Лекция №1

Размер атома $\sim 10^{-10}$ м (Å)
Размер ядра $\sim 10^{-15}$ м (ферми)

Основные виды взаимодействий:
- Гравитационное
- Электронное → электрослабое
- Слабое
- Сильное

Закон Кулона

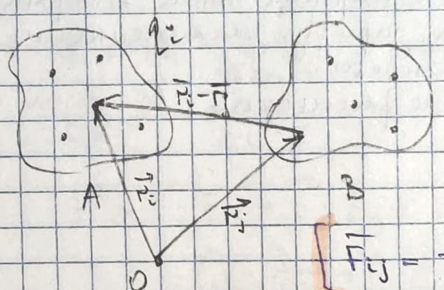
Два заряженных тела (приближение мат. точки) действуют друг на друга силами, направленными вдоль линии, соединяющей тела, пропорционально произведению зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояний между телами.

$$\left[|F_{AB}| = |F_{BA}| = k\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \right]; \quad [Q] = \text{Кл}; \quad \left[k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right] \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

В веществе $\left[|F| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \right]$

ε – диэлектрическое проницаемость в-ва.

Принцип суперпозиций



Взаимодействие 2-х элементов тел A и B никак не зависит от других элементов.

$$\vec{F}_{AB} = \sum_i \vec{F_i} = \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}^2} \cdot \frac{\vec{r_i} - \vec{r_j}}{|\vec{r_i} - \vec{r_j}|}$$

на что действ. — на что действ.

$$\left[\vec{F}_{ij} = -\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}^3} \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j}) \right]; \quad \left[r_{ij} = |\vec{r_i} - \vec{r_j}| \right]$$

Распределение зарядов может быть объемным, поверхностным, линейным и точечным.

$\left[\lambda = \frac{dq}{dx} \right]$; – заряд приходящийся на единицу длины (Кл/м)

$\left[\sigma = \frac{dq}{dS} \right]$; – заряд приходящийся на единицу пов-ти (Кл/м²)

$\left[\rho = \frac{dq}{dV} \right]$; – заряд, содержащийся в единице объема (Кл/м³)

Характеристики электростатического поля.

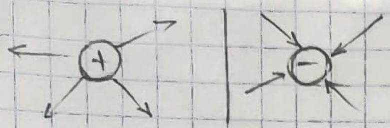
Напряженность

$$\left[\vec{F}_{AB} = \sum_i q_i \cdot \vec{E}(\vec{r_i}) \right], \text{ где } \left[\vec{E}(\vec{r_i}) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_{ij}^3} \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j}) \right]$$

Тогда $\vec{E}(\vec{r_i})$ наз. вектором напряженности электрического поля.

* Физический смысл напряженности: Напряженность – сила, действ. на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

Электр. поле принято изображать силовыми линиями. (Из ⊕ к ⊖)



Св-во силовых линий:

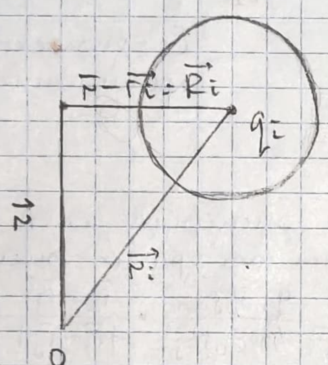
* Силовая линия — линия, кас. в каждой точке которой указывает направление вектора напряженности, а густота силовых линий хар. модуль напряженности.

! Для вектора **напряженности** справедлив **принцип суперпозиции**!
(Если хотим в какой-то точке найти напряж., то разбиваем тело на точки и суммируем напряженности всех точек)

ДЗ I вопрос 1.

Теорема Гаусса (в пустоте)

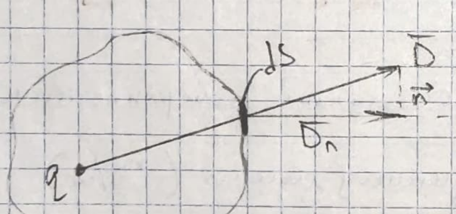
$$\left[\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)\right]; \quad \left[\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}(\vec{r})\right]$$



$\vec{D}(\vec{r})$ — вектор электрической индукции (электрическое смещение)

Поток вектора электр. индукции через любую замкнутую поверхность наружу этой поверхности равен суммарному заряду, заключенному внутри этой поверхности.
Сумма зарядов алгебраическая. (с учетом знаков)

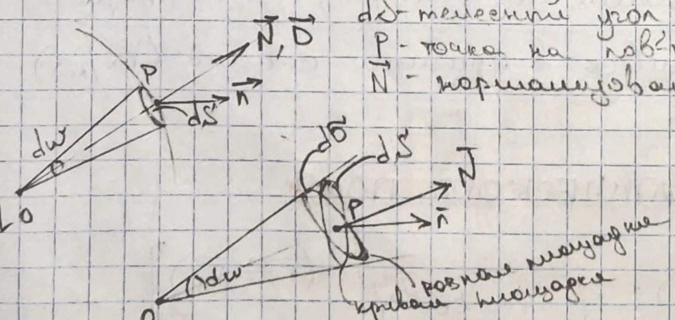
Док-во: (для одного заряда)



$D_n \cdot dS = d\Phi$ — элементарный поток вектора эл. индукции через площадку dS в направлении нормали =>

$$\Rightarrow \Phi = \oint d\Phi = \oint_S D_n dS \text{ — полный поток}$$

$d\sigma$ — телесный угол $d\omega$
P — точка на пов-ти, к которой приложен $\vec{D}$
$\vec{N}$ — нормализованный $\vec{D}$.



$d\sigma = dS\cdot\cos\theta$, где $d\sigma = |OP|^2\, d\omega$ св-во из стереометрии телесного угла

$D = \varepsilon_0 \cdot E = \dfrac{q}{4\pi|OP|^2}$ =>

$$\Rightarrow d\Phi = \frac{q}{4\pi|OP|^2}\cdot\cos\theta\cdot dS = \frac{q}{4\pi\cdot|OP|^2}\cdot d\sigma = \frac{q}{4\pi\cdot|OP|^2}\cdot|OP|^2\cdot d\omega = \frac{q\cdot d\omega}{4\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi = \oint d\Phi = \frac{q}{4\pi}\underbrace{\oint d\omega}_{=4\pi} = \frac{q}{4\pi}\cdot 4\pi = q \quad \Rightarrow \left[\Phi = q\right]$$

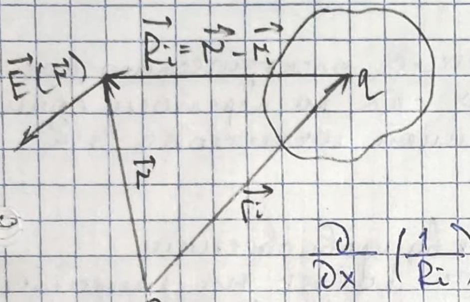
Если несколько зарядов, то используем принцип суперпозиции.

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = q_1 + q_2 + \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S D_n \, dS = \sum_i q_i = Q}$$

ДЗ II вопрос 2. (связь напряжённости и потенциала)

Потенциал электрического поля.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3}(\vec{r} - \vec{r_i});$$

$$E_x(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_i^3}\cdot(x - x_i);$$

$$R_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_i}\right) = -\frac{1}{R_i^2}\cdot\frac{\partial R_i}{\partial x} = -\frac{1}{R_i^2}\cdot\frac{1}{R_i}(x - x_i) = -\frac{1}{R_i^3}(x - x_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x(\vec{r}) = -\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}\right);$$

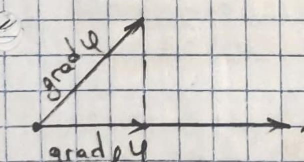
$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$ — потенциал электр. поля (скалярный электр. потенциал)

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\vec{E} = \vec{i}\cdot E_x + \vec{j}\cdot E_y + \vec{k}\cdot E_z \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= -\left(\vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi \rightarrow \boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$$

Важное св-во градиента

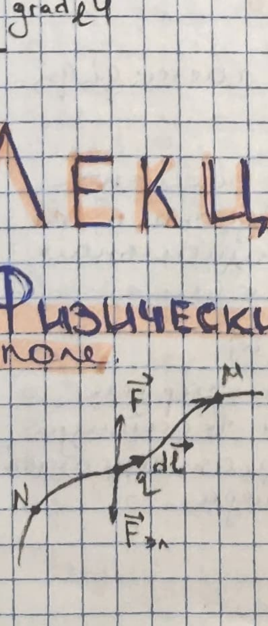


$$E_l = -\operatorname{grad}_l \varphi = -\frac{d\varphi}{dl}$$

(проекция $\vec{E}$ на l)

Лекция №2

Физический смысл потенциала. Электрическое поле.



Будем перемещать заряд квазиравновесным способом.

$$\vec{F} + \vec{F}_{эл} = 0$$

$$\delta A = (\vec{F}\cdot\vec{dl}) = F_l \, dl \Rightarrow A = \int_N^M F_l \, dl = -\int_N^M F_{эл\, l} \, dl$$

$\vec{F}_{эл} = q\vec{E} = -q \cdot grad\,\varphi \Rightarrow F_{эл.} = -q \cdot grad_l \varphi = -q \cdot \frac{d\varphi}{dl}$

$A = \int_N^M q \cdot \frac{d\varphi}{dl} \cdot dl = q \int_N^M d\varphi = q(\varphi_M - \varphi_N)$

$A_{эл} = -A = q(\varphi_N - \varphi_M)$

Следствие:

1. Если траектория замкнутая, то работа (электростатических сил) равна нулю.
2. Работа зависит только от начальной и конечной точек и не зависит от траектории.
   Электростатические силы консервативны.
3. Если $M \to \infty$, $\varphi_\infty = 0 \Rightarrow A_{эл} = q\varphi_N$

Физический смысл потенциала.

Потенциал - энергетическая характеристика электрического поля, численно равная работе электрических сил по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля на бесконечность.

4. Если перенос заряда происходит не квазиравновесным способом, тогда элементарная работа пойдет на превращение кинетич. и потенциальной энергии. $\delta A = dK + dW \Rightarrow W = q\varphi$

ЭКЗАМЕН!

ДВА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СВ-ВА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

I $\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint E_l\, dl = 0$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

$A = \oint_L F_{эл\,l}\, dl = \oint_L q E_l\, dl = q \oint_L E_l\, dl = 0 \Rightarrow \oint_L E_l\, dl = 0$

II $\oint(\vec{D}\, d\vec{S}) = \oint\!\!\oint D_n\, dS = Q$ (док-во на экзамене только для пустоты)

Формулировка теоремы Гаусса

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ТЕЛА.

Имеем заряженное тело, разбиваем на малые части: $q_1, q_2, \dots, q_N$.
$Q = \sum_{i=1} q_i$.

Исходя из принципа суперпозиции каждые два элемента взаимодействуют друг с другом по закону Кулона и независимо от других частей. Если W_{ij} - потенциальная энергия взаимодействия i и j частей, то $W = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} W_{ij}$.

Отдельно рассмотрим q_i и q_j и заряд q_i зафиксируем, а заряд q_j будем перемещать из бесконечности в данную точку поля. $A = q_j \cdot \varphi(r_{ij})$, где $\varphi(r_{ij})$ - потенциал, созданный i-тым зарядом в месте расположения j-того заряда.

$\varphi(r_{ij}) = \frac{q_i}{4\pi \varepsilon_0 r_{ij}}$

$$W_{ij} = q_j \varphi(r_{ij}) = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} . \quad W = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

W – потенциальная энергия заряженного тела.

Сведения из векторного анализа

1. Действие вектора Набла на скалярную функцию

$$\vec{\nabla} \cdot \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

2. Скалярное произведение вектора Набла на вектор

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

3. Векторное произведение вектора Набла на вектор.

$$[\vec{\nabla} \cdot \vec{a}] = \operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

4. Теорема Остроградского – Гаусса

Для любого векторного поля, удовлетворяющего условиям непрерывности и дифференцируемости для любой замкнутой поверхности с внешней нормалью $\vec{n}$, охватывающей объем V справедливо соотношение $\oint\limits_S a_n dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV$

Поток вектора a через поверхность наружу

ДЗ I вопрос 3.

Нахождение условий равновесного распределения зарядов на примере заряженного проводника

Имеем проводник, заряженный до заряда Q, который при равновесии каким-то образом распределен по объему и на поверхности. Разбиваем проводник на малые части q_i... Для нахождения равновесного распределения будем использовать принцип виртуальных перемещений.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} ; \quad r_{ij} = |\vec{r_i} - \vec{r_j}| ; \quad \sum_i q_i = Q$$

Проварьируем состояние. $q_i + \delta q_i$ $\quad \sum (q_i + \delta q_i) = Q \Rightarrow \sum_i \delta q_i = 0.$

Для того чтобы любое заряженное тело находилось в равновесии необходимо и достаточно, чтобы для любых виртуальных перемещений из данного равновесного состояния вариация потенциальной энергии равнялась бы нулю при дополнительном условии связи $\sum_i q_i = Q$.

Ищем условный экстремум и используем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Составляем вариационное условие: $\delta W - \alpha\,\delta(\sum q_i) = 0$

α - неопред. множитель, который опр. ур-ние связи

$$\delta W = \delta\Big(\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{\delta q_i\, q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{q_i\,\delta q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} =$$

$$= \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{q_j\,\delta q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

$$\delta W = \sum_i \Big(\underbrace{\sum_{\substack{j\\ i\neq j}} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}_{\varphi(r_i)}\Big)\delta q_i = \sum_i \varphi(r_i)\,\delta q_i \Rightarrow \sum_i \varphi(r_i)\,\delta q_i - \alpha\sum_i \delta q_i = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_i \delta q_i(\varphi(r_i) - \alpha) = 0$. Должно выполняться для всех вариаций $q_i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (т.к. $\delta q_i\ \forall$) $\Rightarrow \varphi(r_i) - \alpha = 0 \Rightarrow$ ~~$\varphi(r_i)=0$~~ $\alpha = \varphi(r_i) \Rightarrow \varphi = const$

В проводнике при равновесном распределении заряда потенциал проводника константа.

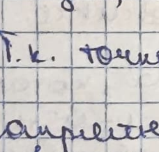
~~ДЗ I~~ вопрос 4

Св-во равновесного распределения потенциала

1) Напряженность электрического поля внутри проводника во всех его точках равна нулю.

$\vec{E} = -\,grad\,\varphi \Rightarrow$ [Если $\varphi = const$] $\Rightarrow \vec{E} = 0$

2) Объемная плотность электрического заряда проводника в условиях равновесия равна нулю.



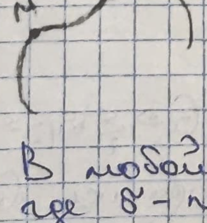
$\oint_S D_n\,dS = \iiint_V \rho\,dV$ (Теорема Гаусса) Т.к. $\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \Rightarrow \oint D_n\,dS = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \iiint_V \rho\,dV = 0$ Пусть V мал., столь мал, что ρ в каждой точке V ~~конст~~ const.

Тогда, $\iiint_V \rho\,dV = \rho\cdot V = 0$. V мал, но $V \neq 0 \Rightarrow \rho = 0$ //

Т.к. точка M выбрана произвольно, она выполняется для любой точки.

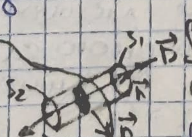
3) Напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника, перпендикулярно его внешней поверхности. На поверхности проводника выбираем 2 произвольные точки.



$\varphi = const \Rightarrow \varphi_M = \varphi_N \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dl} = 0 \Rightarrow grad_l\,\varphi = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_l = -\,grad_l\,\varphi = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{n}$

4) В любой точке поверхности проводника $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (в воздухе) где σ - поверхностная плотность заряда.



$S_1 = S_2$, S_1 столь мало, что $\vec{D}$ в каждой точке одна и та же

$\oint_S D_n\,dS = q$; $\iint_{S_1} D_n\,dS + \overbrace{\iint_{S_2} D_n\,dS}^{0} + \overbrace{\iint_{S_{бок}} D_n\,dS}^{0} \Rightarrow \iint_{S_1} D_n\,dS = q = \sigma\cdot S_1$

$D_n\cdot S_1 = \sigma\cdot S_1 \Rightarrow D_n = \sigma \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ //

Сведение из векторного анализа

$\cancel{\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi \operatorname{div}\vec{a} + \ldots}$

скалярная векторная функции

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi \operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a})$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi a_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_z) = \varphi\frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z\frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= \varphi\underbrace{\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\vec{a}} + (\vec{a}, \operatorname{grad}\varphi)$$

Лекция №3

Лекция 3.

II формула Грина:

$\operatorname{div}(\varphi\bar a) = \varphi \operatorname{div}\bar a + (\operatorname{grad}\varphi, \bar a)$

$\varphi, \psi \quad \operatorname{grad}\psi \equiv \bar a$

$\underline{\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi)} = \varphi \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi) = \underline{\varphi\cdot\nabla^2\psi + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)}$,

$\oint\limits_S a_n dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar a\, dV; \quad \iiint\limits_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi)\, dV = \iiint\limits_V \varphi\nabla^2\psi\, dV + \iiint\limits_V (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)\, dV$

$\oint\limits_S \varphi \operatorname{grad}_n \psi\, dS = (\text{из св-в grad}) = \boxed{\oint\limits_S \varphi \frac{d\psi}{dn} dS = \iiint\limits_V \varphi\nabla^2\psi\, dV + \iiint\limits_V (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)\, dV}$

$\varphi = \psi \Rightarrow \oint\limits_S \varphi \frac{d\varphi}{dn} dS = \iiint\limits_V \varphi\nabla^2\varphi\, dV + \iiint\limits_V (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV$

Уравнения Лапласа и Пуассона. Краевая задача электростатики

$\oint\limits_S D_n dS = Q \Rightarrow \oint\limits_S D_n dS = \iiint\limits_V \rho\, dV \Rightarrow (\text{по т. О-Г}) \Rightarrow \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar D\, dV = \iiint\limits_V \rho\, dV$

(Пусть заряд распределен по объему)

V-мал. M V

$\operatorname{div}\bar D_M \cdot V = \rho_M \cdot V \Rightarrow (\text{т.к. т. } M - V) \Rightarrow \operatorname{div}\bar D = \rho$ – теорема Гаусса в дифференциальной форме

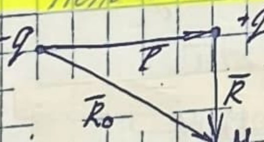
$\bar D = \varepsilon_0 \bar E = -\varepsilon_0 \operatorname{grad}\varphi \Rightarrow -\operatorname{div}(\varepsilon_0 \operatorname{grad}\varphi) = \rho \Rightarrow -\varepsilon_0\nabla^2\varphi = \rho \Rightarrow$

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ – ур-е Пуассона. if $\rho = 0 \Rightarrow \nabla^2\varphi = 0$

Эти ур-я имеют бесконеч. мн-во решений. Нас интересует только одно, кот. обладает физ смыслом, поэтому необходимо указать доп. условия, кот. удовлетворяет потенциал.

Задание граничных условий и нахождение решения в этом случае наз-ся краевой задачей.

Поле точечного диполя. Защита 5/3 ~ 1.



$\bar P = q\bar l$

$|R| \gg |\bar l|$

Диполь наз-ся точечным, у кот $l \to 0, q \to \infty$, тогда $\bar p = \lim\limits_{\substack{l\to 0\\ q\to\infty}} (q\bar l)$

$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}, \quad \bar R = \bar R_0 - \bar l; \quad (\bar R)^2 = (\bar R_0 - \bar l)^2 = R_0^2 - 2(\bar R_0 \bar l) + l^2 \approx$

$\approx R_0^2 - 2(\bar R_0 \bar l)$

$R^2 = R_0^2\left(1 - \frac{2(\bar l \bar R_0)}{R_0^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0\sqrt{1 - \frac{2(\bar l\bar R_0)}{R_0^2}}} \approx \frac{1}{R_0}\left[1 + \frac{(\bar l\bar R_0)}{R_0^2}\right] =$

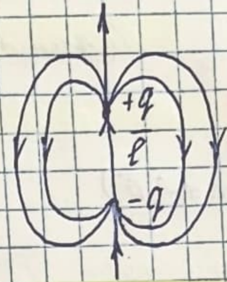
$= \frac{1}{R_0} + \frac{(\bar l\bar R_0)}{R_0^3}$

$\varphi = \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}} + \frac{q(\bar l\bar R_0)}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}} = \frac{(\bar p\bar R_0)}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3}$

$\bar E = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\frac{(\bar p\bar r)}{r^3}$

$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\bar r}{r^5}$; $\mathrm{grad}(\bar p \bar r) = \bar p$

$\bar E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\bar p}{r^3} - \frac{3(\bar p \bar r)\bar r}{r^5}\right]$



Конец защиты

Поле в диэлектриках.

В феноменологической электростатике поляризованный диэлектрик описывается полем эл. поляризации. $\bar P$

Тогда по опр. $\bar P dV$ есть дипольный момент бесконеч. малого объема dV

Вектор поляризации - объемная пл-ть дипольного момента.

Модель молекулы в электростатике - это точечный диполь.

Несмотря на то, что dV бесконеч. маленький, он включ. в себя большое число атомов и молекул $\bar P dV = \sum_i \bar p_i$

$\boxed{\bar P(r) = \bar P_0 + \bar P_{инд}}$

$\bar P(r) = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \bar E(r)$

$\bar D(r) = \varepsilon_0 \bar E(r) + \bar P(r) = \varepsilon_0 \bar E(r) + (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \bar E(r) = \varepsilon\varepsilon_0 \bar E(r)$

справедливо для простых однород диэл.

Связанные эл. заряды

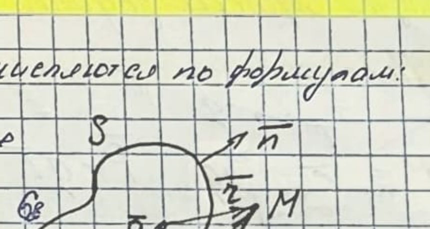
Поле вектора поляризации можно описать с помощью связанных зарядов, кот создают такие же поле, как и поле эл. поляризации.

в защита Д/з №1. Теорема эквивалентности.

Эквивалентные данной поляризации эл. заряды вычисляются по формулам:

$\rho_{св} = -\mathrm{div}\,\bar P$; $\sigma_{св} = P_n$ диэлектрик нах-ся в пустоте

$\bar n$ - внеш. нормаль к диэлектрику



$\varphi_{1q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\bar p \bar r)}{r^3} \Rightarrow d\varphi = \sum_i \varphi_{iq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\sum_i \bar p_i, \bar r)}{r^3} =$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\bar P dV, \bar r)}{r^3}$

$\varphi = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\bar p \bar r)}{r^3} dV$; $\bar r = \bar r_a - \bar r_q \Rightarrow r = \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2}$

$\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_q} = \frac{x_a - x_q}{r^3}$; аналогич. $\frac{\partial}{\partial y_q}$ и $\frac{\partial}{\partial z_q} \Rightarrow \mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\bar r}{r^3}$;

$\mathrm{div}(\varphi \bar a) = \varphi\,\mathrm{div}\,\bar a + (\mathrm{grad}\,\varphi, \bar a)$

$\bar a = \bar P$ $\quad \mathrm{div}_q\left(\frac{\bar P}{r}\right) = \frac{1}{r}\mathrm{div}\,\bar P + \left(\bar P\,\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)\right) \Rightarrow \left(\bar P\,\mathrm{grad}_q\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \mathrm{div}\left(\frac{\bar P}{r}\right) - \frac{1}{r}\mathrm{div}\,\bar P$

$\varphi = \frac{1}{r}$

$$\left[\text{т.к. } \frac{(\bar{P}\bar{r})}{r^3} = \left(\bar{P}, \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}\right)\right] \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \operatorname{div}_q\left(\frac{\bar{P}}{r}\right) dV - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \frac{1}{r} \operatorname{div}_q \bar{P}\, dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint\limits_S \frac{\bar{P}_n dS}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \frac{(-\operatorname{div}_q \bar{P})}{r} dV$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \frac{\rho_{св}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint\limits_S \frac{\sigma_{св}}{r} dS}$$

$\rho_{св} = -\operatorname{div} \bar{P}$; $\sigma_{св} = \bar{P}_n$

Лекция № 4

$$\varphi = \iiint\limits_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(\vec{P}\cdot\vec{r})}{r^3}\,dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\limits_S \frac{\sigma_{св}\cdot dS}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V \frac{\rho_{св}}{r}\,dV$$

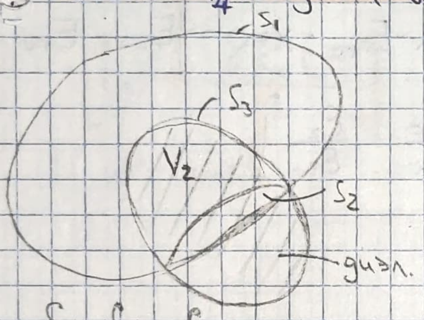
Замечание:

На сколько бы частей мы бы ни разрезали диэлектрик суммарно связанный заряд любой его части всегда будет 0.

$$\left[Q_{св.} = \iiint\limits_V \rho_{св.}\cdot dV + \oint\limits_S \sigma_{св}\,dS = -\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{P}\cdot dV + \oint\limits_{S'} P_n\cdot dS = \right.$$

$$\left. = -\oint\limits_S P_n\cdot dS + \oint\limits_{S'} P_n\cdot dS = 0\right]$$

Теорема Гаусса (в веществе/диэлектрике)



$S_1 + S_2 = S$

Опираясь на принцип суперпозиции и на теорему Гаусса в пустоте $\oint\limits_S \varepsilon_0\cdot E_n\cdot dS = Q + Q_{связ}$

Гаусс принцип суп

$$Q_{связ.} = \iint\limits_{S_3}\sigma_{св.}\,dS + \iiint\limits_{V_2}\rho_{связ}\,dV =$$

$$= \iint\limits_{S_3} P_n\,dS - \iiint\limits_{V_2}\operatorname{div}\vec{P}\,dV$$

Рассмотрим $\iiint\limits_{V_2}\operatorname{div}\vec{P}\,dV = \iint\limits_{S_3} P_n\,dS + \iint\limits_{S_2} P_n\,dS \Rightarrow$

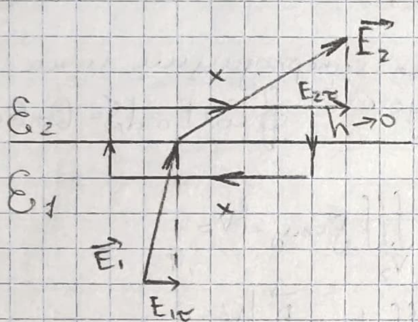
$$\Rightarrow \left[Q_{связ.} = \iint\limits_{S_3} P_n\,dS - \iint\limits_{S_2} P_n\,dS - \iint\limits_{S_3} P_n\,dS = -\iint\limits_{S_2} P_n\,dS = -\oint\limits_{S} P_n\,dS\right]$$

$$\oint\limits_S \varepsilon_0 E_n\,dS = Q - \oint\limits_S P_n\,dS \Rightarrow \oint\limits_S \underbrace{(\varepsilon_0 E_n + P_n)}_{D_n}\,dS = Q \Rightarrow \left[\oint\limits_S D_n\,dS = Q\right]$$

Пустота	Диэлектрик
$\oint_S D_n dS = 0$ $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$	$\oint_S D_n dS = Q$ $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$
$\oint_S E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_S E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{Q_{связ} + Q}{\varepsilon_0}$ $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\rho + \rho_{связ}}{\varepsilon_0}$
$\oint_S P_n dS = 0$ $\operatorname{div}\vec{P} = 0$	$\oint_S P_n dS = -Q_{связ}$ $\operatorname{div}\vec{P} = -\rho_{связ}$

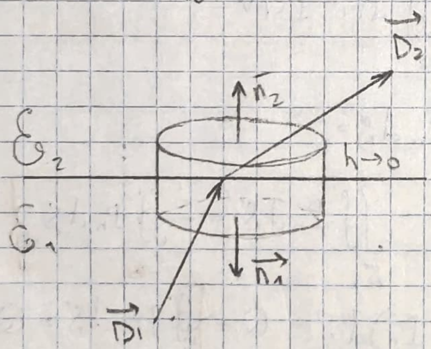
ДЗ — вопрос

Поведение нормальных и тангенциальных составляющих $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков



$$\oint_L E_l dl = 0 \Rightarrow E_{2\tau} \cdot x - E_{1\tau} \cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}}$$

$$\frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \Rightarrow \boxed{\frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

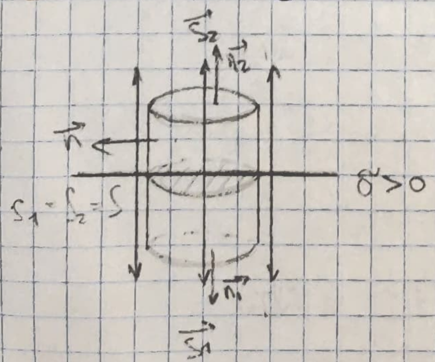


$$\oint_S D_n dS = 0 \quad \underbrace{\iint_{бок.} D_n dS}_{0\,(h \to 0)} + \iint_{S_1} D_{1n} dS + \iint_{S_2} D_{2n} dS = 0$$

$$-D_{1n} \cdot S + D_{2n} \cdot S = 0 \Rightarrow \boxed{D_{1n} = D_{2n}}$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n} \Rightarrow \boxed{\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

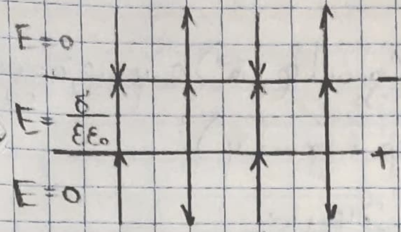
Энергия электрического поля

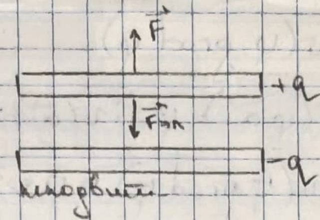


$$\oint D_n dS = Q \Rightarrow \underbrace{\iint_{бок} D_n dS}_{0} + \iint_{S_1} D_n dS + \iint_{S_2} D_n dS = \sigma \cdot S \Rightarrow$$

$\sigma > 0$

$$\Rightarrow 2D_n \cdot S = \sigma S \Rightarrow D = \frac{\sigma}{2} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$





Двигаем пластину квазиравновесным способом.

$\vec F_{эл} + \vec F = 0$; $\vec F_{эл} = q\cdot E_{\ominus} = q\cdot \frac{q}{S\cdot 2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = F$

$\delta A = F\cdot dl = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}\, dl \Rightarrow A_{12} = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}\cdot \Delta l$

$$\left[A_{12} = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}(l_2 - l_1) \Rightarrow W = \frac{q^2 \cdot l}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{q^2\cdot l\cdot S}{S^2\cdot 2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2 \cdot V}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \right.$$

$$\left. = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\cdot\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)^2\cdot V = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}\cdot V\right]$$ — энергия внутри плоского конденсатора.

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — энергия одной пластины отрицательной

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — поле внутри объема (между двумя пластинами)

$$\left[w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}\right]$$ — объемная плотность энергии электрического поля.

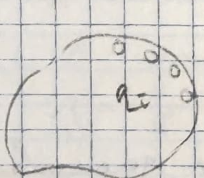
if $w \neq const \Rightarrow$ $\left[W = \iiint_V w\, dV\right]$

Теорема Томсона в электростатике

Потенциальная энергия взаимодействия зарядов можно представить как энергию электрического поля, созданного этими зарядами на всем бесконечном пространстве.

(Будем рассматривать док-во для уединенного заряженного проводника)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{\substack{j \\ i\neq j}}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi(r_i) =$$



$$= \frac{1}{2}\varphi\sum_i q_i = \frac{1}{2} \varphi\cdot Q$$

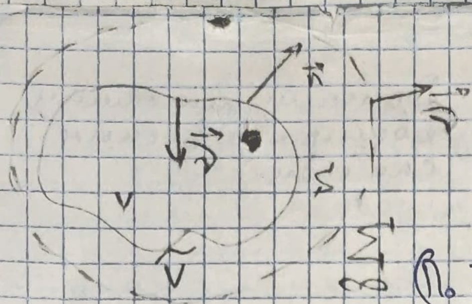
$$dQ = \sigma\, dS \Rightarrow W = \frac{1}{2} \oint_S \sigma\varphi\, dS$$

(Из-за неравномерного распределения) $E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = E_n\varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\oint_S \varepsilon_0 E_n \varphi\, dS$

$\vec E = -grad\,\varphi \Rightarrow E_n = -grad_n \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \Rightarrow W = -\frac{1}{2}\oint_S \varepsilon_0\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS\right]$ — энергия уединенного заряженного проводника



$$\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi \operatorname{div}(\vec{a}) + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}); \ \varphi=\varphi, \vec{a} = \operatorname{grad}\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi) = \varphi \nabla^2\varphi + (\operatorname{grad}\varphi)^2$$

$\Rightarrow$ (по I формуле Грина) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_{S+\Sigma} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dS =$

$$= \iiint_{\tilde V} \varphi \underbrace{\nabla^2\varphi}_{0} dV + \iiint_{\tilde V} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV$$

Интеграл по $\Sigma' \to 0$; $\nabla^2\varphi = 0$ из ур-ия Лапласа (зарядов нет)

$$\oint\!\!\!\oint_S \varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dS = \iiint_{\tilde V} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV; \ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \Rightarrow \oint\!\!\!\oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dS = -\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon_0}{2} \oint\!\!\!\oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \frac{\varepsilon_0}{2} \oint\!\!\!\oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dS = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\tilde V} (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV$$

т.к. $|\operatorname{grad}\varphi| = |E| \Rightarrow \left[W = \iiint_{\tilde V} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV\right]$ – энергия эл. поля $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[W = \iiint \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \oint\!\!\!\oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS\right]$ – энергия уединенного заряженного проводника

Вывод: Этой теоремой Томсон доказал физическое существование электрического поля и тем самым объединил теорию близкодействия и ~~теор~~ теорию дальнодействия.

Лекция № 5

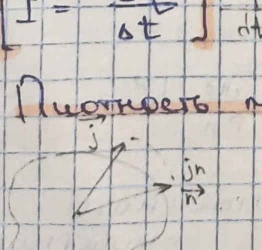
Постоянный электрический ток.

Электрический ток – направленное движение эл. зарядов.
Постоянный эл. ток не меняется с течением времени.

Сила тока (I) – кол-во положительного заряда, пересекающее некоторое сечение проводника за единицу времени

$\left[I = \frac{\Delta q}{\Delta t}\right]$ $\frac{dq}{dt}$ $[I] = \frac{Кл}{с} = A$ – алгебраическая величина

Плотность тока (объемная плотность тока) – количество электричества (заряда), пересекающее единичную пов-ть за единицу времени $\perp$ по этой пов-ти



$dq =$ (за время от t до $t+dt$) $= j_n dS \cdot dt$; $j_n = \frac{dq}{dS\,dt}$ $[j] = \frac{A}{м^2}$

$\left[I = \iint j_n dS\right]$ $I = j \cdot S$

Свойства плотности тока

- Поскольку рассм. постоянный ток и если выберем в проводнике любую замкнутую пов-ть, то сколько заряда войдет в этот объем, столько и вытечет, т.е. в проводнике нет источников и стоков заряда

$$\oint\!\!\oint_{S} j_n\, dS = 0 \Rightarrow \oint\!\!\oint_{S} j_n\, dS = \iiint \operatorname{div}\vec{j}\, dV$$

V – малый $\Rightarrow \iiint_V \operatorname{div}\vec{j}\, dV = \operatorname{div}\vec{j}\cdot V = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = 0$

I св-во

В любой точке проводника дивергенция $j = 0$.

$\operatorname{div}\vec{j} = 0$

II св-во

Так как ток не выходит наружу проводника, то нормальная составляющая плотности тока в любой точке поверхности проводника будет $= 0$.

$j_n \big|_{\text{б пов-ти проводника}} = 0$ $\quad [j] = \frac{A}{м^2}$

Основные дифференциальные законы постоянного тока

Внутри проводника при замыкании его на источнике тока потечет эл. ток $\Rightarrow$ будет эл. поле. Это поле потенциальное

$$\left[\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi\right]$$

$$\left[\oint_L E_L\, dl = 0\right]$$

① Диф. закон Ома в проводнике вне источника тока

(экспериментальный закон)

$\left[\vec{j} = \sigma\cdot\vec{E}\right]$ – для большого кол-ва материалов

σ – козф. электропроводности, св-во материала $[\sigma] = \frac{1}{Ом\cdot м}$

$\rho = \frac{1}{\sigma}$ – удельное сопротивление проводника $\quad [\rho] = Ом\cdot м$

② Закон Ома внутри источника тока

$\vec{E_0}$ – сила неэлектрического происхождения, действующая на единичный положительный заряд внутри источника тока

$$\left[\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E_0})\right]$$

③ Закон Джоуля – Ленца

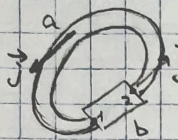
В любом элементе проводника объема dV за время dt выделяется теплота некоторое $q\cdot dV\cdot dt = \delta Q = \frac{j^2}{\sigma}\cdot dV\cdot dt$

$$P\cdot dt = \iiint_V \frac{j^2}{\sigma}\, dV \cdot dt \Rightarrow q = \frac{j^2}{\sigma}$$

q – количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени

$[q] =$

④ Интегральный закон Ома и понятие ЭДС источника тока.



Для 2a1 Закон Ома: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

1b2 $\quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_0)$

Для кас. проекций: $j_l = \sigma E_l$

$$j_l = \sigma(E_l + E_{0l})$$

1. Сечение проводника может меняться, но ток через любое сечение = const.

$I = j_l S = \text{const}.$

2. Электрическое поле потенциально

$\oint E_l dl = 0$

$$\cancel{\int_{2a1} E_l dl} = \int_{2a1} E_l dl = \int_{2a1} \frac{j_l}{\sigma} dl = \int_{2a1} \frac{j_l \cdot S}{\sigma \cdot S} dl = I \int_{2a1} \frac{1}{\sigma \cdot S} dl$$

$$\int_{1b2} (E_l + E_{0l}) dl = \int_{1b2} \frac{j_l}{\sigma} dl = I \cdot \int_{1b2} \frac{1}{\sigma \cdot S} dl$$

$$\underbrace{\int_{2a1} E_l dl + \int_{1b2} E_l dl}_{\oint E_l dl = 0} + \int_{1b2} E_{0l} dl = I \underbrace{\int_{2a1} \frac{1}{\sigma S} dl}_{*} + I \underbrace{\int_{1b2} \frac{1}{\sigma \cdot S} dl}_{**} \Rightarrow \mathcal{E} = I(R + r)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

$\mathcal{E}$ – электродвижущая сила источника тока

(*) $\int_{2a1} \frac{1}{\sigma S} dl = R$ – сопротивление внешней цепи

(**) $\int_{1b2} \frac{1}{\sigma S} dl = r$ – сопротивление источника тока

Получим закон Ома для полной цепи $\left[I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \right]$

Задание (частный случай)

Если цепь разомкнута, то $j = 0 \Rightarrow$ внутри источника $E_l = -E_{0l} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{1b2} E_l dl = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{1b2} E_{0l} dl \Rightarrow \left[\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E} \right]$$

Разность потенциалов на клеммах источника равна ЭДС источника тока.

Теория Друде-Лоренца эл. поля в металлах.

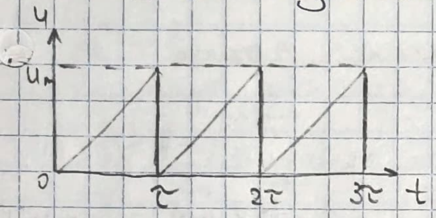
Если поля нет, то электроны двигутся хаотически (тепловое движение). При комнатной температуре $v_{т.дв.} \sim 10^5$ м/с.
l – длина свободного пробега.
τ – время свободного пробега.

При наличии внешнего электрического поля у электронов появляется дополнительная направленная скорость (дрейфовая) ≈ 1 мм/с

Друде предположил, что после каждого столкновения электрон полностью теряет скорость направленного движения.

u – дрейфовая скорость.

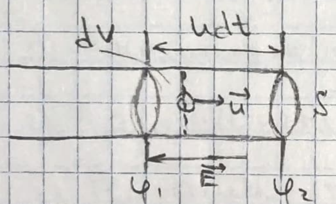
По II закону Ньютона $ma = eE \to a = \frac{eE}{m} \to u_{max} = a\tau = \frac{eE\tau}{m}$



$\vec{u}_{max} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$, $u = \frac{u_{max}}{2}$ – среднее дрейфовая скорость.

$$u = \frac{u_{max}}{2} = \frac{a\tau}{2} = \frac{e\tau}{2m}E$$

Будем считать, что электрон движение равномерно с этой скоростью u против эл. поля.



Возьмём в сечении проводника площадку S и найдем заряд, который пересечет эту площадку за время dt. Количество электронов, пересекающих площадку

$dN = n \cdot dV = nS \cdot u \cdot dt \Rightarrow dq = e \cdot n \cdot S \cdot u \cdot dt$

$j\,dS\,dt = dq$

$j\cancel{S} \cdot \cancel{dt} = en\cancel{S} \cdot u \cdot \cancel{dt}$

$j = enu$

$\vec{j} = -en\vec{u}$

$j = enu = en \cdot \frac{e\tau}{2m}E = \frac{ne^2\tau}{2m} \cdot E$ if $\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m} \Rightarrow \boxed{j = \sigma E}$

Получили Закон Ома в диф. форме: $j = \sigma E$

Закон Джоуля-Ленца

Проверим эту теорию в выводе закона Джоуля-Ленца.

При каждом столкновении электрон теряет энергию $\left(\frac{mu_{max}^2}{2}\right)$, она передается ионам кристаллической решетки, т.е. переходит в тепло

В dV: $dN = n\cdot dV$, $\nu = \frac{dt}{\tau}$

$$\delta Q = q\cdot dV\cdot dt = \frac{m u^2_{max}}{2}\cdot n\cdot dV\cdot\frac{dt}{\tau} = \frac{m a^2\tau^2}{2}\cdot\frac{n}{\tau}\,dV\,dt =$$

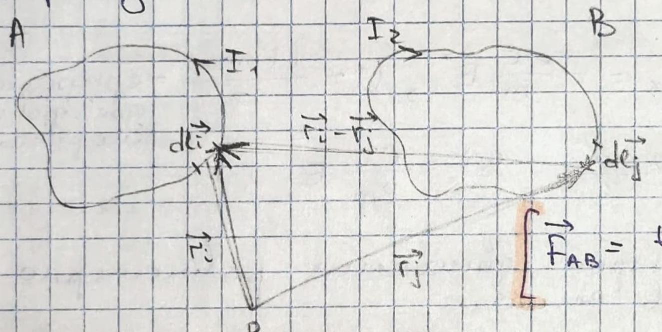
$$= \frac{m\cdot e^2\cdot E^2}{2m^2}\,\tau\cdot n\cdot dV\cdot dt \Rightarrow q = \underbrace{\frac{e^2 n\tau}{2m}}_{\sigma}E^2 \Rightarrow \boxed{q = \sigma E^2}$$

– диф. закон Джоуля-Ленца, выведенный из теории Друде-Лоренца.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Закон Ампера

Закон Ампера описывает силу взаимодействия двух проводников с током.



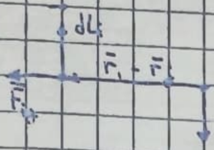
$\vec{F}_{AB}$ действие проводника B на A

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = \frac{\mu_1\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\sum_{i,j}\frac{[d\vec{l_i},[d\vec{l_j},(\vec{r_i}-\vec{r_j})]]}{r_{ij}^3}}$$

$\vec{r}_{ij} = \vec{r_i} - \vec{r_j}$

Лекция №6 11.10.23

Пример:



$$\vec F_{ij} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{[d\vec l_i [d\vec l_j, (\vec r_i - \vec r_j)]]}{r_{ij}^3}$$

$\odot [d\vec l_j, (\vec r_i - \vec r_j)]$

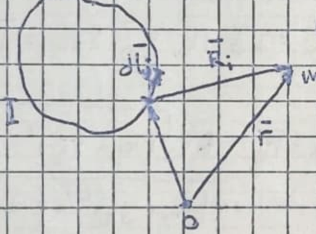
Ожидаем перейти от сил дальнодействия к силе близк.
Для этого вводим понятие магн. поля.
Тогда контур В создаёт вокруг и внутри себя магнитн. поле и именно оно будет действовать на контур А.

$$\vec H_i = \frac{I_2}{4\pi}\sum_j \frac{[d\vec l_j, (\vec r_i - \vec r_j)]}{r_{ij}^3}$$ – напряжённость магнитного поля

$$\vec B_i = \mu\mu_0 \vec H_i$$

$$\vec F_{AB} = I_1 \sum_i [d\vec l_i, \vec B_i]$$

① З-н Био-Савара (Лапласа)



$\otimes \vec H_i$

$$\vec H(\vec r) = I\sum_i \frac{[d\vec l_i, \vec R_i]}{4\pi R_i^3} \Rightarrow \vec B(\vec r) = \frac{I\mu_0\mu}{4\pi}\sum_i \frac{[d\vec l, \vec R_i]}{R_i^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{[d\vec l, \vec R_i]}{R_i^3}$$

② З-н Ампера (сила Ампера)

$\vec F = I\sum[d\vec l_i, \vec B_i]$ – сила, которая действует на элемент тока, помещённый в маг. поле

(Заменяем силу дальнодействия)

$$\vec F = I\int[d\vec l, \vec B]$$

Сведения из векторного анализа:

1. $rot(\varphi\vec a) = \varphi\, rot\,\vec a + [grad\,\varphi, \vec a]$

Док-во:

$$rot(\varphi\vec a) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi a_x & \varphi a_y & \varphi a_z \end{vmatrix} = \vec i\left(\frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_y)\right) - \vec j\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi a_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi a_x)\right) + \vec k\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi a_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\varphi a_x)\right) =$$

$$= \vec i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} a_z + \varphi\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} a_y - \varphi\frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - \vec j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} a_z + \varphi\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} a_x - \varphi\frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \vec k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} a_y + \varphi\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} a_x - \varphi\frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \vec i\varphi\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) -$$

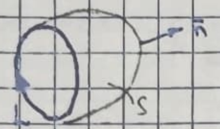
$$-\varphi \bar{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)+\varphi\bar{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)+\ldots=\varphi \operatorname{rot}\bar{a}+\ldots$$

$$\ldots=[\operatorname{grad}\varphi,\bar{a}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\bar{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot a_z-\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_y\right)-\bar{j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_z-\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_x\right)+$$
$$+\bar{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot a_y-\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_x\right)$$

2. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}=-\nabla^2\bar{a}+\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{a})$

3. Теорема Стокса

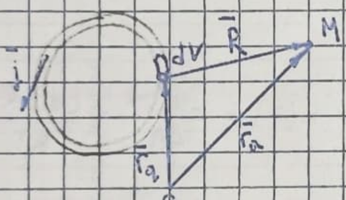
$$\oint_L a_l\,dl=\iint_S(\operatorname{rot}\bar{a})_n dS$$



Циркуляция вект. поля по замк. контуру равна потоку rot этого векторного поля, через поверхность натянутую ~~этим~~ на этот контур.

Вопрос ДЗ 2

Векторный магнитный потенциал.



где $\bar{r}_q$ – радиус вектор до источника поля
$\bar{r}_a$ – радиус вектор до точки наблюдения (M)

$$\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\sum_i\frac{[d\bar{l}_i,\bar{R}_i]}{R_i^3}\qquad I\,d\bar{l}_i=j\,S\,d\bar{l}_i=\bar{j}\,S\,dl_i=\bar{j}\,dV$$

$$\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{[\bar{j},\bar{R}]}{R^3}dV\qquad \bar{R}=\bar{r}_a-\bar{r}_q\qquad R=\sqrt{(x_a-x_q)^2+(y_a-y_q)^2+(z_a-z_q)^2}$$

объём проводника

$$\operatorname{grad}_a\frac{1}{R}=-\frac{\bar{R}}{R^3}=-\operatorname{grad}_q\frac{1}{R}\Rightarrow\bar{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\left[\bar{j},\operatorname{grad}_a\frac{1}{R}\right]dV=$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\left[\operatorname{grad}_a\frac{1}{R},\bar{j}\right]dV$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\bar{a})=\varphi\operatorname{rot}\bar{a}+[\operatorname{grad}\varphi,\bar{a}]\Rightarrow\left\{\varphi\equiv\frac{1}{R},\ \bar{a}\equiv\bar{j}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left[\operatorname{grad}_a\frac{1}{R},\bar{j}\right]=\operatorname{rot}_a\left(\frac{\bar{j}}{R}\right)-\frac{1}{R}\cancel{\operatorname{rot}_a\bar{j}}\to 0$$ т.к $\bar{j}$ не зависит от координат наблюдения

$$\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\operatorname{rot}_a\left[\frac{\bar{j}}{R}\right]dV=$$ {Интегрирование по V проводника и rot по координатам наблюдения (rot$_a$) независимые действия} (необх.) $=$

$$=\operatorname{rot}_a\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\bar{j}}{R}dV\right)\Rightarrow\bar{B}=\operatorname{rot}\bar{A},\ \text{где}\ \bar{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\bar{j}}{R}dV$$ – векторный магнитный потенциал

~~т.к. M выбрана произвольно~~

Вопрос 2 ДЗ 6

Важное св-во векторного магнитного потенц.

В ∀ т. пр-ва $\operatorname{div}\bar{A}=0$

Док-во:

Вспомним св-ва плотности DC:

$\operatorname{div}\bar{j}=0\qquad j_n=0$

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \operatorname{div}_a\left(\frac{\bar{j}}{R}\right)dV$$

$$\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \varphi\operatorname{div}\bar{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \bar{a}),\ \text{где}\ \left\{\varphi \equiv \frac{1}{R},\ \bar{a}\equiv\bar{j}\right\} \Rightarrow \operatorname{div}_a\left(\frac{\bar{j}}{R}\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\cancel{\operatorname{div}\bar{j}} + \left(\operatorname{grad}_a\frac{1}{R}, \bar{j}\right) = \left(\operatorname{grad}_a\frac{1}{R}, \bar{j}\right)$$

0 из вопроса 1.8.3?

$$\left(\operatorname{grad}_a\frac{1}{R}, \bar{j}\right) = -\left(\operatorname{grad}_q\frac{1}{R}, \bar{j}\right) \Rightarrow \operatorname{div}_a\left(\frac{\bar{j}}{R}\right) = -\left(\operatorname{grad}_q\frac{1}{R}, \bar{j}\right)$$

$$\operatorname{div}_q\left(\frac{\bar{j}}{R}\right) = \frac{1}{R}\operatorname{div}_q\bar{j} + \left(\operatorname{grad}_q\frac{1}{R}, \bar{j}\right) \Rightarrow \operatorname{div}_q\left(\frac{\bar{j}}{R}\right) = \frac{1}{R}\cancel{\operatorname{div}_q\bar{j}} -$$

0 по св-ам плотности тока

$$-\operatorname{div}_a\frac{\bar{j}}{R}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}_a\left(\frac{\bar{j}}{R}\right) = -\operatorname{div}_q\left(\frac{\bar{j}}{R}\right) \Rightarrow \operatorname{div}\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \operatorname{div}_a\left(\frac{\bar{j}}{R}\right)dV =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \operatorname{div}_q\left(\frac{\bar{j}}{R}\right)dV = (\text{по т. Остроградского-Гаусса}) =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S \frac{\cancel{j_n}}{R}dS = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{A} = 0$$

Вопрос 3 ДЗ 2

Теорема Стокса (т. о циркуляции) (в устной)
Док-во в диф. форме, потом выведем в интегр. форме

Док-во:

$$\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{A},\ \text{где}\ \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\bar{j}}{R}dV$$

$$\bar{B} = \mu_0\bar{H} \Rightarrow \mu_0\bar{H} = \operatorname{rot}\bar{A}\ \Big|\cdot\operatorname{rot} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_0\operatorname{rot}\bar{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = -\nabla^2\bar{A} - \operatorname{grad}\underbrace{\cancel{\operatorname{div}\bar{A}}}_{0} \Rightarrow \mu_0\operatorname{rot}\bar{H} = -\nabla^2\bar{A}$$

Вспомним ур-е Пуассона: $\nabla^2\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, где $\varphi = \iiint_V \frac{\rho\,dV}{4\pi\varepsilon_0 R}$ $\Rightarrow$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{j_x}{R}dV$$

$\Rightarrow$ $\left\{\frac{\rho}{\varepsilon} \leftrightarrow \mu_0 j_x\right\}$ $\quad \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x$ аналогично y и z ...... $\Rightarrow \nabla^2\bar{A} = -\mu_0\bar{j}$

$\mu_0\operatorname{rot}\bar{H} = -(-\mu_0\bar{j}) \Rightarrow \operatorname{rot}\bar{H} = \bar{j}$ — т. Стокса в диф. виде

$$\iint_S (\operatorname{rot}\bar{a})_n\,dS = \oint_L a_l\,dL \Rightarrow \oint_L H_l\,dL = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{H})_n\,dS = \iint_S j_n\,dS = I$$

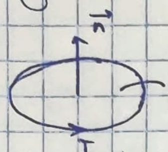
$\Rightarrow \oint_L H_l\,dl = I$ — т. Стокса в инт. виде

Циркуляция напряж. маг. поля по $\forall$ замкн. контуру = суммарному току, охватываемому этим контуром. При этом направление обхода контура и направление тока связаны правилом "правого винта".

Лекция № 7

Магнитный диполь

Ток, протекающий по плоскому контуру, причём мин. размеры контура много меньше расстояние до точки, где мы рассматриваем магнитное поле, созданное этим диполем, наз. магнитным диполем.



$\vec m = I S \cdot \vec n$ – магнитный момент диполя.

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec m, \vec R]}{R^3}$$

Магнитное поле в веществе

$\vec M$ – вектор намагниченности – это магнитный момент единицы объема магнетика.

$$\vec M \, dV = \sum_i \vec m_i$$

$$\vec M = \vec M_0 + \vec M_{инд} \; ; \; \vec M = \underbrace{(\mu - 1)}_{\chi} \vec H$$

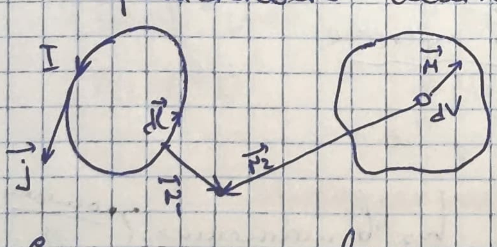
χ – магнитная восприимчивость

Магнетики делятся на:

1) Диамагнетики, $\mu < 1$
2) Парамагнетики, $\mu > 1$ $\Big\}$ $(\mu - 1) \sim 10^{-4}$
3) Ферромагнетики, $\mu \gg 1 \sim 10^4$

$$\vec H = \frac{\vec B}{\mu_0} - \vec M \Rightarrow \vec B = \mu_0(\vec H + \vec M) = \mu \mu_0 \vec H$$

напряжённость магнитного поля.



$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec j \, dV_1}{r_1} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[\vec M, \vec r_2]}{r_2^{\,3}} \, dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec B = \operatorname{rot} \vec A$$

Сведение из векторного анализа

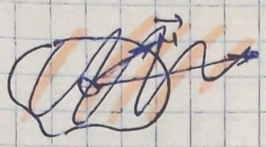
$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec a \, dV = \oiint_S [\vec n, \vec a] \, dS$$

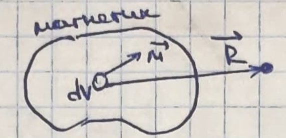
ДЗ II вопрос 4

Теорема об эквивалентности

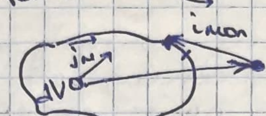
Эквивалентны вектору магнитной поляризации ~~молекулярные~~ молекулярные токи намагниченности вычисляются по формулам:

фор-ла: $\vec{j}_{мол} = \mathrm{rot}\,\vec{M}$ и $\vec{i}_{мол} = [\vec{M}, \vec{n}]$





$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{[\vec{M}, \vec{R}]}{R^3}\, dV$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}_{мол}}{R}\, dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{i}_{мол}\, dS}{R}$$

Док-во:

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \mathrm{grad}_q \frac{1}{R}; \quad \frac{[\vec{M}; \vec{R}]}{R^3} = \left[\vec{M}, \mathrm{grad}_q \frac{1}{R}\right] = -\left[\mathrm{grad}\frac{1}{R}, \vec{M}\right]$$

$$\mathrm{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \cdot \mathrm{rot}\,\vec{a} + [\mathrm{grad}\,\varphi; \vec{a}] \Rightarrow \left(\vec{a} \equiv \vec{M};\ \varphi \equiv \frac{1}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\frac{\vec{M}}{R} = \frac{1}{R}\mathrm{rot}\,\vec{M} + \left[\mathrm{grad}\frac{1}{R}; \vec{M}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\mathrm{grad}\frac{1}{R}; \vec{M}\right] = \mathrm{rot}\frac{\vec{M}}{R} - \frac{1}{R}\mathrm{rot}\,\vec{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{[\vec{M}; \vec{R}]}{R^3}\, dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{1}{R}\,\mathrm{rot}\,\vec{M}\, dV - \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \mathrm{rot}\frac{\vec{M}}{R}\, dV$$

$$\iiint_V \mathrm{rot}\left(\frac{\vec{M}}{R}\right) dV = \oint_S \frac{[\vec{n}, \vec{M}]}{R}\, dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathrm{rot}\,\vec{M}}{R}\, dV - \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{[\vec{n}, \vec{M}]}{R}\, dS = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathrm{rot}\,\vec{M}}{R}\, dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{[\vec{M}, \vec{n}]}{R}\, dS$$

векторный потенциал
магнитный

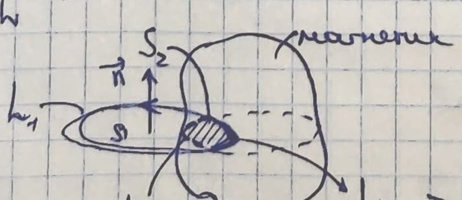
$$\vec{j}_{мол} = \mathrm{rot}\,\vec{M}; \quad \vec{i}_{мол} = [\vec{M}, \vec{n}]$$

ДЗ II вопрос 5

Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе.

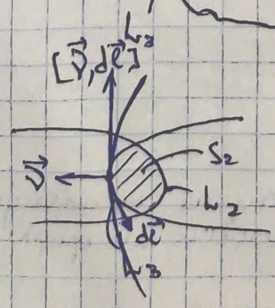
$\oint_L H_l\, dl = I$; $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \oint \frac{B_l}{\mu_0}\, dl = I$ в пустоте

$\oint_L \frac{B_l}{\mu_0}\, dl = I + I_{мол}$ в веществе



$\begin{cases} L_1 \text{ в пустоте, } L_2 \text{ в магнетике} \\ L_1 + L_2 = L \\ S_1 \text{ и } S_2 \text{ аналогично} \\ L_3 \text{ на поверх-ти магнетика} \end{cases}$ пометки

$$I_{мол} = \iint_{S_2} j_{мол,n}\, dS + \int_{L_3} (\vec{i}_{мол}, [\vec{\nu}, d\vec{l}])$$



$$\iint_{S_2} j_{мол,n}\, dS = \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{M})_n\, dS = (\text{по т. Стокса}) = \oint_{L_2 + L_3} M\, dl$$

$$\int_{L_3} (\vec{i}_{мол}, [\vec{\nu}, d\vec{l}]) = \int_{L_3} (d\vec{l}, [\vec{i}_{мол}, \vec{\nu}]) = \int_{L_3} [\vec{i}_{мол}, \vec{\nu}]_l\, dl =$$

$$= \int_{L} [[\vec{M}, \vec{\nu}], \vec{\nu}]_e \, dl = - \int_{L_3} [\vec{\nu}, [\vec{M}, \vec{\nu}]]_e \, dl = - \int_{L_3} M_e (\vec{\nu}, \vec{\nu}) dl +$$

$$+ \int \underbrace{\cancel{\nu_e}}_{0} [\vec{\nu}, \vec{M}] dl = - \int_{L_3} M_e \, dl$$

$$I_{мол} = \oint_{L_2 + L_3} M_e dl - \int_{L_3} M_e dl = \int_{L_2} M_e dl = \int_{L_2} M_e dl + \underbrace{\int_{L_1} M_e dl}_{\substack{=0 \\ \text{в пустоте}}} = \oint_{L} M_e dl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \oint_{L} B_e dl = I + \oint_{L} M_e dl \Rightarrow \oint_{L} \underbrace{\left(\frac{B_e}{\mu_0} - M_e \right)}_{H_e} dl = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{L} H_e dl = I}$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равна сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром. (сумма алгебраическая) (Направление циркуляции и нормаль к пов-ти связаны правилом правого винта)

$$\oint_{L} H_e dl = I \Rightarrow rot \vec{H} = \vec{j}$$

Теорема о циркуляции

Интегральный вид

Пустота	Вещество
$\oint_L H_e dl = I$	$\oint_L H_e dl = I$
$\oint_L B_e dl = \mu_0 I$	$\oint_L B_e dl = \mu_0 (I + I_{мол}) = \mu \mu_0 I$
$\oint_L M_e dl = 0$	$\oint_L M_e dl = I_{мол}$

Дифференциальный вид.

Пустота	Вещество
$rot \vec{H} = \vec{j}$	$rot \vec{H} = \vec{j}$
$rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$rot \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{мол}) = \mu \mu_0 \vec{j}$
$rot \vec{M} = 0$	$rot \vec{M} = \vec{j}_{мол}$

Лекция №8

Два фундаментальных св-ва магнитостатического поля

ДЗ II вопрос? (на экзамене для пустоты или вещества)

(I) Теорема Стокса

$$\oint_L H_l\,dl = \sum_i I_i = I = \iint_S j_n\,dS \quad i, j \text{ – токи проводимости}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec H = \vec j$$

(II) Теорема Гаусса для $\vec B$

$$\oiint_S B_n\,dS = 0; \quad \mathrm{div}\,\vec B = 0$$

Физ. смысл: В природе не существует магнитные заряды.
для РК

$$\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec A) = 0$$

Док-во:

$$\mathrm{rot}\,\vec A = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec i\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \vec j\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \vec k\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec A) = (\vec\nabla, \mathrm{rot}\,\vec A) \ominus \quad \vec\nabla = \vec i\frac{\partial}{\partial x} + \vec j\frac{\partial}{\partial y} + \vec k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\ominus\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

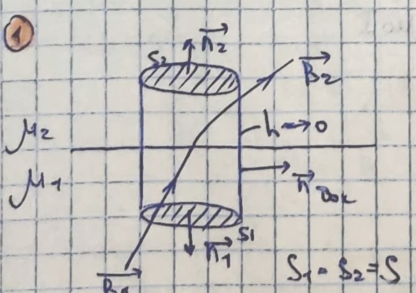
$$= \cancel{\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_V \mathrm{div}\,\vec B\,dV = 0 \Rightarrow (\text{по Т Гаусса-Остр.}) \Rightarrow \oiint_S B_n\,dS = 0$$

ДЗ II вопрос?

Магнитное поле на границе раздела двух магнетиков.

(1)



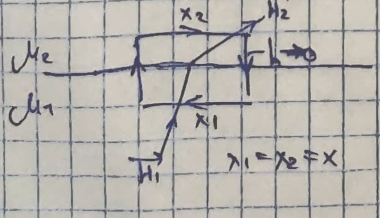
$S_1 = S_2 = S$

$$\oiint_S B_n\,dS = 0 \Rightarrow \iint_{S_2} B_{2n}\,dS + \iint_{S_1} B_{1n}\,dS + \iint_{S_{бок}} B_n\,dS^{\to 0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{2n}\cdot S - B_{1n}\cdot S = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$$

$$\mu_1\cancel{\mu_0}H_{1n} = \mu_2\cancel{\mu_0}H_{2n} \Rightarrow \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

(2)



$x_1 = x_2 = x$

$$\oint_L H_l\,dl = 0 \Rightarrow \int_{x_2} H_{2\tau}\,dl + \int_{x_1} H_{1\tau}\,dl + 2\int_h H_l\,dl^{\to 0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{2\tau}\cdot x - H_{1\tau}\cdot x = 0 \Rightarrow H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

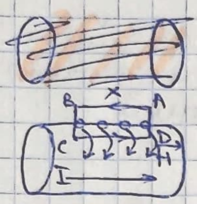
$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1\mu_0} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2\mu_0} \Rightarrow \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Энергия магнитного поля.

$l,\ r,\ (r \ll l),\ N,\ \mu,\ I$

Переводим катушку в сверхпроводящее состояние.

Задача: Найдем работу, которую совершают внешние силы по расширению катушки от R_1 до R_2. Причем считаем, что провод очень гибкий и на его движение энергия не тратится.



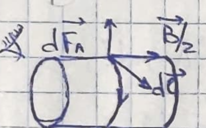
Ссылаясь на принцип суперпозиции можно получить, что внутри соленоида поле $\vec{H}$ однородное, а снаружи его нет.

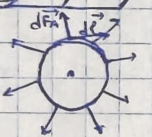
$$\oint_L H_l\, dl = \sum_i I_i;$$

$n = \frac{N}{l}$ — плотность витков

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{AB} H_l\, dl}_{\to 0,\ \vec{H}=0} + \underbrace{\int_{BC} H_l\, dl}_{\to 0,\ \cos 90^\circ = 0} + \int_{CD} H_l\, dl + \underbrace{\int_{DA} H_l\, dl}_{\to 0,\ \cos 90^\circ = 0} = H\cdot x = n\cdot x\cdot I \Rightarrow H = n\cdot I$$

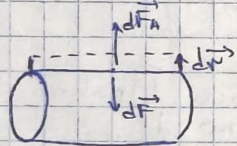
$$B = \mu_1 \mu_0 n I$$





$$d\vec{F}_A = I\left[d\vec{l}, \frac{\vec{B}}{2}\right]$$

При совершении работы по расширению катушки внешние силы действуют так, чтобы расширение происходило квазиравновесным способом.



$$d\vec{F} + d\vec{F}_A = 0$$

$$\delta A = -I\cdot\frac{B}{2}\cdot dr\int dl = -I\cdot\frac{B}{2}\cdot dr\cdot 2\pi r\cdot N = -I\pi B \underset{n\cdot l}{N} r\,dr = -\underbrace{\mu\mu_0 n^2 l}_{\alpha} I^2 r\,dr$$

$$\delta A = \alpha I^2 r\,dr$$

Магнитное поле в сверхпроводниках имеет важное св-во: магнитный поток через виток из сверхпроводника не меняется, т.е.

$$\Psi = \iint_S B_n\, dS = const$$

$$\Psi = B\cdot \pi r^2 \cdot N = \mu_1\mu_0 n I\cdot \pi r^2\cdot n\cdot l = \underbrace{\pi\mu_1\mu_0 n^2 l}_{\alpha}\, I r^2 = \alpha I r^2 = const$$

То есть если меняется r, то будет меняться I, а $\Psi = const$.

$$I = \frac{\Psi}{\alpha r^2} \Rightarrow \delta A = -\alpha I^2 r\,dr = -\alpha\cdot\frac{\Psi^2}{\alpha^2 r^4}\cdot r\,dr = -\frac{\Psi^2}{\alpha r^3}\,dr$$

$$A_{12} = -\frac{\Psi^2}{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^3} = \frac{\Psi^2}{2\alpha}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = \frac{\Psi^2}{2r_2^2\alpha} - \frac{\Psi^2}{2r_1^2\alpha}$$

Работа идет на изменение магнитного поля катушки. Т.к. r_1 и r_2 произвольные, то $W = \frac{\Psi^2}{2\alpha r^2} = \frac{\pi\mu_1\mu_0 n^2 l I^2 r^2}{2}$

$\pi r^2 l = V$ - объем катушки

$W = V\cdot \frac{\mu_1\mu_0 n^2 I^2}{2}$, т.к. $H = n\cdot I \Rightarrow W = V\cdot\frac{\mu_1\mu_0 H^2}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\mu_1\mu_0 H^2}{2}$ –

– объемная плотность энергии магнитного поля

$W = \iiint_V \omega\, dV$

Теорема Томсона для энергии магнитного поля.

Задача: Рассмотрим проводник в пустоте ($\mu = 1$) объемом V. В нем протекает ток с объемной плотностью $\vec j$ и на поверхности ток с поверхностной плотностью $\vec i$.

Энергия магнитного поля, создаваемого таким проводником может быть вычислена двумя способами.

$W = \iiint_{V\div V_0} \frac{1}{2}\mu_0 H^2 dV$ либо: $W = \frac{1}{2}\iiint_V (\vec j\vec A)dV + \frac{1}{2}\oiint_S (\vec i\vec A)dS$

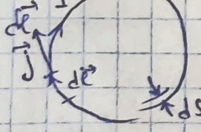
объем пр-ва за пределами проводника

$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec j}{R}dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S \frac{\vec i}{R}dS$

Индуктивность контура.

Пусть мы имеем замкнутый виток с током. Провод тонкий, поэтому плотность тока направлена по dl. Используя Т Томсона энергия магнитного поля равна:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V (\vec j\vec A)dV$$



$dV = S\cdot dl$, $(\vec j\vec A) = j\cdot A_l \Rightarrow W = \frac{1}{2}\oint_{L_0} j\cdot S\cdot A_l\, dl =$

$= \frac{I}{2}\oint_{L_0} A_l dl.$

S - площадь сечения

Применим Т Стокса: $\oint_{L_0} A_l dl = \iint_S (\mathrm{rot}\vec A)_n dS =$

$= \{$т.к. $\mathrm{rot}\vec A = \vec B\} = \iint_S B_n dS = \Psi \Rightarrow W = \frac{I\Psi}{2}$

$A\sim I$, $B\sim I$, $\Psi\sim I \Rightarrow \Psi = LI$, L - индуктивность контура (коэф. пропорц.)

$W = \frac{LI^2}{2}$

$[L] = 1$ Генри (Гн)

Мы вывели энергию магнитного поля, рассматривая сверхпроводник. Если катушка имеет сопротивление и продолжает быть подключенной к источнику тока, то вывод ~~энерги~~ энергии более сложный, т.к. необходимо будет учесть работу источника, джоулево тепло и закон электромагнитной индукции Фарадея.

Закон электромагнитной индукции Фарадея.

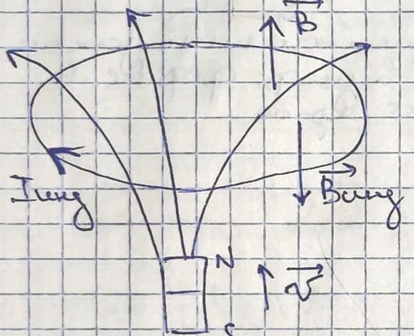
$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

Знак "−" определяется правилом Ленца. Индукционный ток $I_{инд} = \frac{\mathcal{E}_{инд}}{R} = -\frac{1}{R}\cdot\frac{d\Psi}{dt}$

При изменении магнитного потока, пронизывающего контур, со временем в контуре возникает индукционный ток, то есть появляется $\mathcal{E}_{инд}$.

Индукционный ток в контуре потечет в такую сторону, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.

Лекция №9



$\Phi\uparrow \Rightarrow \vec{B}_{инд} \uparrow\downarrow \vec{B}$

Уравнение Максвелла

ДЗ III 1 вопрос

Вихревое эл. поле. I-ый фундаментальный закон Максвелла.

$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Psi}{dt}$ ЭДС индукции подчиняется законам Ома, правилам Кирхгофа так же, как и любые источники сторонних сил в цепи.
ЭДС: $\vec{E}_0$ − поле сторонних сил в цепи $\Rightarrow \mathcal{E}_0 = \int_L E_{0l}\,dl$

$$\mathcal{E}_{инд} = \oint_L E'_l\,dl = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S B_n\,dS$$

$$\oint_L E'_l\,dl \neq 0! \;;\; \oint_L E_l^{стационарное}\,dl = 0 \Rightarrow (\text{if } \vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}^{стац.}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_L E_l\,dl = -\frac{d}{dt}\iint_S B_n\,dS}$$

Максвелл предположил, что вихревое эл. поле, возникающее при переменном магнитном, имеется не только в контуре, но и во всем пр-ве. Таким образом, наш контур будет являться только индикатором существования вихревого эл. поля.

$$\left[\oint_L E_l\,dl = -\frac{d}{dt}\iint_S B_n\,dS\right]$$ – первый фундаментальный закон Максвелла.

L – любой воображаемый контур
S – воображаемая пов-ть, которая натянута на этот контур

Физ. смысл:
Переменное во времени магнитное поле всегда порождает вихревое эл. ~~поле~~.

По Т Стокса:

$$\oint_L E_l\,dl = \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{E})_n\,dS \Rightarrow \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{E})_n\,dS = -\frac{d}{dt}\iint_S B_n\,dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \text{ – мало.} \Rightarrow \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{E})_n\,dS = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n dS \Rightarrow$$

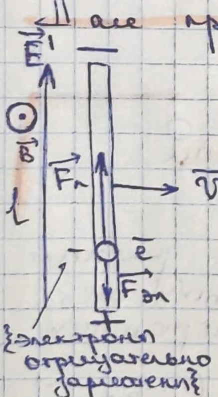
$$\Rightarrow (\mathrm{rot}\,\vec{E})_n \cdot \cancel{S} = -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n \cdot \cancel{S} \Rightarrow \left[\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right]$$

I-ый фундаментальный закон Максвелла в диф. форме в любой точке пр-ва

Следствие:

$$\vec{j} = \sigma(\underbrace{\vec{E}^{\text{стац.}}}_{\{\text{напряж. эл. поля стацион.}\}} + \underbrace{\vec{E}_0}_{\{\text{сторонних сил}\}} + \underbrace{\vec{E}'}_{\{\text{вихревое}\}})$$

II-ая причина возникновения ЭДС индукции:



$$\vec{F}_л = -e\cdot[\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\vec{F}_{эл} = -e\vec{E}'$$

$$\vec{F}_л + \vec{F}_{эл} = 0 \Rightarrow \vec{E}' = -[\vec{v}, \vec{B}]$$

$$U = E'l = vlB$$

$$\mathcal{E}_{инд} = Blv$$

$$j = \sigma(\vec{E}_{стац} + \vec{E}_0 - [\vec{v}, \vec{B}])$$

$$\mathcal{E}_{инд} = Blv = Bl\frac{dx}{dt} = B\frac{d(lx)}{dt} = B\cdot\frac{dS}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}$$

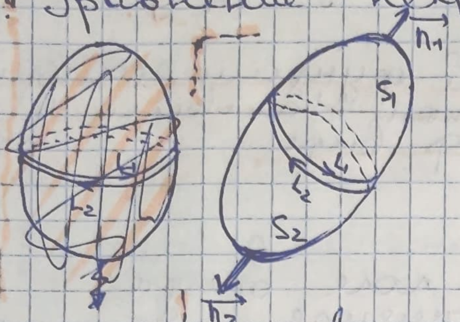
Вн

ДЗ III вопрос 2

II ой фундаментальный закон Максвелла.

— в защиту не идёт —

Уравнение непрерывности



$$\oint_{L_1} H_l\,dl = \iint_{S_1} j_n\,dS$$

$$\oint_{L_2} H_l\,dl = \iint_{S_2} j_n\,dS$$

$$\oint_{L_1} H_l\,dl + \oint_{L_2} H_l\,dl = \iint_{S_1} j_n\,dS + \iint_{S_2} j_n\,dS$$

$$\oint_{L_1} H_l\,dl = -\oint_{L_2} H_l\,dl \Rightarrow \left[0 = \oiint_S j_n\,dS\right] -$$

– ур-ие непрерывности при отсутствии заряда.

идёт в защиту

по Т Остроградского-Гаусса:

$$\oiint_S j_n\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{j}\,dV = 0 \Rightarrow \left[\operatorname{div}\vec{j} = 0\right]$$ – ур-ие непрерывности в векторном виде.

Если внутри пов-ти есть заряд, то

$$\oiint j_n\,dS = -\frac{dQ}{dt}$$

$$Q = \iiint_V \rho\,dV \Rightarrow \oiint_S j_n\,dS = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,dV \Rightarrow$$ По Т Остроградского-Гаусса

$$\Rightarrow \oiint_S j_n\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{j}\,dV = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,dV \Rightarrow V - \text{мал} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{j}\cdot\cancel{V} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot\cancel{V} \Rightarrow \left[\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]$$ – ур-ие непрерывности в диф. форме

$$\oiint_S D_n\,dS = Q \Rightarrow \oiint_S j_n\,dS = -\frac{d}{dt}\oiint_S D_n\,dS$$

$$\iint_{S_1} j_n\,dS + \iint_{S_2} j_n\,dS = -\iint_{S_1}\frac{\partial D_n}{\partial t}dS - \iint_{S_2}\frac{\partial D_n}{\partial t}dS + \overbrace{\left(\oint_{L_1} H_l\,dl + \oint_{L_2} H_l\,dl\right)}^{0}$$

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{S_1} j_n\,dS = -\iint_{S_1}\frac{\partial D_n}{\partial t}dS + \oint_{L_1} H_l\,dl \text{ и } \iint_{S_2} j_n\,dS = -\iint_{S_2}\frac{\partial D_n}{\partial t}dS + \oint_{L_2} H_l\,dl\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

т.к. L_1, L_2, S_1, S_2 – произвольные, то

$$\Rightarrow \left[\oint_L H_l\,dl = \iint_S j_n\,dS + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t}dS\right]$$

$$\left[\oint_L H_l\,dl = I + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t}dS\right]$$ – II ой фундаментальный закон Максвелла в интегральном виде

По Т. Стокса

$$\oint_L H_e\,dl = \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{H})_n dS = \iint_S \left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t}\right) dS,\ S\text{-мал} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{rot}\,\vec{H})_n \cdot \cancel{S} = \left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t}\right)\cdot \cancel{S} \Rightarrow \left[\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right]$$

II-ой фундаментальный закон Максвелла в диф. виде.

Физ. смысл:

Переменное во времени эл. поле всегда порождает вихревое магнитное.

$\iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$ — ток смещения — $I_{см}$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — плотность тока смещения — $\vec{j}_{см}$

Диф. ур-ние Максвелла и материальное соотношение.

$$\begin{cases} \oint_L E_e\,dl = -\frac{d}{dt}\iint_S B_n\,dS \\ \oint_L H_e\,dl = I + \frac{d}{dt}\iint_S D_n\,dS \\ \oiint_S D_n\,dS = q \\ \oiint_S B_n\,dS = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E};\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H};\ \vec{j} = \sigma\vec{E} \end{cases}$$

— материальные соотношения

21 уравнение

неизвестные: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j} \Rightarrow 15$ ~~уравнений~~ неизвестных

в векторном виде

ЛЕКЦИЯ № 10

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \Big|\ \mathrm{div} \Rightarrow \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial}(\mathrm{div}\,\vec{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{н.у.: } \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B} = 0.$$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$

$$\operatorname{rot}\vec H=\vec j+\frac{\partial\vec D}{\partial t}\ \Big|\operatorname{div} \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec H)=\operatorname{div}\vec j+\operatorname{div}\frac{\partial\vec D}{\partial t}\Rightarrow 0=-\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec D\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(-\rho+\operatorname{div}\vec D)=0\Rightarrow -\rho+\operatorname{div}\vec D=\mathrm{const}\Rightarrow \operatorname{div}\vec D=\rho.$$

$\operatorname{div}\vec B=0$

$\operatorname{div}\vec D=\rho$

ДЗ IV вопрос 1.

Теорема Пойнтинга

Однородная изотропная среда. Отсутствие источников тока.
$\vec M_0=0$; $\vec P_0=0$; $\vec E_0=0$

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec E=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}\\ \operatorname{rot}\vec H=\vec j+\frac{\partial\vec D}{\partial t}\\ \operatorname{div}\vec B=0\\ \operatorname{div}\vec D=\rho\end{cases}\qquad \begin{cases}\operatorname{rot}\vec E=-\mu\mu_0\frac{\partial\vec H}{\partial t}\ \cdot\vec H\\ \operatorname{rot}\vec H=\vec j+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}\ \cdot\vec E\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\vec H,\operatorname{rot}\vec E)=-\mu\mu_0\left(\vec H,\frac{\partial\vec H}{\partial t}\right)\\ (\vec E,\operatorname{rot}\vec H)=(\vec j\vec E)+\varepsilon\varepsilon_0\left(\vec E,\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right)\end{cases}\rightarrow$$

$\vec B=\mu\mu_0\vec H$

$\vec D=\varepsilon\varepsilon_0\vec E$

$$\Rightarrow(\vec H,\operatorname{rot}\vec E)-(\vec E,\operatorname{rot}\vec H)=-(\vec j\vec E)-\mu\mu_0\left(\vec H,\frac{\partial\vec H}{\partial t}\right)-\varepsilon\varepsilon_0\left(\vec E,\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right)$$

$$\operatorname{div}\underbrace{[\vec E,\vec H]}_{\vec S\text{ — вектор Пойнтинга}}=-(\vec j,\vec E)-\cancel{\tfrac{\partial}{\partial t}}\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{H^2}{2}-\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right)=$$

$$=-\underbrace{(\vec j,\vec E)}_{q}-\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\underbrace{\frac{\mu\mu_0H^2}{2}}_{W_м}+\underbrace{\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}}_{W_{эл}}}_{W}\Big)$$

q — мощность джоулева тепла, выдел. в единице объема

$W=W_м+W_{эл}$ — объемная мощность энергии электромагнитного поля.

$$\operatorname{div}\vec S=-q-\frac{\partial W}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=q+\operatorname{div}\vec S$$ — Т Пойнтинга в диф. виде.

Берем произвольный объем V:

$$(V)\qquad -\iiint_V\frac{\partial W}{\partial t}dV=\iiint_V q\,dV+\iiint_V\operatorname{div}\vec S\,dV\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V W\,dV=\frac{\delta Q}{dt}+(о.г.)+\oiint_S S_n\,dS\Rightarrow-\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\delta Q}{dt}+\oiint_S S_n\,dS$$

Убыль энергии электромагнитного поля в объеме V за единицу времени равна мощности джоулева тепла, выделяющегося в этом объеме и поток энергии электромагнитного поля, вытекающей наружу из объема V за единицу времени.

Релаксация эл. заряда в проводниках

$\sigma,\ \varepsilon,\ V,\ S$, внутри V $Q(t=0)=Q_0$

Согласно ур-ю непрерывности: $-\frac{dQ}{dt}=\oiint_S j_n\,dS$; $\vec j=\sigma\vec E\Rightarrow j_n=\sigma E_n\Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \oiint_S \sigma E_n dS \Rightarrow \left(E_n = \frac{D_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\right) \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \oiint_S D_n dS \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} Q(t) \Rightarrow -\frac{dQ}{Q} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dt \Rightarrow \ln\frac{Q(t)}{Q_0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t}\right]$ – ур-ие релаксации

$\left[\tau \text{ (время релаксации)} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}\right]$

Время релаксации – время, за которое заряд уменьшается в е раз.

if обычный проводник $\tau \sim 10^{-18}$ с
if плохой проводник $\tau \sim 1$ с
if идеальный диэлектрик $\tau \sim \infty$
$\Rightarrow$ Не заряд переносчик электромагнитной энергии, а электромагнитные волны.

Волновое ур-ие

ДЗ IV вопрос 2.

{Возьмем изотропный диэлектрик} ε; $\sigma = 0$, $\rho = 0$, $\varepsilon_0 = 0$. (нет источников заряда)

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \operatorname{div}\vec{D} = 0 \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = -\nabla^2\vec{a} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$

$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0 \operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)$

$-\nabla^2\vec{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{H})$

$\{\operatorname{div}\vec{D} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = 0\}$

$-\nabla^2\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow -\nabla^2\vec{E} = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\nabla^2\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right]$

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \Rightarrow \left[\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right]$ – волновое ур-ие (?)

v – скорость распространения волны в среде

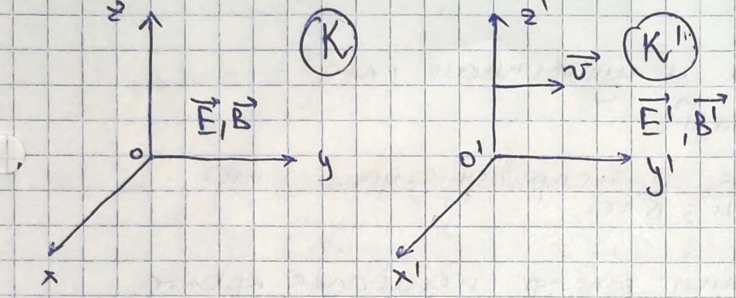
$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ – скорость света в вакууме

$\left[~~v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}~~ \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \right]$

Электромагнитная шкала.

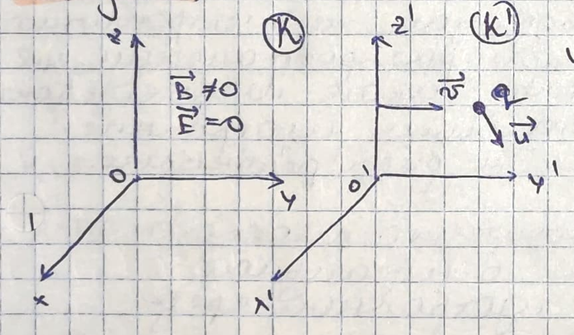
λ, м	10	10^{-3}	10^{-8}	10^{-9} и меньше
ν, Гц	10^{7}	$\sim 3\cdot 10^{11}$	$3\cdot 10^{16}$	10^{18} и больше
	Низкочастот. волны	Радио волны	Инфракрасное излуч. и видимый спектр → ультрафиолетовое	Рентген и γ-излучение

Преобразования полей при скоростях много меньше скорости света ($v \ll c$)



Получим фор-лы преобразования эл. и магнитных полей при переходе одной ~~с.о.~~ системе отсчета в другую.

I случай



$\vec u$ - скорость заряда в K'

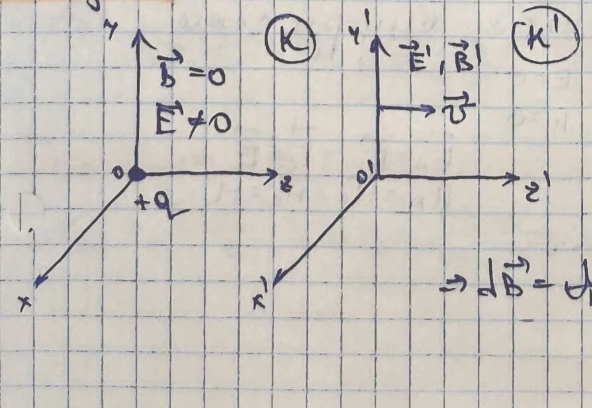
в с.о. K: $\vec F_л = q[(\vec v+\vec u),\vec B] = q[\vec v,\vec B]+q[\vec u,\vec B]=\vec F$

в с.о. K': $\vec F' = q\vec E' + q[\vec u,\vec B']$

В инерциальных с.о. сила, действующая на тело, одинакова

$$\vec F'=\vec F \Rightarrow \underbrace{q\vec E'} + \underbrace{q[\vec u,\vec B']} = \underbrace{q[\vec v,\vec B]} + \underbrace{q[\vec u,\vec B]} \Rightarrow \vec B'=\vec B;\ \vec E' = [\vec v,\vec B]$$

II случай



В системе K' заряд движется со скоростью $-\vec v$ и создает вокруг себя магнитное поле.

Получим поле движущегося заряда:

$$d\vec B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{[d\vec l,\vec r]}{r^3};\ I\cdot d\vec l = jS\,d\vec l = \vec j S\,dl = \vec j\cdot dV;\ \vec j = en\vec v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{en\,dV}_{dq}\frac{[\vec v\vec r]}{r^3} \Rightarrow \cancel{d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec v, \frac{dq\,\vec r}{r^3}\right]}$$

$$d\vec{B}' = \mu_0\varepsilon_0 \cdot \Big[\vec{v}, \underbrace{\frac{dq\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{d\vec{E}}\Big] \Rightarrow d\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0[\vec{v}, d\vec{E}] \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0[\vec{v},\vec{E}]}$$

$$\vec{B}' = -\mu_0\varepsilon_0[\vec{v},\vec{E}]; \quad \vec{E}' = \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v},\vec{B}]; \quad \vec{B}' = \vec{B} - \mu_0\varepsilon_0[\vec{v},\vec{E}]}$$

Лекция №11

Волны в средах

Если среда однородная и изотропная, то:

$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$.

Если среда изотропная и непроводящая, то

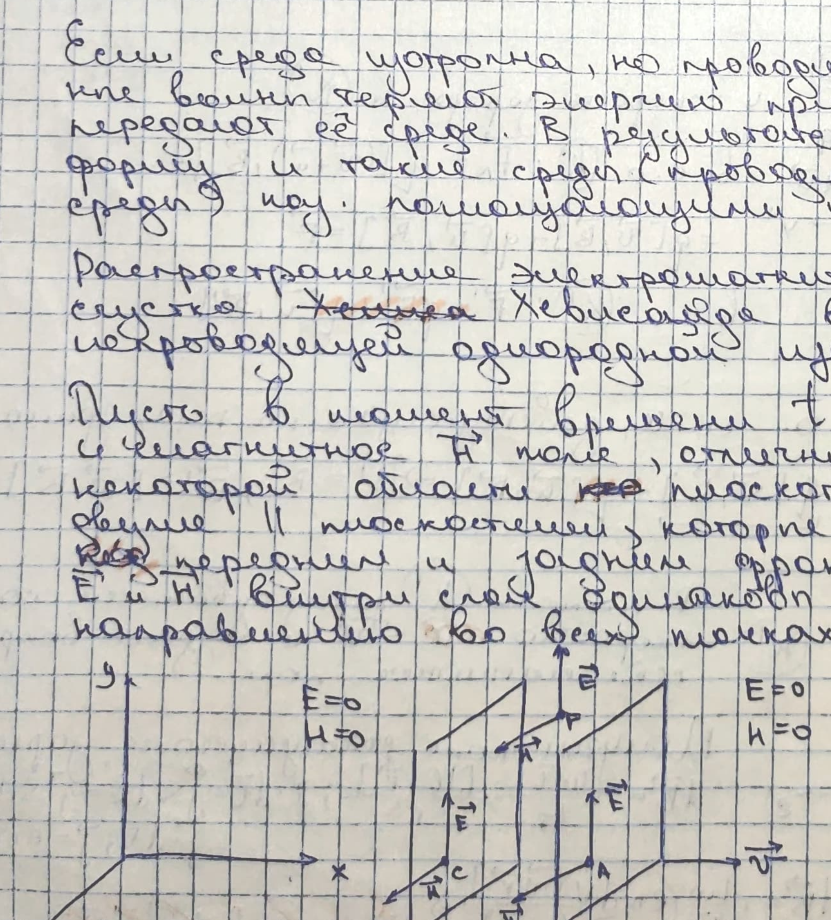
$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$; $\sigma = 0$.

Электромагнитные волны распр. наиболее просто. Энергия волны не поглощается средой и форма волны при её распространении не меняется. Тогда среда непоглощающая, т.е. в ней отсутствует дисперсия.

Если среда изотропна, но проводящая, то электромагнитные волны теряют энергию при распространении, т.е. передают её среде. В результате также меняет свою форму и такие среды (проводящие изотропные среды) наз. поглощающими и дисперсивными.

Распространение электромагнитного плоского сгустка ~~Хевис~~ Хевисайда в идеальной непроводящей однородной изотропной среде.

Пусть в момент времени t электрическая $\vec{E}$ и магнитное $\vec{H}$ поле, отличные от 0 только в некоторой области ~~не~~ плоского слоя, огранич. двумя ∥ плоскостями, которые будем называть ~~как~~ передним и задним фронтами сгустка, причем $\vec{E}$ и $\vec{H}$ внутри слоя одинаковы по величине и по направлению во всех точках внутри слоя.

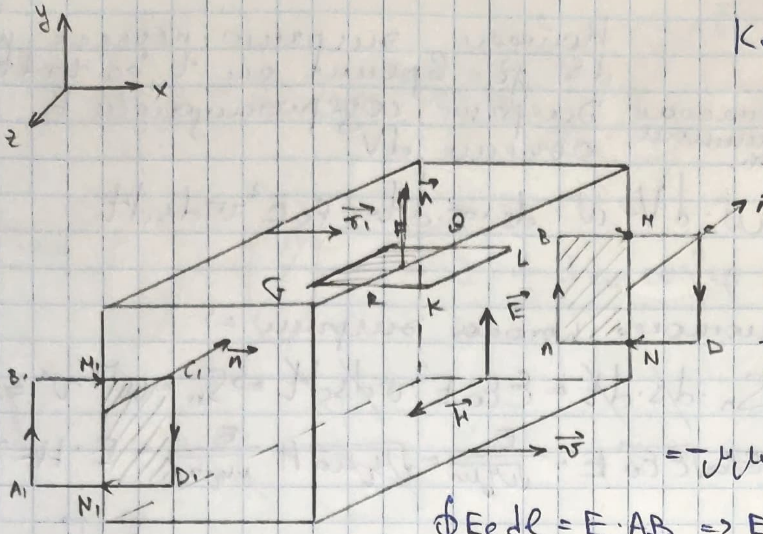


$\forall t$: $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$\vec{E}_A = \vec{E}_F = \vec{E}_C = \vec{E}$

$\vec{H}_A = \vec{H}_F = \vec{H}_C = \vec{H}$

2



Контур покоится.

ABCD: $\oint\limits_L E_\ell\,d\ell = -\dfrac{d}{dt}\iint\limits_S B_n\,dS$;

$\iint\limits_S B_n\,dS = -\mu_1\mu_0 H\cdot AB\cdot BM$

$\dfrac{d}{dt}\iint\limits_S B_n\,dS = \dfrac{d}{dt}(-\mu_1\mu_0 H\cdot AB\cdot BM) =$

$= -\mu_1\mu_0 H\cdot AB\cdot\dfrac{d}{dt}(BM) = -\mu_1\mu_0 H\cdot AB\cdot v$

$\oint\limits_L E_\ell\,d\ell = E\cdot AB \Rightarrow E\cdot\cancel{AB} = +\mu_1\mu_0 H\cdot\cancel{AB}\cdot v \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[E = \mu_1\mu_0 H\cdot v\right]$ (1)

$A_1B_1C_1D_1$: ~~$-E\cdot C_1D_1 = \mu_1\mu_0 H\cdot M_1C_1\cdot C_1D_1$~~

$-E\cdot\cancel{C_1D_1} = -\dfrac{d}{dt}(-\mu_1\mu_0 H\cdot M_1C_1\cdot C_1D_1) = \mu_1\mu_0 H\cdot\cancel{C_1D_1}\cdot\underbrace{\dfrac{d}{dt}(M_1C_1)}_{-v_1}$

$-E = \mu_1\mu_0 H\cdot(-v_1) \Rightarrow \left[E = \mu_1\mu_0 H\cdot v_1\right]$ (2)

(1) и (2) $\Rightarrow v = v_1$

Толщина сгустка не меняется при распространении, т.е. он не меняет форму $\Rightarrow$ Отсутствует дисперсия при расп. в однородной изотропной непроводящей среде.

KLFG: $\oint H_\ell\,d\ell = \dfrac{d}{dt}\iint\limits_S D_n\,dS$; $\oint H_\ell\,d\ell = H\cdot FG$; $\iint\limits_S D_n\,dS = \varepsilon\varepsilon_0 E\cdot FG\cdot FQ$

$H\cdot FG = \dfrac{d}{dt}(\varepsilon\varepsilon_0 E\cdot FG\cdot FQ) = \varepsilon\varepsilon_0 E\cdot FG\cdot\dfrac{d}{dt}(FQ) \Rightarrow \left[H = \varepsilon\varepsilon_0 E v\right]$ (3)

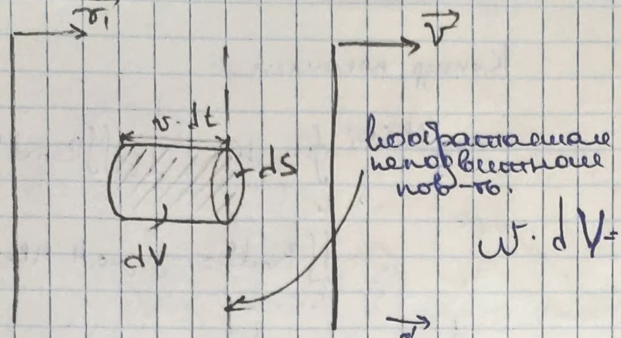
(3) → (1): $E = \mu_1\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 E v^2 \Rightarrow \varepsilon\varepsilon_0\mu_1\mu_0 = \dfrac{1}{v^2} \Rightarrow \left[v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_1\mu_0}}\right]$ (4)

Скорость сгустка Хевисайда равна скорости расп. электромагнитного поля.

(4) → (3) $H = \varepsilon\varepsilon_0 E\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_1\mu_0}} \Rightarrow \left[\sqrt{\mu_1\mu_0}\,H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E\right]$ (5)

Перенос энергии сгустком Хевисайда

$w_{эл} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$; $w_м = \dfrac{\mu_1\mu_0 H^2}{2}$; $\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu_1\mu_0 H^2 \Rightarrow w = w_{эл} + w_м =$
$= \varepsilon\varepsilon_0 E^2$



Найдем энергию, пересек. пов-ть dS за время от t до t+dt — энергия, содержащаяся в объеме dV.

$$w\cdot dV = w\cdot ds\cdot v\cdot dt = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 v\,ds\,dt$$

$\vec S$ — плотность потока энергии =>

=> $\vec S$: $dW = S_n\cdot ds\cdot dt$ => $S_n\cdot \cancel{ds}\cdot\cancel{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 v\,\cancel{ds}\,\cancel{dt}$ => $S_n = w\cdot v =$

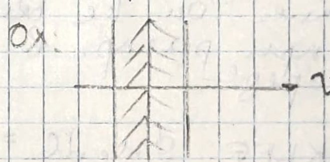
$= \varepsilon\varepsilon_0 E^2\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \cancel{\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E\cdot\frac{E}{\sqrt{\mu\mu_0}} = \cancel{\sqrt{\mu\mu_0}}\,H\,\frac{E}{\cancel{\sqrt{\mu\mu_0}}} = E\cdot H$ =>

=> $S_n = E\cdot H$ $\qquad \vec E\perp\vec H$, $\vec v\uparrow\uparrow\vec S$

Вспомним после вектора Пойнтинга $S = [\vec E, \vec H]$

Плоская эл.-магнитная волна общего вида в идеальной диэлектрической среде

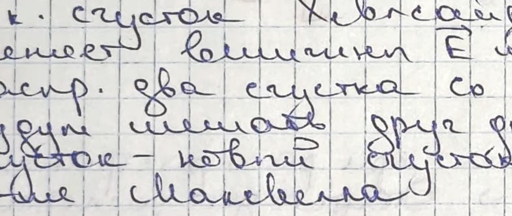
Т.к. сгусток Хевисайда не меняет формы, не меняет величины $\vec E$ и $\vec H$ => Если вдоль оси x распр. два сгустка со своими E и H, то они не будут мешать друг другу, тогда этот двойной сгусток — новый сгусток тоже является решением ур-ния Максвелла



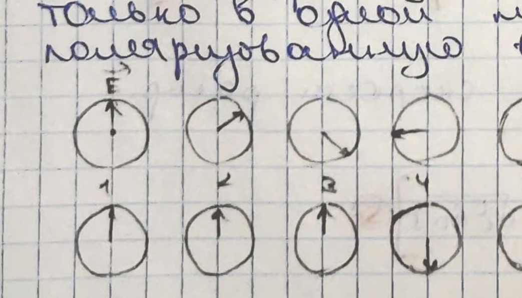
* Пропустила.

Если я приставлю сгустки, ориентируя вектор $\vec E$ по какому-то закону, то я получу циркулярно-поляризованную волну.

Если не приставлю сгустки, но $\vec E$ находится только в одной пл-ти, то получаю линейно поляризованную волну.



Закон Малюса. Ориентация $\vec E$ случайным образом

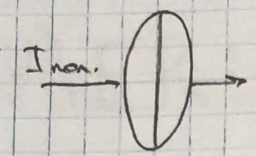


$E_{\parallel} = E\cos\varphi$

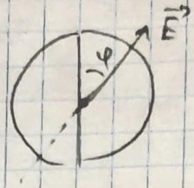
$I\sim E_{\parallel}^2 = E^2\cdot\cos^2\varphi$

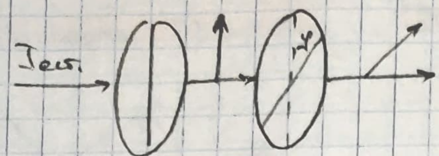
$\langle I\rangle = \langle E^2\cos^2\varphi\rangle = E^2\langle\cos^2\varphi\rangle$

$\langle I\rangle = \frac{E^2}{2} = \frac{I_{ест}}{2}$



$I = I_{пол.} \cdot \cos^2\varphi$





$I = \frac{1}{2} I_{ест.} \cos^2\varphi$

лек. физ.

Лекция №12 29.11.23

Распространение плоской эл. маг волны в однородной, изотропной, непроводящей среде

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$$
$$H(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{II} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

I: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right) =$

$$= -\vec{i}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \vec{j}\frac{\partial B_y}{\partial t} - \vec{k}\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

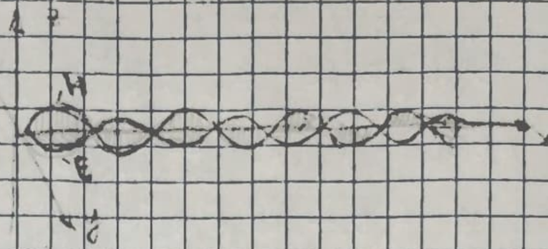
$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{\partial E_z}{\partial y}}_{0} - \underbrace{\dfrac{\partial E_y}{\partial z}}_{0} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} - \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial E_x}{\partial z}}}_{0} = \dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \underbrace{\dfrac{\partial E_z}{\partial y}}_{0} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial D_x}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial D_y}{\partial y}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial D_z}{\partial z}}}_{0} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Из (*) и (**)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \bar{E} \perp \bar{H}$$



$$E = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f(\alpha)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = \dfrac{dE_y}{d\alpha} \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = \dfrac{dE_y}{d\alpha} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = \dfrac{dE_y}{d\alpha} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = -\dfrac{1}{v} \dfrac{dE_y}{d\alpha} \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial t} = \dfrac{dH_z}{d\alpha} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = \dfrac{dH_z}{d\alpha} \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \dfrac{dH_z}{d\alpha} \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = -\dfrac{1}{v} \dfrac{dH_z}{d\alpha} \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \text{из } (*) \\ \text{и } (**) \end{matrix}\right) \begin{cases} -\dfrac{1}{v} \dfrac{dE_y}{d\alpha} = -\mu\mu_0 \dfrac{dH_z}{d\alpha} \\ -\dfrac{1}{v} \dfrac{dH_z}{d\alpha} = -\varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{dE_y}{d\alpha} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dE_y}{dH_z} = \frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{dH_z}{dE_y} \Rightarrow \varepsilon\varepsilon_0 (dE_y)^2 = \mu\mu_0 (dH_z)^2 \Rightarrow$$

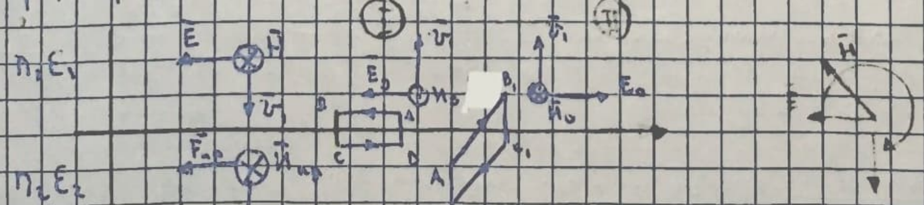
$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, dE_y = \sqrt{\mu\mu_0}\, dH_z \Rightarrow \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, E_y = \sqrt{\mu\mu_0}\, H_z \Rightarrow \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, E = \sqrt{\mu\mu_0}\, H$$

Равномерно движущийся заряд не является источником эл.магн. излучения. А вот ускоренный – является (без док-ва)

Неподвижный заряд – источник электростатического поля
Равномерно-движ. заряд – источник магнитостатического поля
Ускоренно движущийся заряд – источник эл.магнитного излучения

Нормальное падение плоской монохроматической волны на границу раздела двух однородных изотропных диэлектриков.

$\mu_1 = \mu_2 = 1$ $\quad E = E_m \cos(\omega t - kx)$ $\quad H = H_m \cos(\omega t - kx)$



$\Rightarrow$ правая тройка

ABCD: $\oint\limits_L E_l\, dl = -\dfrac{d}{dt} \iint\limits_S B_n\, dS$ $\qquad |BC| = |DA| \to 0! \Rightarrow S \to 0$

(1)

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \bar{i}\frac{\partial D_x}{\partial t} + \bar{j}\frac{\partial D_y}{\partial t} + \bar{k}\frac{\partial D_z}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial z}} = \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial z}}_{0} = \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}}_{0} = \frac{\partial D_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial z}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial D_x}{\partial t} = 0 \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial D_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Из (*) и (**):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow H_x = 0 \Rightarrow \bar{H} \perp Ox \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow E_x = 0 \Rightarrow \bar{E} \perp Ox \end{cases}$$

$\Rightarrow$ э.м. волны - поперечные

$E \cdot AB + E_0 AB - E_{пр} \cdot CD = 0 \quad \Rightarrow \quad E + E_0 = E_{пр}$ (1)

$A_1B_1C_1D_1: \quad \oint_L H_l \, dl = \frac{d}{dt} \iint_S D_n \, dS \quad |B_1C_1| = |D_1A_1| \to 0 \Rightarrow S \to 0$

$H \cdot A_1B_1 - H_0 A_1B_1 - H_{пр} \cdot C_1D_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad H - H_0 = H_{пр}$ (2)

$\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H \quad \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0 \quad \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_2} E_{пр} = \sqrt{\mu_0} H_{пр}$

(1) и (2) $\Rightarrow \begin{cases} E + E_0 = E_{пр} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0}} (E - E_0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_0}} E_{пр} \end{cases} \left| \begin{matrix} n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} \\ n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \end{matrix} \right| \Rightarrow \quad E_{пр} = \frac{2n_1 E}{n_1 + n_2}$ (3)

$E_0 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E$ (4)

Из (3): при $\forall n_1$ и n_2 $\bar{E}_{пр} \uparrow\uparrow \bar{E}$

Из (4): при $n_1 > n_2$ $\bar{E}_0 \uparrow\uparrow \bar{E}$ (I)

при $n_1 < n_2$ $\bar{E}_0 \uparrow\downarrow \bar{E}$ (II)

$\bar{E}_0 \sim -\bar{E} \Rightarrow E_{m_0} \cos(\omega t - kx) \sim -E_m \cos(\omega t - kx) = E_m \cos \Rightarrow$

$\Rightarrow E_m \cos(\omega t - kx) \sim E_{m_0} \cos(\omega t - kx + \pi)$

При отражении от оптически более плотной среды в случае нормального падения фаза отраж. волны испытывает скачок на π

$S = EH = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$ — вектор Пойнтинга

$< S > = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n E_m^2$ — среднее значение вектора Пойнтинга

Интенсивность

Интенсивность – энергия, переносимая волной за dt через единичную поверхность

Интенсивность – энергия, переносимая волной за dt через $\forall$ поверхность.

$I = < S > S$, где S – площадь пов-ти

$I \sim n E_m^2$

$\rho = \frac{I_{отр}}{I_{пад}}$ – коэф. отражения $\quad \rho = \frac{(n_1 - n_2)^2 E^2 \cdot n_1}{(n_1 + n_2)^2 E^2 \cdot n_1} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$

$\tau = \frac{I_{прош}}{I_{пад}}$ – коэф. пропускания $\quad \tau = \frac{n_2 E_{пр}^2}{n_1 E^2} = \frac{n_2}{\cancel{n_1} \cancel{E^2}} \frac{4 n_1^{\cancel{2}} \cancel{E^2}}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$

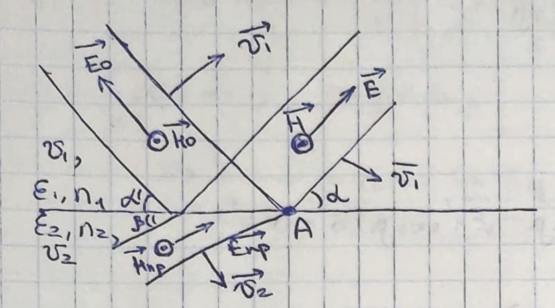
Проверим: $\rho + \tau = 1$

$\frac{(n_1 - n_2)^2 + 4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{n_1^2 - 2n_1 n_2 + n_2^2 + 4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{(n_1 + n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1$

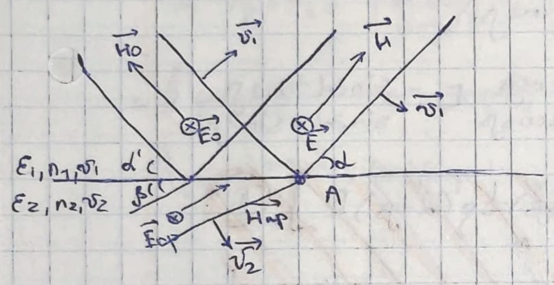
Лекция №13.

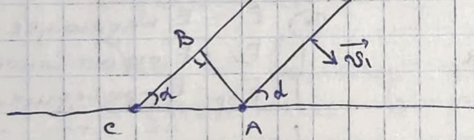
Формула Френеля. !Доп. вопрос на экзамене!

p-волна: Электр. волна лежит в пл-ти падения.



S-волна



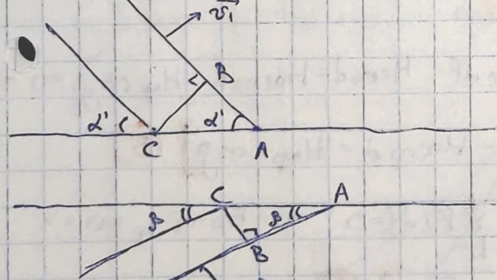


$BC = v_1 t$; $AC = u \cdot t$

$ut = \frac{v_1 t}{\sin\alpha} \Rightarrow u = \frac{v_1}{\sin\alpha}$

$BC = v_1 t$; $AC = u_0 t$

$u_0 t = \frac{v_1 t}{\sin\alpha'} \Rightarrow u_0 = \frac{v_1}{\sin\alpha'}$



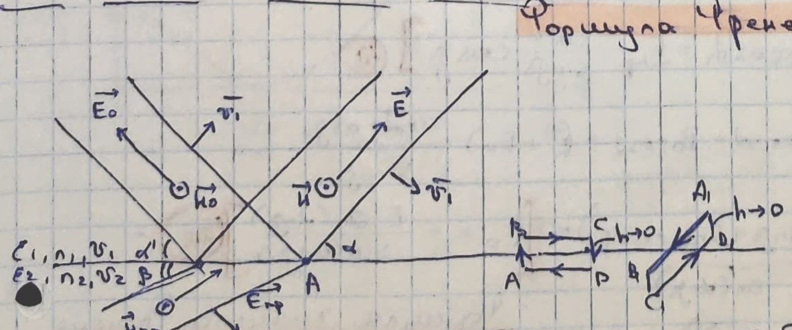
$BC = v_2 t$; $AC = u_{пр} \cdot t \Rightarrow u_{пр} = \frac{v_2}{\sin\beta}$

$u = u_0 = u_{пр} \Rightarrow \frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_1}{\sin\alpha'} \Rightarrow \alpha = \alpha'$

$\frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\beta} \Rightarrow \left[\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}\right]$

Закон преломления света.

Формула Френеля. Вывод для p-волны.



ABCD: $\oint E dl = 0$ (т.к. $S \to 0$)

$E\cos\alpha - E_0\cos\alpha - E_{пр}\cos\beta = 0$

$[E\cos\alpha - E_0\cos\alpha = E_{пр}\cos\beta]$ (1)

$A_1B_1C_1D_1$: $\oint H dl = 0$ $\quad H + H_0 - H_{пр} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [H + H_0 = H_{пр}]$ (2)

$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0} \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu_0}\,H$;

$\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}\,E_0 = \sqrt{\mu_0}\,H_0 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_0}\,E_{пр} = \sqrt{\mu_0}\,H_{пр}$

$\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_0}}(E + E_0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_{пр} \Rightarrow [\sqrt{\varepsilon_1}(E + E_0) = \sqrt{\varepsilon_2}\,E_{пр}]$ (3)

(4) $\begin{cases} E\cos\alpha - E_0\cos\alpha = E_{пр}\cos\beta \\ \sqrt{\varepsilon_1}E + \sqrt{\varepsilon_1}E_0 = \sqrt{\varepsilon_2}E_{пр} \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} \cdot\sqrt{\varepsilon_1} \\ \cdot\cos\alpha \end{matrix} \overset{+}{\Rightarrow} 2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha\, E = E_{пр}\left(\sqrt{\varepsilon_2}\cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\beta\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{пр} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha\cdot E}{\sqrt{\varepsilon_1}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\cos\alpha + \cos\beta\right)} = \frac{2\cos\alpha\, E}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2\cos\alpha\sin\beta\, E}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta} =$$

$$= \frac{4\cos\alpha\sin\beta\, E}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}; \quad \sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\left[E_{пр} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\cdot E\right] \quad (I)$$

(4) $\Big| \begin{matrix} \cdot\sqrt{\varepsilon_2} \\ \cdot\cos\beta \end{matrix} \; - \Rightarrow E\cos\alpha\sqrt{\varepsilon_2} - E_0\cos\alpha\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}E\cos\beta - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\beta E_0 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_0\left(\cos\alpha\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\beta\right) = E\left(\cos\alpha\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\beta\right)$$

$$E_0 = \frac{\cos\alpha\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\beta}{\cos\alpha\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\beta}\cdot E = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cdot\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\alpha - \cos\beta\right)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cdot\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\alpha + \cos\beta\right)}\cdot E =$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\alpha - \cos\beta\right)}{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\alpha + \cos\beta\right)}E = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta}E = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}E =$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}E \Rightarrow \cancel{\left[E_0 = tg(\alpha-\beta)\, tg(\alpha+\beta)\, E\right]} \quad (II)$$

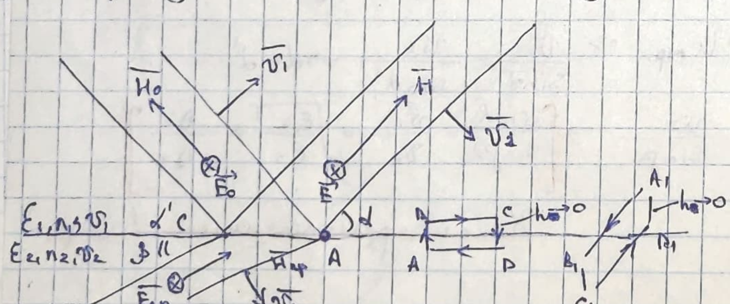
~~Формула тангенсов Френеля~~

$$\Rightarrow \left[E_0 = \frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}E\right] \quad (II)$$ − Формула тангенсов Френеля.

if $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_0 = 0$ − условие Брюстера

— пометка! —
(*) E − E падающее
E_0 − E отраженное
$E_{пр}$ − E прошедшее

Формула Френеля. Вывод для s-волны.



ABCD: $\oint_L H\,dl$ $\quad H\cos\alpha - H_0\cos\alpha - H_{пр}\cos\beta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[H\cos\alpha - H_0\cos\alpha = H_{пр}\cos\beta\right] \quad (5)$$

$A_1B_1C_1D_1$: $\oint_L E\,dl = 0$ $\quad -E - E_0 + E_{пр} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[E + E_0 = E_{пр}\right] \quad (6)$$

$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H \to$ в (5) $\left[E\cos\alpha - E_0\cos\alpha = E_{пр}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta\right]$ (7)

$\begin{cases} (6)\; E + E_0 = E_{пр} \\ (7)\; E\cos\alpha - E_0\cos\alpha = E_{пр}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta \end{cases} \Rightarrow E\cos\alpha - E_0\cos\alpha = (E+E_0)\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E\underbrace{(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)}_{-\sin(\alpha-\beta)} = E_0\underbrace{(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow \left[E_0 = -\frac{E\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right] \quad (III)$$ −

− Формула синусов Френеля.

$$E_{пр} = E - \frac{E\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = E\frac{(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))}{\sin(\alpha+\beta)} = E\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[E_{пр} = \frac{2E\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right] \quad (IV)$$

Анализ формул Френеля.

А) В случае падения из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду

$$\frac{n_2}{n_1} = n > 1$$

$$r = \frac{I_0}{I} = \left|\frac{E_0}{E}\right|^2 \Rightarrow \text{из (II)} \Rightarrow p\text{-волны } r_p = \left|\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}\right|^2; \text{ из (III)} \Rightarrow r_s = \left|\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right|^2$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \beta_{пр}$.

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\beta_{пр}} = n \Rightarrow \sin\beta_{пр} = \frac{1}{n}$$ (Пример: возд → стекло $\Rightarrow n = \frac{3}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin\beta_{пр} = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta_{пр} \approx 41°$)

При $\alpha \to 0 \Rightarrow tg(\alpha \mp \beta) \approx \alpha \mp \beta$; $\sin(\alpha \mp \beta) \approx \alpha \mp \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_p = r_s = \left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right|^2 = \left|\frac{\frac{\alpha}{\beta}-1}{\frac{\alpha}{\beta}+1}\right|^2 = \left|\frac{n-1}{n+1}\right|^2 \quad \left(\text{т.к. } \frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\right)$$

(Пример: $r \approx 0{,}004$)

При $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, $\beta \to \beta_{пр}$:
$$r_p = \left|\frac{tg(\frac{\pi}{2}-\beta_{пр})}{tg(\frac{\pi}{2}+\beta_{пр})}\right|^2 = \left|-\frac{ctg\,\beta_{пр}}{ctg\,\beta_{пр}}\right|^2 = 1;$$

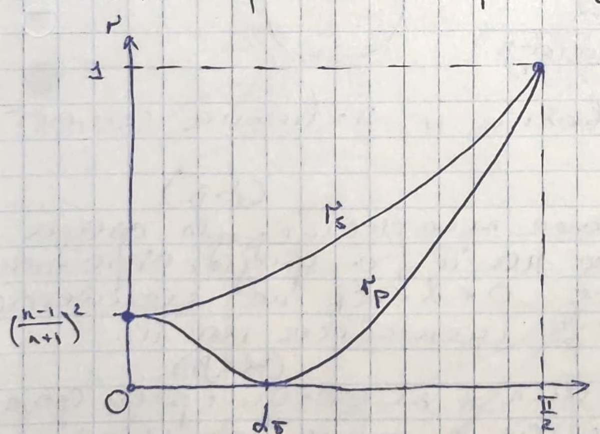
$$r_s = \left|-\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta_{пр})}{\sin(\frac{\pi}{2}+\beta_{пр})}\right|^2 = \left|\frac{\cos\beta_{пр}}{\cos\beta_{пр}}\right|^2 = 1$$

При скользящем падении обе волны полностью отражаются.

Для s-волны при любых углах падения коэф. отражения в 0 не обращается.

Для p-волны при $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_p = 0 \Rightarrow \alpha_Б$ – угол Брюстера

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha_Б)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha_Б)} = \frac{\sin\alpha_Б}{\cos\alpha_Б} = \boxed{tg\,\alpha_Б = n}$$ Закон Брюстера.



Лекция № 14

Падение электромагнитной волны из оптически более плотной среды в оптически менее плотную.

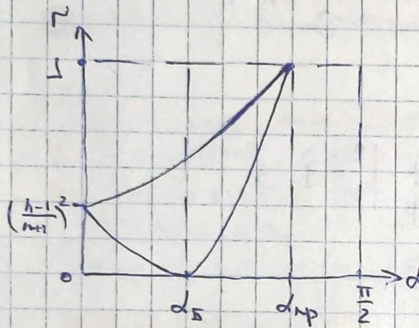
$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}} = \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \alpha < \beta \Rightarrow \exists \alpha = \alpha_{кр} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha_{кр} = \frac{1}{n}$$

При $\alpha > \alpha_{кр}$ → только отражение.

1) $\alpha \to 0$ $\quad r_p = r_s = \left(\frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}+1}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$; $\quad$ 2) $\alpha \to \alpha_{кр}$; $\beta \to \frac{\pi}{2}$

$$r_p = \left[\frac{tg(\alpha_{кр}-\frac{\pi}{2})}{tg(\alpha_{кр}+\frac{\pi}{2})}\right]^2 = 1; \quad r_s = \left[-\frac{\sin(\alpha_{кр}-\frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha_{кр}+\frac{\pi}{2})}\right]^2 = 1; \quad tg\,\alpha_Б = \frac{1}{n}$$



Изменение фазы волны при ~~прохождении~~ падении на границе двух сред.

S-волна

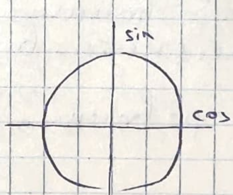
$$\frac{E_0}{E} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{E_{пр}}{E} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

p-волна

$$\frac{E_0}{E} = \frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{E_{пр}}{E} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$



Прошедшая и падающая S-волна и p-волна имеют одну и ту же фазу.

При отражении от оптически более плотной среды $(\alpha > \beta)$ фаза отраженной S-волны меняется на π, а фаза, отраженной p-волны при углах падения $0 < \alpha < \alpha_Б$ не меняется, а при углах падения $\alpha_Б < \alpha < \frac{\pi}{2}$ меняется на π.

При отражении от оптически менее плотной среды $(\alpha < \beta)$ фаза отраженной S-волны не меняется, а фаза, отраженной p-волны, меняется при $0 < \alpha < \alpha_Б$ и не меняется при $\alpha_Б < \alpha < \alpha_{кр}$.

Интерференция света. Разность ?

Интерференция – сложение волн в пр-ве, при котором происходит перераспределение энергии колебаний в различных областях пр-ва.

$E = E_0 \cos[\omega t \pm (\vec{k}\vec{r})]$

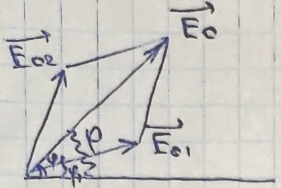
$E_1 = E_{01}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \Rightarrow$ $\quad E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

$E_2 = E_{02}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$E_{0\,min} = |E_{01} - E_{02}|$, if $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \Rightarrow$

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi, 3\pi, \ldots = (2n+1)\pi, \; n = 0, 1, 2, \ldots$



$E_{0\,max} = |E_{01} + E_{02}|$, if $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi \ldots = 2n\pi$

$\Delta\varphi = (\vec{k}\cdot\vec{r_2}) - (\vec{k}\cdot\vec{r_1}) = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\underbrace{(r_2 - r_1)}_{\delta\text{ – оптич. разность хода}} = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$

if $\Delta\varphi = f(t)$

$\langle \cos\Delta\varphi \rangle = 0$

$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2$

$I = I_1 + I_2$ – интерференция отсутствует

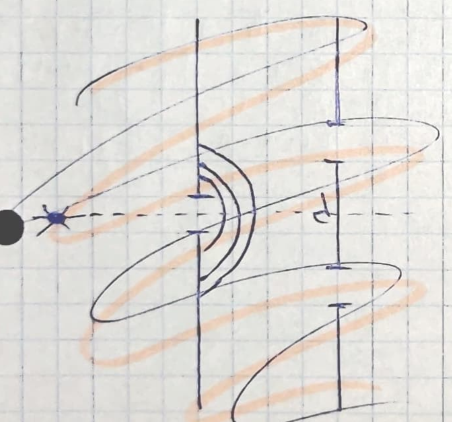
min: $\frac{2\pi}{\lambda}\delta_{min} = (2n+1)\pi \Rightarrow \delta_{min} = \frac{(2n+1)}{2}\lambda = (n + \frac{1}{2})\lambda$

max: $\frac{2\pi}{\lambda}\delta_{max} = 2\pi n \Rightarrow \delta_{max} = n\lambda$

Условия наблюдения интерференции:
1. Частоты складываемых волн должны быть одинаковы
2. Разность фаз складываемых волн не должна зависеть от времени

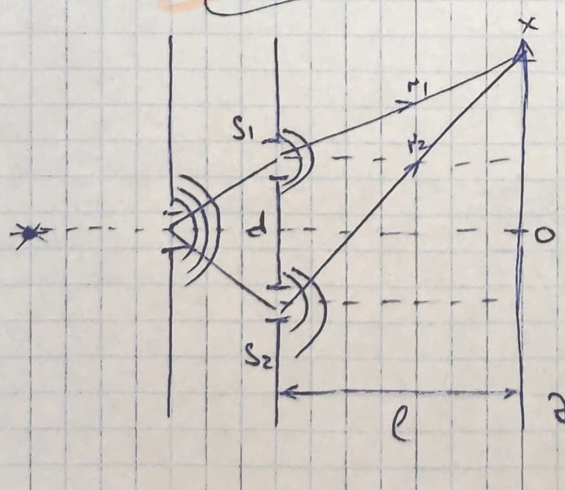
Если выполняются (1) и (2) условие, то волны – когерентные.

Опыт Юнга



Принцип Гюйгенса-Френеля.

Каждая точка волнового фронта явл. источником вторичных сферических когерентных волн. Огибающая этих волн явл. следующим волновым фронтом.



$r_1^2 = \ell^2 + (x - \frac{d}{2})^2$

$r_2^2 = \ell^2 + (x + \frac{d}{2})^2$ $\Rightarrow r_2^2 - r_1^2 = 2dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\delta}\underbrace{(r_2 + r_1)}_{\approx 2\ell} = 2dx$

$d \sim 1 \div 5$ мм

$\ell \sim 5 \div 10$ м

$x \sim 1 \div 10$ см

$\left[\delta = \frac{d \cdot x}{\ell}\right]$

$\left[x_{max} = \frac{\ell\lambda}{d} \cdot m\right]; \left[\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\ell\lambda}{d}\right]$

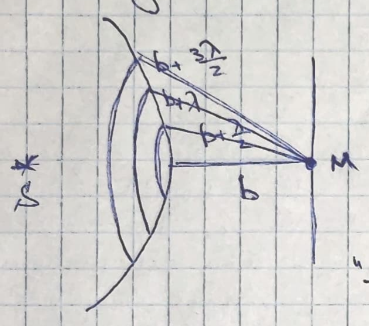
$\lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{\ell} \sim \frac{10^{-2} \cdot 10^{-3}}{10} \sim 10^{-6}$ м

Дифракция света

Дифракция - отклонение от прямолинейности распространения света, то есть огибание препятствий и прохождение волн в область геом. тени.

~~Алгоритм~~

Метод зон Френеля.



$A_1; A_2; A_3 \ldots$ - амплитуды зон

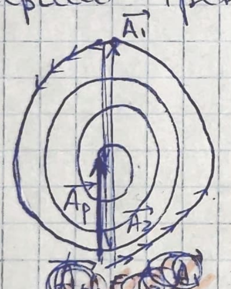
$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots = \frac{A_1}{2} + \underbrace{\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}}_{0} + \underbrace{\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}}_{0} + \ldots =>$$

"–" из-за того, что 1 и 2 в противофазе

$$=> A_p = \frac{A_1}{2} => A_p^2 = \frac{A_1^2}{4} => I_{\text{результир}} \sim \frac{A_1^2}{4}$$

Спираль Френеля.

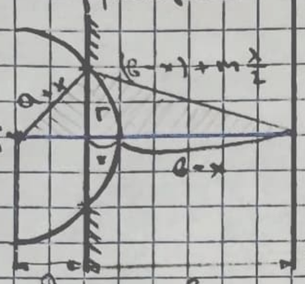


$$A_p = \frac{A_1}{2}; \; I_p = \frac{I_1}{4}$$

Освещенность такая же в т. M как интенсивность в части зоны Френеля, а они очень малые, мы можем говорить о линейном распр. света.

Лекция №15 20.12.23

Дифракция Френеля на круглом отверстии



$$r^2 = \left((b-x)+m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2 = (b-x)^2 + (b-x)m\lambda + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2 -$$

$$- b^2 = b^2 - 2bx + \cancel{x^2} + bm\lambda - xm\lambda + \cancel{\left(m\frac{\lambda}{2}\right)^2} - b^2 =$$

$$= -2bm + bm\lambda - m\lambda x \simeq bm\lambda - 2bx$$

$$\Rightarrow r^2 = (a+x)^2 - a^2 \simeq 2ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ax = bm\lambda - 2bx \Rightarrow x = \frac{bm\lambda}{2(a+b)} \Rightarrow r^2 = \frac{abm\lambda}{a+b}$$

Замечания:

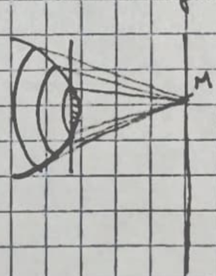
1) if m – чёт $\Rightarrow$ min, нечёт $\Rightarrow$ max

2) $a \to \infty \Rightarrow$ т.е. … $\Rightarrow r^2 = b\lambda m$

Если b уменьшается $\Rightarrow m$ – увелич при $m \approx \sim 8-10$ – мы переходим в геометрическую оптику

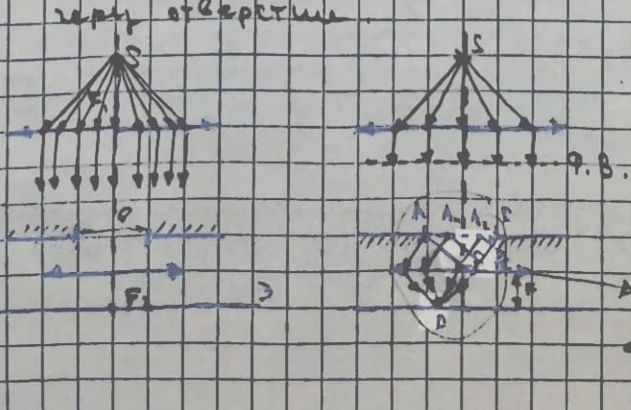
b увеличится $\Rightarrow m\downarrow$ if $m \ll 1$ – дифракция Фраунгофера

Пятно Пуассона



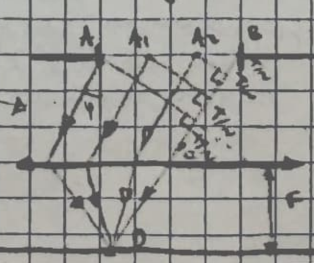
Дифракция Фраунгофера

Д. Фраунгофера получается, когда в отверстии укладывается часть волнового фронта $\ll$ зоны Френеля. Это возможно получить $2^{мя}$ способами: 1) удалить экран на очень большое расстояние, 2) за отверстием поместить собирающую линзу, а в её фокальной плоскости – экран. Тогда на экране линза будет собирать только $\parallel$ лучи, прошедшие через отверстие.



Все точки на волновом фронте

Вдоль AC дополнительная разность фаз не набегает, но за AC у точек будет разная фаза



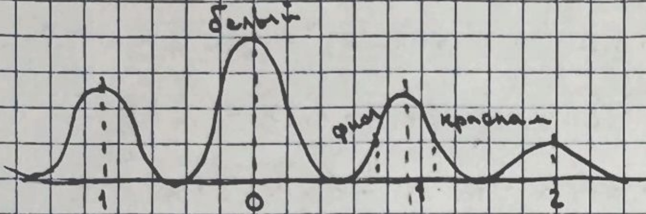
$|AB| = b$

$b \sin\varphi = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$, где $n = 1, 2 \ldots$ — max

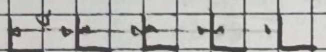
$b \sin\varphi = n\lambda$, где $n = 1, 2 \ldots$ — min

$n = 0$ — центральный max

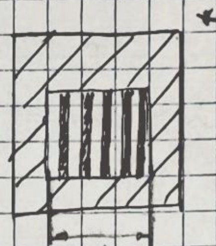
Все колебания приходят в одной фазе

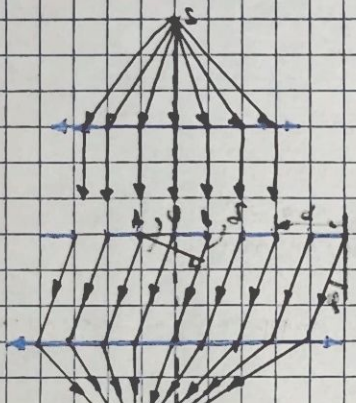


Дифракционная решётка



$d \sim 1{,}5$ мкм





$\delta = d \sin\varphi$

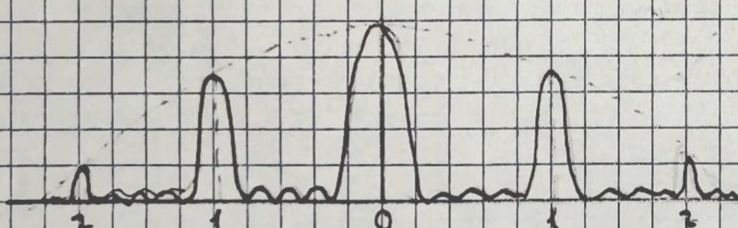
I_{min}: $b \sin\varphi_1 = \lambda \Rightarrow \left(\begin{matrix} \text{if } \lambda \sim 0{,}6 \text{ мкм} \\ b \sim 0{,}7 \text{ мкм} \end{matrix}\right) \Rightarrow \varphi_1 \sim 70° \div 80°$

т. A и т. B — if $\delta = m\lambda \Rightarrow d \sin\varphi = m\lambda \Rightarrow \varphi_1 \sim 20°$

Условие min:

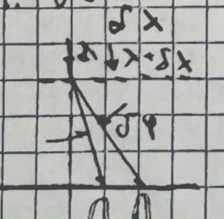
$L = Nd$ — ширина решётки, N — число штрихов* $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ min: $L \sin\varphi = n\lambda \Rightarrow d \sin\varphi = \frac{n}{N}\lambda$, $n = 1, 2, \ldots N-1, N+1, \ldots, 2N-1, 2N+1, \ldots$



Хар-ки дифракционной решётки:

1. $D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ — угловая дисперсия — угловое расстояние между 2-мя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на 1.



$d \sin\varphi = m\lambda \; \Big| \; \delta$

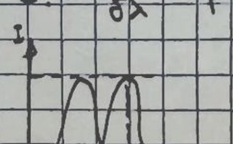
$\delta(d \sin\varphi) = \delta(m\lambda)$

$d \cos\varphi \, \delta\varphi = m \delta\lambda$

$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos\varphi}$

— Для увеличения угла $\delta\varphi$ необх. либо увелич. порядок, либо уменьшить период диф. реш.

2. $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ — разрешающая способность — наименьшая разность длин волн 2-х спектр. линий, которых можно видеть отдельно



max $\lambda + \delta\lambda$: $d \sin\varphi = m(\lambda + \delta\lambda)$

min λ: $d \sin\varphi = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$

$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$

$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$

Чтобы получить больший R нужно либо увелич. порядок, либо делать больше число штрихов (↑N)