## 1 abelian category における Kernel の随伴関手

Kernel の随伴関手を定義する。以下の順序にて説明する。

- 1. abelian category C に対し、随伴で移り合う category  $C^*$  を定義する。
- 2. Kernel とその随伴になる関手を定義する。
- 3. 実際に随伴となっていることを確認する。

## 1.1 $\mathcal{C}^*$ の定義

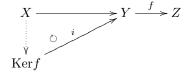
C を abelian category とする。 $C^*$  を以下で定義する。

- 1.  $Obj(C^*)$  はある  $Y, Z \in C$  が存在し、 $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  となる f 全体
- 2.  $f:Y\to Z,g:Y'\to Z'$  に対し、 $\tau\in \mathrm{Hom}(f,g)$  は  $\tau_Y:Y\to Y',\tau_Z:Z\to Z'$  であって、 $g\circ\tau_Y=\tau_Z\circ f$  を満たすもの全体

**Remark.**  $C^*$  は abelian category(のはず)。

## 1.2 Kernel とその随伴関手の定義

(コホモロジーのこころの Ker の定義がよくわからなかったので) $\mathcal C$  の射  $f:Y\to Z$ の Kernel を以下で定義する。任意の  $f\circ g=0$  となる  $g:X\to Y$  に対し、以下が可換になる射  $X\to \operatorname{Ker} f$  がただ一つ存在するような  $(\operatorname{Ker} f,i)$  の組のことを f の Kernel という。



**Remark.** TeX力がないので、いい可換図式がかけません。 TeXGod がいた ら、教えてください。

これは、 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\operatorname{Ker} f)$  と f が誘導する準同型  $f^*:\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$  の Kernel の間に自然な同型があることを意味している。

functor Ker:  $\mathcal{C}^* \to \mathcal{C}$  を以下で定義する。 $f: Y \to Z$  に対し、関手 Ker の f の像を abelian category $\mathcal{C}$  の Ker f とする。 $\mathcal{C}^*$  上の  $f: Y \to Z, g: Y' \to Z'$  に対する射  $(\tau_Y, \tau_Z)$  に対し、Ker f から Ker g への射を以下で定める。

これは  $f\circ i_f$  が 0 射になり、図式の可換性から、 $g\circ \tau_Y\circ i_f$  が 0 射となる。よって、Kernel の universality から Kerf から Kerg の射がただひとつ定まるので、Well-defined となる。

Kernel の随伴関手  $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^*$  を定義する。 $X\in\mathcal{C}$  に対し、 $F(X)=0_X:X\to 0$  で定める。 $f:Y\to Z$  に対し、 $F(f)=(f,\tau_0)$  と定める。

$$Y \xrightarrow{0} 0$$

$$\downarrow f \quad \circlearrowleft \quad \downarrow \tau_0$$

$$Z \xrightarrow{0} 0$$

## 1.2.1 随伴関手になることの確認

 $\operatorname{Hom}(X,\operatorname{Ker} f) \sim \operatorname{Hom}(F(X),f)$  を示す。 $g \in \operatorname{Hom}(X,Y)$  を、 $(g.0) \in \operatorname{Hom}(F(X),f)$  となるようにとる。すると、Kernel の universality より以下の可換図式が成りたつような射  $g':X \to \operatorname{Ker} f$  がただひとつ存在する。よって、示された。

$$\begin{array}{c|c} X \xrightarrow{i_X} X \xrightarrow{0} 0 \\ & \Diamond & \downarrow^g & \Diamond & \downarrow^{\tau_0} \\ & & \downarrow^{i_f} & \downarrow^g & \downarrow^{\tau_0} \end{array}$$
 
$$\text{Ker} f \xrightarrow{i_f} Y \xrightarrow{f} Z$$

Remark. 自然性はエクササイズでお願いします。燃え尽きました。