Modular Form とその周辺

take

2016/August

目 次

1 Introduction

保型形式について概説する。今回の説明は以下を理解することを目的に行う。

- 保型形式の定義
- 保型形式を考える背景
- 数学における興味深い対象
- 数学における自然な疑問
- 最低限の理論の厳密さ

本サーベイにおいては、保型形式は解析的に定義されるため、まず、解析的な内容の準備を用意した。これらの準備を適宜みならがら、保型形式の定義から基本領域、フーリエ級数展開と L 関数等、代数を使わずとも定義できる内容を論じる。その後、保型形式全体のなす空間がベクトル空間となることを確認し、内積、固有値、次元などについて議論する。以降は概略のみであるが、保型形式の広がりの深さをみせるため、保型形式と楕円関数、楕円曲線との関係、また保型形式の L 関数と代数体の L 関数などの関係にふれる。最後にフェルマーの最終定理とつながる、Eichler-Shimura 理論について触

れる。なお、今回は、Langlands Problem や岩澤理論は高度すぎると判断し、特に触れなかった。詳しいことは参考文献を参考にせよ。

後半は詳しいことを私も理解していないため、誤りがある可能性が高いことを最初に触れておく。もし、誤りが発見された場合は通知願う。

Remark. 一般的に解析的、代数的、幾何的に定まった意味はない。特に理論が進歩していくと、何が代数的で、何が幾何的で、何が解析的なのかがよくわからなくなることがある。しかし、ここでは、そのような特殊な状況は考慮せず、以下の意味で使い分ける。

代数的定義 群、環、体、ベクトル空間などの代数的構造によって定まる定義

幾何的定義 多様体、ホモロジー等、空間や空間の不変量により定まる定義

解析的定義 関数や微積分などにより定まる定義

2 Basic Knowlede of this survey

Theorem 2.1 (フーリエ展開の収束)**.** 連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が $f(x+1)=f(x)$ を満たすとする。すると、$f=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{2\pi ixn}$ となる。
ただし、$a_ne^{2\pi ixn}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)e^{-2\pi ixn}dx$

3 Definition of Modular Form and Basic Propety

3.1 $SL(2.\mathbb{Z})$ and congruenc gruop

3.2 Definition of modular form

保型形式は名前の通り、なんらかの形を保つものである。形を保つというのは、数学ではよく、群の作用で不変という形で定義される。群の作用が何かをここでは定義しないが、”何か”を”かけた”場合に元とほとんど同じということを指すと思ってもらいたい。
では実際に保型形式をみていこう。まず、”かけられる対象”が何で、”かける対象”が何かを定義する。
かける対象:

$$\Gamma(N):=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})|a\equiv1,b\equiv0,c\equiv0,d\equiv1\mathrm{mod}N\}$$

N は 1 以上の整数を指す。N が 1 の場合、$\Gamma(N)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ となる。

かけられる対象: $\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への有理型関数 f 全体

Remark. かける対象、かけられる対象は実際はそれらの元と書くべきかもしれない。ただ、数学で対象を考えるというとき、少なくとも自分は、対象を性質や条件で決めることが多い。そのため一つの特定の元ではなく、全体をさした方が自然に感じる。

かける対象とかけられる対象が決まったので、”かける”を以下で定義する。

$$\begin{aligned} \cdot : \Gamma(N) \times \mathrm{Hom}_{Rat}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} &\to \mathrm{Hom}_{Rat}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} \\ (\gamma, f) &\mapsto \gamma \cdot f(z) = f(\frac{az+b}{cz+d}) \\ \text{ただし、}\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

かけることまで定義できたので、保型形式を定義しよう。以降では保型形式はすべて英語の **modular form,cusp form** などの用語を使う。**modular form,automorphic form** がともに保型形式と訳されていること、**cusp form** を日本語で書いているものをほとんどとみたことがないためである。

Definition 3.1. 有理型関数 $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ が *unrestricted* な *weight* k の *modular form* とは、以下が成り立つことをいう。
$\forall \gamma \in \Gamma(N), \gamma \cdot f(z) = (cz+d)^k f(z)$

Remark. 定義を見たときは、まずこの定義が意味することを考えたい。真剣に数学書を読むなら、定義に対する疑問 *3* 個、定義が成り立つ例 *1* 個、定義が成り立たない例 *1* 個ぐらいは考えたい。

この定義をみて、私が気になることをいくつかあげる。

- a, b によらず c, d によるのは不自然に感じる。なぜ、そのようなものを考えるのか。⇒楕円関数など自然な例が多数あるため
- $\mathcal{H}$ を割った空間の関数として考えられないのか。⇒簡単。
- $\gamma \cdot f(z) = f(z)$ となる f はあるのか。⇒ある。

3.3 fourier expansion of modular form

上で定義した **unrestricted modular form** がフーリエ展開可能であることを示そう。以下の方針で示す。

1. 周期的であること。
2. ある点の近傍でフーリエ展開できること
3. 任意の点でフーリエ展開で近似できること

周期的であること．$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ をとる。この時、$\gamma \cdot z = z+1, cz+d = 1$ となるため、unrestricted modular form$f$ に対し、$\gamma \cdot f(z) = f(z+1) = f(z)$ となる。よって、実軸にそって周期関数となることがわかる。 □

ただし、特異点があることに注意せよ。今、$f(z)$ は有理型関数のため、真性特異点が存在しないことに注意すると、

2.1

Remark. 筆者は解析全般に詳しくないため、ここまで議論した。確認したすべての *mdfm* の教科書でここの証明がなかったので、わかっている人からすると明らかなこと、あるいは明らかにできる定理があるのかもしれない。

unrestricted modular form の定義 modular form/cusp form の定義 tu

Theorem 3.2. *[k],[11.74 Eichler-Shimura]*
$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\tau}$ を $S_2(\Gamma_0(N))$ の *new form* であって、$c_1 = 1$ となるものとする。 $c_n \in \mathbb{Z}$ とすると、以下を満たす *pair* (E, ν) が存在する

1. E は $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線であり、(E, ν) は $\mathbb{Q}$ 上のアーベル多様体 J を部分多様体で割ったものとなる。

参考文献

[1] **Elliptic Curves. · Anthony W. Knapp**

[2] **Modular Functions and Modular Forms · J. S. Milne**

[3] 参考文献の名前・著者 **N**