目 次

1 Introduction

十分単射的対象を持つアーベル圏 $\mathcal{A}$ からアーベル圏 $\mathcal{A}'$ への左完全な加法的関手 $\mathcal{F}$ に対し，導来関手 $R^i\mathcal{F}$ がただひとつ存在する．『コホモロジーのこころ』では，$\mathcal{A}$ の対象 A に対し，$R^i\mathcal{F}A$ が定義されたが，射に関する部分が省略された．そのため，射に関する部分を証明し，導来関手の存在を確認する．つまり，$\mathcal{A}$ の射 $f : A \to B$ に対し，$R^iF(f) : R^iF(A) \to F^iF(B)$ が定まり，以下を満たすことである．

$$
\begin{aligned}
R^iF(id) &= id &(1)\\
R^iF(f) \circ R^iF(g) &= R^iF(f \circ g) &(2)
\end{aligned}
$$

これは $f : A \to B$ に対し以下を示せばよい．

Propostion 1.1. $\mathcal{A}$ の射 $f : A \to B$ と A, B の単射的分解 I^i, J^i に対し，以下を可換にするような射 $f^i : I^i \to J^i$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & I^0 \arrow[r, "\alpha^0"] \arrow[d, "f^0"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & I^1 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "f^1"] & {} \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta^{-1}"] & J^0 \arrow[r, "\beta^0"] & J^1 \arrow[r, dotted] & {}
\end{tikzcd}
$$

Propostion 1.2. $\mathcal{A}$ の射 $f : A \to B$ と A, B の単射的分解 I^i, J^i に対し，上の命題を満たす，f^i, g^i はホモトピックとなる．

この 2 つの命題を示せば関手となることがいえる．軽く確認しておくと，ホモトピックであれば，$\mathcal{F}(f^i) = \mathcal{F}(g^i)$ となるので，f のみで，f^i の取り方によらなない．また，そのような f^i が必ず存在するので R^if が well-defined である．また，$R^i\mathcal{F}(id) = id$ と，$R^i\mathcal{F}(f) \circ R^i\mathcal{F}(g) = R^iF(f \circ g)$ も射の取り方によらないことと $\mathcal{F}$ の関手性から示せる．

2 Proof of proposition 1

1 つめの命題を示す．f^0 と f^1 の存在を示す．f^2 以降は f^1 の場合と同じ議論より言える．

- 0 の時

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & I^0 \arrow[d, dotted] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta^{-1}"] & J^0
\end{tikzcd}
$$

上の図の斜線の射の存在を示す．これは $\alpha^{-1}: A \to I^0$ が単射で，$\beta^{-1} \circ f: A \to J^0$ となるので，J^0 が単射的対象であることから，斜線の射の存在が従う．

- 1 の時

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & \mathrm{Im}\alpha^0 \simeq I^0/\mathrm{Ker}\alpha^0 \simeq I^0/\mathrm{Im}\alpha^{-1} \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\tilde{f^0}"] & I^1 \arrow[d, dotted] \\
B \arrow[r] & J^0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\beta^0 \simeq J^0/\mathrm{Ker}\beta^0 \simeq J^0/\mathrm{Im}\beta^{-1} \arrow[r] & J^1
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{f^0}$ の存在を示す．$I^0/\mathrm{Im}\alpha^{-1} \to J^0$ が定義できれることを示す．それは $\beta^0 \circ f^0 \circ \alpha^{-1}(A)$ が図式の可換性から，$\beta^0 \circ \beta^{-1} \circ f(A)$ と等しいことと，$\beta^0 \circ \beta^{-1} = 0$ より言える．これから $\mathrm{Im}\alpha^0 \to J^0 \to J^1$ という射が定義でき，$\mathrm{Im}\alpha^0 \to I^1$ が単射であり，J^1 が単射的対象であることから，$I^1 \to J^1$ で上の図式を可換にするものが存在する．

3 proof of Propostion 2

すいません，時間がなかったので，また今度…．証明自体は『コホモロジーのこころ』67P と同様にすればよい．(ここでいう h^i として $f^i - g^i$ を取れば良い．)