Projet de programmation

Séance 2 question 11

TRAN-THUONG Tien-Thinh et JEAN Aimé

Affirmation

La puissance minimale pour couvrir un trajet dans le graphe G est égale à la puissance minimale pour couvrir ce trajet dans l'arbre A_{min}

Notation

A est un arbre couvrant de G
A_{min} est l'arbre couvrant minimal de G
u, v, i_k des nœuds de G
$t_G(u, v)$ un trajet dans G de u à v
$t_A(u, v)$ l'unique trajet (car A est un arbre) dans A de u à v
On pourra écrire de manière équivalente $t_G(u, v)$ et $i_1^G - i_2^G - ... - i_{n-1}^G - i_n^G$ avec $u = i_1^G \; et \; v = i_n^G$
$p(t_G(u, v))$ la puissance minimale du trajet $t_G(u, v)$
$p(A)$ est la somme des puissances de l'arbre A

Démonstration par l'absurde

Soit G un graphe
Soit A_{min} un arbre couvrant minimal de G
Soit u, v des nœuds de G

Par l'absurde, supposons qu'il existe un trajet $t_G(u, v)$ tel que $p(t_G(u, v)) < p(t_{A_{min}}(u, v))$

Notons : $t_{A_{min}}(u, v) = i_1^{A_{min}} - ... - i_n^{A_{min}}$
Alors $\exists \; k \in [1, n-1] \; tq \; p(i_k^{A_{min}} - i_{k+1}^{A_{min}}) = p(t_{A_{min}}(u, v))$

En rompant l'arête $i_k^{A_{min}} - i_{k+1}^{A_{min}}$ dans l'arbre A_{min}, on obtient 2 arbres. Le nœud u est dans un arbre et v est dans l'autre car l'unique chemin les reliant dans A_{min} n'existe plus.
Notons A_u l'arbre contenant u et A_v l'arbre contenant v.

Notons : $t_G(u, v) = i_1^G - ... - i_m^G$ avec $u = i_1^G \in A_u$ et $v = i_m^G \in A_v$
Donc $\exists \; l \in [1, m], i_l^G \in A_u \; et \; i_{l+1}^G \in A_v$

Remarque :

$$\begin{aligned} p(i_l^G - i_{l+1}^G) &\leq p(t_G(u, v)) \\ &< p(t_{A_{min}}(u, v)) \; par \; hypothèse \\ &= p(i_k^{A_{min}} - i_{k+1}^{A_{min}}) \end{aligned}$$

En ajoutant l'arête $i_l^G - i_{l+1}^G$, on relie les arbres A_u et A_v pour former un arbre couvrant A' de G. De sorte que :

$$\begin{aligned} p(A') &= p(A_{min}) + p(i_l^G - i_{l+1}^G) - p(i_k^{A_{min}} - i_{k+1}^{A_{min}}) \\ &< p(A_{min}) \end{aligned}$$

Ce qui est **absurde** car par hypothèse A_{min} est l'arbre couvrant minimal. On a donc démontré le l'affirmation.