## 目次

1 Introduction
2 Proof of proposition 1
3 proof of Propostion 2
2

### 1 Introduction

十分単射的対象を持つアーベル圏 A からアーベル圏 A' への左完全な加法 的関手 F に対し,導来関手  $R^iF$  がただひとつ存在する.『コホモロジーのこころ』では,A の対象 A に対し, $R^iFA$  が定義されたが,射に関する部分が 省略された.そのため,射に関する部分を証明し,導来関手の存在を確認する.つまり,A の射  $f:A\to B$  に対し, $R^iF(f):R^iF(A)\to F^iF(B)$  が定まり,以下を満たすことである.

$$R^i F(id) = id (1)$$

$$R^{i}F(f)\circ R^{i}F(g) = R^{i}F(f\circ g) \tag{2}$$

これは  $f: A \to B$  に対し以下を示せばよい.

**Propostion 1.1.** A の射  $f: A \to B$  と A, B の単射的分解  $I^i, J^i$  に対し、以下を可換にするような射  $f^i: I^i \to J^i$  が存在する.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha^{-1}} I^0 \xrightarrow{\alpha^0} I^1 \xrightarrow{}$$

$$\downarrow^f \ \ \ \ \ \ \ \downarrow^{f^0} \ \ \ \ \ \downarrow^{f^1}$$

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta^{-1}} J^0 \xrightarrow{\beta^0} J^1 \xrightarrow{}$$

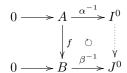
**Propostion 1.2.**  $\mathcal{A}$  の射  $f: A \to B$  と A, B の単射的分解  $I^i, J^i$  に対し、上の命題を満たす、 $f^i, g^i$  はホモトピックとなる.

この 2 つの命題を示せば関手となることがいえる。軽く確認しておくと、ホモトピックであれば、 $\mathcal{F}(f^i) = \mathcal{F}(g^i)$  となるので、f のみで、 $f^i$  の取り方によらなない。また、そのような  $f^i$  が必ず存在するので  $R^if$  が well-defined である。また、 $R^i\mathcal{F}(id) = id$  と、 $R^i\mathcal{F}(f) \circ R^i\mathcal{F}(g) = R^i\mathcal{F}(f \circ g)$  も射の取り方によらないことと  $\mathcal{F}$  の関手性から示せる。

# 2 Proof of proposition 1

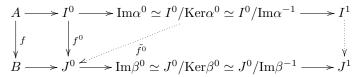
1 つめの命題を示す.  $f^0$  と  $f^1$  の存在を示す.  $f^2$  以降は  $f^1$  の場合と同じ議論より言える.

#### • 0の時



上の図の斜線の射の存在を示す.これは  $\alpha^{-1}:A\to I^0$  が単射で, $\beta^{-1}\circ f:A\to J^0$  となるので, $J^0$  が単射的対象であることから,斜線の射の存在が従う.

#### 1の時



 $\tilde{f}^0$  の存在を示す.  $I^0/\mathrm{Im}\alpha^{-1}\to J^0$  が定義できれることを示す. それは  $\beta^0\circ f^0\circ\alpha^{-1}(A)$  が図式の可換性から, $\beta^0\circ\beta^{-1}\circ f(A)$  と等しいことと, $\beta^0\circ\beta^{-1}=0$  より言える. これから  $\mathrm{Im}\alpha^0\to J^0\to J^1$  という射が定義でき,  $\mathrm{Im}\alpha^0\to I^1$  が単射であり, $J^1$  が単射的対象であることから, $I^1\to J^1$  で上の図式を可換にするものが存在する.

## 3 proof of Propostion 2

すいません,時間がなかったので,また今度…. 証明自体は『コホモロジーのこころ』67P と同様にすればよい. (ここでいう  $h^i$  として  $f^i-g^i$  を取れば良い.)