

前半に論文そのものの解説を述べる。
その後、全体に関する考察をする。

1 Introduction and Crystal Basis Model

2 PART 1: A Minimum Principle in Codon-Anticodon Interaction

DNA からタンパク質への翻訳、遷移は複雑なプロセスを経ている。そのキーとなる箇所が mRNA のヌクレオチドからアミノ酸に変換される点である。

余談、疑問。ヌクレオチド同士の物理的な構造はどうなっている？ mRNA は完全に (二重らせんの) 直線だと思っていけないのか？

コドンからアンチコドンへ変換され、アンチコドンからアミノ酸に変換される。コドンは 60 種類あり、Watson-Crick の原理を考えると、アンチコドンは 60 種類あるべきだが、どうやら 60 種類より少ないことがわかってきた。これは 1960 年台にはわかっており、それを解消する説として、クリックが wobble hypothesis を唱えた。これは、コドンの 3 番目の値があまり意味をもたず？一つ目と二つ目だけで対応するアンチコドンが決定されるというものであった。これは比較的うまくいったが、「何個のアンチコドンが必要か」という疑問が生まれた。これを明らかにするため、以下の仮説が提唱されている。

1. The conventional wobble versatility hypothesis assumes that the the first position of anticodon should have G (U) to read for codon with Y (respectively R) in third position.
2. The codon adaptation hypothesis states that the first position of anticodon should pair the most abundant codon in the family of synonymous codons

ミトコンドリアで調べてみた結果、正しくタンパク質に変換するためには、最低 22 個のアンチコドンが必要ながわかった。

余談、疑問。その後ろ翻訳できねえ

3 The “minimum” principle

Given a codon XYZ ($X, Y, Z \in \{C, A, G, U\}$) we conjecture that an anticodon $X_a Y_a Z_a$, where $Y_a Z_a = Y_c X_c$, denoting the nucleotide complementary to the nucleotide N according to the Watson-Crick pairing rule³, pairs to the codon XYZ, i.e. it is most used to “read” the codon XYZ if it minimizes the operator T, explicitly written in eq.(2) and computed between the “states”, which can be read from Table 1, describing the codon and anticodon in the “crystal basis model”. We write both codons (c) and anticodons (a) in $5' \rightarrow 3'$ direction. As an anticodon is antiparallel to codon, the 1st nucleotide (respectively the 3rd nucleotide) of the anticodon is paired to the 3rd (respectively the 1st) nucleotide of the codon, see Figure 1

第I部

数学についての補足

今回使う数学について説明する．具体的には以下を説明する．

- 有限群とその表現
- 表現論から見たフーリエ解析
- リー群とその表現
- リー環とその表現
- 具体的なリー群とリー環の例
- Hopf 代数
- 量子群
- crystal basis

もう少し具体的には， - 多様体かつ群ならば局所的に GL しかないこと． - リー環は一般的に定義できるが，リー群から自然にリー環が定義され，そのリー環の同型からリー群が決定できること． - リー環には普遍包絡環が定義できること - リー群が誘導するリー環は接ベクトル空間とまた，その普遍包絡環はリー群の左不変微分作用素 (ベクトル場) と一致することそれが包絡という意味． - 量子群の定義 - 量子群の表現 - 既約表現の決定 - 完全可約性

今回はリー群，リー環は具体的なもののしかみない．

4 有限群とその表現

Propostion 4.1. 有限群 G の任意の表現は完全可約である．

Propostion 4.2. 有限アーベル群 G の任意の既約表現は 1 次元表現になる．

5 リー群とリー環

リー群とリー環について説明する．リー群とリー環については説明を一番詳しい教科書である [1] を参考にしている．そのため，リー群の定義も多様体であって群であるとするのではなく，局所的に $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群になっていることで定義した．(両者は一致する)

Definition 5.1 (線形 Lie 群). $GL(n, \mathbb{C})$ の閉部分群を線形 *Lie* 群という．

Definition 5.2 (局所同型). 位相群 G, H が局所同型とは， G, H の単位元の近傍 V, U が存在し，同相写像 $\iota: V \rightarrow U$ であって， $x, y \in V$ に対し，

$$xy \in V \Leftrightarrow \iota(x)\iota(y) \in U$$

$$xy \in V \Rightarrow \iota(x)\iota(y) = \iota(xy)$$

Definition 5.3 (リー群). 位相群 G がリー群とは， $e \in G$ の近傍 V で V が $GL(n, \mathbb{C})$ と局所同型なること

Remark. リー群は C^∞ 級多様体かつ群であり, 群演算が C^∞ 級写像となることとも定義できる. 上の定義と一致することは重要な結果の一つである.

Definition 5.4 (リー環). \mathcal{G} がリー環とは, ある体 K 上のベクトル空間であって, 任意の $x, y \in \mathcal{G}$ に対し, $[x, y] \in \mathcal{G}$ が定義され, 以下を満たすこと.

$$a[x, y] = [ax, y] = [x, ay] \quad (1)$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (2)$$

線形リー群 G に対し, 自然にリー環 \mathcal{G} が定義される.

Proposition 5.5. 線形リー群 G に対し, $\mathcal{G} := \{g \in M(n, \mathbb{C}) \mid \text{任意の } t \text{ に対し, } \exp(tg) \in G\}$ はリー環になる.

Example 5.6. リー群 $SL(2, \mathbb{C})$ が誘導するリー環 $sl(2, \mathbb{C})$ は $\{g \in M(2, \mathbb{C}) \mid \text{Tr} g = 0\}$ と一致する.

Proof. 計算すればいい

□

5.1 普遍包絡環

定義と性質のみ?

リー群の表現はちょっと保留

6 Hopf 代数

ここでは, Hopf 代数の定義を記述し, 以下 2 つを示す.

- 群 G から体 K への写像全体の集合が Hopf 代数になること
- リー環の普遍包絡環が Hopf 代数になっていること

6.1 Hopf 代数の定義

Definition 6.1. 代数 (A, m, μ) とは \mathbb{C} 上のベクトル空間 A と

$$m: A \otimes A \rightarrow A \quad \text{積}$$

$$\mu: \mathbb{C} \rightarrow A \quad \text{単位射}$$

に対し, 以下の図式が可換になること.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes m} & A \otimes A \\ m \otimes id \downarrow & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes id} & A \otimes A & \xleftarrow{id \otimes \mu} & A \otimes \mathbb{C} \\ & \searrow \cong & \downarrow m & \swarrow \cong & \\ & & A & & \end{array}$$

Remark. 数式が相変わらず汚い.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{f} & A \otimes A \\
 i \downarrow & & \downarrow p \\
 b & \xrightarrow{g} & y
 \end{array}$$

7 $SL(2, \mathbb{C})$ の場合の量子群

リー群 $SL(2, \mathbb{C})$ に対し, リー環, 普遍包絡環を求め, これを基に量子群を求める.
 また, 量子群に対する既約表現を決定し, 完全可約性を示す.

References

[1] 小林俊行, 大島利雄 リー群と表現 岩波書店 (2005/4/6)

[2] ……