Projet de Programmation : Séance 2

Question 2 : Montrer que la puissance minimale pour couvrir un trajet dans le graphe G est égale à la puissance minimale pour couvrir ce trajet dans l'arbre $\mathcal{A}_{min}$

Notation : $\mathcal{A}$: un arbre couvrant de G
$\mathcal{A}_{min}$: un arbre couvrant minimal

u, v, i_j : des noeuds de G
$t_G(u;v)$: un trajet dans G de u à v
$n = |t_G(u;v)|$: le nombre de noeud dans ce trajet

on pourra écrire $t_G(u;v) \Leftrightarrow u - i_2 - \dots - i_{n-1} - v$
$p(t_G(u;v))$: la puissance minimale du trajet $t_G(u;v)$

(T1) **Théorème intermédiaire** : $\forall \mathcal{A} ; \forall u ; v ; \forall t_G(u;v)$
si $p(t_G(u;v)) < p(t_{\mathcal{A}}(u;v))$
et $|t_G(u;v)| > 2$

alors $\exists u' ; v'$ tq $|t_G(u';v')| < |t_G(u;v)|$
et $p(t_G(u';v')) < p(t_{\mathcal{A}}(u';v'))$

Démonstration (T1) : Soit $\mathcal{A}$, Soient $u;v$; Soit $t_G(u;v)$
tq $p(t_G(u;v)) < p(t_{\mathcal{A}}(u;v)) \Leftrightarrow [1] < [2]$
et $|t_G(u;v)| = n > 2$

Notons $t_G(u;v) = u - i_2 - \dots - i_{n-1} - v$
Remarque :
[1] $p(t_G(u;v)) = \max(p(u - \dots - i_{n-1}) ; p(i_{n-1} - v))$
[2] $p(t_{\mathcal{A}}(u;v)) = \max(p(t_{\mathcal{A}}(u;i_{n-1})) ; p(t_{\mathcal{A}}(i_{n-1};v)))$

Par disjonction de cas

* Soit l'arête $i_{n-1} - v \in \mathcal{A}$

alors $t_{\mathcal{A}}(i_{n-1} ; v) = i_{n-1} - v$

d'où $p(t_{\mathcal{A}}(i_{n-1} ; v)) = p(i_{n-1} - v)$

$[1] < [2]$

d'où $p(t_{\mathcal{A}}(i_{n-1} ; v)) < p(t_{\mathcal{A}}(u ; i_{n-1})) = [2]$

$[1] < [2]$

d'où $p(u - i_2 - \dots - i_{n-1}) < p(t_{\mathcal{A}}(u ; i_{n-1}))$

On pose $\boxed{u' = u \text{ et } v' = i_{n-1}}$; $|u' - i_2 - \dots - i_{n-1}| = n-1 < n$

* Soit l'arête $i_{n-1} - v \notin \mathcal{A}$

Par disjonction de cas

* Soit $p(t_{\mathcal{A}}(i_{n-1} ; v)) \leq p(i_{n-1} - v)$

par le même argument qu'avant $[1] < [2]$

$p(t_{\mathcal{A}}(i_{n-1} ; v)) < p(t_{\mathcal{A}}(u ; i_{n-1}))$

d'où $p(u - i_2 - \dots - i_{n-1}) < p(t_{\mathcal{A}}(u ; i_{n-1}))$

On pose $\boxed{u' = u \text{ et } v' = i_{n-1}}$; $|u' - i_2 - \dots - i_{n-1}| = n-1 < n$

* Soit $p(t_{\mathcal{A}}(i_{n-1} ; v)) > p(i_{n-1} - v)$

On pose $\boxed{u' = i_{n-1} \text{ et } v' = v}$; $|i_{n-1} - v| = 2 < n$

Dans tous les cas le théorème ($\mathcal{T}_1$) est vérifié on pourra toujours trouver un chemin plus court que celui qui existe déjà vérifiant la stricte inégalité.

Demonstration de la question 2 par l'absurde :

Soit G un graphe

Soit $\mathcal{A}_{min}$ un arbre couvrant minimal de G

Soit $u ; v$ des noeuds de G

Par l'absurde, supposons qu'il existe un trajet $t_G(u;v)$ tel que $p(t_G(u;v)) < p(t_{\mathcal{A}_{min}}(u;v))$

Quitte à utiliser le théorème ($\mathcal{C}$ 1) plusieurs fois, on peut supposer que $|t_G(u;v)| = 2$

c'est à dire $t_G(u;v) = u - v$

Notons $t_{\mathcal{A}_{min}}(u;v) = i_1 - i_2 - \dots - i_{n-1} - i_n$

Comme $p(u - v) < p(i_1 - \dots - i_n)$

$\exists j \in [\![1; n-1]\!]$ tq $p(u-v) < p(i_j - i_{j+1})$

. En rompant l'arête $i_j - i_{j+1}$, on a 2 arbre.
u est dans un arbre v est dans un autre car l'unique chemin les reliants dans $\mathcal{A}_{min}$ n'existe plus.

En ajoutant l'arête $u - v$, on a un seul arbre couvrant $\mathcal{A}'$ tq $p(\mathcal{A}') = p(\mathcal{A}_{min}) - p(i_j - i_{j+1}) + p(u-v) < p(\mathcal{A}_{min})$

Absurde

Schéma

$\mathcal{A}_{min}$ − $\Rightarrow$ 2 arbres $\Rightarrow$ $\mathcal{A}'$