Modular Form とその周辺

take

2016/August

目 次

1 Introduction **1**

2 Basic Knowlede of this survey **2**

3 Definition of Modular Form and Basic Propety **2**

3.1 $SL(2.\mathbb{Z})$ and congruenc gruop 2

3.2 Definition of modular form 2

3.2.1 Definition of unrestricted modular from 2

3.2.2 fourier expansion of modular form 4

3.2.3 Definition of Modular form 4

3.2.4 L 関数 5

4 algebra of modular form **5**

5 Definition of Elliptic Curve **5**

5.1 Algebraci Variety 5

5.2 Weirstrass Polynomial 6

6 Eichler-Shimura theory **6**

6.0.1 Abelian Variety and Jacobian Variety 6

1 Introduction

保型形式について概説する。今回の説明は以下を理解することを目的に行う。

- 保型形式の定義
- 保型形式を考える背景
- 数学における興味深い対象

- 数学における自然な疑問
- 最低限の理論の厳密さ

本サーベイにおいては、保型形式は解析的に定義されるため、まず、解析的な内容の準備を用意した。これらの準備を適宜みならがら、保型形式の定義から基本領域、フーリエ級数展開と L 関数等、代数を使わずとも定義できる内容を論じる。その後、保型形式全体のなす空間がベクトル空間となることを確認し、内積、固有値、次元などについて議論する。以降は概略のみであるが、保型形式の広がりの深さをみせるため、保型形式と楕円関数、楕円曲線との関係、また保型形式の L 関数と代数体の L 関数などの関係にふれる。最後にフェルマーの最終定理とつながる、Eichler-Shimura 理論について触れる。なお、今回は、Langlands Problem や岩澤理論は高度すぎると判断し、特に触れなかった。詳しいことは参考文献を参考にせよ。

後半は詳しいことを私も理解していないため、誤りがある可能性が高いことを最初に触れておく。もし、誤りが発見された場合は通知願う。

Remark. 一般的に解析的、代数的、幾何的に定まった意味はない。特に理論が進歩していくと、何が代数的で、何が幾何的で、何が解析的なのかがよくわからなくなることがある。しかし、ここでは、そのような特殊な状況は考慮せず、以下の意味で使い分ける。

代数的定義 群、環、体、ベクトル空間などの代数的構造によって定まる定義

幾何的定義 多様体、ホモロジー等、空間や空間の不変量により定まる定義

解析的定義 関数や微積分などにより定まる定義

2 Basic Knowlede of this survey

Theorem 2.1 (フーリエ展開の収束)**.** 連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が $f(x+1) = f(x)$ を満たすとする。すると、$f = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi ixn}$ となる。

ただし、$a_n e^{2\pi ixn} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{-2\pi ixn}dx$ また、この等式が成り立つとき、f はフーリエ展開可能という。

3 Definition of Modular Form and Basic Propety

3.1 $SL(2.\mathbb{Z})$ and congruenc gruop

3.2 Definition of modular form

3.2.1 Definition of unrestricted modular from

保型形式は名前の通り、なんらかの形を保つものである。形を保つというのは、数学ではよく、群の作用で不変という形で定義される。群の作用が何かをここでは定義しないが、”何か”を”かけた”場合に元とほとんど同じということを指すと思ってもらいたい。
では実際に保型形式をみていこう。まず、”かけられる対象”が何で、”かける対象”が何かを定義する。
かける対象:

$$\Gamma(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) | a \equiv 1, b \equiv 0, c \equiv 0, d \equiv 1 \mathrm{mod} N\}$$

N は 1 以上の整数を指す。N が 1 の場合、$\Gamma(N) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ となる。

かけられる対象: $\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への正則関数 f 全体

Remark. かける対象、かけられる対象は実際はそれらの元と書くべきかもしれない。ただ、数学で対象を考えるというとき、少なくとも自分は、対象を性質や条件で決めることが多い。そのため一つの特定の元ではなく、全体をさした方が自然に感じる。

かける対象とかけられる対象が決まったので、”かける”を以下で定義する。

$$\begin{aligned} \cdot : \Gamma(N) \times \mathrm{Hom}_{Rat}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} &\to \mathrm{Hom}_{Rat}\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} \\ (\gamma, f) &\mapsto \gamma \cdot f(z) = f(\frac{az+b}{cz+d}) \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

かけることまで定義できたので、保型形式を定義しよう。以降では保型形式はすべて英語の modular form,cusp form などの用語を使う。modular form,automorphic form がともに保型形式と訳されていること、cusp form を日本語で書いているものをほとんどとみたことがないためである。

Definition 3.1. 正則関数 $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ が *unrestricted* な *weight* k の *modular form* とは、以下が成り立つことをいう。
$\forall \gamma \in \Gamma(N), \gamma \cdot f(z) = (cz+d)^k f(z)$

Remark. 定義を見たときは、まずこの定義が意味することを考えたい。真剣に数学書を読むなら、定義に対する疑問 *3* 個、定義が成り立つ例 *1* 個、定義が成り立たない例 *1* 個ぐらいは考えたい。

この定義をみて、私が気になることをいくつかあげる。

- a, b によらず c, d によるのは不自然に感じる。なぜ、そのようなものを考えるのか。⇒楕円関数など自然な例が多数あるため
- $\mathcal{H}$ を割った空間の関数として考えられないのか。⇒簡単。
- $\gamma \cdot f(z) = f(z)$ となる f はあるのか。⇒ある。

3.2.2 fourier expansion of modular form

上で定義した **unrestricted modular form** がフーリエ展開可能であることを示そう。以下の方針で示す。

1. **x** 方向に周期的であること。
2. フーリエ係数が y 方向に不変なこと

周期的であること. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ をとる。この時、$\gamma \cdot z = z+1, cz+d = 1$ となるため、unrestricted modular form$f$ に対し、$\gamma \cdot f(z) = f(z+1) = f(z)$ となる。よって、実軸に沿って周期関数となることがわかる。 □

Proof. フーリエ係数が y 方向に不変なこと

実軸に沿って周期的であり、上の関数は正則であるため、実軸にそってフーリエ展開したものが自身と一致するつまり、2.1 を使うことで、$f(x+iy) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y) e^{2\pi ixn}$ となる。

ただし、$a_n(y)e^{2\pi ixn} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+iy)e^{-2\pi i(x+iy)n} dx$ となる。式をいくつか変形することで、

$$f(x+iy) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y) e^{2\pi ny} e^{2\pi i(x+iy)n}$$

とかける。$a_n(y)e^{2\pi ny} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+iy)e^{-2\pi in(x+iy)} dx$ が y に依存しないことを示す。

y 方向に α 方向ずらした長方形に対し、$f(z)e^{2\pi inz}$ は正則になるので $\oint f(x+iy)e^{-2\pi in(x+iy)} dz = 0$ となる。(画力でなく、図形がなく、申し訳ない。)

$f(x+iy) = f(x+1+iy)$ となるので、$\int_y^{y+\alpha} f(-1/2+iy)dy = \int_y^{y+\alpha} f(1/2+iy)dy$ となる。よって、$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+iy)e^{-2\pi in(x+iy)} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+i(y+\alpha))e^{-2\pi in(x+i(y+\alpha))} dx$ となる。任意の α に対して、成り立つので、題意は示された。 □

3.2.3 Definition of Modular form

$\mathcal{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^{2\pi iz}$ を考えると、$z \to \infty$ の時、$e^{2\pi iz} \to 0$ となる。これから、上のフーリエ展開は、$z = \infty$ でのローラン展開と考えられる。すると、自然に興味が出てくるのが、$z = \infty$ が除去可能特異点かどうかである。除去可能特異点である時、つまり、$z = \infty$ で微分可能であるときだけを **modular form** とよび、調べる。正確に **modular form** を定義する。

Definition 3.2. 正則関数 $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は以下を満たすとき、*weight* k の *modular form* という。

- $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N), \gamma \cdot f(z) = (cz+d)^k f(z)$
- $f(z) = {}_{n=0}^{\infty} c_n q^n$ ただし、$q = e^{2\pi iz}$

また、$c_0 = 0$ の時、f は *weight* k の *cusp form* という。

modular form が定義できたので、実際に何か例を考えよう。

Example 3.3 (Eisenstein series)**.**

$$f(z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+mz)}^{2k}$$

これは *weight* $2k$ の保型形式になっている。*(*$k \geq 2$*)*

保系形式になることを以下の手順で確認する

1. 任意の γ について $\gamma \dot{f}(z) = (cz+d)^{2k} f(z)$ となること
2. q 展開の表示

証明は略。

3.2.4 L 関数

保系形式のの L 関数を以下で定義する。$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^n$ となる時、$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$

Remark. この保型形式は関数等式を満たすため、解析接続できる。

4 algebra of modular form

5 Definition of Elliptic Curve

楕円曲線を定義し、性質について述べる。証明は基本的に記述しない。

5.1 Algebraci Variety

楕円曲線は代数多様体の一種である。そのため、楕円曲線の定義に触れる前に最低限の代数多様体の定義について述べる。K を体とし、$\bar{K}$ を分離閉包とする。$\mathbb{A}^n := \bar{K}^n$

I を $\bar{K}[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアルとする。多項式環はネーターなので、I は有限生成となる。つまり I は $f_1, \ldots, f_n$ を用いて、$I = \{\sum g_i f_i | g_i \in \bar{K}[X_1, \ldots, X_n]\}$ とかける。このとき、$V(I) \subset \bar{K}$ を以下で定義する。

$$V(I) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{K}^n | f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

$V \subset \mathbb{A}^n$ に対し、$I(V) = \{f \in \bar{K}[X_1, \ldots, X_n] | f(P) = 0 \forall P \in V\}$

5.2 Weirstrass Polynomial

Projevetive Variety として楕円曲線を定義する。まず、その定義方程式になる、ワイエルシュトラス多項式について説明する。**F(X,Y,Z)= f(x,y)=**

Definition 5.1. *E/K が K 上の楕円曲線であるとは、K 係数ワイエルシュトラス多項式の解全体のなす、一次元非特異代数曲線であること。すなわち、ある $\Delta \neq 0$ となる、ワイエルシュトラス多項式 F に対し、$E = \{(x, y, z) \in P^3(K) | F(x, y, z) = 0\}$ となること。*

isogeny を定義する。
保型形式をとれば、楕円曲線が定義できる。

6 Eichler-Shimura theory

Eichler-Shimura theory について解説する。

6.0.1 Abelian Variety and Jacobian Variety

A が abelian variety とは、nonsigular projective variety/$\mathbb{C}$ with a distinguished point O and with an abelian group C such that for any hom $F'' : A \to A''$, ker$F'' \supset C$

Theorem 6.1. *[k],[11.74 Eichler-Shimura]*
$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\tau}$ を $S_2(\Gamma_0(N))$ の new form とする。$c_1 = 1$。、$c_n \in \mathbb{Z}$ となるように正規化したものとする。この時、以下を満たす pair (E, ν) が存在する

1. *E は $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線であり、(E, ν) は $\mathbb{Q}$ 上のアーベル多様体 J を部分多様体 A で割ったものとなる。*

2. $t(n) \in \mathrm{End}(J)$ の作用は A に対して、*stable* であるため、E への作用が定義され、それは c_n 倍写像に一致する。

3. $\mu(f)$ は $\nu^*(\omega)$ の指数。ただし、ω は E の不変微分

4. $\Lambda_f = \{\Phi_f(r) = \int_{\tau_0}^{\gamma(\tau_0)}$ が成り立つならば、Λ_f は $\mathbb{C}$ の *lattice* であり、E は $\mathbb{C}$ 上 $\mathbb{C}/\Lambda_f$ と同型。

5. E の L 関数は有限個の素点を除いて、オイラー積が f と一致する。

Proof.

Lemma 6.2. $t(n) \in \mathrm{End}(J)$ は $\mathbb{Q}$ 上定義されている。

上記を一度認めて、議論する。T を.$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(J)$ の commutative $\mathbb{Q}$ subalgebra で $t(n)$ によって生成されたとする。$t(n)$ を $g \times g$ matrix pf subalgebra と同一視できできるので、T は $M(g, \mathbb{Q})$ の subalgebra となり、有限次元であることがわかる。Wedburm の構造定理より、of $M(g, \mathbb{Q})$ なので、 □

参考文献

[1] **Elliptic Curves. · Anthony W. Knapp**

[2] **Modular Functions and Modular Forms · J. S. Milne**

[3] **Arithmetic of Elliptic Curvers**

[4]

[5] **http://math.umn.edu/ brubaker/docs/mit/785notes.pdf**