数学カフェ数理生物回
~Crystal Basis Model~

自己紹介

普段は、数論好き

- p進整数環$\mathbb{Z}_p$や$\mathbb{Z}_p[[T]]$上の岩澤代数
- ヴェイユ予想

数学の領域を広げる分野にも興味あり

- 機械学習
- 数理生物

伝えたいこと

数理生物、たのしー

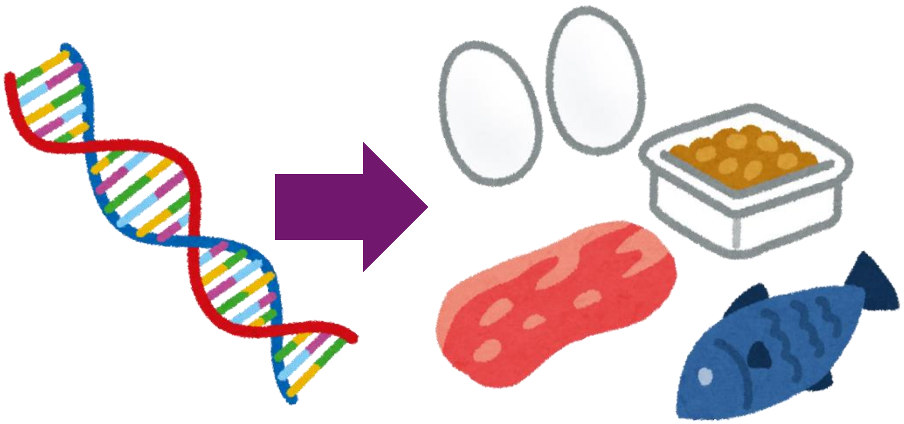
数学における『表現』の重要さ

数理生物学とは

生物学の基本

「現象」を観察

「仮説」を提示



生物学＝生き残った「仮説」の集まり

数理生物とは？

「仮説」として「数理モデル」を採用

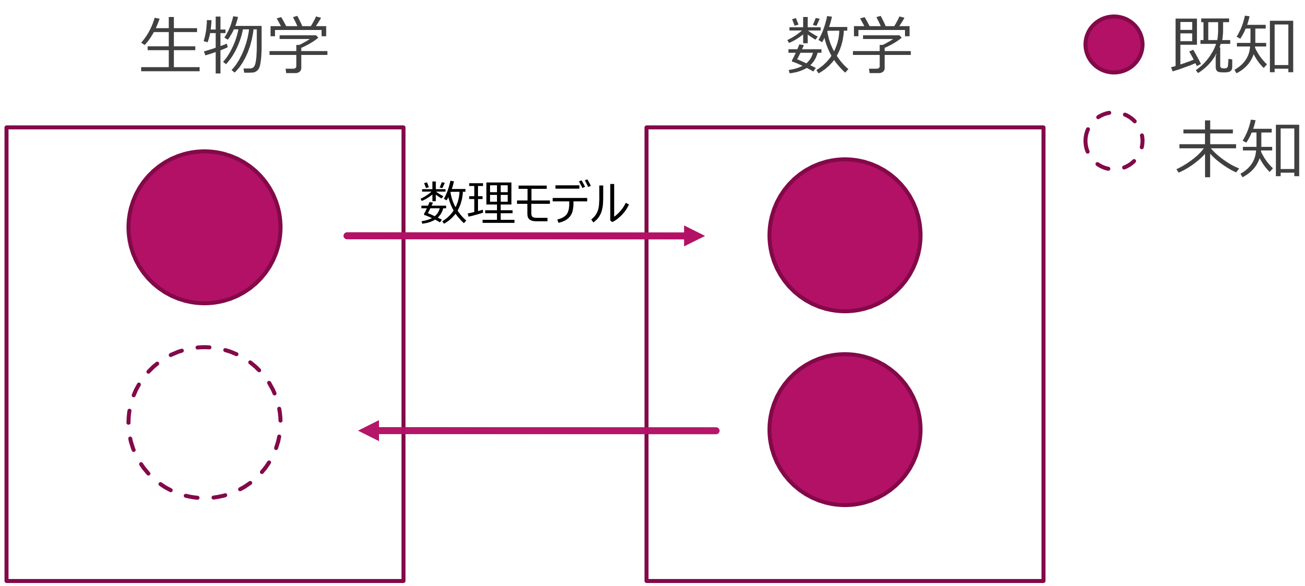
例)捕食者ー被食者の数理モデル

$$dt/dx = x(a - by)$$

$$dt/dy = y(-c + dx)$$

数理生物の魅力

数学により、未知の現象を予測可能!



数理生物がなぜブームに？

※個人の予想です

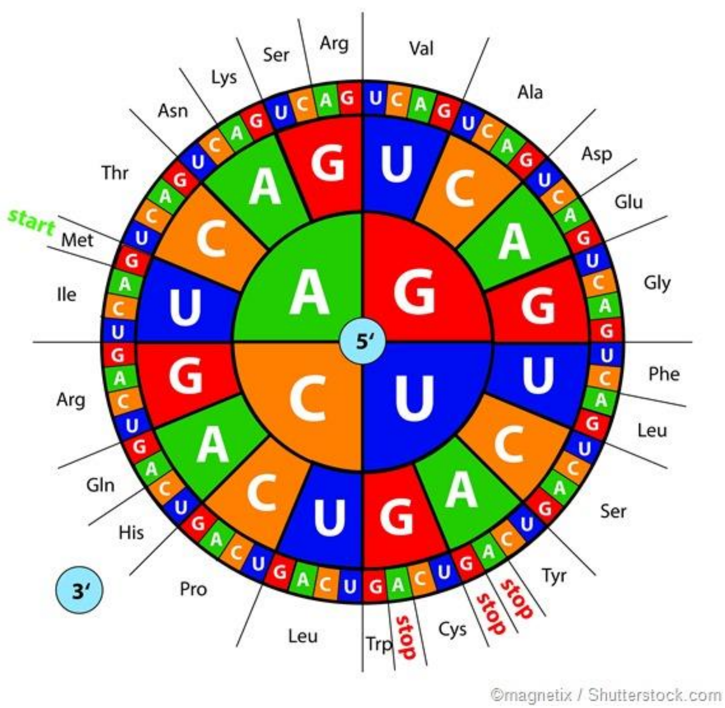
- コンピュータの発展
- 数学の進歩
- 数学者との交流の増加

Institute for Biology and Mathematics of Dynamic Cellular Processes設立(2013年)

数理モデルの話

今回の現象

コドンからアミノ酸の翻訳



わからない

1. コドン⇒アミノ酸の
   の対応の規則性
2. 翻訳結果が違う生物がいる

数理モデルで試そう

数理モデル(Crystal Basis Model)

量子群Uq(SU(2)×SU(2)) の

64次元表現を既約表現Viに分解する。

Ｖ iのCrystal Baseとコドンに対応関係を設定し、

ViにReading Operator Rを作用させると

Crystal BaseはRの固有ベクトルになる。この時、

固有値が等しい⇔作るアミノ酸が同じ

何がすごいか

『群の表現』による数理モデルが作れた。

『表現』のいいところ

- ほとんど線形代数なので、非常に調べやすい
- 数学において、非常に広範囲で使われる

(純粋)数学の様々な道具が使える

群と表現

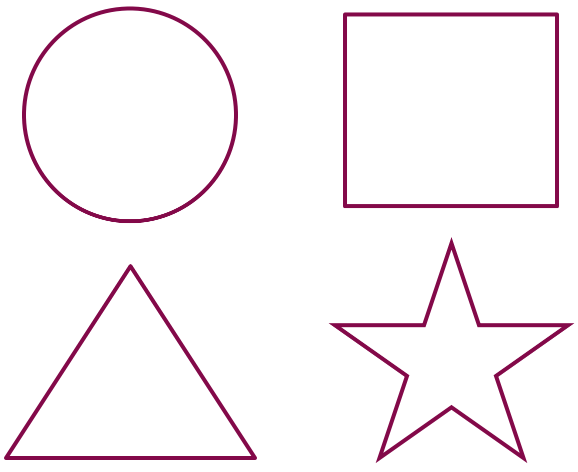
群のモチベーション

「図形」をわかりたい！

特に「定量的」に調べたい!

例) 辺の数、面積

さらに「統一的」に調べたい！



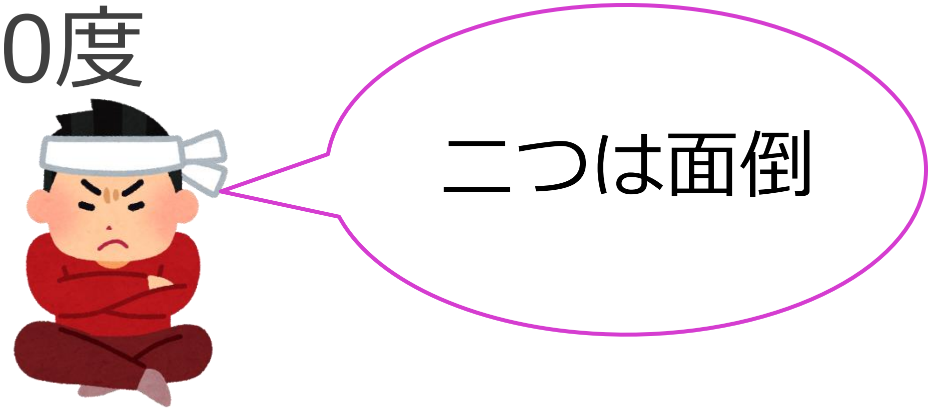
群によって統一的に調べる

正方形だと

問題:四角形の中で正方形を特徴づける条件は？

答え:定義より、以下を満たせばよい

- 辺の長さがすべて等しい
- 各辺のなす角が90度



別解

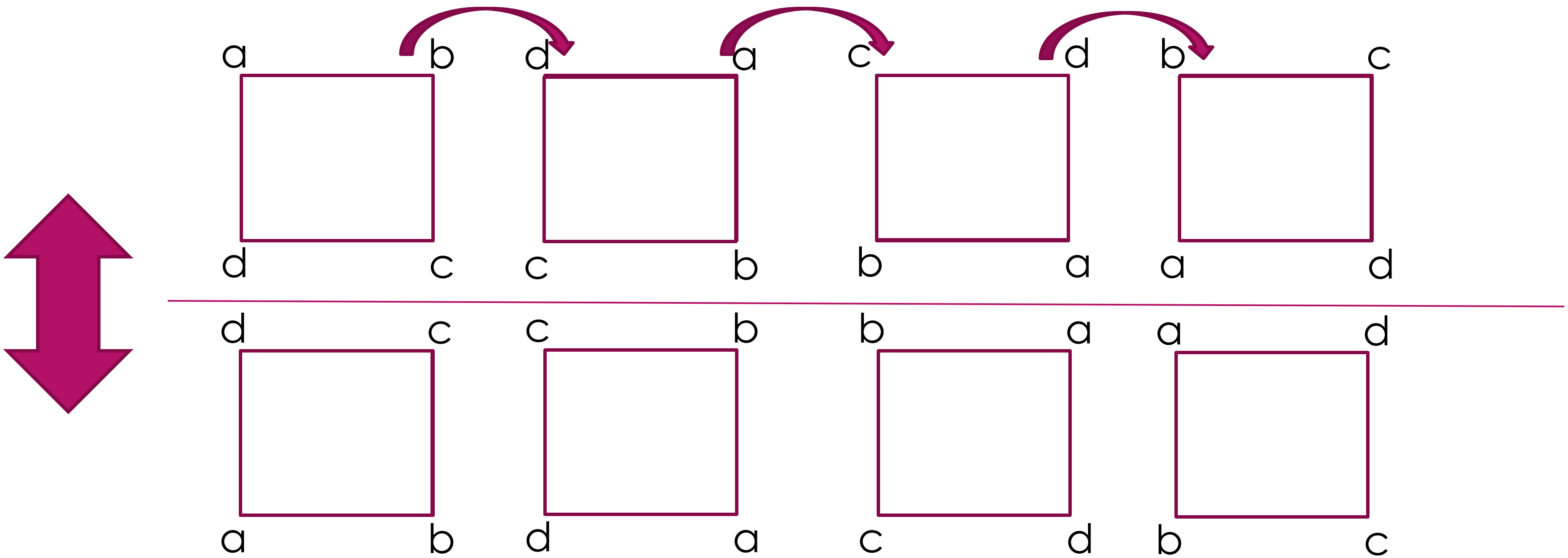
正方形の特徴：対称性がとても高い

対称性の高さを別の方法で言えないか

- 鏡に映しても同じ形
- 90°回転しても同じ形

同じ形のままの変換で図形がわかる？

具体的な変換



正方形は変換で決定できる

変換から群へ

幾何学とは変換によって
変わらないものの研究だ

「変換」が主役になった一般論を作りたい!

「群論」

群の定義

- 積が定義されている
- 単位元が存在する
- 逆元が存在する
- 結合法則が成り立つ

例示は理解の試金石

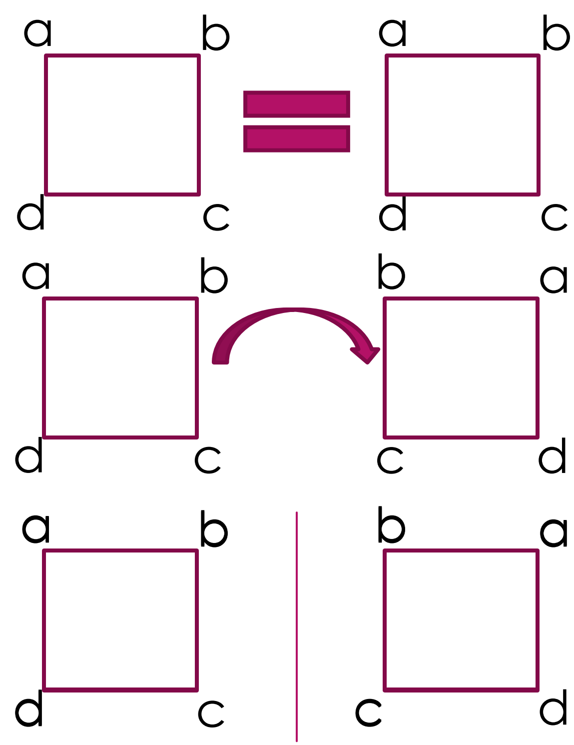
正方形の変換の場合

記号の定義

e：そのまま

f：90°回転

g：鏡に映す



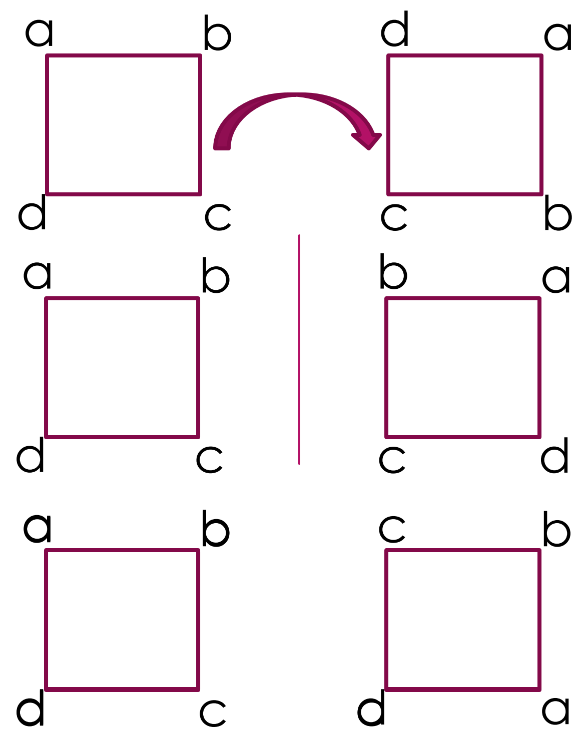
「積」の定義

「積」を変換の「合成」で定義する

f: 90°回転

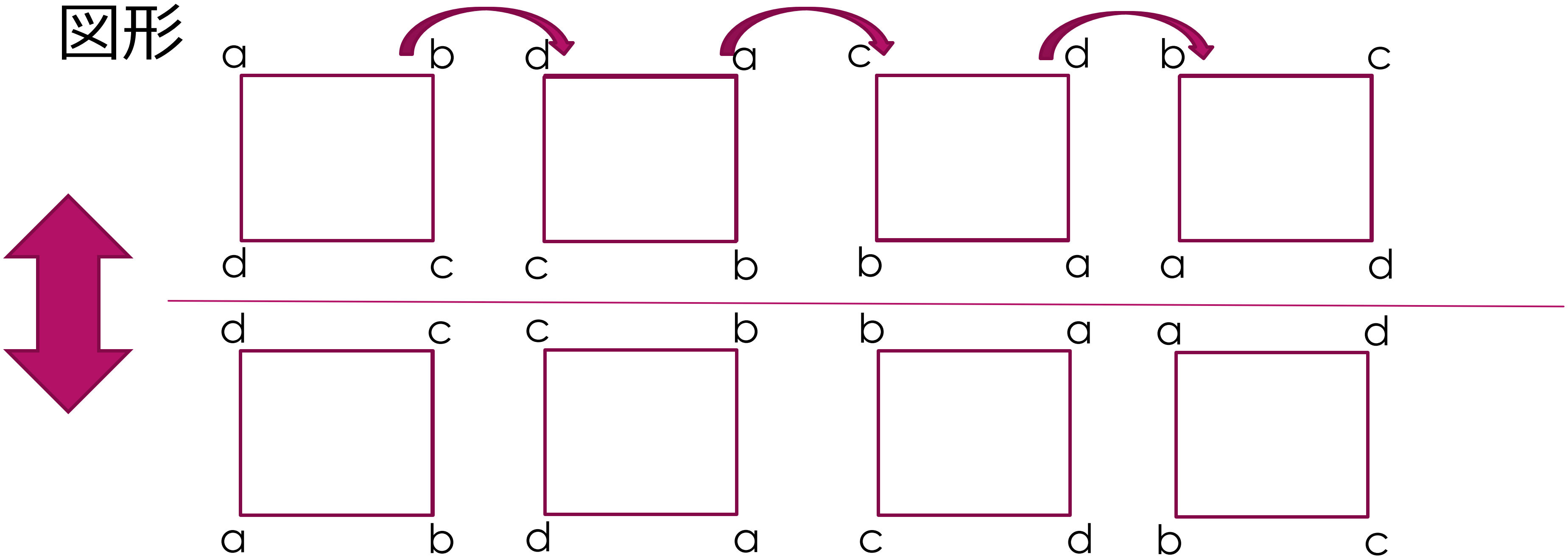
g： 鏡に映す

$h = f \cdot g$



変換を記号にすると

図形



記号

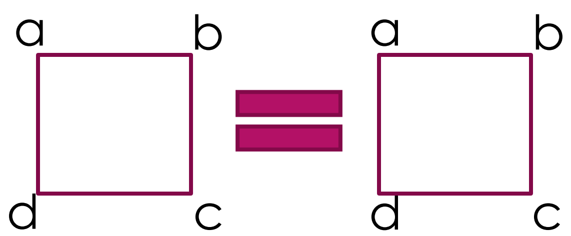
$$G := \{e, f, f^2, f^3, g, gf, gf^2, gf^3\}$$

単位元の存在

単位元　＝　どんなgをかけてもgになる元

正方形の変換では

e：そのまま



残りは、exercise!

群が主役なので

群の性質や群同士の関係が知りたい

つまり

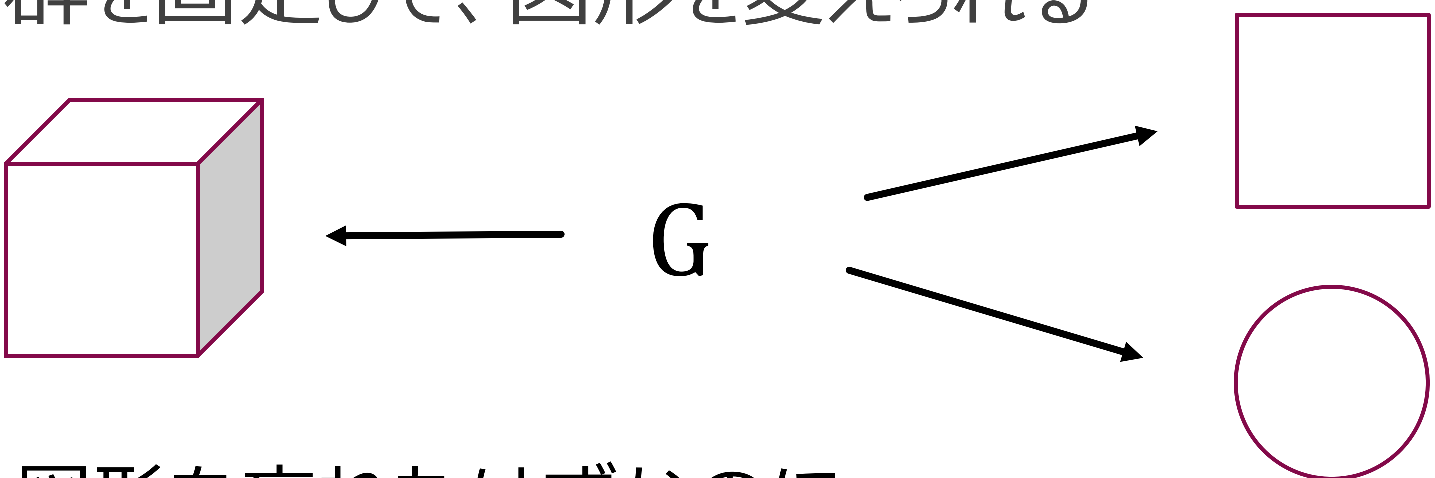
普段は図形を忘れ、

必要な時だけ図形の変換とみる

群が図形に作用すると考える

作用のメリット

群を固定して、図形を変えられる



図形を忘れたはずなのに

図形に共通する本質的な性質がみれる

表現とは？

図形としてベクトル空間を考えること

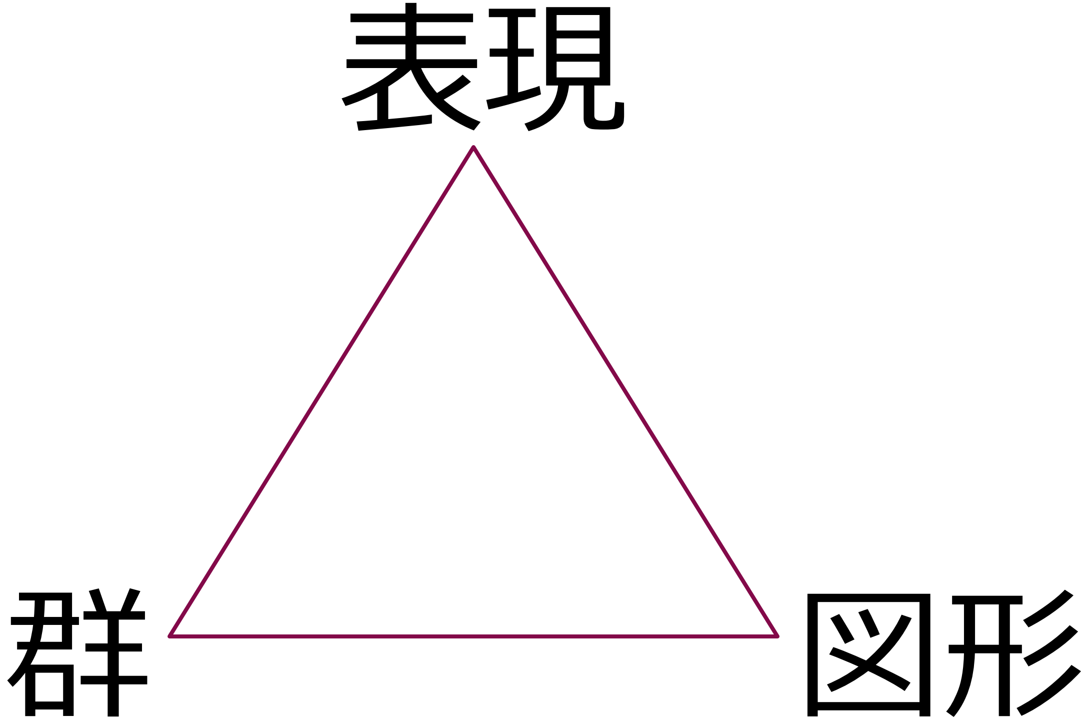
表現のメリット

- 変換が線形写像(≒行列)
- 正方形の変換等に対応する表現がある
- 表現から群が完全にわかることもある

表現だけを考えればいい

群・図形・表現の関係

三位一体の関係



全ての表現を知りたい

全ては多すぎる

単純なものだけでも、知りたい

最も単純な表現な何か？

既約表現=これ以上分解できない表現

Definition

Gの表現Vが既約表現とは

非自明なG不変部分空間が存在しないこと

単純なものからどこまでわかる？

特別な場合は、完全にわかる

量子群、有限群の場合は以下が成り立つ

Theorem(完全可約性)

任意の表現Vは既約表現の直和でかける

既約表現だけわかればいい

既約表現は簡単か？

既約表現の決定自体が難しい場合もある

特別な場合でのp進既約表現
を決定(分類)できれば
修士論文レベルだったり

量子群の場合

既約表現は完全に決定されている

さらに、非常にきれいな形。
量子群の定義のややこしさ
とは対照的

図形・群・表現のまとめ

- 図形や群を知るには表現が一番簡単
- 量子群の時は表現が完全にわかっている

これでも十分ありがたいが…

表現の真価

表現を通して、数学同士がつながる

例1) フーリエ変換

フーリエ変換は群の表現と理解できる

例2) ラングランズ対応

保型表現とガロア表現の対応

要は

表現とは、様々なものをつなげ、
調べることを可能にするもの!

問題提起1

Crystal Basis Modelは翻訳と表現の対応

生物と表現で別の対応が作れたら

すごく面白いことができるかもしれない。

例)生物の分類と群の既約表現を対応できないか

問題提起2

Crystal Basis Modelで現れる

翻訳と表現が対応する理由はわからない

裏にはそれらを説明する何かが？？？

参考文献

本

- リー群と表現論
- 量子群とヤン・バクスター方程式

PDF

- 箙と量子群
- Crystal Basis Model: Codon-Anticodon Interaction and Genetic Code Evolution

次回は

今回話せなかったものを･･･話したい

- 量子群について
- Hopf代数について
- リー群・リー環の表現について
- p進リー群について
- グレブナー基底について