平成 28 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

$\boxed{\text{数学 — 選択問題}}$

平成 27 年 8 月 19 日（13 時 30 分 から 15 時 30 分まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと.
2) 問題は 8 題ある．3 題を選択して解答すること.
3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること.
4) 解答用紙の左肩上部の $\boxed{}$ に選択した問題番号を記入し，受験番号を（　）内に記入すること．また，<u>氏名は書かないこと</u>.
5) 問題冊子は 5 ページである.

記号

$\mathbb{Z}$:　整数全体のなす集合
$\mathbb{Q}$:　有理数全体のなす集合
$\mathbb{R}$:　実数全体のなす集合
$\mathbb{C}$:　複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ 正の整数 m, n に対し，m 次対称群 S_m の位数 n の部分群の個数を $N(m, n)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) $N(5, 3)$ を求めよ．

(2) $N(5, 4)$ を求めよ．

(3) 整数 $m \geq 2$ に対し，次の式を示せ．

$$N(m, 2) = \sum_{k=1}^{r} \frac{m!}{2^k k!(m-2k)!}\ , \qquad r = \begin{cases} \frac{m}{2} & (m \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{m-1}{2} & (m \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

$\boxed{2}$ p を 3 以上の素数，$\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を p 元体とし，$\mathbb{F}_p$ における $a \in \mathbb{Z}$ の類を $[a] \in \mathbb{F}_p$ と表す．また，有限集合 X の元の個数を $\#X$ で表し，正の整数 a, b に対して，$a \mid b$ で a は b を割り切ること，$a \nmid b$ で a は b を割り切らないことを表す．以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 n に対し，$\mathbb{F}_p$ の乗法群 $\mathbb{F}_p^\times$ 上の準同型 θ_n を

$$\theta_n : \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times, \qquad \theta_n(x) := x^n$$

と定める．$d \mid p-1$ を満たす正の整数 d に対して，

$$\mathrm{Im}(\theta_d) = \mathrm{Ker}(\theta_{\frac{p-1}{d}})$$

を示せ．ただし，$\mathrm{Im}(\theta_d)$ は θ_d の像を，$\mathrm{Ker}(\theta_{\frac{p-1}{d}})$ は $\theta_{\frac{p-1}{d}}$ の核を表す．

(2) $a \in \mathbb{F}_p$ に対して，次の式を示せ．

$$[\#\{\ y \in \mathbb{F}_p \mid y^2 = a\ \}] = 1 + a^{\frac{p-1}{2}}.$$

(3) 正の整数 d に対して，次の式を示せ．

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^d = \begin{cases} [0] & (\ p-1 \nmid d \text{ のとき}) \\ [-1] & (\ p-1 \mid d \text{ のとき}). \end{cases}$$

(4) $4 \mid p-1$ のときは $B = \begin{pmatrix} \frac{p-1}{2} \\ \frac{p-1}{4} \end{pmatrix}$ とし，$4 \mid p+1$ のときは $B = 0$ とする．次の式を示せ．

$$[\#\{\ (x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \mid y^2 = x(x^2+1)\ \}] = [-B].$$

ただし，$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ は二項係数とする．

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^4$ の部分集合

$$A := \{\, (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ w = 0 \,\}$$
$$B := \{\, (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 1 \le x^2 + y^2 + w^2 \le 9,\ z = 0 \,\}$$

に対して，以下の問いに答えよ．

(1) n 次元球面 S^n の p 次整係数ホモロジー群 $H_p(S^n)$ が $\mathbb{Z}$ と同型となる p は何か答えよ．ただし，証明はしなくてよい．

(2) A が 2 次元球面 S^2 とホモトピー同値であることを示せ．

(3) $A \cap B$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

(4) $A \cup B$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{4}$ $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^3$ 上のユークリッド・ノルムとする．M を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面（つまり 2 次元部分多様体）として，点 $p \in M$ は，任意の点 $q \in M$ に対して

$$\|q\| \le \|p\|$$

をみたすとする．以下の問いに答えよ．

(1) p における任意の単位接ベクトル $X \in T_pM$ に対して，X 方向の法曲率 κ_X は

$$\kappa_X = \pm\frac{1}{2\|p\|}(f''(0) - 2)$$

をみたすことを示せ．ただし，$\mathbb{R}^3$ の原点 o，点 p，およびベクトル X で張られる平面と M との交わりに含まれる曲線 $c(s)$ ($c(0) = p$, $c'(0) = X$, s は弧長パラメータ) に対して，

$$f(s) := \|c(s)\|^2$$

と定める．

(2) p におけるガウス曲率は正であることを示せ．

(3) 平均曲率がいたるところ 0 であるような $\mathbb{R}^3$ の閉曲面は存在しないことを示せ．

$\boxed{5}$ μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とし，$a > 2$ を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}$ 上の可測集合列とし $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ をみたすとする．

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

に対して $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ を示せ．

(2) 正の整数 n に対して B_n を

$$B_n := \left\{ x \in (0,1) \;\middle|\; n \text{と互いに素であるような正の整数} k \text{が存在して} \left| x - \frac{k}{n} \right| < \frac{1}{n^a} \text{ をみたす} \right\}$$

と定める．$\mu(B_3)$, $\mu(B_4)$ を求めよ．

(3) $\mu(\limsup_{n\to\infty} B_n) = 0$ を示せ．

$\boxed{6}$ $C_c(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上で定義されたコンパクトな台をもつ実数値連続関数全体の集合とし，$L^2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された 2 乗可積分な実数値関数全体からなるヒルベルト空間とする．非負関数 $f \in C_c(\mathbb{R})$ は恒等的に 0 でないとし，任意の $u \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(Fu)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)u(y)\,dy, \qquad (Gu)(x) := e^{-|x|/2}(Fu)(x)$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 恒等的に 0 でない非負関数 $\rho \in C_c(\mathbb{R})$ をとり，関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $u_n(x) := \rho(x+n)$ で定義する．このとき，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2(\mathbb{R})$ で 0 に弱収束するが，$\{Fu_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2(\mathbb{R})$ で 0 に強収束しないことを示せ．

(2) 作用素 G は $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への有界作用素であることを示せ．

(3) $L^2(\mathbb{R})$ 内の関数列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $L^2(\mathbb{R})$ で 0 に弱収束するならば，$\{Gv_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2(\mathbb{R})$ で 0 に強収束することを示せ．

$\boxed{7}$ 以下の問いに答えよ．

(1) n を正の整数，c を複素数とするとき，複素積分

$$I_n := \int_C \left(z + \frac{c}{z}\right)^n \frac{1}{z}\, dz$$

の値を求めよ．ここで，$C : z = e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とする．

(2) m を正の整数，a を実数とするとき，

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \frac{(m!)^2 (1+a)^{2k} (1-a)^{2(m-k)}}{(2k)!(2(m-k))!} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2k} (\sin\theta)^{2(m-k)}\, d\theta = 2\pi a^m$$

を示せ．

$\boxed{8}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 任意の可算全順序集合 $(A, \leq)$ は，有理数全体の集合に通常の順序関係 $\leq$ を入れた順序集合 $(\mathbb{Q}, \leq)$ のある部分集合と同型であることを示せ．

(2) 可算無限集合 X のべき集合 $\mathcal{P}(X) := \{\, Y \mid Y \subseteq X \,\}$ に，集合の包含関係 $\subseteq$ を付した順序集合 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ を考える．実数全体の順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$ がこの順序集合 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ のある部分集合と順序集合として同型であることを示せ．