Nombre de surjections entre ensembles finis

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de E_n sur E_p.

1. Calculer $S_{n,p}$ si $p > n$. [S]
2. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, et $S_{n,2}$. [S]
3. Calculer $S_{p+1,p}$. [S]

On suppose désormais que $0 < p \leq n$.

4. Montrer que $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \mathrm{C}_p^k = 0$ [S]
5. Montrer que $0 \leq k \leq q \leq p \Rightarrow \mathrm{C}_p^q \mathrm{C}_q^k = \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p-k}^{q-k}$. [S]
6. En déduire que, si $0 \leq k < p$, alors $\sum_{q=k}^{p}(-1)^q \mathrm{C}_p^q \mathrm{C}_q^k = 0$ (et si $k = p$?). [S]
7. Montrer que pour tout entier q de $\{1, 2, \ldots, p\}$ le nombre d'applications de E_n dans E_p ayant un ensemble image à q éléments est égal à $\mathrm{C}_p^q S_{n,q}$. [S]
8. En déduire que $p^n = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{C}_p^q S_{n,q}$. [S]
9. En utilisant ce qui précède, montrer que : $S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \mathrm{C}_p^k k^n$.

   Indication :

   – Transformer le second membre à l'aide de la question précédente.

   – Justifier l'égalité $\sum_{k=1}^{p} \sum_{q=1}^{k} \cdots = \sum_{q=1}^{p} \sum_{k=q}^{p} \cdots$

   [S]
10. Montrer que si $0 < p \leq n-1$, alors $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.

    Indication :

    – Étant donné une surjection φ de E_n sur E_p, considér sa restriction φ_1 à E_{n-1}.

    – Distinguer deux cas suivant que φ_1 est ou n'est pas surjective

    [S]
11. Retrouver la valeur de $S_{p+1,p}$, puis montrer que $S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!$. [S]
12. En s'inspirant du triangle de Pascal, montrer qu'on peut construire une table des $S_{n,p}$.

    Construire cette table pour $0 < p \leq n \leq 7$. [S]

Corrigé du problème

1. On sait que si $p > n$ il n'y a pas de surjection de E_n sur E_p, donc $S_{n,p} = 0$. [Q]
2. – Toute application de E_n dans E_n est surjective si et seulement si elle est bijective.
   Or il y a $n!$ bijections de E_n sur lui-même. On a donc $S_{n,n} = n!$
   – Il n'y a qu'une application de E_n dans E_1, et elle est surjective. Donc $S_{n,1} = 1$.
   – Il y a 2^n applications de E_n dans E_2. Parmi elles, deux seulement sont non surjectives (les applications constantes). Autrement dit $S_{n,2} = 2^n - 2$.
   [Q]
3. L'application $f : E_{p+1} \to E_p$ est surjective$\Leftrightarrow$tous les éléments de E_p ont exactement un antécédent, à l'exception d'un élément y de E_p qui doit en posséder deux.
   Il y a p choix pour y, puis $\mathrm{C}_{p+1}^{2} = \frac{p(p+1)}{2}$ choix pour les antécédents x_1, x_2 de y.
   Il reste ensuite à établir une bijection entre $E_{p+1} \setminus \{x_1, x_2\}$ et $E_p \setminus \{y\}$, c'est-à-dire entre deux ensembles à $p - 1$ éléments, ce qui peut se faire de $(p - 1)!$ manières différentes.
   Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ S_{p+1,p} = p\,\mathrm{C}_{p+1}^{2}\,(p-1)! = p\,\frac{(p+1)p}{2}(p-1)! = \frac{p}{2}(p+1)!$ [Q]
4. Dans $(1+x)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k\, x^k$, on pose $x = -1$: $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k\,(-1)^k = (1-1)^p = 0$. [Q]
5. Pour $0 \le k \le q \le p$, on a :
   $$\mathrm{C}_p^q\,\mathrm{C}_q^k = \frac{p\,!}{q!\,(p-q)!}\,\frac{q!}{k!\,(q-k)!} = \frac{p\,!}{k!\,(p-k)!}\,\frac{(p-k)!}{(q-k)!\,((p-k)-(q-k))!} = \mathrm{C}_p^k\,\mathrm{C}_{p-k}^{q-k}$$
   [Q]
6. Si $0 \le k < p$, on a : $\sum\limits_{q=k}^{p}(-1)^q\mathrm{C}_p^q\,\mathrm{C}_q^k = \sum\limits_{q=k}^{p}(-1)^q\mathrm{C}_p^k\,\mathrm{C}_{p-k}^{q-k} = \mathrm{C}_p^k \sum\limits_{q=k}^{p}(-1)^q\mathrm{C}_{p-k}^{q-k}$.
   Le changement d'indice $r = q - k$ donne : $\sum\limits_{q=k}^{p}(-1)^q\mathrm{C}_p^q\,\mathrm{C}_q^k = (-1)^k\mathrm{C}_p^k \sum\limits_{r=0}^{p-k}(-1)^r\mathrm{C}_{p-k}^{r}$
   Mais cette dernière somme est nulle car $p - k > 0$ (voir question 4.)
   Si $k = p$, on a : $\sum\limits_{q=k}^{p}(-1)^q\mathrm{C}_p^q\,\mathrm{C}_q^k = (-1)^p\mathrm{C}_p^p\,\mathrm{C}_p^p = (-1)^p$. [Q]
7. Pour construire $f : E_n \to E_p$ dont l'ensemble image contienne exactement q éléments, il faut choisir ces q éléments dans E_p, ce qui offre C_p^q possibilités différentes.
   Il faut ensuite construire une surjection de E_n sur $\mathrm{Im}(f)$ (donc d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal q) : il y a $S_{n,q}$ possibilités différentes.
   Il y a donc $\mathrm{C}_p^q\,S_{n,q}$ applications $f : E_n \to E_p$ dont l'ensemble image a q éléments. [Q]
8. Il y a p^n applications de E_n dans E_p, qu'on peut grouper suivant le cardinal q de leur ensemble image, l'entier q pouvant varier de $q = 1$ à $q = p$.
   Pour chaque valeur de q, on sait qu'il y a $\mathrm{C}_p^q\,S_{n,q}$ applications possibles.
   Ce dénombrement permet donc d'écrire : $p^n = \sum\limits_{q=1}^{p} \mathrm{C}_p^q\,S_{n,q}$. [Q]

9. En utilisant l'égalité précédente, on trouve :

$$(-1)^p\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\mathrm{C}_p^k\,k^n=(-1)^p\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\mathrm{C}_p^k\Big(\sum_{q=1}^{k}\mathrm{C}_k^q\,S_{n,q}\Big)=(-1)^p\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{k}(-1)^k\mathrm{C}_p^k\,\mathrm{C}_k^q\,S_{n,q}$$

La double sommation ci-dessus s'effectue sur les couples (k,q) tels que $\begin{cases}1\le k\le p\\ 1\le q\le k\end{cases}$

L'ensemble des points de coordonnées (k,q) définit une zone triangulaire qui pour l'instant est "parcourue" ligne par ligne.

Dans un parcours colonne par colonne, les couples (k,q) sont caractérisés par $\begin{cases}1\le q\le p\\ q\le k\le p\end{cases}$

L'interversion des deux sommes s'écrit donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=1}^{k}\cdots=\sum_{q=1}^{p}\sum_{k=q}^{p}\cdots$ On trouve alors :

$$(-1)^p\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\mathrm{C}_p^k\,k^n=(-1)^p\sum_{q=1}^{p}\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\mathrm{C}_p^k\,\mathrm{C}_k^q\,S_{n,q}=(-1)^p\sum_{q=1}^{p}\Big[\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\mathrm{C}_p^k\,\mathrm{C}_k^q\Big]S_{n,q}$$

Le terme entre crochets vaut 0 si $q<p$ et $(-1)^p$ si $q=p$.

L'expression complète se réduit donc à $S_{n,p}$.

Conclusion : si $1\le p\le n$, alors $S_{n,p}=(-1)^p\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\mathrm{C}_p^k\,k^n$. [Q]

10. Considérons une surjection quelconque φ de E_n dans E_p.

Il y a $S_{n,p}$ manières de choisir φ. Notons φ_1 la restriction de φ à E_{n-1}.

Il y a deux cas possibles, qui s'excluent mutuellement.

– Premier cas : φ_1 est surjective de E_{n-1} sur E_p.

  Il y a bien sûr $S_{n-1,p}$ possibilités différentes de construire φ_1.

– Deuxième cas : φ_1 n'est pas surjective.

  Puisque φ_1 est la restriction de φ à E_{n-1}, on a $\mathrm{Im}\,(\varphi)=\mathrm{Im}\,(\varphi_1)\cup\{\varphi(n)\}$.

  L'ensemble image $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est exactement de cardinal p, car φ est surjective.

  L'ensemble $\mathrm{Im}\,(\varphi_1)$ est donc à priori de cardinal p ou $p-1$.

  Mais dire que φ_1 n'est pas surjective, c'est écrire $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}\,(\varphi_1))<p$.

  Cela équivaut à $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}\,(\varphi_1))=p-1$.

  Il revient au même de dire que φ_1 est surjective de E_{n-1} sur $E_p\setminus\{\varphi(n)\}$.

  Il y a donc autant de façons de construire φ_1 qu'il y a de surjections d'un ensemble à $n-1$ éléments sur un ensemble à $p-1$ éléments, c'est-à-dire $S_{n-1,p-1}$.

Le nombre de choix possibles pour φ_1 est donc $S_{n-1,p}+S_{n-1,p-1}$.

Une fois fixée φ_1, il y a p manières de choisir $\varphi(n)$ dans E_p.

Ainsi le nombre de surjections $\varphi:E_n\to E_p$ est $p(S_{n-1,p}+S_{n-1,p-1})$.

Conclusion : si $1<p\le n-1$, alors $S_{n,p}=p(S_{n-1,p}+S_{n-1,p-1})$. [Q]

11. – Sachant $S_{p,p} = p\,!$, la formule précédente donne : $S_{p+1,p} = p(p\,! + S_{p,p-1})$.

Montrons par récurrence que pour tout $p \geq 1$, on a : $S_{p+1,p} = \frac{p}{2}(p+1)!$

La propriété est vraie au rang 1 puisque $S_{2,1} = 1$ (on rappelle que $\forall\, n \geq 1,\ S_{n,1} = 1$.)

Supposons que cette propriété soit vraie au rang $p-1$, avec $p \geq 2$.

On a alors $S_{p+1,p} = p(p\,! + S_{p,p-1}) = p\Big(p\,! + \frac{p-1}{2}\,p\,!\Big) = p \cdot p\,!\frac{p+1}{2} = \frac{p}{2}\,(p+1)!$

Cela prouve la propriété au rang p et achève la récurrence.

On a ainsi retrouvé le fait que, pour tout entier $p \geq 1$, $S_{p+1,p} = \frac{p}{2}(p+1)!$

– Pour tout entier $p \geq 1$: $S_{p+2,p} = p(S_{p+1,p} + S_{p+1,p-1}) = p\left(\frac{p}{2}\,(p+1)! + S_{p+1,p-1}\right)$.

Montrons par récurrence que pour tout entier $p \geq 1$, on a : $S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!$

Quand $p = 1$ on a $\frac{p(3p+1)}{24}(p+2)! = 1$, ce qui est bien la valeur de $S_{3,1}$.

Supposons le résultat établi au rang $p-1$, avec $p \geq 2$. Alors :

$$\begin{aligned} S_{p+2,p} &= p\left(\frac{p}{2}\,(p+1)! + S_{p+1,p-1}\right) = p\left(\frac{p}{2}\,(p+1)! + \frac{(p-1)(3p-2)}{24}(p+1)!\right) \\ &= \frac{(p+1)!}{24}\,p\,(12p + 3p^2 - 5p + 2) = \frac{(p+1)!}{24}\,p\,(3p+1)(p+2) = \frac{p\,(3p+1)}{24}(p+2)! \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété au rang p et achève la récurrence.

[Q]

12. La formule $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$ est analogue à la formule $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$, qui permet de construire le triangle de Pascal. On construit là aussi un tableau triangulaire, où $S_{n,p}$ figure à l'intersection de la ligne n et de la colonne p.

On sait d'autre part que $S_{n,1} = 1$ (ce qui permet d'initialiser la première colonne du tableau) et que $S_{n,n} = n!$ (ce qui permet d'initialiser la diagonale.)

On obtient ainsi :

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
$n=1$	1						
$n=2$	1	2					
$n=3$	1	6	6				
$n=4$	1	14	36	24			
$n=5$	1	30	150	240	120		
$n=6$	1	62	540	1560	1800	720	
$n=7$	1	126	1806	8400	16800	15120	5040

Par exemple, en ligne 6, colonne 4, on lit $S_{6,4} = 1560$: il y a donc 1560 surjections d'un ensemble à 6 éléments sur un ensemble à 4 éléments. [Q]