Modular Form とその周辺

ta

2016/August

1 Introduction

保型形式について概説する。今回の説明は以下を理解することを目的に行う。

- 保型形式の定義
- 保型形式を考える背景
- 数学における興味深い対象
- 数学における自然な疑問
- 最低限の理論の厳密さ

本サーベイにおいては、保型形式は解析的に定義されるため、まず、解析的な内容の準備を用意した。これらの準備を適宜みながら、保型形式の定義から基本領域、フーリエ級数展開と L 関数等、代数を使わずとも定義できる内容を論じる。その後、保型形式全体のなす空間がベクトル空間となることを確認し、内積、固有値、次元などについて議論する。以降は概略のみであるが、保型形式の広がりの深さをみせるため、保型形式と楕円関数、楕円曲線との関係、また保型形式の L 関数と代数体の L 関数などの関係にふれる。最後にフェルマーの最終定理とつながる、Eichler-Shimura 理論について触れる。なお、今回は、Langlands Problem や岩澤理論は高度すぎると判断し、特に触れなかった。詳しいことは参考文献を参考にせよ。

後半は詳しいことを私も理解していないため、誤りがある可能性が高いことを最初に触れておく。もし、誤りが発見された場合は通知願う。

Remark. 一般的に解析的、代数的、幾何的に定まった意味はない。特に理論が進歩していくと、何が代数的で、何が幾何的で、何が解析的なのかがよくわからなくなることがある。しかし、ここでは、そのような特殊な状況は考慮せず、以下の意味で使い分ける。

代数的定義 群、環、体、ベクトル空間などの代数的構造によって定まる定義

幾何的定義 多様体、ホモロジー等、空間や空間の不変量により定まる定義

解析的定義 関数や微積分などにより定まる定義

2 Basic Knowlede of this survey

3 Definition of Modular Form and Basic Propety

3.1 $SL(2.\mathbb{Z})$ and congurenc gruop

3.2 definition of modular form

保型形式は名前の通り、なんらかの形を保つものである。形を保つというのは、数学ではよく、群の作用で不変という形で定義される。群の作用が何かをここでは定義しないが、”何か”を”かけた”場合に元とほとんど同じということを指すと思ってもらいたい。
では実際に保型形式をみていこう。まず、”かけられる対象”が何で、”かける対象”が何かを定義する。
かける対象:

$$\Gamma(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) | a \equiv 1, b \equiv 0, c \equiv 0, d \equiv 1 \mathrm{mod} N\}$$

N は 1 以上の整数を指す。N が 1 の場合、$\Gamma(N) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ となる。

かけられる対象: $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への解析的関数 f 全体 (もしかしたら有理型でいいかもしれない。)

Remark. かける対象、かけられる対象は実際はそれらの元と書くべきかもしれない。ただ、数学で対象を考えるというとき、少なくとも自分は、対象を性質や条件で決めることが多い。そのため一つの特定の元ではなく、全体をさした方が自然に感じる。

かける対象とかけられる対象が決まったので、”かける”を以下で定義する。

$$\begin{aligned} \cdot : \Gamma(N) \times \mathrm{Hom}_{Rat}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} &\rightarrow \mathrm{Hom}_{Rat}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} \\ (\gamma, f) &\mapsto \gamma \cdot f(z) = f(\frac{az+b}{cz+d}) \\ \text{ただし、}\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

かけることまで定義できたので、保型形式を定義しよう。以下では保型形式と言わずに **modular form,cusp form** などの用語を使う。

Definition 3.1. f が *unrestricted weight* k の *modular form* とは、以下が成り立つことをいう。
$\forall \gamma \in \Gamma(N), \gamma \cdot f(z) = (cz+d)^k f(z)$

Remark. 定義を見たときは、まずこの定義が意味することを考えたい。真剣に数学書を読むなら、定義に対する疑問 *3* 個、定義が成り立つ例 *2* 個、定義が成り立たない例 *1* 個ぐらいは考えたい。

この定義をみて、私が気になることをいくつかあげる。

- a, b によらず c, d によるのは不自然に感じる。なぜ、そのようなものを考えるのか。
- f は有理型関数に限っているが、他の場合はどうか。
- H を割った空間の関数として考えられないのか。
- $\gamma \cdot f(z) = f(z)$ となる f はあるのか。

Theorem 3.2. *[k],[11.74 Eichler-Shimura]*
$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\tau}$ を $S_2(\Gamma_0(N))$ の *new form* であって、$c_1 = 1$ となるものとする。 $c_n \in \mathbb{Z}$ とすると、以下を満たす *pair* (E, ν) が存在する

1. E は $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線であり、(E, ν) は $\mathbb{Q}$ 上のアーベル多様体 J を部分多様体で割ったものとなる。

参考文献

[1] **Elliptic Curves. · Anthony W. Knapp**

[2] **Modular Functions and Modular Forms · J. S. Milne**

[3] 参考文献の名前・著者 **N**