p進解析入門

ari

2016/9/22

目 次

スキームの勉強として，Liu を日本語訳しながら，証明を書く．

1 Some topics in commutative algebra

2 General Proeperties of Schemes

この章ではスキームの基礎理論を紹介する．最初の 3 節を用い，例を交えながら環と環の射を定義する．その後,2.4 と 2.5 ではスキームの位相的な性質について議論する．

2.1 Spectram of a ring

位相多様体や微分多様体は $\mathbb{R}^n$ の開集合による local な chart を貼り合わせることで，構成されている．スキームも同様で，スキームの場合は貼り合わせるものはアフィンスキームと言われる．この章ではアフィンスキームの下部構造である位相構造について定義する．また代数幾何の直感を養うために，algebraic set についても調べる．

2.1.1 Zariski topology

******************** ** subsection 全体を飛ばす．********************

2.2 Ringed topological spaces

スキームを定義する一つの方法として，局所的にアフィンスキームと同型な環付き空間として定義する方法がある．環付き空間の議論の前に層の理論を軽く解説する．層は代数幾何で絶対必要な道具であり，局所的なデータを集めて，大域的なデータを作ることができる．

2.2.1 Sheaves

位相空間上の層について定義と局所的な性質について記載する．層の理論の詳細を知りたい人は [40] などを参照せよ．

Definition 2.1. X を位相空間とする．*abelian group* の *presheaf* $\mathcal{F}$ を以下のデータで構成される．

1. X の任意の開集合 U に対し，アーベル群 $\mathcal{F}(U)$
2. $V \subset U$ に対し，$\rho_{UV} : F(U) \to F(V)$ を定める．

さらに，以下の *3* 条件を満たす．

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$
2. $\rho_{UU} = id$
3. $W \subset V \subset U$ に対し，$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ となる．

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U のセクションという．$s|_V$ で $\rho_{UV}(s)$ を表す．

Definition 2.2. $\mathcal{F}$ が層であるとは，上記に加え，以下を満たすものである．

1. U は X の開集合で，$s \in \mathcal{F}(U), \{U_i\}$ を U の被覆とする．任意の i に対し，$s|_{U_i} = 0$ となる場合，$s = 0$
2. 上と表記は同じで，$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ を *open covering* とする．$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ が成り立っていたとすると，$s \in \mathcal{F}(U)$ の元で $s|_{U_i} = s_i$ となるものが取れる．

環の層や代数の層，また，部分層の概念も同様に定義できる．

Example 2.3. X を位相空間とする．任意の X の開部分集合 U に対し，$\mathcal{C}(U) = C^0(U, \mathbb{R})$ とする．ρ_{UV} として実際の関数の制限を取る．この時 $\mathcal{C}$ が層となる．

Example 2.4. A を *non-trivial* なアーベル群とする．X を位相空間とし，U を開集合とする．$\mathcal{A}_X(U) = A$,U, V が空集合でなければ,$\rho_{UV} = id$ とする．$\mathcal{A}_X$ は *presheaf* であるが，一般には *sheaf* ではない．例えば *disjoint* は開集合 SU, V が取れたとすると $U \cap V = \emptyset$ となる．異なる $s_1, s_2 \in A$ をとると，$s_1|_{U \cap V} = s_2|_{U \cap V} = 0$ となるので，矛盾する．層にするには連結成分毎に A で連結成分を複数個の場合はその直和になる必要がある．*訳者補足．

Remark. **後で

3 Morphisms and base change

===============TBD====================

4 Some local properties

4.1 Normal schemes

================TBD=====================

4.2 Regulara schemers

代数幾何において，局所的な構造だけを考えると，最も単純なものが regular scheme X である．regular schmer はある意味において，affine なものと近い．それは，局所環 $O_{X,x}$ の formal completin の構造 (Proposition 2.27) や $O_{X,x}$ の代数的な構造 (Theorem 2.16) を通して，理解される．最初の subsection では，スキームの接空間を定義し，そこから，regular を定義し，Jacobian critetrion (Theorem 2.19) を示す．

4.2.1 Tanget space to a scheme

Definition 4.1. X をスキームとし，$x \in X$ とする．$\mathfrak{m}_x$ を $O_{X,x}$ の極大イデアルとし $k(x)$ をその剰余体とする．この時，$\mathfrak{m}_x/{\mathfrak{m}_x}^2 = \mathfrak{m}_x$ は自然に $k(x)$ ベクトル空間となる．その双対 $\mathfrak{m}_x/{\mathfrak{m}_x}^{2\vee} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_x/{\mathfrak{m}_x}^2, k(x))$ を **Zariski tangent space** という