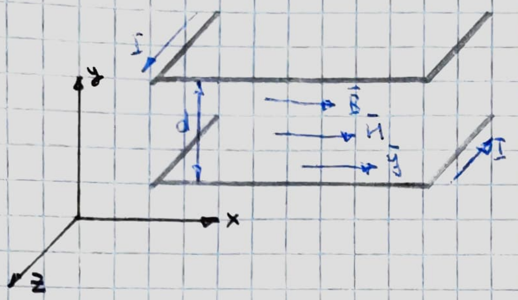
Измайлов Т.А. ИУ5-31Б Вариант №21

Задача 2.3 Тема: Магнитостатика

Два плоских проводника с токами I, текущими в противоположных направлениях, разделены слоем магнетика толщиной d. Ширина проводников равна L ($L \gg d$). Магнитная проницаемость μ магнетика меняется в направлении оси y по закону $\mu = f(y)$



Графики $\vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$ при $y = [0, d]$ — ?
$i'_n, i'_{об}$ — ? L_p — ?

$$\mu = f(y) = \frac{y^n + d^n}{d^n} \qquad \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{2}{1} \qquad n = 2$$

$$\mu = \frac{y^2 + d^2}{d^2}$$

Решение.

По правилу правой руки в-ры напряжённости будут иметь направления ~~как на~~ Рис. 1 (H_1 — соответствует нижнему, H_2 — верхнему).
Вектора $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ по значению равны друг другу и противоположны по направлению, поэтому напряжённость снаружи равна 0.

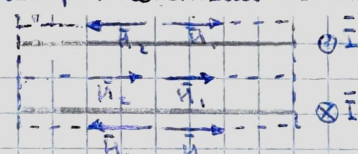


Рис 1

По т. о циркуляции $\vec{H}$

$$\oint(\vec{H}, \vec{dL}) = I$$

$$\oint(\vec{H}, \vec{dL}) = \underbrace{\int_{вертик}(\vec{H}, \vec{dL})}_{0 \cdot \cos(90^\circ)} + \int_{внутр}(H, dL) = \int H \cos 0^\circ \, dL = \{ \text{т.к. поле внутри}$$

$$\text{однородно } (L \ll d) \} = H \int_{внутр} dL = HL = I \Rightarrow H = \frac{I}{L} - const.$$

Вычислим магнитную индукцию $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 H \qquad \mu = \frac{y^2+d^2}{d^2} \Rightarrow B = \mu_0 \frac{y^2+d^2}{d^2} \frac{I}{L}$$

$$B(0) = \mu_0 \frac{I}{L} \qquad B(d) = \frac{2\mu_0 I}{L}$$

Вычислим вектор намагниченной среды $\mathcal{J}$:

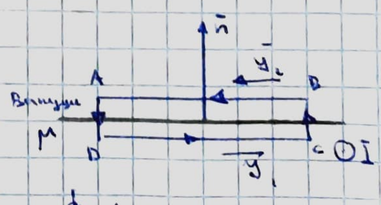
$\mathcal{J} = \varkappa \vec{H}$, где $\varkappa$ — магнитная восприимчивость среды.

$$\varkappa = \mu - 1 \Rightarrow \mathcal{J} = (\mu - 1) H \qquad \mu = \frac{y^2+d^2}{d^2}$$

$$\mathcal{J} = \left(\frac{y^2+d^2}{d^2} - 1\right) H = \frac{y^2}{d^2} H = \frac{y^2}{d^2} \frac{I}{L}$$

$$\mathcal{J}(0) = 0 \qquad \mathcal{J}(d) = \frac{I}{L}$$

Теорема о циркуляции $\mathcal{J}$ в инт. форме



$$\oint \mathcal{J} dl = I'$$

т.к. AD и BC ≪ AB и CD, то $\oint_{AD} \mathcal{J} dL = 0$ и $\oint_{BC} \mathcal{J} dL = 0$

$\mathcal{J}_2 = 0$ т.к. среда — вакуум

$$\int_2^1 \mathcal{J} dL = (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2) l \qquad \mathcal{J}_2 = 0 \Rightarrow \int_2^1 \mathcal{J} dL = \mathcal{J}_1 L \qquad \mathcal{J}_1 \cancel{L} = i'_n \cancel{L} \Rightarrow i'_n = \mathcal{J}_1 = \frac{y^2}{d^2}\frac{I}{L}$$

Найдём объёмную плотность токов намагничивания:

Теорема о циркуляции J в диф. виде:

$$\operatorname{rot} \bar{J} = \bar{i}'_{об}$$

т.к. вектор $\bar{J}$ сонаправлен $\bar{H}$ и $\bar{B}$, то $J_y = 0$ $J_z = 0$, тогда:

т.к. J_x по z не измен.

$$\operatorname{rot} \bar{J} = \begin{vmatrix} \bar{e}_z & \bar{e}_x & \bar{e}_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & J_x & 0 \end{vmatrix} = \cancel{-\bar{e}_y \frac{\partial J_x}{\partial z}} - \bar{e}_z \frac{\partial J_x}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{i}'_{об} = -\bar{e}_z \frac{\partial J_x}{\partial y} = \frac{2yI}{d^2 L}$$

Определим индуктивность единицы длины этой двухпров. линии:

Найдём поток вектора $\bar{B}$ через продольное сечение:

$$\Phi = \int_S B\,dS = \int_0^d B(y)\, l\, dy = \int_0^d \mu_0 \frac{I l}{L} \frac{y^2 + d^2}{d^2} dy = \frac{\mu_0 I l}{d^2 L}\left(\frac{y^3}{3} + y d^2\right)\Bigg|_0^d =$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{d^2 L}\left(\frac{d^3}{3} + d^3\right) = \frac{4}{3}\frac{\mu_0 I d l}{L}$$

Найдём индуктивность L:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{4}{3}\frac{\mu_0 d l}{L}$$

Т.к. требуется найти индуктивность единицы длины, то необходимо L поделить на длину проводника l

$$L_1 = \frac{4}{3}\frac{\mu_0 d}{L}$$

Проверка:

$$I' = \oint_l i_n\, dl + \int_0^d i'_{об}\, l\, dy = \frac{I}{L} l + \left(-\int_0^d \frac{2yI}{d^2 L} l\, dy\right) = \frac{I}{L} l - \frac{y^2 I l}{d^2 L}\Bigg|_0^d = I - I = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ значение найдено верно.

Графики: (с учётом того, что $\bar{H}$ снаружи $= 0 \Rightarrow \bar{B}$ и $\bar{J} = 0$):