11

Цыпышев Т.А. ИУ5-31Б Вариант 21 Защита

Задача 4.3 Тема "Электромагнитные волны"

Плоская гармоническая эл.маг. волна распространяется в вакууме в положительном направлении оси O_z. Вектор плотности потока эл.маг. энергии $\bar{S}$ имеет вид:
$\bar{S}(z,t) = \bar{S}_m \cos^2(\omega t - kz)$. Считая волновое число k и амплитудное значение S_m вектора $\bar{S}$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

1) Вектор напряжённости эл. поля $\bar{E}$ этой волны, как ф-ию времени t и к-т точки наблюдения.
2) Вектор напряжённости маг. поля $\bar{H}$ этой волны, как ф-ию времени t и к-т точки наблюдения.
3) Объёмную плотность энергии w
4) Средний вектор Пойтинга $\langle\bar{S}\rangle$
5) Среднее значение $\langle S\rangle$ плотности потока энергии, переносимой этой волной
6) Вектор плотности тока смещения $\bar{j}_{см}$
7) Среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle|\bar{j}_{см}|\rangle$
8) Величину импульса $K_{ед}$
9) Записать волновое ур-е для маг. и эл. компонент рассматр. эл.маг. волны и изобразить схематично мгновенную фотографию этой волны

$S_m = 46{,}2\ \frac{Дж}{с \cdot м^2}$ $\quad k = 0{,}44\ м^{-1}$

$\bar{E}, \bar{H}, w, \langle\bar{S}\rangle, \langle S\rangle, \bar{j}_{см}, \langle|\bar{j}_{см}|\rangle, K_{ед}$ - ?

Решение

1) Представим $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в комплексной форме.

$$\bar{E}(\bar{r},t) = \bar{E}_m \cdot e^{i(\omega t - \bar{k}\bar{r})}$$
$$\bar{H}(\bar{r},t) = \bar{H}_m \cdot e^{i(\omega t - \bar{k}\bar{r})}$$

Решение волнового ур-я:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial z^4}\right)$$

По I фундаментальному закону Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \bar{B} &= \mu_0 \bar{H} \quad (\mu = 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{rot}\bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2)$$

(1)
$$\operatorname{rot}\bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k}' \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}'$ - орты декартовой системы коорд-т
E_x, E_y, E_z - к-ты $\bar{E}$ в декартовой с.к.

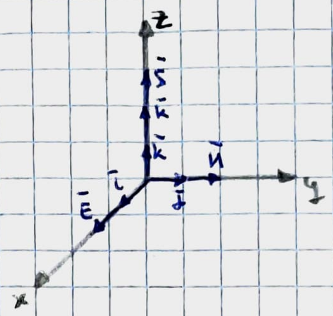
Т.к. $\bar{S} = \bar{S}_m \cos^2(\omega t - kz)$ волна распространяется вдоль Oz $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{S} \uparrow\uparrow \bar{k} \uparrow\uparrow \bar{j}$

Вектор пойтинга:

$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \Rightarrow \bar{E} \uparrow\uparrow \bar{i}, \ \bar{H} \uparrow\uparrow \bar{k}$

Получаем, что:



$$\left.\begin{array}{l} E_x = E, \ E_y = 0, \ E_z = 0 \\ H_x = 0, \ H_y = H, \ H_z = 0 \\ k_x = 0, \ k_y = 0, \ k_z = k \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = E(z,t) = E_m \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$
$$H = H(z,t) = H_m \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \cancel{\frac{\partial}{\partial y}} \cdot 0 + \bar{k} \cancel{\frac{\partial}{\partial x}} \, 0 + \bar{j} \frac{\partial E}{\partial z} - \bar{k} \frac{\partial E}{\partial y} - \bar{i} \cancel{\frac{\partial}{\partial z}} \, 0 - \bar{j} \cancel{\frac{\partial}{\partial x}} \, 0 =$$

$$= \bar{j}\left(-k E_m e^{i(\omega t - kz)}\right)$$

Найдем $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial H_x}{\partial t}}_{0} \bar{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \bar{j} + \underbrace{\frac{\partial H_z}{\partial t}}_{0} \bar{k} = \frac{\partial H_y}{\partial t} \bar{j}$

Подставим в (2):

$$\cancel{\bar{j}}\left(-k E_m e^{i(\omega t - kz)}\right) = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \cancel{\bar{j}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k E_m}{\mu_0} e^{i(\omega t - kz)}$$

$$H = \int \frac{k E_m}{\mu_0} e^{i(\omega t - kz)} dt = \frac{k E_m}{\mu_0} \int \frac{1}{\omega} e^{i(\omega t - kz)} d(\omega t) =$$

$$= \frac{k E_m}{\mu_0 \omega} e^{i(\omega t - kz)} \Rightarrow H_m = \frac{k E_m}{\mu_0 \omega} \quad (3)$$

Выразим соотношение между волновым числом k и частотой ω

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ T = \frac{\lambda}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{\cancel{2\pi}\omega}{\cancel{2\pi}c} = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \omega = kc,$$

где c - скорость света в вакууме

Подставим в (3):

$$H_m = \frac{k E_m}{\mu_0 \omega} = \frac{\cancel{k} E_m}{\mu_0 \cancel{k} c} = \frac{E_m}{\mu_0 c} \quad (4)$$

Рассмотрим исходное ур-е $\bar{S}(z,t)$:

$$\left.\begin{aligned}\bar{S}(z,t) &= \bar{S}_m \cos^2(\omega t - kz)\\ \bar{S} = \bar{E}\times\bar{H} \quad E \perp H &\Rightarrow S = EH\end{aligned}\right\} \Rightarrow S = E_m \cdot H_m \cdot \cos^2(\omega t - kz)$$

Подставим ④:

$$S = E_m H_m \cos^2(\omega t - kz) = E_m \frac{E_m}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)$$

Получаем, что:

$$S_m = \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \Rightarrow E_m = \sqrt{S_m \mu_0 c} \quad ⑤$$

Из ⑤:

$$E = \sqrt{\mu_0 c S_m}\, e^{i(\omega t - kz)} = \sqrt{\mu_0 c S_m}\, e^{i(kct - kz)}$$

По ф-ле Эйлера: $e^{i(kct - kz)} = \cos(kct - kz) + i\sin(kct - kz)$

$$E(z,t) = \sqrt{S_m \mu_0 c}\cos(kct - kz) \Rightarrow \bar{E}(z,t) = \sqrt{S_m \mu_0 c}\cos(kct - kz)\bar{i}$$

$$\bar{E}(z,t) = \sqrt{46,2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3\cdot 10^8}\cos(0,44 \cdot 3 \cdot 10^8 t - 0,44z)\bar{i}$$

$$\bar{E}(z,t) \approx 132\cos(1,32\cdot 10^8 t - 0,44z)\bar{i}$$

2) Из ④ и ⑤:

$$\left.\begin{aligned}H_m &= \frac{E_m}{\mu_0 c}\\ E_m &= \sqrt{S_m \mu_0 c}\end{aligned}\right\} \Rightarrow H_m = \frac{\sqrt{S_m \mu_0 c}}{\mu_0 c} = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}} \Rightarrow$$

$$H(z,t) = H_m e^{i(\omega t - kz)} = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\, e^{i(kct - kz)}$$

По формуле Эйлера: $e^{i(kct - kz)} = \cos(kct - kz) + i\sin(kct - kz)$

$$H(z,t) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct - kz) \Rightarrow \bar{H}(z,t) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct - kz)\bar{j}$$

$$\bar{H}(z,t) = \sqrt{\frac{46,2}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^8}}\cos(0,44\cdot 3\cdot 10^8 t - 0,44z)\bar{j}$$

$$\bar{H}(z,t) \approx 0,35\cos(1,32\cdot 10^8 t - 0,44z)\bar{j}$$

3) Найдём объёмную плотность энергии

$$w = \underset{\substack{\text{Объёмная}\\\text{плотность}\\\text{эл. поля}}}{w_E} + \underset{\substack{\text{Объёмная}\\\text{плотность}\\\text{маг. поля}}}{w_H} = \frac{\varepsilon_0 E^2(z,t)}{2} + \frac{\mu_0 H^2(z,t)}{2} \qquad (\varepsilon \text{ и } \mu = 1)$$

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} S_m \mu_0 c \cos^2(kct - kz) + \frac{\cancel{\mu_0}}{2}\frac{S_m}{\cancel{\mu_0} c}\cos^2(kct - kz) =$$

$$= \cos^2(kct - kz)\left(\frac{S_m \mu_0 c\, \varepsilon_0}{2} + \frac{S_m}{2c}\right) = \cos^2(kct - kz)\left(\frac{S_m \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 c^2}_{1}}{2c} + \frac{S_m}{2c}\right) = \cos^2(kct - kz)\left(\frac{S_m}{2c} + \frac{S_m}{2c}\right) = \cos^2(kct - kz)\cdot\frac{S_m}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \frac{S_m}{c}\cos^2(kct - kz)$$

$$w = \frac{46{,}2}{3 \cdot 10^8} \cos^2(0{,}44 \cdot 3\, 10^8 t - 0{,}44 z)$$

$$w = 1{,}54 \cdot 10^{-7} \cos^2(1{,}32 \cdot 10^8 t - 0{,}44 z)$$

4) Найдём средний вектор Пойтинга $\langle \bar{S} \rangle$:

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)\, dt$$

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S_m \cos^2(\omega t - kz)\, dt = \frac{S_m}{2T} \int_0^T (1 + \cos(2(\omega t - kz)))\, dt$$

Решим интеграл отдельно: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kc}$ $\omega = kc$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 1 + \cos(2(\omega t - kz))\, dt = \frac{1}{T}\left(T + \frac{1}{2\omega} \int_0^T \cos(2\omega t - 2kz)\, d(2\omega t)\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{kc} \cdot 2kc} \cdot \sin(2\omega t - 2kz) \Big|_0^T = 1 + \frac{1}{4\pi}\left(\sin(2\omega T - 2kz) -\right.$$

$$\left. - \sin(0 - 2kz)\right) = 1 + \frac{1}{4\pi}\left(\sin(4\pi - 2kz) - \sin(-2kz)\right) = 1 + \frac{1}{4\pi}\left(\sin(-2kz) -\right.$$

$$\left. - \sin(-2kz)\right) = 1$$

Получаем, что:

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{S_m}{2} \cdot 1 = \frac{S_m}{2} = \frac{S_m}{2} \bar{k}$$

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{46{,}2}{2} \bar{k} = 23{,}1 \bar{k}$$

5) Найдём среднее значение $\langle S \rangle$ плотности потока энергии:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)\, dt$$, где $S(t)$ - модуль вектора Пойтинга

$$\langle S \rangle = \frac{S_m}{2} \Rightarrow \langle S \rangle = \frac{46{,}2}{2} \frac{Дж}{с \cdot м^2} = 23{,}1 \frac{Дж}{с \cdot м^2}$$

6) Найдём вектор плотности тока смещения:

$\bar{j}_{см} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, где $\bar{D}$ - вектор эл. смещения

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} \quad (\varepsilon = 1) \Rightarrow \bar{D} = \varepsilon_0 \sqrt{S_m \mu_0 c} \cos(kct - kz)\, \bar{i}$$

$$\bar{j}_{см} = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 \sqrt{S_m \mu_0 c} \cos(kct - kz)\, \bar{i}\right) = -kc\, \varepsilon_0 \sqrt{S_m \mu_0 c} \sin(kct - kz)\, \bar{i} =$$

$$= -k \frac{1}{\sqrt{\cancel{\mu_0} \varepsilon_0}} \sqrt{S_m \cancel{\mu_0} c}\ \cancel{\varepsilon_0}^{\sqrt{\varepsilon_0}} \sin(kct - kz)\, \bar{i} = -k \sqrt{S_m \varepsilon_0 c} \sin(kct - kz)\, \bar{i}$$

$$\bar{j}_{см} = -k \sqrt{S_m \varepsilon_0 c} \sin(kct - kz)\, \bar{i} = k \sqrt{S_m \varepsilon_0 c} \sin(kct - kz + \pi)\, \bar{i}$$

$$\bar{j}_{см} \approx 0{,}154 \sin(1{,}32 \cdot 10^8 t - 0{,}44 z + \pi)\, \bar{i}$$

7) Найдём среднее значение модуля плотности смещения

$$\langle |\bar{j}_{см}| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left| -k \sqrt{S_m \varepsilon_0 c} \sin(kct - kz)\, \bar{i} \right| dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left| k \sqrt{S_m \varepsilon_0 c} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \sin(kct - kz) \right| dt = \frac{k \sqrt{S_m \varepsilon_0 c}}{T} \int_0^T |\sin(ktc - kz)|\, dt =$$

$$= \frac{k\cdot\sqrt{S_m \varepsilon_0 c}}{T}\cdot\frac{1}{kc}\cdot\int_0^T \left|\sin(kct-kz)\right| d(kct) = \frac{k\sqrt{S_m\varepsilon_0 c}}{\frac{2\pi}{kc}\cdot kc}\cdot\int_0^{\frac{2\pi}{kc}}\left|\sin(kct-\right.$$

$$\left.-kz)\right| d(kct) = \frac{k\sqrt{S_m\varepsilon_0 c}}{2\pi}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{kc}}\sin(kct-kz)\,d(kct) + \int_{\frac{\pi}{kc}}^{\frac{2\pi}{kc}}(-\sin(kct-kz))\,d(kct)\right.$$

$$= \frac{k\cdot\sqrt{S_m\varepsilon_0 c}}{2\pi}\cdot\left(-\cos(kct-kz)\Big|_0^{\frac{\pi}{kc}} + \cos(kct-kz)\Big|_{\frac{\pi}{kc}}^{\frac{2\pi}{kc}}\right) = \frac{k\cdot\sqrt{S_m\varepsilon_0 c}}{2\pi}\cdot$$

$$\cdot\left(-\cos(\pi-kz)+\cos(-kz)+\cos(2\pi-kz)-\cos(\pi-kz)\right) = \frac{k\cdot\sqrt{S_m\varepsilon_0 c}}{2\pi}\cdot$$

$$\cdot 4\cos(kz) = \frac{k\cdot\sqrt{S_m\varepsilon_0 c}}{2\pi}\quad y^2 = \frac{2k\cdot\sqrt{S_m\varepsilon_0 c}}{\pi}$$

$$\langle|j_{cm}|\rangle = \frac{2\cdot 0{,}44\sqrt{46{,}2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^{8}}}{\pi} \approx 0{,}098\ \frac{A}{м^2}$$

8) найдём величину импульса $K_{ед}$:

$$\bar{K}_{ед} = \frac{\bar{S}}{c^2}\qquad K_{ед} = \frac{w}{c} = \frac{S_m}{c^2}\cos^2(kct-kz)$$

$$K_{ед} = \frac{46{,}2}{(3\cdot 10^8)^2}\cos^2(0{,}44\cdot 3\cdot 10^8 t - 0{,}44\cdot z) = 5{,}13\cdot 10^{-16}\cos^2(1{,}32\cdot 10^8 t - 0{,}44 z)$$

9) Запишем волновые ур-е для маг. и эл. компонент

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \Rightarrow \{\varepsilon=\mu=1\} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$$

$$\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial z^2}\qquad \bar{E}(z,t) = \sqrt{S_m\mu_0 c}\cos(kct-kz)\bar{i} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\bar{H}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\qquad \bar{H}(z,t) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct-kz)\bar{j} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = c^2\left(k\sqrt{S_m\mu_0 c}\sin(kct-kz)\bar{i}\right)'_z = c^2\left(-k^2\sqrt{S_m\mu_0 c}\cos(kct-kz)\bar{i}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\bar{E}}{\partial z^2} = -k^2\sqrt{S_m\mu_0 c}\cos(kct-kz)\bar{i}$$

$$\frac{\partial^2\bar{H}}{\partial t^2} = c^2\left(k\sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\sin(kct-kz)\bar{j}\right)'_z = c^2\left(-k^2\sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct-kz)\bar{j}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\bar{H}}{\partial z^2} = -k^2\sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct-kz)\bar{j}$$

9.2) Изобразим схематично мгновенную фотографию волны.

Пусть при $t=0$:

$$\bar{E}(z,0)=\sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kz)\bar{i}=132\cos(0{,}44z)\bar{i}$$

$$\bar{H}(z,0)=\sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kz)\bar{j}=0{,}35\cos(0{,}44z)\bar{j}$$