

位相空間

2016/9/26

目 次

0.1 構造主義

Bourbaki

0.2 位相のやりたいこと

0.3 位相の定義

0.4 例

0.5 コンパクト, ハウスドルフ

0.6 ザリスキ位相

- 位相とは近さを定める概念- 位相を定めることで決めたいものは極限と連続- 位相の定義 (開集合, 閉集合) - この場合の極限, および, 連続性の定義- 位相の定義は連続性の定義と試行錯誤- 変な位相もある, 変な空間だと極限がただ一つではなくなる. 例えば, 収束点が2点の例をあげる. - 位相の重要概念, ハウスドルフとコンパクトハウスドルフは点と点は区別できるということ. (極限が存在するなら一意であること) コンパクト \Rightarrow 有界かつ完備 - 色々言っただけ, 使ってみて, なれるしかないという部分もある. 学部2年で位相空間を学んだ時は全くわからず, とてもつらかった. 多様体論を勉強して, 変な例が自然に感じて, 消化した部分が多い.

- Zariski 位相 位相空間のイメージと定義について説明する. 数学で一つの対象を調べる時, 集合に構造が付いたものだと考えるとわかりやすい事が多い. 例えば整数環 \mathbb{Z} を考えてみよう. これは $\{\dots, 0, 1, 2, \dots\}$ という集合である. この集合にはよく知られているように, 足し算や引き算, 掛け算という演算が定義できる. つまり, 代数構造として環の構造を持っている. また, $a, b \in \mathbb{Z}$ に対し, $a \geq b$ or $a \leq b$ という関係が定義できる. これを全順序であ

ることを意味している。つまり \mathbb{Z} は集合として書け、なおかつ、代数構造として環構造を持ち、順序構造として全順序であることがわかる。(この辺いい日本語が使えない。)

つまり整数環 \mathbb{Z} はその下位構造として集合であり、環構造や順序構造を付加したものとして考えることができる。

付加構造も含め対象を考えると何が起きるだろう。対象自体には一見変化がないが、対象同士の関係が異なる。例えば、 \mathbb{Z} と \mathbb{Q} は集合としては同じ (同型) であるが、環としては同じ (同型) でない。

つまり付加構造により、“同じ”とされるものが異なる。逆の言い方をすると、“異なる”とされるものが変わる。

また、付加構造により、議論が変化する。

付加構造として重要な構造等は

1. 代数構造
2. 位相構造
3. 微分構造
4. 順序構造

位相について今回は説明する。

位相構造とは“近さ”を定める概念である。しかし、初学者にとって直感的には“近さ”だと感じる概念ではない。

まず、“近さ”について何を考えるのかを見よう。 $a, b \in \mathbb{R}$

- 実数の場合の近さとは何か？ 一点 a に対し、 b が“近い”という言葉は、単純に距離が小さい時、つまり、 $|a - b|$ がとても小さい時としたい。では、小さいとはどういう時か？これはよくわからない。小さいを言うためには比較対象が必要となる。例えば $|a - b| \leq |a - c|$ なら b は c より近いと定義できる。

これを a だけを使って定義するにはどうすればいいか？。明確に近さという言葉は定義できない (と思う)。

- 近さは何に使っていたか写像の連続性、および、極限なので、近さには満たして性質として2つ。極限に相当する操作が定義できること写像の連続性が定義できること。写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続とは任意の点 $x \in \mathbb{R}$ に対しても、 $f(x)$ のどんな狭い場所をとっても、その範囲内入る塊がある？。これは絵が欲しい。

極限も同様。つまり、近いには、等しい、ぐらいまで言えないと近いことが生かせない。逆に定義自体が少しむずかしいものだと思う。

Zariski 位相とは?? 代数幾何に出てくる、特殊な位相の入れ方をしたもの。

$V()$ 多項式により閉集合