1 abelian category における Kernel の随伴関手

Kernel の随伴関手を定義する。以下の順序にて説明する。

1. abelian category $\mathcal{C}$ に対し、随伴で移り合う category $\mathcal{C}^*$ を定義する。
2. Kernel とその随伴になる関手を定義する。
3. 実際に随伴となっていることを確認する。

1.1 $\mathcal{C}^*$ の定義

$\mathcal{C}$ を abelian category とする。$\mathcal{C}^*$ を以下で定義する。

1. $Obj(\mathcal{C}^*)$ はある $Y, Z \in \mathcal{C}$ が存在し、$f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ となる f 全体
2. $f : Y \to Z$,$g : Y' \to Z'$ に対し、$\tau \in \mathrm{Hom}(f, g)$ は $\tau_Y : Y \to Y'$,$\tau_Z : Z \to Z'$ であって、$g \circ \tau_Y = \tau_Z \circ f$ を満たすもの全体

Remark. $\mathcal{C}^*$ は *abelian category(*のはず*)*。

1.2 Kernel とその随伴関手の定義

(コホモロジーのこころの Ker の定義がよくわからなかったので)$\mathcal{C}$ の射 $f : Y \to Z$ の Kernel を以下で定義する。任意の $f \circ g = 0$ となる $g : X \to Y$ に対し、以下が可換になる射 $X \to \mathrm{Ker}f$ がただ一つ存在するような $(\mathrm{Ker}f, i)$ の組のことを f の Kernel という。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, dotted] & Y \arrow[r, "f"] & Z \\
\mathrm{Ker}f \arrow[ur, "i"'] \arrow[u, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowright"] & &
\end{tikzcd}$$

Remark. *TeX* 力がないので、いい可換図式がかけません。*TeXGod* がいたら、教えてください。

これは、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{Ker}f)$ と f が誘導する準同型 $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ の Kernel の間に自然な同型があることを意味している。

functor $\mathrm{Ker} : \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}$ を以下で定義する。$f : Y \to Z$ に対し、関手 Ker の f の像を abelian category$\mathcal{C}$ の $\mathrm{Ker}f$ とする。$\mathcal{C}^*$ 上の $f : Y \to Z$,$g : Y' \to Z'$ に対する射 (τ_Y, τ_Z) に対し、$\mathrm{Ker}f$ から $\mathrm{Ker}g$ への射を以下で定める。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}f \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau_Y"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z \arrow[d, "\tau_Z"] \\
\mathrm{Ker}g \arrow[r, "i_g"] & Y' \arrow[r, "g"] & Z'
\end{tikzcd}$$

これは $f \circ i_f$ が 0 射になり、図式の可換性から、$g \circ \tau_Y \circ i_f$ が 0 射となる。よって、Kernel の universality から Ker$f$ から Ker$g$ の射がただひとつ定まるので、Well-defined となる。

Kernel の随伴関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ を定義する。$X \in \mathcal{C}$ に対し、$F(X) = 0_X : X \to 0$ で定める。$f : Y \to Z$ に対し、$F(f) = (f, \tau_0)$ と定める。

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & 0 \arrow[d, "\tau_0"] \\
Z \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

1.2.1 随伴関手になることの確認

Hom$(X, \mathrm{Ker}f) \sim$ Hom$(F(X), f)$ を示す。$g \in$ Hom(X, Y) を、$(g.0) \in$ Hom$(F(X), f)$ となるようにとる。すると、Kernel の universality より以下の可換図式が成りたつような射 $g' : X \to \mathrm{Ker}f$ がただひとつ存在する。よって、示された。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & 0 \arrow[d, "\tau_0"] \\
\mathrm{Ker}f \arrow[r, "i_f"] & Y \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

Remark. 自然性はエクササイズでお願いします。燃え尽きました。