = (1, 2, 3, 5, 6).$$

Используя соотношение (4.3), находим сильно связный подграф, содержащий вершину 1:

$$V_1 = R(1) \cap Q(1), \quad V_1 = (1, 2, 5, 6).$$

После удаления сильно связного подграфа  $G_1(V_1)$  исходный граф  $G(V)$  имеет вид (рис. 4.18).

Полагаем  $i = 2$ , но вершина 2 входит в выделенный подграф  $V_1$ , следовательно,  $i = 3$ .

$R(3) = (3, 4, 7, 9)$ ,  $Q(3) = (3)$ ,  $V_2 = (3)$ . Затем удаляем сильно связный подграф  $G_2(V_2)$  (рис. 4.19).

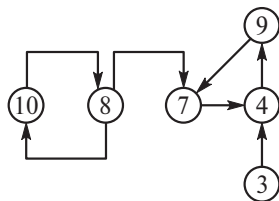


Рис. 4.18. Вид графа  
после удаления  
 $G_1(V_1)$

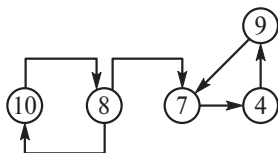


Рис. 4.19. Вид графа  
после удаления  $G_1(V_1)$   
и  $G_2(V_2)$

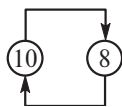


Рис. 4.20. Вид графа  
после удаления  
 $G_1(V_1)$ ,  $G_2(V_2)$   
и  $G_3(V_3)$

Полагаем  $i = 4$ , тогда  $R(4) = (4, 7, 9)$ ,  $Q(4) = (4, 7, 8, 9, 10)$ ,  $V_3 = (4, 7, 9)$ . Удаляем сильно связный подграф  $G_3(V_3)$  (рис.4.20). Полагаем  $i = 8$ , тогда  $R(8) = (8, 10)$ ,  $G(8) = (8, 10)$ ,  $V_4 = (8, 10)$ . Итак, окончательно имеем:

1.  $G_1(V_1) = G_1(1, 2, 5, 6)$ :

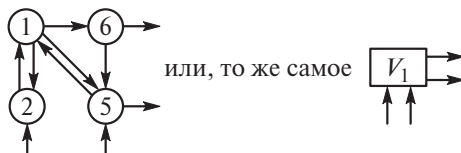


Рис. 4.21. Вид подграфа  $G_1$

2.  $G_2(V_2) = G_2(3)$ :



Рис. 4.22. Вид подграфа  $G_2$

3.  $G_3(V_3) = G_3(4, 7, 9)$ :

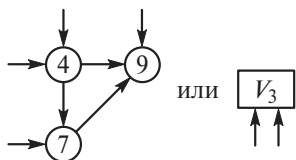


Рис. 4.23. Вид подграфа  $G_3$

$$4. G_4(V_4) = G_4(8, 10):$$

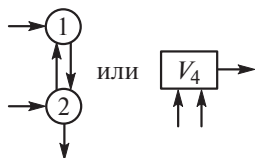


Рис. 4.24. Вид подграфа  $G_4$

Объединяем полученные сильно связанные подграфы в соответствии с исходным графом:

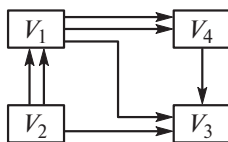


Рис. 4.25. Вид сильно связанных подграфов

Или окончательно:

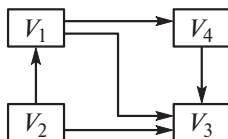


Рис. 4.26. Результат декомпозиции  
исходного графа

## 4.5. Модели описания и анализа потоков информации в АСУ

Основным носителем информации в организационных системах является документ. Как для всей системы в целом, так и для ее отдельных подсистем, все документы можно разделить на следующие группы: входные документы, возникающие вне системы и поступающие на ее входы; выходные документы, т. е. документы, покидающие систему; промежуточные документы, которые

используются для целей управления и учета, а также для формирования выходных документов.

Между документами существуют отношения вхождения и порядка.

*Отношение вхождения*

$$X_j = X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn}$$

означает, что документ  $X_j$  каким-то образом формируется из документов  $X_j = X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn}$ .

*Отношение порядка* « $X_i$  следует за  $X_j$ »  $\{\rightarrow (X_j) \rightarrow (X_i) \rightarrow\}$  означает, что документ  $X_i$  может быть сформирован только тогда, когда закончится формирование документа  $X_j$ .

Потоки информации в организационных системах образуются не только движением документов, но и движением элементов документов (реквизитов, показателей), а также различных сообщений, данных и т. п. Будем поэтому говорить об элементах потоков информации, имея в виду все перечисленные объекты.

Если элементам потока информации  $X_1, X_2, \dots, X_n$  поставить в соответствие вершины графа  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и каждую пару вершин  $X_i$  и  $X_j$  соединить дугой, идущей от  $X_i$  к  $X_j$ , в том и только том случае, если  $X_i$  является входом для  $X_j$ , то полученный граф называют *информационным графом*.

Для использования формальной методики анализа информационных потоков необходимо провести реальное обследование этих потоков на объекте автоматизации и затем представить полученные результаты в виде матрицы смежности информационного графа

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i, j = 1, n.$$

Будем формально, т.е. используя соответствующий аппарат высшей алгебры, возводить эту матрицу в степень  $N$  до тех пор, пока

$$A^N \neq 0, \quad \text{а} \quad A^{N+1} = 0,$$

если информационный граф не содержит контуров, либо  $n \geq N$  раз, если они есть, где  $n$  — число вершин.

Для возведения матрицы  $A$  в степень удобно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$A^\lambda = A^{\lambda-1} \cdot A.$$

Определяем *матрицу достижимости*  $A(B)$  как сумму одноименных элементов всех предыдущих матриц.

Полученная последовательность матриц позволяет формально определить все свойства анализируемого графа.

Рассмотрим эти свойства.

1. *Порядком*  $\pi_j$  элемента  $X_j$  (для краткости в дальнейшем просто  $j$ ) называется длина наибольшего пути, связывающего  $j$ -тый элемент с  $i$ -тым ( $i, j = 1, n, i \neq j$ ).

Формально  $\pi_j$  определяется с помощью следующего соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(1 = \pi_j) &> 0; \\ \sigma_i(1 = \pi_j + 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

В этом соотношении  $\sigma_j(\lambda)$  — сумма элементов  $j$ -того столбца матрицы  $A$ , т. е.

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}(\lambda).$$

Например, пусть мы хотим найти элементы первого порядка, стало быть, полагаем  $\pi_j = 1$ . Обращаемся к 1-й строке соотношения (4.4), то есть  $\lambda = 1$ , и далее к матрице  $A^1$ . Пусть фрагмент матрицы  $A^1$  имеет следующий вид (табл. 4.11):

Таблица 4.11

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
$\sigma_i$	0	0	1	3	2

В соответствии с первой строкой выражения (4.4) выписываем те  $j$ , для которых  $\sigma_j > 0$ . Это  $j = 3, 4, 5$ .

Теперь обращаемся ко 2-й строке соотношения (4.4). Добавляем 1, следовательно,  $\lambda = 2$  и нам следует обратиться к матрице  $A^2$ .

Пусть фрагмент матрицы  $A^2$  имеет вид (табл. 4.12):

Таблица 4.12

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
$\sigma_i$	0	0	0	1	2



В соответствии со второй строчкой соотношения (4.4) выпишем такие  $j$ , для которых  $\sigma_j = 0$ . Это  $j = 1, 2, 3$ . Совместно соотношение (4.4) выполняется только для  $j = 3$ . Стало быть, в данном примере элемент 3 есть элемент первого порядка. Для того чтобы найти элементы второго порядка, надо положить  $\pi_j = 2$  и, обратившись к матрицам  $A^2$  и  $A^3$ , проделать те же самые процедуры.

Физический смысл  $\pi_j$  — это номер такта, к которому «готовы» все составляющие элемента  $x_j$ .

2. Число  $N = \max_j \pi_j$  называют *порядком информационного графа*. Если для  $N$  справедливо соотношение

$$\left. \begin{aligned} A^N &\neq 0 \\ A^{(N+1)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.5)$$

то соответствующая схема называется  $N$ -тактной.

Записанное условие возможно только в случае отсутствия контуров.

3. Признаком контура является появление ненулевых элементов на главной диагонали любой из матриц  $A^\lambda$ . Наличие контура свидетельствует либо об ошибке в обследовании, либо о неправильно спроектированном документообороте. В любом случае необходим содержательный экономический анализ с целью устранения контура.

4. Равенство нулю суммы элементов  $j$ -того столбца матрицы смежности, т. е.  $\sigma_j (\lambda = 1) = 0$  является формальным признаком для выделения входных элементов потока. Значение  $k = \sigma_j (\lambda = 1) > 0$  равняется числу элементов, участвующих в формировании элемента  $j$ .

Пусть фрагмент матрицы  $A$  имеет вид, представленный в табл. 4.13.

Таблица 4.13

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	$\sigma_i$
1						2
2						
3						
4						0
5						0
$\sigma_j$	0	0	0	2	4	

} Выходы

{ Входы

Из матрицы следует, что элементы 1, 2, 3 — входные элементы и, например, для формирования элемента 5 требуется четыре других элемента.

5. Аналогично свойству 4, равенство нулю суммы элементов  $i$ -той строки матрицы смежности информационного графа  $\sigma_j(\lambda = 1) = 0$  служит формальным признаком для выделения выходных элементов потока, а число  $L = \sigma_i(\lambda = 1) > 0$  равно числу элементов, в которые входит элемент  $i$ . Например, судя по предыдущей матрице, элемент 1 используется дважды.

6. Если при некотором  $i = j$  одновременно

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(\lambda = 1) &= 0 \\ \sigma_j(\lambda = 1) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

то к анализируемой схеме этот элемент не имеет отношения (ошибка обследования).

7. Число путей длиной  $\lambda$  от элемента  $i$  к элементу  $j$  определяется элементом  $a_{ij}(\lambda)$  матрицы  $A^\lambda$ .

8. Число всевозможных путей от элемента  $i$  к элементу  $j$  определяется элементом  $a_{ij}(\Sigma)$  матрицы  $A(\Sigma)$ , где

$$A(\Sigma) = \sum_{\lambda=1}^N A^\lambda.$$

Матрица  $A(\Sigma)$  есть сумма всех одноименных элементов всех матриц  $A^\lambda$ , а элемент этой матрицы равен сумме всех одноименных элементов всех матриц.

$$a_{ij}(\Sigma) = \sum_{\lambda=1}^N a_{ij}(\lambda).$$

9. По аналогии со свойствами 4 и 5 отличные от нуля элементы  $j$ -того столбца матрицы достижимости  $A(\Sigma)$  указывают все элементы потока, которые участвуют в формировании  $j$ , а отличные от нуля элементы  $i$ -той строки этой матрицы указывают все элементы, при формировании которых используется элемент  $i$ .

10. Максимальное значение порядка элементов  $i$ -той строки матрицы смежности  $A$ , которые не равны нулю, определяет номер такта  $\tau_i$ , после которого элемент  $i$  уже не используется и он может быть «погашен» в памяти системы.

**Пример.** Пусть задан фрагмент матрицы  $A$  (табл. 4.14).

Таблица 4.14

$\pi_j$	0	0	3	2	1
$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	1

Из табл. 4.14 следует, что  $\pi_j$  поразрядно равняется 00321. Тогда для элемента 1 искомый номер такта  $\tau_1 = 3$ .

**11.** Число тактов, в течение которых элемент 1 должен храниться в памяти системы определяется соотношением  $t_i = \tau_i - \pi_i$ .

Для нашего примера  $t_1 = 3 - 0$ .

**12.** Анализ структуры всех путей, связывающих элементы  $i$  и  $j$ , позволяет выявить как дублирующие связи, так и избыточные элементы. Это позволяет улучшить свойства анализируемого информационного потока.

**Пример анализа потоков информации.** Пусть схеме движения оперативной отчетности в подсистеме оперативного управления производством соответствует информационный граф, представленный на рис. 4.27. Необходимо формально выявить все свойства данного информационного графа.

Прежде всего, необходимо составить матрицу смежности исходного графа  $A$ .

Последовательность матриц  $A^{(\lambda)}$  и  $A(\Sigma)$  позволяет выяснить свойства анализируемого потока.

*Алгоритм* формализованного возведения матрицы  $A$  в степень.

Для определения  $i$ -той строчки матрицы  $A^{(\lambda)}$   $a_i(\lambda)$ :

1. Выписывается известная нам  $i$ -тая строчка матрицы  $A^{(\lambda-1)}$   $a_i(\lambda-1)$ .

2. В этой выписанной строчке отмечаются ненулевые элементы.

3. Из матрицы  $A$  выписываются строчки, соответствующие этим ненулевым элементам.

4. Искомая  $i$ -тая строчка будет равняться сумме выписанных строк матрицы  $A$ . Причем, если ненулевой элемент не равен единице, то соответствующую строчку надо домножить на величину этого элемента.

Итак, имеем граф

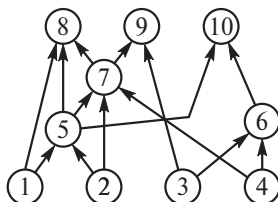


Рис. 4.27. Вид исходного графа

Составляем его матрицу смежности А (табл. 4.15).

Таблица 4.15

$\pi_j$	0	0	0	0	1	1	2	3	3	2	
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sigma_i$
1					1			1			2
2					1		1				2
3						1			1		2
4						1	1				2
5							1	1		1	3
6										1	1
7								1	1		2
8											0
9											0
10											0
$\sigma_j$	0	0	0	0	2	2	3	3	2	2	

Определяем матрицу  $A^2$ :  $A^2 = A \cdot A$

$$\begin{array}{rcl}
 a_1(\lambda = 1) & = & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
 a_5(\lambda = 1) & = & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \\
 + a_8(\lambda = 1) & = & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\
 \hline
 a_1(\lambda = 2) & = & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \\
 a_2(\lambda = 1) & = & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
 a_5(\lambda = 1) & = & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \\
 + a_7(\lambda = 1) & = & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \\
 \hline
 a_2(\lambda = 2) & = & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}
 \end{array}$$

и т. д.

Окончательно имеем (табл. 4.16):

Таблица 4.16

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sigma_i$
1							1	1		1	3
2							1	2	1	1	5
3										1	1
4								1	1	1	3
5								1	1		2
6											0
7											0
8											0
9											0
10											0
$\sigma_j$	0	0	0	0	0	0	1	5	3	4	

Определим матрицу  $A^3$ :  $A^2 \cdot A$

$$a_1(\lambda = 2) = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix}$$

$$a_7(\lambda = 1) = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$a_8(\lambda = 1) = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$a_{10}(\lambda = 1) = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

---


$$a_1(\lambda = 3) = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$a_2(\lambda = 2) = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix}$$

$$a_7(\lambda = 1) = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$2a_8(\lambda = 1) = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$a_{10}(\lambda = 1) = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

---


$$a_2(\lambda = 3) = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$$

и т. д.

Окончательно имеем:

Таблица 4.17

$A^3 =$	$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sigma_i$
	1							1	1			2
	2							1	1			2
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_j$	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0

Матрица  $A^4 = 0$ .

Находим  $\sigma_j(\lambda) \quad \lambda = \overline{1, N}$

и  $\sigma_j(\lambda) \quad \lambda = \overline{1, N}$ .

Определяем матрицу достижимости  $A(\Sigma)$ :  $A(\Sigma) = \sum_{\lambda=1}^N A^\lambda$

(табл. 4.18).

Таблица 4.18

$A(\Sigma) =$	$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sigma_i$
	1					1		1	3	1	1	
	2					1		2	3	2	1	
	3						1			1	1	
	4						1	1	1	1	1	
	5							1	2	1	1	
	6										1	
	7								1	1		
	8											
	9											
	10											
	$\sigma_j$	0	0	0	0	0	0	1	5	3	4	

Последовательность вычисленных матриц позволяет формально определить все свойства анализируемого информационного потока.

Рассмотрим эти свойства в той же последовательности, в которой они излагались в теории.

### 1. Определение порядка элементов.

Для этого используется система 
$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(\lambda = \pi_j) &= 0; \\ \sigma_j(\lambda = \pi_j + 1) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Определяем элементы нулевого порядка, для чего полагаем  $\pi_j$ .  $\sigma_j(\lambda = 0) > 0$  для  $j = \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{8}, \underline{9}, \underline{10}$ , так как любая матрица в степени 0 дает 1.

$\sigma_j(\lambda = 1) = 0$  для  $j = \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}$  — это следует из матрицы  $A$ . Совместно указанное соотношение выполняется для  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Следовательно элементы  $X_1, X_2, X_3, X_4$  есть элементы нулевого порядка.

Определяем элементы 1-го порядка, полагая  $\pi_j = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(\lambda = 1) &> 0 \quad \text{для } j = \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{8}, \underline{9}, \underline{10} \text{ (из матрицы } A^1); \\ \sigma_j(\lambda = 2) &= 0 \quad \text{для } j = 1, 2, 3, 4, \underline{5}, \underline{6} \text{ (из матрицы } A^2). \end{aligned} \right\}$$

Совместно заданные условия выполняются для  $j = 5, 6$ . Следовательно,  $X_5, X_6$  — элементы первого порядка.

Определяем элементы 2-го порядка, полагая  $\pi_j = 2$ .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(\lambda = 2) &> 0 \quad \text{для } j = \underline{7}, \underline{8}, \underline{9}, \underline{10}; \\ \sigma_j(\lambda = 3) &= 0 \quad \text{для } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \underline{7}, \underline{10}. \end{aligned} \right\}$$

Совместно заданные условия выполняются для  $j = 7, 10$ . Следовательно,  $X_7, X_{10}$  — элементы второго порядка.

Полагаем  $\pi_j = 3$ .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(\lambda = 3) &> 0 \quad \text{для } j = \underline{8}, \underline{9}; \\ \sigma_j(\lambda = 4) &= 0 \quad \text{для } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \underline{8}, \underline{9}, \underline{10}. \end{aligned} \right\}$$

Совместно заданные условия выполняются для  $j = 8, 9$ . Следовательно,  $X_8, X_9$  — элементы третьего порядка.

### 2. Определение «тактности» системы.

$$N = \max_j \pi_j = 3.$$

Данная схема является трехтактной.

3. *Отсутствие ненулевых элементов на главной диагонали любой из матриц свидетельствует о том, что в анализируемом документеобороте контуров нет.*

4. *Определение входных элементов потока.*

$\sigma_j(\lambda = 1) = 0$  для  $j = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, элементы  $X_1, X_2, X_3, X_4$  — входные элементы.

Например,  $\sigma_6(\lambda = 1) = 2$ . Это означает, что в  $X_6$  входят два элемента, и т. д.

5. *Определение выходных элементов потока.*

$\sigma_i(\lambda = 1) = 0$  для  $i = 8, 9, 10$ . Следовательно, элементы  $X_8, X_9, X_{10}$  — выходные элементы.

Например,  $\sigma_5(\lambda = 1) = 3$ . Это означает, что  $X_5$  используется для формирования 3-х других элементов.

6. *Определение висящих вершин.*

Ситуация  $\sigma_j(\lambda = 1) = \sigma_i(\lambda = 1) = 0$  отсутствует, т.е. висящих вершин нет.

7. *Определение числа путей длиной  $\lambda$ .*

Например,  $a_{28}(\lambda = 2) = 2$ . Это означает, что от  $X_2$  к  $X_8$  имеются два различных пути длиной два.

8. *Определение всевозможных путей между двумя элементами.*

Например,  $a_{18}(\Sigma) = 3$ . Это означает, что от  $X_1$  к  $X_8$  имеются три различных пути длиной 1.

9. *Определение всех элементов, участвующих в формировании данного.*

Например, отличные от нуля элементы 8-го столбца матрицы  $A(\Sigma)$  указывают все элементы потока, участвующие в формировании  $X_8$ , т. е.  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_7$ , причем, например,  $X_5$  — дважды; а, например, ненулевые элементы 5-й строки матрицы  $A(\Sigma)$  указывают все элементы, при формировании которых используется  $X_5$ , т. е.  $X_7, X_8, X_9, X_{10}$ , причем для формирования  $X_8$  элемент  $X_5$  используется дважды.

10. *Определение номера такта, после которого данный элемент может быть «погашен» в памяти системы.*

Например,  $X_1$  уже не используется после  $\tau_1 = 3$ , так как, судя по  $A$ , для формирования  $X_1$  используется  $X_5$  с  $\tau_5 = 1$  и  $X_8$  с  $\tau_8 = 3$ . Максимум равен 3.

11. *Определение числа тактов хранения.*

Например, для  $X_1$   $t_1 = \tau_1 - \pi_1 = 3 - 0 = 3$ .

12. *Рассмотрим столбцы матрицы  $A(B)$ , соответствующие выходным элементам.*

Например, столбец, соответствующий  $X_8$ . Как указывалось, эта матрица задает число всех связей между элементами. В фор-



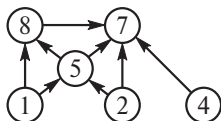


Рис. 4.28. Вид фрагмента графа, связанного с формированием  $X_8$ .

мировании  $X_8$  участвуют элементы  $X_1, X_2, X_4, X_5$  и  $X_7$ , причем  $X_1$  и  $X_2$  — трижды, а  $X_5$  — дважды.

Наличие большого числа ненулевых и неединичных элементов в столбце  $j = 8$  свидетельствует о необходимости проведения содержательного анализа фрагмента общей схемы потока, связанной с формированием  $X_8$  (рис. 4.28). Быть может, удастся упростить фрагмент за счет исключения излишних связей или промежуточных элементов.

## 4.6. Структурно-топологические характеристики систем и их применение

При проведении анализа системы целесообразно оценить количественно качество структуры системы и ее элементов с позиций общесистемного подхода. Рассмотрим основные структурно-топологические характеристики. Сначала выделим основные виды структур с точки зрения топологии внутренних связей.

**Виды топологических структур.** Виды топологических структур рассмотрим на примере пяти элементов.

**Связность структур.** Данная характеристика позволяет выделить наличие обрывов, висячие вершины и т. д. Для неориенти-

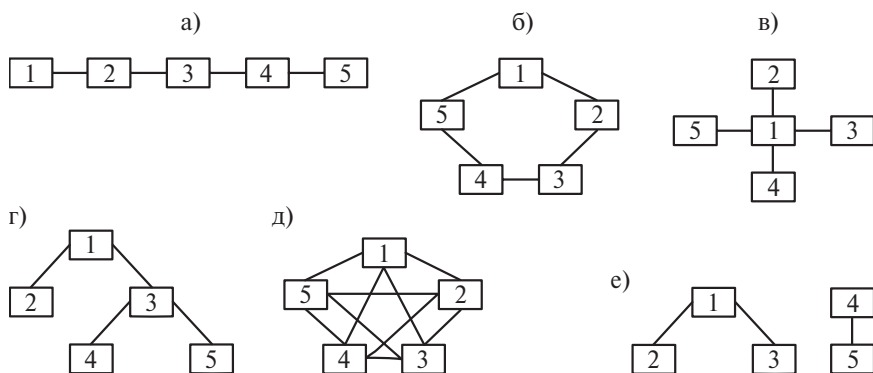


Рис. 4.29. Виды топологических структур: а) последовательная структура; б) кольцевая структура; в) радиальная структура; г) древовидная структура; д) структура типа полный граф; е) несвязная структура

рованных графов связность всех элементов в структуре соответствует выполнению условия:

$$0,5 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \geq n-1, i \neq j. \quad (4.6)$$

В соотношении (4.6)  $a_{ij}$  — элемент матрицы смежности. Правая часть (4.6) определяет необходимое минимальное число связей в структуре неориентированного графа, содержащего  $n$  вершин. Коэффициент 0,5 берется в силу того, что одна и та же связь  $a_i$  и  $a_j$  учитывается дважды.

Соотношение (4.6) можно переписать в виде

$$0,5 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = m,$$

т.е. это не что иное, как число ребер в неориентированном графе.

Определим  $m$  как функцию от  $n$  для основных типов структур в общем виде.

Последовательная структура. Очевидно  $m = n - 1$ .

Кольцевая структура. Очевидно  $m = n$ .

Радиальная структура. Очевидно  $m = n - 1$ .

Древовидная структура. Трудно сказать в общем виде, так как параметр определяется видом дерева.

Структура полный граф. Для первого элемента число связей  $n - 1$ , так как он связан со всеми элементами, кроме себя. У второго элемента  $n - 2$  связей, т.к. нет связи с самим собой, и связь с первым мы уже учли. Аналогично у третьего —  $n - 3$  и т. д. У последнего — 0, так как все связи учтены. Итак, имеем  $m = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 0 = 0,5n(n - 1)$ .

Для несвязной структуры эта характеристика не имеет смысла.

**Структурная избыточность.** Это структурный параметр, отражающий превышение общего числа связей над необходимым минимальным числом связей. Разделим в соотношении (4.6) все члены на  $n-1$  и разность обозначим через  $R$ . Тогда будем иметь

$$R = 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{1}{n-1} - 1; \quad (4.7)$$

$$R = \frac{m}{n-1}, \quad (4.8)$$

где  $R$  — структурная избыточность.

Найдем структурную избыточность для рассмотренных типовых структур в общем виде, учитывая ранее найденную зависимость  $m = m(n)$ .

1. Последовательная структура:  $m = n - 1$ ;  $R = \frac{n-1}{n-1} - 1 = 0$ .
2. Кольцевая структура:  $m = n$ ;  $R = \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}$ .
3. Радиальная структура:  $m = n - 1$ ;  $R = \frac{n-1}{n-1} - 1 = 0$ .
4. Структура полный граф:  $m = \frac{n(n-1)}{2}$ ;  $R = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} - 1 = \frac{n-2}{2}$ .

Данная структурная характеристика используется для косвенной оценки экономичности и надежности исследуемой системы. Для систем с избыточностью —  $R > 0$ , для систем с минимальной избыточностью —  $R = 0$ , для несвязных систем —  $R < 0$ .

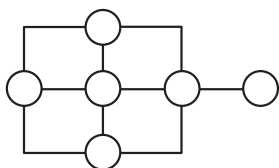


Рис. 4.30. Вид графа

Очевидно, что чем больше  $R$ , тем потенциально более надежна система, но структурная избыточность может быть достигнута за счет увеличения связности только одних вершин (см. рис. 4.30).

Поэтому вводят параметр  $\epsilon^2$ , учитывающий неравномерность распределения связей или их несимметричность.

Вспомним понятие «степень вершины»  $\rho_i$ , т. е. число ребер, инцидентных вершине  $i$ . Было показано, что

$$0,5 \left( \sum_{i=1}^n \rho_i \right) = m.$$

Если связи распределены равномерно, то, очевидно, все  $c_i$  одинаковы. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \rho_i = n\bar{\rho} \quad \text{и} \quad \bar{\rho} = \frac{2m}{n},$$

где  $\bar{\rho}$  — средняя степень вершины.

Теперь можно определить квадратичные отклонения распределения степеней вершин от равномерного.

Среднеквадратичное отклонение равно

$$\epsilon^2 = \sum_{i=1}^n (\rho_i - \bar{\rho})^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \rho_i \bar{\rho} + \sum_{i=1}^n (\bar{\rho})^2; \quad 2 \sum_{i=1}^n \rho_i \bar{\rho} = 2\bar{\rho} \sum_{i=1}^n \rho_i.$$

Так как  $\sum_{i=1}^n \rho_i = 2m$  и  $\bar{\rho} = 2\frac{m}{n}$ , то  $2 \sum_{i=1}^n \rho_i \bar{\rho} = 2 \cdot 2\bar{\rho}\frac{m}{n} \cdot n \cdot 2\frac{m}{n} =$

$$= 8\frac{m^2}{n}; \quad 2 \sum_{i=1}^n \bar{\rho}^2 = 4 \cdot n\frac{m^2}{n^2} = \frac{4m^2}{n}.$$

И, окончательно,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \sum_{i=1}^n \rho_i^2 - 8\frac{m^2}{n} + 4\frac{m^2}{n}; \\ \varepsilon^2 &= \sum_{i=1}^n \rho_i^2 - \frac{4m^2}{n}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Показатель  $\varepsilon^2$  характеризует недоиспользованные возможности заданной структуры, имеющей  $m$  ребер и  $n$  вершин.

Рассмотрим структурную неравномерность для типовых схем.

1. Последовательная структура:

$$m = n - 1. \quad \text{Тогда} \quad \frac{4m^2}{n} = \frac{4(n-1)^2}{n}.$$

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^2 = 1^2 + \underbrace{2^2 + 2^2 + \dots + 2^2}_{n-2} + 1^2 = 2 + 2^2(n-2) = 4n - 6.$$

$$\varepsilon^2 = 4n - 6 - \frac{4(n-2)^2}{n} = \frac{2(n-2)}{n}.$$

2. Кольцевая структура:

$$m = n, \quad \sum_{i=1}^n \rho_i^2 = \underbrace{2^2 + 2^2 + \dots + 2^2}_n = 2^2 n.$$

$$\varepsilon^2 = 2^2 n - \frac{4n^2}{n} = 0.$$

3. Радиальная структура:

$$m = n - 1, \quad \sum_{i=1}^n \rho_i^2 = (n-1)^2 + \underbrace{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}_{n-1} = n(n-1).$$

$$\varepsilon^2 = n(n-1) - \frac{4(n-1)^2}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{n}.$$

4. Структура полный граф:

$$m = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \frac{4m^2}{n} = \frac{4}{n} \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{4} = n(n-1)^2.$$

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^2 = \underbrace{(n-1)^2 + (n-1)^2 + \dots + (n-1)^2}_n = n(n-1)^2.$$

$$\varepsilon^2 = n(n-1)^2 - n(n-1)^2 = 0.$$

**Структурная компактность.** Для ее оценки вводится параметр, отображающий близость элементов между собой. *Близость* 2-х элементов  $i$  и  $j$  определяется через минимальную длину пути для ориентированного графа (цепи — для неориентированного) —  $d_{ij}$ . Тогда сумма всех минимальных путей (цепей) между всеми элементами отражает общую структурную близость элементов в анализируемой структуре. Обозначим эту величину через  $Q$  и, в соответствии с определением, будем иметь:

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}, \quad i \neq j. \quad (4.10)$$

Рассмотрим этот параметр для основных структур.

**1. Последовательная структура.**

Непосредственно из ее изображения имеем:

Для 1-го элемента

$$\sum_{j=1}^n d_{1j} = d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{15} + \dots + d_{1n} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1.$$

Для 2-го элемента

$$\sum_{j=1}^n d_{2j} = d_{21} + d_{23} + d_{24} + d_{25} + \dots + d_{2n} = 1 + 1 + 1 + 3 + \dots + n - 2.$$

Для 3-го элемента

$$\sum_{j=1}^n d_{3j} = d_{31} + d_{33} + d_{34} + d_{35} + \dots + d_{3n} = 2 + 1 + 1 + 2 + \dots + n - 3.$$

Для  $n$ -го элемента

$$\sum_{j=1}^n d_{nj} = n - 1 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Перепишем это иначе:

$$Q_1 \quad \begin{array}{c} 1 + \\ 2 + 1 + \end{array} \left[ \begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) \\ 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-2) \\ 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-3) \end{array} \right]_{n-1}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{n-1}$$

$$\begin{array}{l} (n-1) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ (n-2) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ (n-3) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} + 1 \\ + 1 \\ + 1 + 2 \end{array} \right. \quad Q_2$$

Теперь очевидно, что  $Q_1 = Q_2$  и  $Q = 2Q_1$ .

Рассмотрим  $Q_1$ . Сумма натуральных чисел по столбцам равна

$$Q_1 = 1(n-1) + 2(n-1-1) + 3(n-1-1-1) + \dots + (n-1).$$

$$Q_1 = 1(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \dots + (n-1).$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i).$$

И, окончательно,

$$Q = 2 \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i). \quad (4.11)$$

Раскроем последнее выражение

$$Q = 2n \sum_{i=1}^{n-1} i - 2 \sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Известна справочная формула

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Откуда

$$2 \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}.$$

И, окончательно,

$$Q = \frac{1}{3} n(n^2 - 1). \quad (4.12)$$

2. Кольцевая структура. Имеем для 1-го элемента ( $i=1$ )

$$n = 2 \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} \\ \text{---} \end{array} \quad d_{12} = 1;$$

$$n = 3 \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3} \end{array} \quad \sum_{j=1}^3 d_{1j} = 1 + 1;$$

$$n = 4 \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \quad \sum_{j=1}^4 d_{1j} = 1 + 2 + 1;$$

$$n = 5 \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \text{---} \textcircled{5} \end{array} \quad \sum_{j=1}^5 d_{1j} = 1 + 2 + 1 + 2;$$

$$n = 6 \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{5} \\ \textcircled{3} \text{---} \textcircled{6} \\ \textcircled{4} \end{array} \quad \sum_{j=1}^6 d_{1j} = 1 + 2 + 3 + 1 + 2.$$

Теперь очевидно, что для  $n$  — нечетного

$$\sum_{j=1}^n d_{1j} = 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n-1}{2} + 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n-1}{2};$$

$$\sum_{j=1}^n d_{1j} = 2 \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n-1}{4}\right) = \frac{n^2-1}{4}.$$

Мы нашли сумму всех минимальных путей (цепей) для 1-го элемента (в случае нечетного числа элементов). И это справедливо для всех  $n$  элементов. Окончательно (для  $n$  — нечетного)

$$Q = \frac{n(n^2+1)}{4}. \quad (4.13)$$

Для  $n$  – четного имеем

$$\sum_{j=1}^n d_{1j} = \left[ 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n}{2} \right] + \left[ 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n}{2} \right] - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

И, окончательно, для  $n$  – четного

$$Q = \frac{n^3}{4}. \quad (4.14)$$

### 3. Радиальная структура.

Непосредственно из ее изображения (см. п. 4.6.1) имеем для центрального элемента

$$\sum_{j=1}^n = 1(n-1).$$

Для второго и, в силу симметричности, любого из оставшихся элементов, имеем

$$\sum_{j=1}^n d_{2j} = \sum_{j=1}^n d_{3j} = \dots = 1 + 2(n-2) = 2n-3.$$

Первый член в последнем выражении 1 – это путь до 1-го элемента, второй 2 – для любого другого, а их  $(n-2)$ , так как нет связи с самим собой, а связь с первым уже учтена. И таких связей, очевидно,  $(n-1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} Q &= (n-1) + (2n-3)(n-1); \\ Q &= 2(n-1)^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

### 4. Структура полный граф.

У каждого элемента есть связи со всеми, кроме себя. Это –  $(n-1)$ , а всего вершин  $n$ . Итак, имеем

$$Q = n(n-1).$$

Для оценки структурной компактности часто используется относительный показатель

$$Q_{\text{отн}} = \frac{Q}{Q_{\min}} - 1, \quad (4.16)$$

где  $Q_{\min} = n(n-1)$  – минимальное значение компактности для структуры типа полный граф.



Структурную компактность можно характеризовать и другим параметром — *диаметром структуры*:

$$d = \max_{i,j} d_{ij}.$$

У полного графа указанная величина равна единице, поэтому он и обладает максимальной компактностью.

Учитывая преобладающий информационный характер связей в АСУ, можно сказать, что как величина  $Q_{\text{отн}}$ , так и  $d$  интегрально оценивают инерционность процессов в системе, а при равных значениях  $\varepsilon^2$  и  $R$  (равномерность и структурная избыточность) их возрастание отражает увеличение числа разделяющих связей в структуре, характеризуя тем самым снижение общей надежности.

### **Степень централизации структуры.**

1. Наименее «централизованными» и наиболее «размытыми» с этих позиций являются структуры кольцевая и полный граф, в которых элементы нагружены абсолютно одинаково. Для этих двух структур структурная компактность

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} = n \sum_{i=1}^n d_{ij},$$

где  $n \sum_{i=1}^n d_{ij}$  — сумма расстояний от  $i$ -того элемента до всех остальных.

Рассмотрим отношение  $\frac{Q}{n \sum_{j=1}^n d_{ij}}$ . Для кольцевой структуры

$\sum_{i=1}^n d_{ij}$  равны между собой. Для полного графа эти величины хотя

и другие (по сравнению с предыдущим случаем), но тоже равны между собой.

Тогда для этих структур, введя обозначение, получим

$$2z_i = \frac{Q}{n \sum_{j=1}^n d_{ij}} = n \frac{\sum_{i=1}^n d_{ij}}{\sum_{j=1}^n d_{ij}} = n.$$

Для любой другой структуры эта величина будет больше.

Обозначим

$$2z_{\max} = \frac{Q}{\left[ \sum_{j=1}^n d_{ij} \right]_{\min}}.$$

Для того чтобы эта величина для кольцевой структуры и полного графа (один крайний случай) начиналась с нуля, вычтем из нее  $n$ .

$$\alpha' = 2z_{\max} - n = Q \left[ \sum_{j=1}^n d_{ij} \right]_{\min}^{-1} - n.$$

Проведем нормализацию. Для этого рассмотрим другой крайний случай — радиальную структуру. Было получено

$$Q = 2(n-1)^2, \quad \left[ \sum_{j=1}^n d_{ij} \right]_{\min} = n-1.$$

Тогда для радиальной структуры

$$\alpha' = 2(n-1)^2(n-1)^{-1} - n = n-2.$$

Это максимальное значение  $\alpha'$ . У всех других структур  $\alpha'$  будет меньше. Потребуем, чтобы эта величина не превышала единицу. Тогда

$$\alpha = \alpha' (n-2)^{-1} = (2z_{\max} - n)(n-2)^{-1}.$$

2. Но, с другой стороны, чем более компактна структура, тем легче центру управлять ею. Поэтому введем новый параметр  $\beta'$ , выражаемый через  $z_{\max}$  и возрастающий с ростом компактности. В соответствии с определением

$$\beta' = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n d_{ij}}{Q} \right]_{\max} = (2z_{\max})^{-1}.$$

Для нашего предельного случая (радиальная структура), как указывалось,

$$Q = 2(n-1)^2, \quad \left[ \sum_{j=1}^n d_{ij} \right]_{\min} = n-1.$$

Тогда

$$\beta' = (n - 1)[2(n - 1)^2]^{-1} = [2(n - 1)]^{-1}.$$

Потребуем также, чтобы в этом предельном случае эта величина равнялась бы единице:

$$\beta = \beta' 2(n - 1).$$

Тогда

$$\beta = 2(n - 1)(2z_{\max})^{-1} = (n - 1)(z_{\max})^{-1}.$$

Теперь введем понятие *индекса центральности*, определив его как

$$\gamma = \alpha\beta = \frac{(n - 1)(2z_{\max} - n)}{(n - 2)z_{\max}}. \quad (4.17)$$

Для структур с максимальной степенью централизации (радиальная)  $\gamma = 1$ , для структур с равномерным распределением связей (кольцевая и полный граф)  $\gamma = 0$ .

**Сравнительный анализ топологических структур.** Результаты вычисления топологических характеристик для типовых структур (для случая 5-ти элементов) сведены в таблицу 4.16. Параметры этой таблицы для всех структур, кроме древовидной, вычислялись по приведенным выше формулам (4.8—4.17). Для древовидной структуры расчеты произведем непосредственно исходя из определений параметров.

Таблица 4.16

Структура \ Параметр	$R$	$\epsilon^2$	$Q$	$Q_{\text{отн}}$	$d$	$\gamma$
Последовательная	0	1,2	40	1,0	4	0,7
Кольцевая	0,25	0	30	0,5	2	0
Радиальная	0	7,2	32	0,6	2	1,0
Древовидная	0	3,2	36	0,8	3	0,81
Полный граф	2,5	0	20	0	1	0
Несвязанная	-0,25	—	—	—	—	—

Структурная избыточность  $R$

$$R = \frac{m}{n - 1} - 1 = \frac{4}{5 - 1} - 1 = 0.$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^n \rho_i^2 - \frac{4m^2}{n} = 2^2 + 1^1 + 3^2 + 1^2 + 1^2 - \frac{4 \cdot 4^2}{5} = 3,2.$$

Структурная компактность

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}, \quad i \neq j.$$

$$\sum_{j=1}^5 d_{1j} = d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{15} = 1 + 1 + 2 + 2 = 6,$$

$$\sum_{j=1}^5 d_{2j} = 1 + 2 + 3 + 3 = 9,$$

$$\sum_{j=1}^5 d_{3j} = 1 + 2 + 1 + 1 = 5,$$

$$\sum_{j=1}^5 d_{4j} = 2 + 3 + 1 + 2 = 8,$$

$$\sum_{j=1}^5 d_{5j} = 2 + 3 + 1 + 2 = 8.$$

Структурная компактность

$$Q = 6 + 9 + 5 + 8 + 8 = 36.$$

Относительная структурная компактность

$$Q_{\text{отн}} = \frac{Q}{Q_{\min}} - 1,$$

где

$$Q_{\min} = n \cdot (n - 1) = 5 \cdot 4 = 20.$$

$$Q_{\text{отн}} = \frac{36}{20} - 1 = 0,8.$$

## Степень централизации

$$\gamma = \frac{(n-1) \cdot (2z_{\max} - n)}{(n-2)z_{\max}}, \quad \text{где} \quad 2z_{\max} = \frac{Q}{\left[ \sum_{j=1}^n d_{ij} \right]_{\min}}.$$

$$2z_{\max} = \frac{36}{5} = 7,2 \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{(5-1)(7,2-5)}{(5-2)\frac{7,2}{2}} = 0,81.$$

Анализ табл. 4.16 показывает следующее.

1. Для несвязных структур структурная избыточность  $R < 0$ , для структур без избыточности (последовательная, радиальная, древовидная)  $R = 0$ ; для структур с избыточностью по связям (кольцевая, полный граф)  $R > 0$ .

2. Структуры (последовательная, радиальная, древовидная) с  $R = 0$  различаются по показателю  $\varepsilon^2$ , наибольшую неравномерность связей имеет радиальная структура.

3. Наибольшую близость элементов (показатель  $Q_{\text{отн}}$ ) имеет структура типа полный граф, наименьшую — последовательная.

4. Радиальная и древовидная структуры, имеющие одинаковые или близкие значения  $R$ ,  $Q_{\text{отн}}$ ,  $d$ , значительно отличаются по показателям  $\varepsilon^2$  и  $\gamma$ , что соответствует физическому смыслу, ибо отход от полной централизации в структуре ведет к большей равномерности распределения связей по элементам.

Рассмотренные выше структурные характеристики были получены только на основе информации о составе элементов и их связях. Дальнейшее развитие методологии структурных параметров для решения задач структурного анализа может быть основано на учете неструктурной информации за счет введения числовых функций на графах. Это позволяет, наряду с составом элементов и направленностью их взаимодействия, учитывать при решении задач другие стороны их функционирования (временные, надежностные, стоимостные и т. п.).

Рассмотрим далее третий уровень формализации задач структурного анализа, когда учитывается состав сигналов взаимосвязи элементов и их вид.

Напомним, что на первом уровне учитывалось лишь наличие связи между элементами, на втором — наличие и направление этой связи.

**Пример расчета структурно-топологических характеристик.** Пусть необходимо для структуры, представленной на рис. 4.31, вычислить все ее структурно-топологические характеристики, по полученным результатам охарактеризовать структуру.

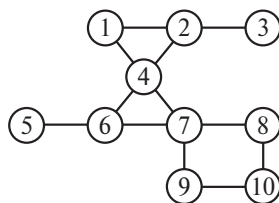


Рис. 4.31. Вид исходного графа

### 1. Связность структуры.

Для неориентированных графов связность всех элементов в структуре соответствует выполнению следующего условия:

$$0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \geq n - 1, \quad i \neq j,$$

где  $a_{ij}$  — элемент матрицы смежности.

В данном случае имеем  $0,5 \cdot 24 > 9$ . Следовательно, граф является связным.

### 2. Структурная избыточность $R$ .

$$R = 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{1}{n-1} - 1 \quad \text{или} \quad R = \frac{m}{n-1} - 1,$$

где  $m$  — число ребер,  $n$  — число вершин.

В данной структуре  $n = 10$ ,  $m = 12$  и

$$R = \frac{12}{10-1} - 1 = \frac{1}{3} > 0.$$

Поскольку  $R > 0$ , то в данной системе присутствует структурная избыточность.

### 3. Среднеквадратичное отклонение $\epsilon^2$ .

Справедливо следующее соотношение:

$$\epsilon^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 - \frac{4}{n} m^2, \quad \rho_i^2 \text{ — квадрат степени } i\text{-той вершины.}$$

Для данной системы:

$$\epsilon^2 = 2^2 + 3^2 + 1 + 4^2 + 1 + 3^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 - \frac{4 \cdot 12^2}{10} = 10,4.$$

#### 4. Структурная компактность.

Воспользуемся соотношением

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}, \quad i \neq j,$$

где  $d_{ij}$  — минимальная длина цепи между  $i$ -той и  $j$ -той вершинами.

$$\sum_{j=1}^{10} d_{1j} = 1 + 2 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 21, \quad (j \neq 1);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{2j} = 1 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 20, \quad (j \neq 2);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{3j} = 2 + 1 + 2 + 4 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 28, \quad (j \neq 3);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{4j} = 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 15, \quad (j \neq 4);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{5j} = 3 + 3 + 4 + 2 + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 = 25, \quad (j \neq 5);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{6j} = 2 + 2 + 3 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 17, \quad (j \neq 6);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{7j} = 2 + 2 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 15, \quad (j \neq 7);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{8j} = 3 + 3 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 = 21, \quad (j \neq 8);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{9j} = 3 + 3 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 = 21, \quad (j \neq 9);$$

$$\sum_{j=1}^{10} d_{10j} = 4 + 4 + 5 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 27, \quad (j \neq 10).$$

Следовательно,  $Q = 210$ .

Относительный показатель  $Q_{\text{отн}} = \frac{Q}{Q_{\text{min}}} - 1$ , где  $Q_{\text{min}} = n(n-1)$  — структурная компактность для полного графа.

$$Q_{\text{отн}} = \frac{210}{10(10-1)} - 1 = 1,3.$$

5. Степень централизации в структуре  $\gamma$ .

Воспользуемся соотношением (4.17)

$$\gamma = \frac{(n-1)(2z_{\text{max}} - n)}{(n-2)z_{\text{max}}}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$z_{\text{max}} = \frac{210}{2 \cdot 15} = 7; \quad \gamma = \frac{9}{8} \cdot \frac{2 \cdot 7 - 10}{7} \approx 0,643.$$

Мы вычислили основные структурно-топологические характеристики заданной структуры. Эти характеристики имеют следующие числовые значения:

- структурная избыточность  $R = 0,33$ ;
- среднеквадратичное отклонение  $\varepsilon^2 = 10,4$ ;
- структурная компактность  $Q = 210$ ,  $Q_{\text{отн}} = 1,3$ ;
- степень централизации в структуре  $\gamma = 0,643$ .

Структура является связной. Для того, чтобы судить о степени близости анализируемой структуры к типовым структурам по различным параметрам, необходимо составить таблицу, аналогичную таблице 4.16, и заполнить ее данными для случая  $n = 10$ . Для древовидной структуры необходимо учесть также, что  $m = 12$ . Сравнение этих данных с данными анализируемой структуры позволит получить ответы на поставленные вопросы.

Итак, заполняем табл. 4.17 для случая  $n = 10$ ,  $m = 12$ . В строку «Анализируемая структура» подставляем только что рассчитанные данные.

### ***Структурная избыточность***

На основании выражений (4.6—4.17) произведем требуемые вычисления. Напомним, что

$$R = \frac{m}{n-1} - 1.$$

1. Последовательная структура:

$$m = n - 1; \quad R = \frac{n-1}{n-1} - 1 = 0.$$



2. Кольцевая структура:

$$m = n; \quad R = \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1} = 0,1.$$

3. Радиальная структура:

$$m = n - 1; \quad R = \frac{n-1}{n-1} - 1 = 0.$$

4. Древовидная структура (в данном конкретном случае):

$$R = \frac{m}{n-1} - 1 = \frac{12}{10-1} - 1 = 0,33.$$

5. Структура полный граф:

$$m = \frac{n(n-1)}{2}; \quad R = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} - 1 = \frac{n-2}{2} = 4.$$

### *Среднеквадратичное отклонение*

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{10} \rho_i^2 - \frac{4m^2}{n}.$$

1. Последовательная структура:

$$\varepsilon^2 = \frac{2(n-2)}{n} = 1,6.$$

2. Кольцевая структура:

$$\varepsilon^2 = 0.$$

3. Радиальная структура:

$$\varepsilon^2 = \frac{(n-1)(n-2)^2}{2} = 57,6.$$

4. Древовидная структура (в данном конкретном случае):

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^1 + 3^2 + 1^2 + \\ &+ 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 - \frac{4 \cdot 9^2}{10} = 7,6. \end{aligned}$$

5. Структура полный граф:

$$\varepsilon^2 = 0.$$

### ***Структурная компактность***

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}, \quad i \neq j.$$

1. Последовательная структура:

$$Q = \frac{1}{3} n(n^2 - 1) = 330.$$

2. Кольцевая структура:

$$Q = \frac{n^3}{4} = 250.$$

3. Радиальная структура:

$$Q = 2(n - 1)^2 = 162.$$

4. Древовидная структура (в данном конкретном случае):

$$\sum_{i=1}^{10} d_{1j} = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 20,$$

$$Q = 20 + 17 + 23 + 21 + 25 + 31 + 31 + 29 + 29 + 31 = 257.$$

5. Структура полный граф:

$$Q = n(n - 1) = 90.$$

### ***Относительная структурная компактность***

$$Q_{\text{отн}} = \frac{Q}{Q_{\text{min}}} - 1.$$

1. Последовательная структура:

$$Q_{\text{отн}} = \frac{330}{90} - 1 = 2,67.$$

2. Кольцевая структура:

$$Q_{\text{отн}} = \frac{250}{90} - 1 = 1,78.$$

3. Радиальная структура:

$$Q_{\text{отн}} = \frac{162}{90} - 1 = 0,8.$$

4. Древоподобная структура (в данном конкретном случае):

$$Q_{\text{отн}} = \frac{257}{90} - 1 = 1,85.$$

5. Структура полный граф:

$$Q_{\text{отн}} = \frac{90}{90} - 1 = 0.$$

### ***Степень централизации***

$$\gamma = \frac{(n-1)(2z_{\max} - n)}{(n-2)z_{\max}}, \quad \text{где } 2z_{\max} = \frac{Q}{\left[ \sum_{j=1}^n d_{ij} \right]}.$$

1. Последовательная структура.

Можно показать, что для  $N$ -ного элемента (т. е. элемента, находящегося на месте  $N$ ) справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} = \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2}.$$

Для  $n = 10$  и  $N = 5$  и  $N = 6$ :

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{j=1}^{10} d_{5j} \right]_{\min} &= \left[ \sum_{j=1}^{10} d_{6j} \right]_{\min} = \frac{4(4+1)}{2} + \frac{(10-4)(10-4-1)}{2} = \\ &= \frac{5(5+1)}{2} + \frac{(10-5)(10-5-1)}{2} = 25; \end{aligned}$$

$$2z_{\max} = \frac{330}{25} = 13,2;$$

$$\gamma = \frac{(10-1)2(13,2-10)}{(10-2) \cdot 13,2} = 0,18.$$

2. Кольцевая структура:

$$2z_{\max} = n \quad \text{и} \quad \gamma = 0.$$

3. Радиальная структура:

$$2z_{\max} = \frac{2(n-1)^2}{n-1} = 2(n-1). \quad \gamma = \frac{(n-1)(2(n-1)) - n}{2(n-2)(n-1)} = 1.$$

4. Древовидная структура (в данном конкретном случае):

$$2z_{\max} = \frac{257}{17} = 15,12. \quad \gamma = \frac{(10-1)(15,12-10)2}{(10-2)15,12} = 0,76.$$

5. Структура полный граф:

$$2z_{\max} = \frac{n(n-1)}{n-1} = n \quad \text{и} \quad \gamma = 0.$$

Итак, имеем:

Таблица 4.17

Структура \ Параметр	$R$	$\epsilon^2$	$Q$	$Q_{\text{отн}}$	$d$	$\gamma$
Последовательная	0	1,6	330	2,67	9	0,18
Кольцевая	0,1	0	250	1,78	2	0
Радиальная	0	57,6	162	0,8	2	1,0
Древовидная	0,33	7,6	257	1,85	5	0,76
Полный граф	4	0	90	0	1	0
Анализируемая структура	0,33	10,4	210	1,3	5	0,643

Из табл. 4.17 следует, что по своим параметрам анализируемая структура ближе всего к древовидной структуре.

Если заранее изучить свойства типовых структур, то можно с большой степенью уверенности судить о свойствах анализируемой структуры по близости соответствующих параметров.

## 4.7. Модели функционирования организационной системы

**Основные допущения и определения.** Для построения математической модели структурного сопряжения элементов в системе введем ряд допущений:

1. Входной сигнал  $x(t)$ , поступающий к элементу в момент времени  $t$ , будем рассматривать как совокупность элементарных сигналов  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_m(t)$ , одновременно возникающих на входах элемента.