Universidade Federal do Rio Grande –
Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF
Lista de exercícios 08

Livro: **BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra linear. Harper Row, 1980.**

Sistemas de Equações lineares (Página 46)

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

R: $x = -1, y = 2, z = 5$

3. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

R: a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão 3.

R: Definição: Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a A. O posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A *nulidade* de A é o número $n - p$.

a) Posto: 3, Nulidade: 0

b) Posto: 2, Nulidade: 1

c) Posto: 2, Nulidade: 2

5. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$$

Escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza-a à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

R: $x = \dfrac{7}{16}, y = -\dfrac{1}{16}, z = \dfrac{17}{8}$

7. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

R: $x_1 = 1 - 3x_2 - x_5,\ x_3 = 2 + x_5,\ x_4 = 3 + 2x_5$

9. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.

ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.

iii) O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C

a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitamina desejada.

R: Sejam x, ye z as quantidades de alimentos **I**, **II** e **III** respectivamente. Então $x = -5 + 3z$, $y = 8 - 3z$ onde $\dfrac{5}{3} \leq z \leq \dfrac{8}{3}$

b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente R$ 1,00?

R: Sim. $x = -1$, $y = 2$, $z = 2$.

Determinante e Matriz Inversa (Página 82)

3. Calcule:

$$det\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

R: 21

4. Dadas as matrizes $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule.

a) det **A** + det **B**

R: 1

b) det **(A+B)**

R: 3

6. Dada $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ calcule:

a) $\mathbf{A}_{23}$:= É a submatriz de A, de onde a 2-ésima linha e a 3-ésima coluna foram retiradas.

R: $\mathbf{A_{23}}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $|\mathbf{A}_{23}|$:= É o determinante da submatriz de A, de onde a 2-ésima linha e a 3-ésima coluna foram retiradas.

R: 36

c) $\Delta_{23} := (-1)^{2+3}|\mathbf{A}_{23}|$ (Cofator)

R: -36

d) det **A**

R: 0

9. Encontre $\mathbf{A}^{-1}$, onde

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & -i & -2 & i \\ 1 & -1 & i & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

R: a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix}$ b) $\frac{-1}{2+i}\begin{bmatrix} -1-i & -1 & -1 & -1-i \\ -i & i & 1-i & -i \\ 1+2i & 1-i & i & -1+i \\ 3-i & -2-i & 3-i & 2+i \end{bmatrix}$

15. Verdadeiro ou Falso?

a) Se det**A**=1, então $\mathbf{A}^-1 = \mathbf{A}$.

b) Se **A** é uma matriz triangular superior e $\mathbf{A}^-1$ existe, então também $\mathbf{A}^-1$ será uma matriz triangular superior.

c) Se **A** é uma matriz escalar $n \times n$ da forma $\mathrm{k}\mathbf{I}_n$, então det**A**=k^n.

d) Se **A** é uma matriz triangular, então det **A**= $\mathrm{a}_{11} + ... + \mathrm{a}_{nn}$.

R: a) F b) V c) V d) F

Transformações lineares (Página 170)

2. Determine quais das seguintes funções são as aplicações lineares:

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$(x, y) \to (x + y, x - y)$

b)$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$(x, y) \to xy$

c)$h : M_2 \to \mathbf{R}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

d)$k : P_2 \to P_3$

$ax^2 + bx + c \to ax^3 + bx^2 + cx$

e)$M : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$

$(x, y, z) \to (x, y, z) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

f)$N : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$x \to |x|$

R: Definição: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam **u** e **v** em V, $F(u + v) = F(u) + F(v)$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in V$, $F(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v})$

3. a) Ache a transformação linear $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0), T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.

R: $T(x, y, z) = (2x + y, y - z)$

b) Encontre **v** de $\mathbf{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.

R: $\mathbf{v} = (x, 3 - 2x, 1 - 2x)$

4. a) Qual é a transformação linear $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?

R: $T(x, y) = \left(3x, \frac{-y}{2} + \frac{5x}{2}, x\right)$

b) Ache $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.

R: $T(1, 0) = \left(3, \frac{5}{2}, 1\right)$ $\quad T(0, 1) = \left(0, \frac{-1}{2}, 0\right)$

c) Qual é a transformação linear $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1), S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$?

R: $T(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, -2y + \frac{5x}{3}\right)$

d) Ache a transformação linear $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $P = S \circ T$.

7. Qual é a aplicação A que representa uma contração de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ seguida por uma rotação horária de 45°?

R:$A(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}\right)$

10. Sejam R, S e T três transformações lineares de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}^3$.

Se $[R]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $[S]=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, ache T tal que $R = S \circ T$.

16. Mostre que se $T : V \to W$ é uma transformação linear;

a) $Im(T)$ é um subespaço de W.

R: Seja $T : V \to W$, uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = W$. Ou seja:

$Im(T) = \{w \in W; T(v) = W \text{ para algum } v \in V\}$

b) $ker(T)$ é um subespaço de V.

R: Seja $T : V \to W$, uma transformação linear. O conjunto de todos vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado de núcleo de T, sendo denotado por $ke\mathbf{r}(T)$, isto é:

$ke\mathbf{r}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$

Autovalores e Autovetores (Página 190)

8. Encontre a transformação linear $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

R: $T(x, y) = (-6y, -x + y)$

9. e 11. Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

$$\mathbf{A}= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{B}= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R} : \mathbf{9})\lambda_1 = 1, v_1 = (x, 0); \lambda_2 = -1, v_2 = (-y, y)$

$\mathbf{R} : \mathbf{11})\lambda = 1, v = (x, 0, 0)$

26. Sejam $\mathbf{A}= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrizes inversíveis.

a) Calcule **AB** e **BA** e observe que estes produtos são distintos.

$$\textbf{R: AB} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \not\equiv \ \textbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Encontre os autovalores de **AB** e os de **BA**. O que você observa?

R: São iguais. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$

c) Encontre os autovetores de **AB** e os de **BA**. O que você nota?

R: São diferentes. $v_1 = (x, 0, 0), v_2 = \left(\frac{1}{3}y, y, 0\right), v_3 = \left(\frac{5}{4}z, -2z, z\right)$

d) Motivado pelos itens anteriores, mostre que: se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes inversíveis de mesma ordem, os autovalores de $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ são os mesmos. Mostre mais ainda: se λ_1 é um autovalor de $\mathbf{AB}$ com autovetor $\mathbf{v}$, então λ_1 é autovalor de $\mathbf{BA}$ com autovetor $\mathbf{Av}$. Da mesma forma se λ_2 é um autovalor de $\mathbf{BA}$ com autovetor $\mathbf{w}$, então λ_2 é um autovalor de $\mathbf{AB}$ com autovetor $\mathbf{Bw}$.