Лабораторная работа №1 (Э-81)
Изучение вынужденных электрических
колебаний в колебательном контуре.

Цель работы: измерение амплитудных резонансных
кривых колебательных контуров и определение
по ним характеристик контуров: резонансной
частоты, ширины резонансной кривой, доб-
ротности, коэффициента затухания,
логарифмического декремента, а так же расчёт
номинальных значений ёмкости и сопротив-
ления.

Теоретическая часть

1. Вынужденные эл. колебания.

Возникают вынужденные колебаний подачей
переменного напряжения $U = U_m \cos \omega t$ на
колебательный контур, состоящий из катушки
индуктивности L, конденсатора ёмкости C и
эл. сопротивления R.

Частота вынуж. колеб.
будет совпадать с
частотой и внешнего
приложенного напряжения
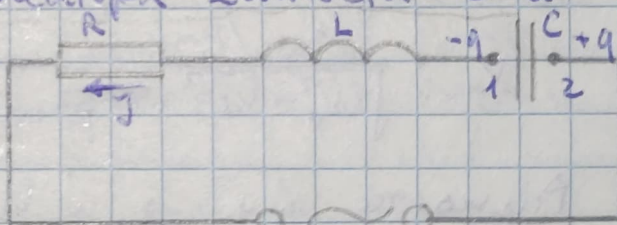
$$U = U_m \cos(\omega t)$$

2. Уравнение вынужденных колебаний, его решение.

I Внешнее U – есть $\mathcal{E}$. В катушке за счёт I
возникает $\mathcal{E}_{c.инд}$. Закон Ома для цепи
на $(1-2)$ принимает вид: $IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{c.инд} + U$
где $\varphi_1 - \varphi_2$ – раз-ность потенциалов на C.
Выразим I и $\varphi_1 - \varphi_2$ через q:

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C} \qquad \mathcal{E}_{c.инд} = -L\frac{dI}{dt}$$

Подставим в закон Ома:

$$IR = -\frac{q}{C} + \left(-L\frac{dI}{dt}\right) + U_m \cos \omega t$$

Но т.к. $J = \dfrac{dq}{dt}$:

$$\ddot{q} + \dfrac{R}{L}\dot{q} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{U_m}{L}\cos(\omega t) - \text{Дy эл. полеб.}$$

Введём: $\beta = \dfrac{R}{2L}$ — коэфф. затухания

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — собств. частота контура

Тогда:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \dfrac{U_m}{L}\cos\omega t$$

Общее решение Дy имеет вид:

$$q = q_{m_0} e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \delta) + q_m\cos(\omega t - \psi)$$

Первое слаг — затух. колеб. с частотой $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, нач. амплитудой q_{m_0} и нач. фазой δ

Второе слаг. — вынужд. колеб. с цикл. частотой ω равной част. прилож-го напр-я, амплитудой q_m

Вынужд-е колебания заряда q отстаёт по фазе от колеб-я U на величину ψ

Амплитуда вынужденных колебан q_m:

$$q_m = \dfrac{U_m/L}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (1)$$

Разность фаз q и U опред-ся $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (2)

При $t \gg 0$ члены затух. кол-я $q_{m_0}e^{-\beta t}$ становится малым по ср. с амплит. вынужд. кол-я q_m $\Rightarrow$ можно пренебречь слаг. Получаем:

$$q = q_m\cos(\omega t - \psi), \quad(3) \text{ где}$$

q_m и ψ определено (1) и (2)

3. Сила тока

Найдём её в контур продиф. в (3) для q:

$$J = \dfrac{dq}{dt} = -q_m\omega\sin(\omega t - \psi) = q_m\omega\cos\left(\omega t - \psi + \dfrac{\pi}{2}\right) =$$

$$= J_m\cos(\omega t - \psi) \quad(4), \text{ где } J_m = q_m\omega - \text{ампл-ток,}$$

$\psi = \psi - \dfrac{\pi}{2}$ — разность фаз между током J и U.

ампл-в на-ет: $J_m = \dfrac{(U_m/L)\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$

Разрешив $w_0^2 = \frac{1}{LC}$ и $\beta = \frac{R}{2L}$ даёт $I_m = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wc})^2}}$ (5)

Тангенс сдвига U и I определяется через ψ в (2)

$tg\,\varphi = tg\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\,\psi = -\frac{w_0^2 - w^2}{2\beta w} = \frac{wL - \frac{1}{wc}}{R}$ (6)

$\varphi \sim R, L, C, w.$

4. Напряжение на конденсаторе.

Разделим (3) на C. Получим

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(wt - \psi) = U_{cm}\cos\left(wt - \psi - \frac{\pi}{2}\right) \,(8),$$

где $U_{cm} = \frac{q_m}{C}$ — амплитуда напряж. на C

Разделив на C (4) для q_m и учитывая

$w_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\beta = \frac{R}{2L}$ получим ампл. на C.

$$U_{cm} = \frac{U_m w_0^2}{\sqrt{(w_0^2 - w^2) + 4\beta^2 w^2}} = \frac{U_m}{wc\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wc})^2}} = \frac{I_m}{wc} \quad (7)$$
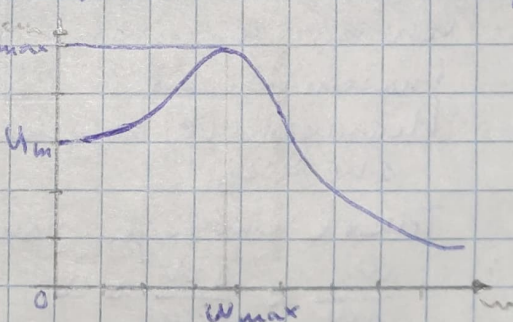
Учитывая (4) и (8), U_c отстаёт по фазе от y

в контуре на $\frac{\pi}{2}$.

5. Амплитудные резонансные кривые. Явление резонанса

Ампл. рез. кривые — это график зависимости

от частоты w амплит-ды тока I_m и амплитуды **KB4**

напряж. на конд U_{cm}. U_{cm}^{max}

Для того, чтобы нашёл экстрем. U_{cm}

U_{cm} на, достаточно найти

соотв. экстремум под радик.

В выр-и из (7)

$[w_0^4 - 2w_0^2w^2 + w^4 + 4\beta^2 w^2]' = -4w_0^2 w + 4w^3 + 8\beta^2 w = 0$

$w_{max}^2 + 2\beta^2 - w^2 = 0$

$w_{max}^2 = w_0^2 + 2\beta^2 \Rightarrow W_{max} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$

$W_{max} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \lessgtr w_0$

$U_{cm}(w=0) = U_m$ очевидно.

Чем меньше β, т.е. чем меньше R, тем острее и

выше максимум U_{cm} и тем более W_{max} к W_0

Зависимость $U_m = W_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
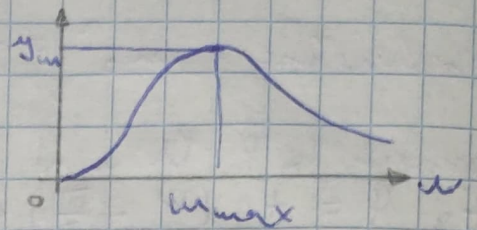
KB3

Резонанс - явление, когда при некоторой опр. частоте внешнего напр. U ампл. напр. на конуре достигает максимума. Эта частота наз-ся резонансной.

6. Относительная высота максимума амплитудной резонансной кривой.

В случае $\beta \ll W_0$ $W_{max} \approx W_0$ (т.е. $W_{max} = \sqrt{W_0^2 - 2\beta^2}$

$U_{cm}(W_0) = U_m \frac{W_0}{2\beta}$ - макс. При $m \to 0$ $U_C(0) \approx U_m$

Q - добротность контура $= \frac{U_{cm}(W_0)}{U_{cm}(0)} = \frac{W_0}{2\beta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Q показывает, во сколько раз $U_{cm}(m)$ в дан. резонанса превышает величину при $W \approx 0$ (отн. высота max кривой)
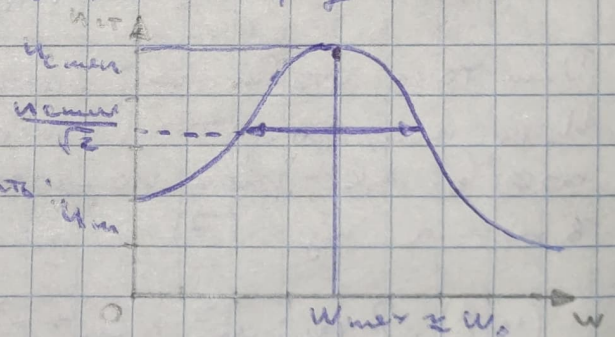
7. Ширина ампл. резон. кривой

ΔW - это диапазон частот колебаний U, границам которого соответствуют значения напр. на конденсаторе $U_{cm}(m)$ в $\sqrt{2}$ раз меньше макс значения $U_{cm max}$.

Используя (7) получим:

$\Delta W \approx 2\beta$

Также справедливо заметить:

$\frac{W_0}{\Delta W} \approx \frac{W}{2\beta} \approx Q$

Экспериментальная часть

$\frac{U_{cm}(W_0)}{U_{cm}(0)} = \frac{U_m W_0^2}{2\beta W_0} \cdot \frac{W_0}{U_m W_0^2} = \frac{W_0}{2\beta}$

Задание №1 ($R_1 = 47$ Ом, $C = 0,1$ мкФ, $L = 2$ мГн)

Таблица №1

	1	2	3	4	5
f, Гц	8100	8500	8900	9300	9700
w, 1/с	50868	53380	55892	58404	60916
Uc, В	8,96	10,02	11,18	12,32	13,29
Ucm, В	12,67135352	14,17041989	15,81090763	17,42311109	18,79489824

$$\omega = 2\pi f \qquad U_{cm} = U_c \sqrt{2}$$

Задание №2 ($R_2 = 100$ Ом, $C = 0,1$ мкФ, $L = 2$ мГн)

Таблица №2

	1	2	3	4	5
f, Гц	5300	5700	6100	6500	6900
w, 1/с	33284	35796	38308	40820	43332
Uc, В	4,22	4,47	4,74	5,03	5,33
Ucm, В	5,967981233	6,321534624	6,703372286	7,113494219	7,537758287

$$\omega = 2\pi f \qquad U_{cm} = U_c \sqrt{2}$$

Задание 3 ($R_3 = 470$ Ом, $C = 0,1$ мкФ, $L = 2$ мГн)

Таблица №3

	1	2	3	4	5
f, Гц	0	100	400	800	1200
w, 1/с	0	628	2512	5024	7536
Uc, В	4,25	2,84	2,82	2,76	2,68
Ucm, В	6,01040764	4,016366517	3,988082246	3,903229432	3,790092347

$$\omega = 2\pi f \qquad U_{cm} = U_c \sqrt{2}$$

Обработка и анализ результатов

Таблица №1.   Таблица №2
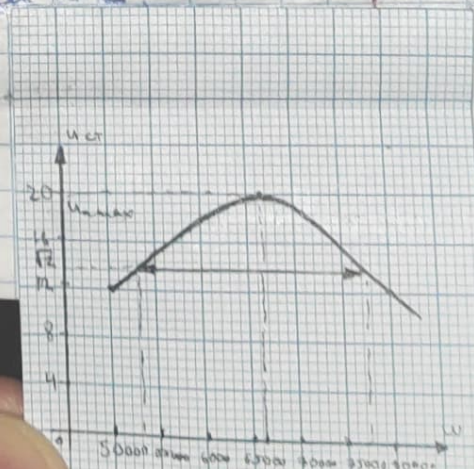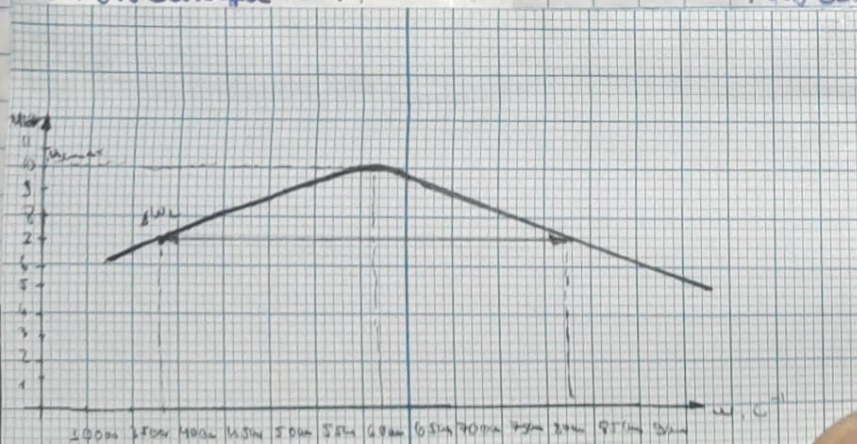
Расчёты

Собственная частота контура, ω_0, c^{-1}	70710,67
Резонансная частота, ω_{m1}, c^{-1}	65 940
Резонансная частота, ω_{m2}, c^{-1}	60 916
Ширина резонансной кривой, $\Delta\omega_1, c^{-1}$	24 250
Ширина резонансной кривой, $\Delta\omega_2, c^{-1}$	43 500
Коэффициент затухания, β_1, c^{-1}	12125
Коэффициент затухания, β_2, c^{-1}	21750
Добротность, Q_1	2 719
Добротность, Q_2	1,4
Логарифмический декремент затухания, λ_1, c^{-1}	1 155
Логарифмический декремент затухания, λ_2, c^{-1}	2,24
Ёмкость, $C_{\text{эксп1}}, \Phi$	1,15*10^(-8)
Относительная погрешность ёмкости, $\left\|\frac{C-C_{\text{эксп1}}}{C}\right\|$	0,885
Ёмкость, $C_{\text{эксп2}}, \Phi$	1,35*10^(-7)
Относительная погрешность ёмкости, $\left\|\frac{C-C_{\text{эксп2}}}{C}\right\|$	0,34
Омическое сопротивление, $R_{\text{эксп1}}, $ Ом	48,5
Относительная погрешность омического сопротивления, $\left\|\frac{R-R_{\text{эксп1}}}{R}\right\|$	0,032
Омическое сопротивление, $R_{\text{эксп2}}, $ Ом	87
Относительная погрешность омического сопротивления, $\left\|\frac{R-R_{\text{эксп1}}}{R}\right\|$	0,13

Вывод: Мы провели эксперименты из которых пронаблюдали то, как характеристики колебаний на конденсаторе зависят от части внешних колебаний и (в-во цепи)

$$I_{nm} = \frac{(U_m)'}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}$$

$$U_{cm} = \frac{U_m}{\omega c \sqrt{R^4 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}} =$$

$$W_{max} = W_0 \qquad W_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$