1 Introduction

岩澤理論と自分の修士論文を話したい．

前半は岩澤理論の基本的な話をする．最低限の準備が終われば，今回の主結果の一つについて記載する．後半には Fitting Ideal の話を書く．

2 Bernouli number and zeta function

2.1 Bernouli number

ベルヌーイ数を定義する．

Definition 2.1. ベルヌーイ数 B_n を以下で定義する．

$$\sum_{n=0}^{k} B_n \binom{k+1}{n} = k+1$$

指標を定義する．ξ

3 Algebra and Cyclotomic Fields

円分体と p 進体に関する代数的な話を記述する

3.1 p-adic Weirstarss Thorem

3.2 Kummer Congurence

3.3 Leopold Conjecture

4 p-adic L function

4.1 Mahler Theorem

4.2 Construction of p-adic L function

$H(S,a,F)$ を以下で定義する．

$$H(S,a,F) = \sum_{m \equiv a \bmod F, m>0} m^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nF)^s} = F^{-s}\zeta(s, \frac{a}{F})$$

ここで，$s \in \mathbb{C}, a, F \in \mathbb{Z}$ で $0 < a < F$ を満たす．

$$\zeta(s,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+b)^s}$$

は Hurwitz zeta function である．この時, 以下が成り立つ．

4.3 StickelBelger Theorem

4.4 Measure and Distribution

5 Euler System

5.1 definiton of Euler Ssytem

5.2 Cyclotomic units

5.3 Vandiver's Conjecture

5.4 Elliptic units

6 The Second Case of Fermat's Last Theorem

7 Iwasawa theory

8 Fitting Ideal

岩澤理論の精密化では Characateristic Ideal ではなく，Fitting Ideal を調べる．ここでは，Fitting Ideal の基本的な定義と性質をみる．Fitting Ideal が岩澤理論で使われる理由として以下の二点を示す．

- Λ 加群 M に対し，$Char(M) \subset Fitt_0(M)$
- Λ 加群 M, N が pseudo-iso の時，$Fitt_i(M) = Fitt_i(N)$ となる．

Fitting Ideal は PID 上の有限生成加群の理論 (単因子論) を一般化した理論である．Fitting Ideal は finitely presented module を用いて定義されるため，finitely presented を定義する．

Definition 8.1. 環 R に対し，M が *fintely presented R-module* とは，

$$\phi : R^m \twoheadrightarrow M$$

であって，$\ker\phi$ が *R-module* として有限生成である ϕ が存在すること．すまわち，

$$R^n \to R^m \xrightarrow{\phi} M \to 0$$

が *exact* であること．

Example 8.2. $R = \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ とする．M を (X_1) とし，ϕ を自然な射影とすると $\ker\phi = (X_2, \ldots X_n \ldots)$ となり，これは有限生成ではない．もし有限生成だとすると，生成元によって，任意の X_i を書くことができ，矛盾する．

Remark. それがなぜ矛盾かをきちんと書こうとすると難しい．

Lemma 8.3. *R がネータなら,finitely generetated と finitely presented は同値*

Proof. R が Neother なので，R^m も Neother になる．(昇鎖の停止から確認すればよい．) これより $\ker\phi$ は Neother 環のイデアルとなるので，R^m 加群として有限生成となり，R 加群としても有限生成となる． □

Fitting Ideal を定義する．

Definition 8.4.

$$R^n \xrightarrow{f} R^m \to M \to 0$$

が *exact* である時,f の表現行列を A とする．A の $n-i \times n-i$ 小行列の行列式全体で生成されるイデアルを $Fitt_i R$ と書く．また，$i \geq n$ の時，$Fitt_i R = R$ とする.

Example 8.5. R を *PID* とし, M を有限生成 *Torsion* 加群とする．この時, 単因子論より $M \simeq \oplus_{i=1}^n R/e_i (e_i | e_{i+1})$ となる．この時，$Fitt_i(R) = (e_1 \cdots e_i)$ となる．

Propostion 8.6. R を環,M を *finitely presented R-module* とする．この時，$Fitt_i(M) \otimes R_\mathfrak{p} \simeq Fitt_i(R_\mathfrak{p}) M_\mathfrak{p}$

Proof. 以下の可換図式は，行が完全なため，上の行と下の行から Fitting Ideal の生成元は上と下で一致する．

$$\begin{array}{ccccc} R^n & \xrightarrow{f} & R^m & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R_\mathfrak{p}^n & \longrightarrow & R_\mathfrak{p}^m & \twoheadrightarrow & M_\mathfrak{p} \end{array}$$

よって，$Fitt_i(M) R_\mathfrak{p} = Fitt_i(M_\mathfrak{p})$ となる．また，局所化が flat なことから $Fitt_i(M) R_\mathfrak{p} = Fitt_i(M) \otimes R_\mathfrak{p}$ となる．

□

Propostion 8.7. R が *Normal* なら $R = \cap_{\mathfrak{p}, \mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} R_\mathfrak{p}$

Proof. 略 □

Propostion 8.8. R が *Normal, M* を *finitely presented R-module* とする．この時，$Fitt_i(M) \otimes \cap_{\mathfrak{p}, \mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} R_\mathfrak{p} \simeq \cap_{\mathfrak{p}, \mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} Fitt_i(R_\mathfrak{p}) M_\mathfrak{p}$

Proof. 包含は明らかなので, 逆を言えばよい．逆は上と同じ議論をすることで言える． □

Propostion 8.9. $\mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_k]]$ は正規である．

以降では $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_k]]$ とする．

Definition 8.10. 有限生成 Λ 加群 A が *pseudo-null* とは任意の *height1* の素イデアル $\mathfrak{p}$ で局所化した時に 0 となること．

Propostion 8.11. $\mathbb{Z}_p[[T]]$ 加群の時は，*pseudonull* は位数が有限であることと同値.

Theorem 8.12 (有限生成 Λ 加群の基本定理)**.** 略

Propostion 8.13. Λ 加群 M, N が *pseudo-iso* の時，$Fitt_i(M) = Fitt_i(N)$ となる．

Remark. なんか不安になってきた．今考えていることが正しいのなら *Charateristc ideal* と *Fitting Ideal* が真に一致しそう．

9 Iwasawa Thoery of Etale Cohomology

10 Main Thoerem 1 of my consequence

11 Kurihara's Lemma

12 Main Thoerem 2 of my consequences

第 I 部
原稿メモ

２時間を以下の予定で話したい

```
- 歴史 (30 分)
 0. 類体論と岩澤理論の基本完全系列
 1. 岩澤主予想の基本的な定式化と Euler System
 2. 虚二次体の場合の Euler System
 3. Euler System の既存の課題
 4. Johnson Kings のアイディア
- 自分の結果，及び証明の基本的な道具紹介 (30 分)
 1. 結果
   - 岩澤主予想
   - 岩澤主予想の Fitting Ideal 版
 2. 基本的な道具
   - Johoson-Kings の結果
   - Poitou-Tate exact sequence
   - 岩澤理論の基本完全系列
   - 実際に示す??
   - Kurihara's lemma
- 証明の詳細 (60 分)
```

最初は上記のように考えていたが、方針を変更して発表時のレベルを分けて以下の二つとする.

Doctor 向け

1. Intro 5 分
2. Johonson Kings 5 分
3. 楕円単数とその性質について 10 分
4. 主定理 1 の証明 30 分
5. Kurihara さんの結果 (古典的なもの) 10 分
6. 主定理 2 の証明 20 分
7. 今後 10 分

For Sunday mathmatican

1. 岩澤理論の基本 30 分
2. Johnson Kings　10 分
3. 証明の方針 (1) 基本的なコホモロジーの計算 30 分
4. 最低限の道具 15 分
5. 証明の方針 (1)2 拡大次数が p であるが故の難点、及び、$\mathfrak{p}$ と p の違い 30 分
6. Kurihara さんの結果について

13 Introduction

岩澤理論は数論で重要な位置を占めるイデアル類群の情報を調べるために創始され, イデアル類群の逆極限で得られる岩澤加群を理解することが岩澤理論の目的の一つである. 特に, 岩澤加群が p 進 L 関数を用いて書くことは岩澤主予想と言われ，岩澤理論の一番重要な問題となっている. 岩澤主予想は 1980 年代に保型形式を用いることで $\mathbb{Q}$ と総実体の場合に解決された. また,1990 年代になると Euler System と呼ばれる代数的な方法により，虚二次体の場合に証明された．ただし，これは虚二次体上拡大次数が p で割れる時は示せておらず，完全な解決ではなかった．この頃になると, 岩澤主予想のコホモロジーによる定式化, 楕円曲線の岩澤理論, モチーフの岩澤理論等様々な一般化がされ始めた 2000 年代になると,Johonson,Kings により，虚二次体上のコホモロジーによる岩澤主予想が完全に解決された．これを用いて, 古典的な岩澤主予想を示すことがこの論文の主定理の一つである. この論文の 2 つ目の主定理は Fitting Ideal による岩澤主予想の精密化についてである. Kurihara による論文を参考に, 主定理 1 の結果を用いて Fitting Ideal による精密化を行った.

14 岩澤理論の基本

岩澤理論を初学者のために，以下の岩澤理論の関する基本的な結果を述べる.

1. 有限生成 Λ 加群の構造定理と岩澤類数公式
2. 岩澤理論の基本完全系列
3. Euler System
4. Kubota-Leopold の p 進 L 関数
5. 円単数, 楕円単数と Euler System,p 進 L 関数との関係

14.1 有限生成 Λ 加群の構造定理と岩澤類数公式

ここでは Λ を混票数 $(0, p)$ の完備離散付値環であって, 剰余体の位数が有限となる環係数の形式的べき級数環とする. 有限生成,Λ 加群には単因子論の類似が成り立つ. ただし単因子論は同型の変形であったが, ここでは pseudo isomorphism となる.

Definition 14.1. Λ 加群 A の位数が有限である時 *pseudo-nul* という.$f : A \to B$ の *kernel* と *cokernel* が *pseudo-null* の時 A と B は ***pseudo isomorphic*** といい,$A \sim B$ とかく.

14.2　岩澤理論の基本完全系列

大域類体論より,

$$E_K \otimes \mathbb{Z}_p \to \prod_{\mathfrak{p}|p} U_{K_\mathfrak{p}} \to \mathrm{Gal}(H_p/K) \to \mathrm{Gal}(H/K) \to 1$$

が成り立つ. これの逆極限を取ったものを岩澤理論の基本完全系列と呼ぶ. これは岩澤理論で重要な情報であるイデアル類群と代数体, 局所体の単数の関係を述べたものとなり, 円単数や楕円単数で割ることにより, 岩澤主予想の様々な定式化を可能とするものである.

Remark.

$$E_K \otimes \mathbb{Z}_p \to \prod_{\mathfrak{p}|p} U_{K_\mathfrak{p}}$$

が単射であることを ***Leopolod Conjecture*** という.

上の式を誘導するため，類体論ついて少し記述する.

14.2.1　局所類体論

設定をいくつか記述する. K を局所体,$\mathbb{F}_K$ をその剰余体とする．L/K をガロア拡大とし,$\mathbb{F}_L$ を L の剰余体とする. この時, ガロア群の間に全射が存在し，その核を $I_{L/K}$ とし，惰性群という.

$$1 \to I_{L/K} \to \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}\mathbb{F}_L/\mathbb{F}_K \to 1$$

局所体の用語, 性質をいくつか列挙する.

- 惰性群 $I_{L/K} = 1$ の時,L/K を不分岐という.
- $\mathrm{Gal}\mathbb{F}_L/\mathbb{F}_K$ は巡回群になる．その生成元として $x \mapsto x^{\#K}$ が存在する. これを Frobenius をという.
- $\sigma \in \mathrm{Gal}$ が剰余体に射影した時,Frobenius になる時,Frobenius という.
- 局所体の拡大 L/K の最大不分岐拡大 Σ とは Σ/K は不分岐拡大で,$\Sigma \subset L$ となるもので, 最大のものとする. 体 K の最大不分岐拡大という時は L として $\overline{K}$ を取った場合をさす.
- K の最大不分岐拡大 $\tilde{K}$ は剰余体の拡大と同型なので，ガロア群は $\hat{\mathbb{Z}}$ となる.

局所類体論の相互写像を定義する.

Theorem 14.2. 相互写像

$$r_{L/K} : \mathrm{Gal}(L/K) \to K^\times/N_{L/K}L^\times$$

は同型写像となる. これは,σ に対し,

$$\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K) \to \mathrm{Gal}(L/K) \tag{1}$$

$$\tilde{\sigma} \mapsto \sigma \tag{2}$$

の逆像の元 $\tilde{\sigma}$ を一つ取り, その不変体を Σ とする. この時,Σ/K は有限拡大であり,$\tilde{\Sigma}/\Sigma$ が不分岐拡大となり, $\tilde{L} = \tilde{\Sigma}$ となる. $\tilde{\sigma}$ は $\mathrm{Gal}(\tilde{L}K/\Sigma)$ の *Frobenius* になる. π_Σ を Σ の素元とする. $N_{\Sigma/K}\pi_\Sigma$ を $r_{L/K}(\sigma)$ で定める.

Remark. なんか数式がうまくかけていない.

14.3 大域類体論

主張を述べるために, アデール, イデールを定義する. 大域体 K に対し,$\mathbb{A}_K$ を以下で定義する.

15 Johnson Kings

ここでは,Jonson Kings の結果について説明する. ただし，この論文は Tamagawa Number Conjecture について記述しており, 筆者は Tamagawa Number Conjecture について理解が及んでいないことを言及しておく.

コホモロジーによる岩澤主予想として, 以下を示した.

Theorem 15.1 (Jonson Kings Corollary5.3)**.**

$$\mathrm{char}_{\Lambda_O} \varprojlim_n H^1(O_{K_n}[1/S], O(\chi)(1))/C_K(\chi) = \mathrm{char}_{\Lambda_O}(\varprojlim H^2(O_{K_n}[1/S], O(\chi)(1)))$$

これはエタールコホモロジーによる Euler System によって示された．証明は理解していないがエタールコホモロジーを使うことにより, 不必要に分岐している部分を回避することに成功し, Euler System Argument に成功したのではないかと思う.

Remark. *Euler System* と *Stark System* については今後詳しく知りたい.

16 主定理 1

この章では自分の主定理を述べ、その主定理の基本的な証明方法を話す. 最初にいささか冗長だが notaion を記述する. Let K be an imaginary quadratic field. Let p be a prime which splits completely in K. Let $\mathfrak{f}$ be an integral ideal of K. We denote the ray class field of $\mathfrak{f}$ by $K(\mathfrak{f})$ and $\bigcup_n K(\mathfrak{f}p^n)$ by $K(\mathfrak{f}p^\infty)$. Fix an isomorphism $\mathrm{Gal}(K(\mathfrak{f}p^\infty)/K) \simeq \Delta \times \mathbb{Z}_p^2$, where Δ is a finite abelian group. Let K_∞ be the fixed field of Δ, let F be the fixed field of $\mathbb{Z}_p^2$ in $K(\mathfrak{f}p^\infty)$ and let F_n be the fixed field of $p^n\mathbb{Z}_p^2$. We identify Δ with $\mathrm{Gal}(F/K)$. We denote by $\mathfrak{X}_{F,n}(\mathfrak{p})$ the Galois group of the maximal abelian p-extension of F_n unramifid outside $\mathfrak{p}$ and by $\mathfrak{X}_\infty(\mathfrak{p})$ the inverse limit of $\mathfrak{X}_{F,n}(\mathfrak{p})$ over n. Let $(F_n)_v$ be the field of completion of F_n at v. Let $U_{(F_n)_v}$ be the group of units of $(F_n)_v$ and let $U_\infty(\mathfrak{p})$ be $\varprojlim_n \bigoplus_{v|\mathfrak{p}} (\varprojlim_m U_{(F_n)_v}/p^m)$. Let $C(\mathfrak{f})$ be the subgroup of $U_\infty(\mathfrak{p})$ of elliptic units. Let $\chi : \Delta \to \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ be a character and let $\mathfrak{f}_\chi$ be the conductor of χ. Let O denote the ring of integers of $\mathbb{Q}_p(\chi)$. For a $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module A, A^χ denotes the χ-part of A ,which is $\{x \in A \otimes_{\mathbb{Z}_p} O | \sigma \prod x = \chi(\sigma)x\}$ and A_χ denotes the χ-quotient of A, whcih is $A \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} O$. Let D be the ring of integers of the completion of the maximal unramified extension of $\mathbb{Q}_p$. Let Γ denote $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, let Λ denote $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, let Λ_O denote $O[[\Gamma]]$, and let Λ_D denote $D[[\Gamma]]$. For a finitely generated torsion Λ_O-module X we denote its characteristic ideal by $\mathrm{char}_{\Lambda_O}(X)$.

主定理 1 を述べる.

Theorem 16.1. *When* $\mathfrak{f}_\chi$=$\mathfrak{f}\mathfrak{p}^n\bar{\mathfrak{p}}^m$, $(\mathfrak{f}, p) = 1$

$$\mathrm{char}_{\Lambda_O}((U_\infty(\mathfrak{p})/C(\mathfrak{f}))_\chi) = \mathrm{char}_{\Lambda_O}(\mathfrak{X}_\infty(\mathfrak{p})_\chi)$$

これを上で記述した Jonson Kings の定理から実際に導くのが主定理の一つ目である. 証明の方針を記述する.

- Poitou-Tate exact sequence の計算
  1. Johnson Kings の定理に現れるコホモロジーを含む完全系列を Poitou-Tate exact Sequence を用い導出する
  2. χ 作用が自明の場合にコホモロジーを計算する. 計算には Kummer Sequence を用いる. これにより H^1, H^0 は完全に計算できる.(実際は H^2 もある程度計算できる)
  3. 岩澤理論の基本完全系列に帰着する.H^2 は虚二次体の場合は Leopolod Conjecture が成り立つ. また,Local Tate Duality から Local での H^2 が pseudo null であることより従う.
  4. χ 作用を含むコホモロジーを計算する.Hochschild-Serre spectral sequence を使うことで χ 作用が自明な場合に帰着させる.
- Poitou-Tate 完全列から主定理の導出.
  1. 楕円単数群を含む完全列を作る
  2. 主定理の導出に必要な完全系列を作る.
  3. p と $\mathfrak{p}$ の場合の差が psuedo-nul であることを示す.
  4. χ-quotient と χ-part の差を計算する.
  5. Local な H^1 は上のままでは torsion ではないため，具体的に射を構成する必要があるそのため,Kernel 同士,Cokernel 同士が pseudo-iso であることを示す

17 Étale cohomology

17.1 Facts

この章ではエタールコホモロジーの既知の結果を記載する. これらは Johoson Kings の結果から自分の結果に帰着させる時に使う.

Propostion 17.1 ([Milne 2] Proposition 6.16)**.** *Assume that X is a connected neotherian scheme, and let $\bar{x}$ be a geometric point of X. The functor $\mathfrak{F} \mapsto \mathfrak{F}_{\bar{x}}$ defines an equivalence between the category of locally constant sheaves of abelian groups with finite stalks on $X_{\acute{e}t}$ and the category of finite $\pi_1(X, \bar{x})$-modules.*

From now on we denote a sheaf $\mathfrak{F}$ on $X_{\acute{e}t}$ by $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$.

Theorem 17.2 ([Tate] Thorem 3.1)**.** *(Poitou-Tate exact sequence)*
Let k be an algebraic number field and let S be a finite set of places of k including all archimedian ones. Let A be a finite abelian group endowed with an action of the Galois group of the maximal extension of k unramified outside S and let $O_k[1/S]$ denote the ring of elements in k which are integers at all primes not in S. We suppose that $|A|O_k[1/S] = O_k[1/S]$. Then we have a long exact sequence

$$\begin{aligned}
0 &\to H^0_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A) \to \bigoplus_{v \in S} H^0_{\acute{e}t}(k_v, A) \to H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A^\vee(1))^\vee \\
&\to H^1_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A) \to \bigoplus_{v \in S} H^1_{\acute{e}t}(k_v, A) \to H^1_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A^\vee(1))^\vee \\
&\to H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A) \to \bigoplus_{v \in S} H^2_{\acute{e}t}(k_v, A) \to H^0_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A^\vee(1))^\vee \to 0
\end{aligned}$$

Propostion 17.3 ([Milne 2] Example 7.9)**.** *(Kummer sequence)*
Let X be a scheme and let p be a prime which invertible on X. Then the sequence of sheaves of abelian groups on $X_{\acute{e}t}$

$$0 \to (\mu_{p^n})_X \to (\mathbb{G}_m)_X \xrightarrow{p^n} (\mathbb{G}_m)_X \to 0$$

is exact.

Propostion 17.4 ([Milne 2] Corllary 11.6)**.** *(Hilbert's Theorem 90) There is a natural isomorphism*

$$H^1_{\acute{e}t}(X, (\mathbb{G}_m)_X) \xrightarrow{\sim} Pic(X)$$

Theorem 17.5 ([Milne 1] Remark 2.2)**.** *(Hasse principle) Let k be an algebraic number field and let* O_k *be the ring of integers of k. Let S be a set of places of k,* S_f *the set of finite places of S, and* $S_{\mathbb{R}}$ *the set of all real places of k　D There exists an exact sequence*

$$0 \to H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), (\mathbb{G}_m)_{\mathrm{Spec}(O_k[1/S])}) \to \bigoplus_{v \in S_f} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{v \in S_{\mathbb{R}}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

Propostion 17.6. *For a local field L, we have a canonical isomorphism*

$$H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(L), (\mathbb{G}_m)_{\mathrm{Spec}(L)}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Propostion 17.7 ([Milne 2] Theorem 14.9)**.** *(Hochschild-Serre spectral sequence)*
Let $\pi : Y \to X$ *be a Galois covering with Galois group G. For any sheaf* $\mathfrak{F}$ *on* $X_{\acute{e}t}$*, there is a spectral sequence*

$$E_2^{r,s} = H^r_{\acute{e}t}(G, H^s_{\acute{e}t}(Y, \pi_* \mathfrak{F}) \Rightarrow H^{r+s}_{\acute{e}t}(X, \mathfrak{F})$$

Propostion 17.8 ([Milne 2] example 11.3)**.** *Let X be a Neotherian connected scheme, let* γ *be a geometric point of X, and let G be a finite abelian group. Then we have*

$$H^1_{\acute{e}t}(X, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(X, \gamma), G)$$

Here G on the left side denotes the constant sheaf induced by G. Hom_{cont} *is the set of continuous homomorphism. We denote the set of continuous homomorphism by* Hom *in this paper. If X is a connected Neotherian scheme, we omit* γ *because* $H^1_{\acute{e}t}(X, G)$ *is independent of the choice of* γ*.*

18 Poitou-Tate exact sequence からの計算

18.1 完全列の導出

Johnson Kings の定理に現れるコホモロジーを含む完全系列を Poitou-Tate exact Sequence を用い導出する以降では，アフィンスキームのエタールコホモロジーを計算する時に簡単のため，Spec を省略し $H^p_{\acute{e}t}(R, A)$ と記述する. Poitou-Tate exacet sequence17.2 では S, k, A を決める必要がある. ここでは以下とする.

$k \;\; = K_n$
$S \;\; = \{v \mid v|p\} \cup \{v \mid v|\mathfrak{f}\} \cup \{v \mid archmedian\}$. ただし v は K_n の素点.
$A \;\; = O/p^m(1)$. ただし O=$\mathbb{Z}_p$[Imageχ]

O/p^m は有限群なため,Mittag-Lefler condition を満たす. これより n,m についての逆極限は exact となる. これにより, 以下の完全列を得る.

$$
\begin{aligned}
0 &\to \varprojlim_{n,m} H^0_{\acute{e}t}((O_{K_n}[1/S_n]), O/p^m(1)) \to \varprojlim_{n,m} \bigoplus_{v\in S_n} H^0_{\acute{e}t}(K_{nv}, O/p^m(1)) \to \varprojlim_{n,m} H^2_{\acute{e}t}((O_{K_n}[1/S_n]), O/p^m(1)^\vee(1))^\vee \\
&\to \varprojlim_{n,m} H^1_{\acute{e}t}((O_{K_n}[1/S_n]), O/p^m(1)) \to \varprojlim_{n,m} \bigoplus_{v\in S_n} H^1_{\acute{e}t}(K_{nv}, O/p^m(1)) \to \varprojlim_{n,m} H^1_{\acute{e}t}((O_{K_n}[1/S_n]), O/p^m(1)^\vee(1))^\vee \\
&\to \varprojlim_{n,m} H^2_{\acute{e}t}((O_{K_n}[1/S_n]), O/p^m(1)) \to \varprojlim_{n,m} \bigoplus_{v\in S_n} H^2_{\acute{e}t}(K_{nv}, O/p^m(1)) \to \varprojlim_{n,m} H^0_{\acute{e}t}((O_{K_n}[1/S_n]), O/p^m(1)^\vee(1))^\vee \to 0
\end{aligned}
$$

これより Johonson Kings の結果に出てくるコホモロジーを含む完全列が作れた.

18.2 $O/p^m(1)$ 係数のコホモロジー

χ 作用が自明の場合にコホモロジーを計算する. 計算には Kummer Sequence を用いる. これにより H^1, H^0 は完全に計算できる.(実際は H^2 もある程度計算できる) 実際に体として F_n の場合にコホモロジーを計算すると χ の作用は自明となる.

1. 岩澤理論の基本完全系列に帰着する.H^2 は虚二次体の場合は Leopolod Conjecture が成り立つ. また,Local Tate Duality から Local での H^2 が pseudo null であることより従う.
2. χ 作用を含むコホモロジーを計算する.Hochschild-Serre spectral sequence を使うことで χ 作用が自明な場合に帰着させる.

1. 楕円単数群を含む完全列を作る
2. 主定理の導出に必要な完全系列を作る.
3. p と $\mathfrak{p}$ の場合の差が psuedo-nul であることを示す.
4. χ-quotient と χ-part の差を計算する.
5. Local な H^1 は上のままでは torsion ではないため，具体的に射を構成する必要があるそのため,Kernel 同士,Cokernel 同士が pseudo-iso であることを示す

19 Poitou-Tate exact sequence から主定理の導出

基本的な戦略 Poitou-Tate exact sequence を使う.

Theorem 19.1 (Tate Thorem 3.1)**.** *(Poitou-Tate exact sequence)*
Let k be an algebraic number field and let S be a finite set of places of k including all archimedian ones. Let A be a finite abelian group endowed with an action of the Galois group of the maximal extension of k unramified outside S and let $O_k[1/S]$ denote the ring of elements in k which are integers at all primes not in S. We suppose that $|A|O_k[1/S] = O_k[1/S]$. Then we have a long exact sequence

$$
\begin{aligned}
0 &\to \varprojlim_{n,m} H^0_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A) \to \varprojlim_{n,m} \bigoplus_{v\in S} H^0_{\acute{e}t}(k_v, A) \to \varprojlim_{n,m} H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A^\vee(1))^\vee \\
&\to \varprojlim_{n,m} H^1_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A) \to \varprojlim_{n,m} \bigoplus_{v\in S} H^1_{\acute{e}t}(k_v, A) \to \varprojlim_{n,m} H^1_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A^\vee(1))^\vee \\
&\to \varprojlim_{n,m} H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A) \to \varprojlim_{n,m} \bigoplus_{v\in S} H^2_{\acute{e}t}(k_v, A) \to \varprojlim_{n,m} H^0_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(O_k[1/S]), A^\vee(1))^\vee \to 0
\end{aligned}
$$

これを使い，既存との違いを計算する.

$$\begin{array}{ccccc} R^n & \xrightarrow{f} & R^m & \twoheadrightarrow & M \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ R^n_{\mathrm{p}} & \longrightarrow & R^m_{\mathrm{p}} & \twoheadrightarrow & M_{\mathrm{p}} \end{array}$$

Poitou-Tate を計算していきたい.

References

[Bourbaki] Bourbaki,N., Éléments de Mathématique, Algèbre Commutative, Chap. 7, Hermann, Paris (1965).

[de Shalit] de Shalit,E., Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication. Perspectives in Mathematics, vol. 3, Academic Press, Boston,(1987).

[Johnson Kings] Johnson,L.J., ; Kings,G., On the equivariant main conjecture for imaginary quadratic fields. J. Reine Angew. Math. 653 (2011), 75-114.

[Kurihara] Kurihara,M., Iwasawa theory and Fitting ideals, J. reine angew. Math. 561 (2003), 39-86.

[Milne 1] Milne,J.S., Arithmetic duality theorems, volume 1 of Perspectives in Mathematics. Academic Press Inc., Boston, MA, (1986)

[Milne 2] Milne,J.S., Lectures on Etale Cohomology, available at www.milne.org, (1998).

[Northcott] Northcott,D.G., Finite free resolutions, Cambridge Univ. Press (1976).

[Rubin 1] Rubin,K., The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields, Invent. math. 103 (1991), 25-68.

[Rubin 2] Rubin,K., More "main conjectures" for imaginary quadratic fields, Elliptic curves and related topics,CRMProc. Lect. Notes 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994), 23-28.

[Rubin 3] Rubin,K., Euler systems, Annals of Math. Studies 147, Princeton Univ. Press (2000).

[Tate] Tate,J., Duality theorems in Galois cohomology over number fields. Proc. Internat. Congr. Mathematicians, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, (1962),288-295.

[Washington] Washington,L., Introduction to Cyclotomic Fields, 2nd edition, Graduate Texts in Math. 83, Springer-Verlag (1997)