

物理学勉強ノート

tttmmmyyy

2018 年 8 月 19 日

目次

1	記法	2
2	位相幾何学	3
3	代数学	3
3.1	クリフォード代数	3
3.2	パウリ行列	4
3.3	ガンマ行列	4
4	微分幾何学	7
4.1	微分作用素	7
4.2	主 G 束	7
4.3	付随束	8
4.4	Maurer-Cartan 形式	10
4.5	Ehresmann 接続	11
4.6	主 G 束の接続	13
4.7	Yang-Mills 方程式	20
4.8	Dirac 方程式	21
5	量子力学	23
5.1	量子化	23
5.2	Green 関数	24
5.3	経路積分法	28
6	φ^4 理論	28
6.1	自由な実スカラー場の理論の 2 点 Green 関数	28

1 記法

定義 1.1 (Minkowski 計量). $(4, 4)$ 行列 $\eta^{\mu\nu}$ を

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

により定め、*Minkowski* 計量 (の成分行列) と呼ぶ。

定義 1.2 (ベクトル). 4 成分の量 (実ベクトル、複素ベクトル、あるいは 4 つの行列の組など) x があるとす。量 x の最初の成分 (「第 0 成分」と呼ぶ) は「時間成分」であり、残りの 3 成分が「空間成分」であるという文脈のともでは、量 x を 4 元ベクトルと呼ぶ。このとき、 \mathbf{x} によって x の空間成分 (3 成分量) を表す。

注意 1.1. 定義 1.1 の行列の -1 倍を $(\eta^{\mu\nu})$ と書く流儀も存在する。

定義 1.3 (Hermitian 形式). V を \mathbb{C} ベクトル空間とすると、*Hermitian* 形式 $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ とは、第一成分について反線型かつ第二成分について線型な写像のことをいう。

注意 1.2. 第一成分について線型で第二成分について反線型であるものを *Hermitian* 形式と呼ぶ流儀も存在する。

定義 1.4 (Fourier 変換). 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ の *Fourier* 変換 $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.2)$$

によって定義する。変数 ω は角振動数と呼ばれる。また、関数 $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ の逆 *Fourier* 変換 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.3)$$

によって定義する。

注意 1.3. ほかに、*Fourier* 変換を

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (1.4)$$

で定義し、逆 *Fourier* 変換を

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (1.5)$$

で定義する流儀も存在する。変数 ξ は周波数と呼ばれる。どちらの流儀でも、*Fourier* 変換・逆 *Fourier* 変換は L^2 内積についてユニタリである。

2 位相幾何学

3 代数学

3.1 クリフォード代数

K を体 \mathbb{R} または体 \mathbb{C} とする。 V を有限次元 K ベクトル空間とする。 $\langle, \rangle: V \otimes V \longrightarrow K$ を対称双線型形式とする。

定義 3.1. クリフォード代数 $\text{Cl}(V, \langle, \rangle)$ とは、組 (A, i) であって、条件

1. A は K 上の代数。
2. $i: V \longrightarrow A$ は線形写像で、任意の $x, y \in V$ に対し関係式

$$\{i(x), i(y)\} = 2\langle x, y \rangle \quad (3.1)$$

が成り立つ。

ようなもののうち、普遍的なもののことである。

明示的には、 V が生成するテンソル代数

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n} \quad (3.2)$$

を考え、自然な単射写像を $i: V \longrightarrow T(V)$ と書くとき、関係式 (3.1) で $T(V)$ を剰余して得られる代数が $\text{Cl}(V, \langle, \rangle)$ である。

注意 3.1. 定義 (3.1) の状況を考える。テンソル代数 $T(V)$ は自然な $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数付けを持つ。関係式 (3.1) が生成するイデアルはこの次数について斉次であるため、Clifford 代数 $\text{Cl}(V, \langle, \rangle)$ も \mathbb{Z}_2 次数付けを持つ。次数 m の部分空間 ($m = 0, 1$) は $\text{Cl}(V, \langle, \rangle)_m$ と表記される。

注意 3.2. $i: V \longrightarrow \text{Cl}(V, \langle, \rangle)$ が単射であることが次のようにしてわかる。関係式 (3.1) が生成する $T(V)$ のイデアルを I とする。また、イデアル $\bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n} \subset T(V)$ を J とする。 $I \subset J$ であるため、イデアル $J/I \subset \text{Cl}(V, \langle, \rangle)$ を考えることができるよって、線形写像 $j: \text{Cl}(V, \langle, \rangle) \longrightarrow \text{Cl}(V, \langle, \rangle)/(J/I) = T(V)/J = V$ が得られる。この線形写像が $j \circ i = \text{id}$ を満たすので、 i は単射である。以下では $V \subset \text{Cl}(V, \langle, \rangle)$ と考え、記号 i は省略する。

定義 3.2. 線型写像 $V \longrightarrow V; x \longmapsto -x$ は、 K 代数の準同型 $\alpha: \text{Cl}(V, \langle, \rangle) \longrightarrow \text{Cl}(V, \langle, \rangle)$ を誘導する。

定義 3.3. K 代数の反準同型

$$\beta: T(V) \longrightarrow T(V); x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \longrightarrow x_n \otimes \cdots \otimes x_1 \quad (3.3)$$

は、 K 代数の反準同型 $\beta: \text{Cl}(V, \langle, \rangle) \longrightarrow \text{Cl}(V, \langle, \rangle)$ を誘導する。

定義 3.4. $p, q \geq 0$ を非負整数とする。 $\text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R})$ は、 \mathbb{R}^{p+q} 上の双線型形式

$$\langle (x_1, \dots, x_{p+q}), (y_1, \dots, y_{p+q}) \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i \quad (3.4)$$

から定まる *Clifford* 代数のことである。

3.2 パウリ行列

定義 3.5. *Pauli* 行列 $\sigma_i \in M_2(\mathbb{C})$ ($i = 1, 2, 3$) とは、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

のことである。

定理 3.1. 次の関係式が成り立つ。

$$\sigma_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i \sigma_k \quad ((i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)). \quad (3.6)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (3.7)$$

$$\det \sigma_i = -1, \quad \text{Tr } \sigma_i = 0, \quad \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}. \quad (3.8)$$

定理 3.2. 1. 行列 $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は、*Hilbert-Smidt* 内積について互いに直交かつそれぞれの長さが $\sqrt{2}$ である。

2. 行列 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は、トレースのない *Hermite* 行列のなす \mathbb{R} 線型空間 $\{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^\dagger = M, \text{Tr } M = 0\}$ の基底である。

3. 行列 $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は、*Hermite* 行列全体のなす \mathbb{R} 線型空間 $\{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^\dagger = M\}$ の基底である。

4. 行列 $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は、 \mathbb{C} 線型空間 $M_2(\mathbb{C})$ の基底である。

定理 3.3. $e_i \in \mathbb{R}^3$ を標準基底とする ($i = 1, 2, 3$)。 *Pauli* 行列が生成する $M_2(\mathbb{C})$ の部分 \mathbb{R} 代数 A は $M_2(\mathbb{C})$ 全体である。また、自然な同型

$$\text{Cl}^{3+0}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} A = M_2(\mathbb{C}); e_i \mapsto \sigma_i \quad (3.9)$$

がある。

Proof. *Pauli* 行列の交換関係と *Clifford* 代数の普遍性より、全射 $\text{Cl}^{3+0}(\mathbb{R}) \rightarrow A$ が誘導される。これが全単射であることを示すためには $\dim A \geq \dim \text{Cl}^{3+0}(\mathbb{R}) = 8$ を示せばよい。 $I \in M_2(\mathbb{C})$ を単位行列とすると、

$$I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, iI, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3 \in A \quad (3.10)$$

である。定理 3.2 より、

$$M_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}I \oplus \mathbb{C}\sigma_1 \oplus \mathbb{C}\sigma_2 \oplus \mathbb{C}\sigma_3 = \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}\sigma_1 \oplus \mathbb{R}\sigma_2 \oplus \mathbb{R}\sigma_3 \oplus \mathbb{R}iI \oplus \mathbb{R}i\sigma_1 \oplus \mathbb{R}i\sigma_2 \oplus \mathbb{R}i\sigma_3 \quad (3.11)$$

なので、これらは \mathbb{R} 上で 8 次元ベクトル空間を生成する。 \square

3.3 ガンマ行列

定義 3.6. ガンマ行列 $\gamma^\mu \in M_4(\mathbb{C})$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) とは、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.12)$$

のことである。

定理 3.4. \mathbb{R} 代数の準同型 $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{M}_4(\mathbb{C}); e_\mu \longmapsto \gamma^\mu$ が定まる。さらに、これは \mathbb{C} 代数の同型 $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{M}_4(\mathbb{C})$ を誘導する。

Proof. Zee の本の計算方法がわかりやすく良い。 \square

定義 3.7. Clifford 代数 $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{C})$ には、同型を除いて唯一の既約複素表現 Δ が存在し、その次元は 4 である。

定義 3.8. $e_5 = ie_0e_1e_2e_3$ により元 $e_5 \in \text{Cl}^{1+3}(\mathbb{C})$ を定義する（「 e_4 」ではないことに注意）。また、 \mathbb{C} 代数の同型 $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \text{M}_4(\mathbb{C})$ によって e_5 に対応する行列を $\gamma^5 \in \text{M}_4(\mathbb{C})$ とする。具体的には

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

である。

注意 3.3. γ^5 の計算はやはり Zee の本の方法で行うこと。

定理 3.5. $(e_5)^2 = 1$ が成り立つ。

Proof. Clifford 代数の定義の関係式を用いて計算すると、

$$(e_5)^2 = i^2(e_0)^2(e_1)^2(e_2)^2(e_3)^2 = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \quad (3.14)$$

となる。 \square

定理 3.6. 反交換関係 $\{e_5, e_\mu\} = 0$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) が成り立つ。

定理 3.7. Clifford 代数 $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{C})$ の次数 0 部分（偶数部分）を $\text{Cl}_{\text{even}}^{1+3}(\mathbb{C})$ と書く。このとき、 e_5 は $\text{Cl}_{\text{even}}^{1+3}(\mathbb{C})$ の中心に属する。

Proof. 定理 3.6 から容易に従う。 \square

注意 3.4. e_5 は $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{C})$ の中心には属さない。これは、 γ^5 が対角行列ではないことからわかる。

定義 3.9. Clifford 代数 $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{C})$ の既約表現 Δ を選ぶ。このとき、 e_5 による Δ の固有空間分解を

$$\Sigma_\pm = \{s \in \Delta \mid e_5 s = \pm s\} \quad (3.15)$$

と定義する。射影作用素 $P_\pm = (1 \pm e_5)/2$ を用いて $\Sigma_\pm = P_\pm \Delta$ と定義することもできる。これに伴い、表現 Δ を $\text{Cl}_{\text{even}}^{1+3}(\mathbb{C})$ への制限は 2 つの表現 Σ_\pm に分解する。これらの表現を *Weyl* 表現、あるいはカイラル表現と呼ぶ。

注意 3.5. $+/-$ の代わりに R/L を使い、右手表現、左手表現と呼ぶこともある。

定理 3.8. *Weyl* 表現は、偶数部分 $\text{Cl}_{\text{even}}^{1+3}(\mathbb{C})$ の 2 つの相異なる既約表現であり、また、 $\text{Cl}_{\text{even}}^{1+3}(\mathbb{C})$ の既約表現はこれらのみである。

定義 3.10. V を有限次元 \mathbb{C} ベクトル空間とする。

1. 複素共役準同型 $\sigma: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ に沿って V を係数拡大したものを $V \otimes \sigma$ を \bar{V} と書き、 V の複素共役空間と呼ぶ。この操作は双対と交換する。すなわち、自然な同一視 $\bar{V}^\vee = \bar{V}^\vee$ が存在する。

2. 反線型写像 $f: V \rightarrow V$ とは、 $z \in \mathbb{C}, v \in V$ に対して $f(zv) = \bar{z}v$ を満たす \mathbb{R} 線型写像のことである。言い換えれば、 \mathbb{C} 線型写像 $\bar{V} \rightarrow V$ や $V \rightarrow \bar{V}$ を自然な包含写像 $V \rightarrow \bar{V}$ によって写像 $V \rightarrow V$ とみなしたものである。
3. V 上の *Hermitian* 形式とは、 \mathbb{C} 線型写像 $\langle, \rangle: \bar{V} \otimes_{\mathbb{C}} V \rightarrow \mathbb{C}$ のことである。これは \mathbb{C} 線型写像 $V \rightarrow \bar{V}^\vee; v \mapsto (w \mapsto \langle w, v \rangle)$ を誘導する。
4. \mathbb{C} 代数の反準同型写像

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V^\vee); f \mapsto (g \mapsto g \circ f) \quad (3.16)$$

を転置とよぶ。これは、 V の基底とそれに伴う V^\vee の双対基底のもとで、表現行列の転置をとる操作に対応する。

5. \mathbb{C} 代数の反線型準同型写像

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\bar{V}); f \mapsto f \otimes_{\sigma} \text{id}_{\mathbb{C}} \quad (3.17)$$

を共役と呼ぶ。これは、 V の基底とそれに伴う \bar{V} の基底のもとで、表現行列の各成分の複素共役をとる操作に対応する。

6. 自己準同型に対する転置と共役は可換な操作である。
7. 転置と共役の合成は \mathbb{C} 代数の反線型反準同型写像 $\dagger: \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\bar{V}^\vee)$ であり、*Hermitian* 共役と呼ばれる。これは V の基底とそれに伴う \bar{V}^\vee の基底のもとで、表現行列の *Hermitian* 共役をとる操作に対応する。

定義 3.11. (ρ, Δ) を $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R})$ の複素表現とすると、表現 $(\bar{\rho}^\vee, \bar{\Delta}^\vee)$ を合成

$$\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\beta} \text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\rho} \text{End}_{\mathbb{C}}(\Delta) \xrightarrow{\dagger} \text{End}_{\mathbb{C}}(\bar{\Delta}^\vee) \quad (3.18)$$

により定める。ここで、 \mathbb{R} 代数の反準同型写像 $\beta: \text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R})$ は定義 3.3 のものである。

定義 3.12. $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R})$ の *Dirac* 表現 Δ とは、*Hermitian* 内積 \langle, \rangle を持つ \mathbb{C} ベクトル空間 Δ 上の既約表現であって、 \mathbb{C} 線型写像

$$\Delta \xrightarrow{e_0} \Delta \xrightarrow{v \mapsto \langle \cdot, v \rangle} \bar{\Delta}^\vee \quad (3.19)$$

が表現の準同型になっているものをいう。*Dirac* 表現に対し、上の写像を $\psi \mapsto \bar{\psi}$ と書き、*Dirac* 共役と呼ぶ。

定理 3.9. $\Delta = \mathbb{C}^4$ に標準的な *Hermitian* 内積を定める時、ガンマ行列による表現 $\gamma: \text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_4(\mathbb{C})$ は *Dirac* 表現である。

Proof. Δ および $\bar{\Delta}^\vee$ の標準基底に関して、写像 $\Delta \xrightarrow{v \mapsto \langle \cdot, v \rangle} \bar{\Delta}^\vee$ の表現行列は単位行列であるため、合成

$$\Delta \xrightarrow{e_0} \Delta \xrightarrow{v \mapsto \langle \cdot, v \rangle} \bar{\Delta}^\vee \quad (3.20)$$

の表現行列は γ^0 となる。よって、ガンマ行列の関係式 $(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$ よりこの写像が表現の同型であることがわかる。□

定理 3.10. *Clifford* 代数 $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R})$ の既約な複素表現 Δ に対し、 Δ を *Dirac* 表現たらしめるような *Hermitian* 内積 \langle, \rangle がスカラー倍を除いて一意に存在する。

Proof. *Clifford* 代数 $\text{Cl}^{1+3}(\mathbb{R})$ の既約表現の分類と、Schur の補題より従う。□

4 微分幾何学

4.1 微分作用素

定義 4.1. M を多様体とする. M 上の微分形式に対する次数 d の微分作用素とは, 線形写像

$$D: \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+d}(M) \quad (4.1)$$

であって, *Leibnitz* 則

$$\forall \omega \in \Omega^l(M), \forall \eta \in \Omega^l(M), \quad D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge D(\eta) \quad (4.2)$$

を満たすもののことをいう.

定義 4.2 (*Lie* 微分).

定義 4.3 (挿入演算子).

定理 4.1. 1.

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \quad (4.3)$$

2.

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (4.4)$$

4.2 主 G 束

定義 4.4. G を *Lie* 群とし, X には G が右作用し, Y には G が左作用しているとする. このとき, バランス積 (*balanced product*) $X \times_G Y$ とは, 直積 $X \times Y$ を同値関係 $(xg, y) \sim (x, gy)$ ($g \in G$) で割ったものである.

定義 4.5. G を *Lie* 群とする. 多様体 M 上の主 G 束とは, ファイバー束 $P \longrightarrow M$ と右作用 $P \times G \longrightarrow P$ の組であって, G の P への作用は各ファイバーを保ち, かつ, 各ファイバー P_x ($x \in M$) へ自由かつ可移的に作用するもののことである.

定理 4.2. $f: G \longrightarrow H$ を *Lie* 群の射とする. また, P を多様体 M 上の主 G 束とする. H には G の作用が $g \cdot h = f(g)h$ によって定める.

1. このとき, $P \times_G H$ には $[(p, h)] \cdot h' = [(p, hh')]$ によって H の右作用が定まり, これにより $P \times_G H$ は多様体 M 上の主 H 束になる.
2. f がコホモロジー群に誘導する写像

$$H^1(M, G) \xrightarrow{f_*} H^1(M, H) \quad (4.5)$$

により P のコホモロジー類は $P \times_G H$ のコホモロジー類にうつる.

3. Q を主 H 束とする. 写像 $\varphi: P \longrightarrow Q$ が f 同変であるとは, 任意の $g \in G$ と $x \in P$ について $\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot f(g)$ が成り立つことをいう. このとき, $P \times_G H$ から Q への主 H 束としての同型写像の全体と, P から Q への f 同変写像の全体は自然に一対一対応する.

注意 4.1. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. このとき, P を射影 $P \rightarrow M$ で引き戻すことで得られる主 G 束

$$P \times_M P \xrightarrow{\text{pr}_1} P \quad (4.6)$$

には, 自然な切断

$$P \rightarrow P \times_M P; \quad p \mapsto (p, p) \quad (4.7)$$

が存在する. 従って, $P \times_M P$ は自明束であり, 自明化写像は

$$P \times G \xrightarrow{\sim} P \times_M P; \quad (p, g) \mapsto (p, p \cdot g) \quad (4.8)$$

によって与えられる.

4.3 付随束

定義 4.6. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. また, V を G の有限次元表現とする. このとき, 射影 $P \rightarrow M$ から導かれる自然な写像 $P \times_G V \rightarrow M$ により, バランス積 $P \times_G V$ は M 上のベクトル束になる. このベクトル束を主 G 束 P と表現 V に付随するベクトル束という. 付随束 $P \times_G V$ をより短く $P(V)$ と書くことがある.

定理 4.3. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. また, V, W を G の有限次元表現とする. このとき, 線形写像の空間 $\text{Hom}(V, W)$ も自然に G の表現である (作用は $g \cdot f = v \mapsto g \cdot f(g^{-1} \cdot v)$ により定まるものである). よってベクトル束 $P \times_G \text{Hom}(V, W)$ が考えられる. この記号のもとで, 自然なベクトル束の同型

$$P \times_G \text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_M(P \times_G V, P \times_G W) \quad (4.9)$$

が存在する (右辺は M 上のベクトル束の圏における Hom 対象を表す)。

注意 4.2. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束, V を G の有限次元表現とする. $s: M \rightarrow P$ を P の切断とすると, 次のような $P(V)$ の自明化写像が得られる:

$$M \times V \xrightarrow{\sim} P(V); \quad (x, v) \mapsto [(s(x), v)]. \quad (4.10)$$

特に, 自明束に付随するベクトル束は自明である.

例 4.1. フレーム束. テンソル束.

定理 4.4. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束, V を G の有限次元表現とする. このとき, 射影 $P \rightarrow M$ により付随束 $P(V)$ を引き戻して得られる P 上のベクトル束には, 次のような自然な自明化写像が存在する.

$$P \times V \xrightarrow{\sim} P \times_M P(V); \quad (p, v) \mapsto (p, [(p, v)]) \quad (4.11)$$

Proof. 注意 4.1 により, 引き戻し $P \times_M P(V)$ は, 主 G 束 $P \times_M P \xrightarrow{\text{pr}_1} P$ に付随するベクトル束に自然に同型である. この主 G 束は注意 4.1 により, 自然な自明化が存在する. 従って, $P \times_M P(V)$ にも自然な自明化が存在する. これらの自然な自明化写像を組み合わせたものが式 4.11 で与えられているものに一致することを確認すれば良い. \square

定義 4.7. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G とする. 微分形式 $\omega \in \Omega^k(P)$ が水平であるとは, 任意の $y \in P$ と垂直ベクトル $\xi \in \mathcal{V}_y P$ に対し, $\iota_\xi \omega = 0$ となることをいう. 水平微分形式の全体は $\Omega_{\text{hor}}^k(P)$ と書く.

注意 4.3. P 上のベクトル束 E に値を持つ微分形式 $\omega \in \Omega^k(P, E)$ などについても, 同様に水平性を定義する.

定義 4.8. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ を G の有限次元表現とする. 微分形式 $\omega \in \Omega^k(P, V)$ に対し, 任意の $g \in G$ に対し $r_g^* \omega = \rho(g^{-1})\omega$ が成り立つとき, ω は G 不変であるという. G 不変微分形式全体は $\Omega_{\text{inv}}^k(P, V)$ と書く.

定義 4.9. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束, V を G の有限次元表現とする. 水平かつ G 不変な微分形式 $\omega \in \Omega^k(P, V)$ は基礎的であるという. 基礎的微分形式の全体を $\Omega_{\text{basic}}^k(P, V)$ と書く.

定理 4.5. M を多様体, G を *Lie* 群, $\pi: P \rightarrow M$ を主 G 束, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ を G の有限次元表現とする. このとき, 引き戻し写像

$$\Omega^k(M, P(V)) \rightarrow \Omega^k(P, P \times_M P(V)) = \Omega^k(P, V) \quad (4.12)$$

(定理 4.4 を用いた) は, 同型

$$\Omega^k(M, P(V)) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{basic}}^k(P, V); \quad \omega \mapsto \pi^* \omega \quad (4.13)$$

を定める.

Proof. $\omega \in \Omega^k(M, P(V))$ をとる. $\eta = \pi^* \omega$ とおく. η が水平であることは明らかである. G 不変であることを示す. 点 $y \in P$ と $\xi \in T_y P$ を任意にとる. $v = \eta_y(\xi)$ とおく. $P \times_M P(V)$ と $P \times V$ の同型が

$$P \times V \xrightarrow{\sim} P \times_M P(V); \quad (p, v) \mapsto (p, [(p, v)]) \quad (4.14)$$

で与えられていたことを用いると, 等式 $v = \eta_y(\xi)$ は

$$\omega_{\pi(y)}(d\pi(\xi)) = [(y, v)] \quad (4.15)$$

を意味することがわかる. 同様にして, $w = \eta_{yg}(dr_g(\xi))$ とおけば,

$$\omega_{\pi(yg)}((d\pi \circ dr_g)(\xi)) = [(yg, w)] \quad (4.16)$$

すなわち,

$$\omega_{\pi(y)}(d\pi(\xi)) = [(yg, w)] \quad (4.17)$$

を意味している. よって, $[(y, v)] = [(yg, w)] \in P \otimes_G V$ が得られ, これより $w = \rho(g^{-1})v$ となる. よって,

$$(r_g^* \eta)(\xi) = \eta_{yg}(dr_g(\xi)) = \rho(g^{-1})\eta_y(\xi) \quad (4.18)$$

すなわち

$$r_g^* \eta = \rho(g^{-1})\eta \quad (4.19)$$

がわかった. これは η が G 不変であることを示している.

以上で, 写像 $\Omega^k(M, P(V)) \rightarrow \Omega_{\text{basic}}^k(P, V)$ が定まることは示された. これが全単射であることを示そう. 微分形式の貼り合わせ議論 (詳細略) より, P が自明束 $M \times G \rightarrow M$ の場合に示せば良い. これは明らかである. \square

4.4 Maurer-Cartan 形式

定義 4.10. G を Lie 群とする. G 上の Maurer-Cartan 形式 $\omega \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ とは,

1. 左不変である. つまり, 任意の $h \in G$ に対し, $l_h^* \omega = \omega$ が成り立つ.
2. $\omega \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ が定めるベクトル束の射

$$\omega: TG \longrightarrow G \times \mathfrak{g} \quad (4.20)$$

の原点での値

$$\omega(e): T_e G = \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (4.21)$$

は恒等写像である.

という 2 条件を満たす唯一の微分形式である.

補題 4.1. 群 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の Maurer-Cartan 形式 $\omega \in \Omega^1(G, \mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ の具体的な表示について考える. 任意の元 $g \in G$ に対し, 標準的な同一視 $T_g G = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が存在する. この同一視のもとで, Maurer-Cartan 形式 ω の $g \in G$ での値

$$\omega(g) \in T_g G \longrightarrow T_e G \quad (4.22)$$

は, 行列 g^{-1} の左からの乗算

$$g^{-1} \cdot -: \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \quad (4.23)$$

に等しい.

Proof. Maurer-Cartan 形式の定義の条件 1 より,

$$\omega(g) = l_{g^{-1}}^* \omega(e) = \omega(e) \circ (dl_{g^{-1}})_g \quad (4.24)$$

であり, さらに定義の条件 2 を用いると,

$$\omega(g) = (dl_{g^{-1}})_g \quad (4.25)$$

である. 最後に, $(dl_{g^{-1}})_g: T_g G \longrightarrow T_e G$ は g^{-1} の左からの乗算と同一視されることは容易にわかる. \square

補題 4.2. Lie 群の埋め込み $i: G \longrightarrow G'$ を考える. Maurer-Cartan 形式 $\omega \in \Omega(G', \mathfrak{g}')$ の引き戻し $i^* \omega \in \Omega(G, \mathfrak{g}')$ は \mathfrak{g} に値をとり, G の Maurer-Cartan 形式に等しい.

Proof. \square

定理 4.6. Lie 群の埋め込み $g: G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を考える. 単射 $dg_e: \mathfrak{g} \longrightarrow T_e \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ によって, \mathfrak{g} の元を行列であるとみなす. このとき, G の Maurer-Cartan 形式 ω の $x \in G$ での値

$$\omega(x): T_x G \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (4.26)$$

は,

$$\xi \longmapsto g(x)^{-1} dg_x(\xi) \quad (4.27)$$

に等しい. すなわち,

$$\omega(x) = g(x)^{-1} dg_x \quad (4.28)$$

である.

Proof. ここまでの補題より明らかである. □

注意 4.4. 上の定理より, 群 G の元を変数 g で表している文脈で, *Maurer-Cartan* 形式を単に $g^{-1}dg$ と書くことがある. また, 多様体 M から *Lie* 群への射 $g: X \rightarrow G$ がある状況で, G の *Maurer-Cartan* 形式の X への引き戻しを単に $g^{-1}dg$ と書くことがある.

4.5 Ehresmann 接続

定義 4.11 (接続). M を多様体とし, E は M 上の F をファイバーとするファイバー束とする. $\mathcal{V} \subset TE$ を垂直部分ベクトル束とする. M 上の *Ehresmann* 接続、あるいは単に接続とは、水平部分ベクトル束と呼ばれる部分束 $\mathcal{H} \subset TE$ であって、 $TE = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ を満たすもののことをいう。

補題 4.3. M を多様体とし, $\pi: E \rightarrow M$ を F ファイバー束とする. $\mathcal{H} \subset TE$ を E の接続とする. このとき, 各 $y \in E$ に対し, 線形写像 $d\pi_y: \mathcal{H}_y \rightarrow T_{\pi(y)}M$ は同型である.

Proof. 明らかである. □

定義 4.12 (自明な接続). E, F を多様体とする. E 上の自明なファイバー束 $E \times F \rightarrow E$ を考える. このとき E には, $p_F^*TF \subset TE$ を水平部分ベクトル束とする自然な接続が存在する. この接続を E 上の自明な接続という。

定義 4.13 (平坦接続). 多様体 M 上の F ファイバー束 E を考える. E 上のある接続 $\mathcal{H} \subset TE$ が平坦であるとは、任意の $x \in M$ に対し, ある x の開近傍上で \mathcal{H} が自明であることをいう。

定義 4.14 (持ち上げ). M を多様体, $\pi: E \rightarrow M$ を F ファイバー束とする. $\mathcal{H} \subset TM$ を E の接続とする.

1. 点 $y \in E$ をとり, $x = \pi(y)$ とおく. ベクトル $\xi \in T_xM$ に対し, 同型 $d\pi_y: \mathcal{H}_y \xrightarrow{\sim} T_xM$ で対応する元 $\xi^* \in \mathcal{H}_y \subset T_yE$ を考える. これを接続 \mathcal{H} による ξ の持ち上げという.
2. $X \in \mathfrak{X}(M)$ をベクトル場とする. このとき, 点 $y \in E$ に対して $X_{\pi(y)}^* \in T_yE$ を対応させるベクトル場 $X^* \in \mathfrak{X}(E)$ が唯一存在する. これを X の持ち上げという.
3. 点 $y \in E$ をとり, $x = \pi(y)$ とおく. x を始点とする道 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ を考える. このとき, γ の持ち上げ γ^* とは, 次の初期値付き常微分方程式の解のことである:

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \gamma'(t)^*, \quad \gamma^*(0) = y. \quad (4.29)$$

注意 4.5. ベクトル場 X の持ち上げ X^* が再び滑らかであることは, (略) \mathcal{H} が部分ベクトル束であることから従う. 部分ベクトル束の定義はそれほど単純でなかったことに注意.

補題 4.4. E を多様体, $\pi: E \rightarrow M$ を F ファイバー束とし, $\mathcal{H} \subset TE$ を接続とする. また, γ を E 内の道し, その持ち上げを γ^* とする. このとき, $\pi \circ \gamma^* = \gamma$ が成り立つ.

Proof. 道 $\pi \circ \gamma^*: [0, 1] \rightarrow M$ は, 初期値付き常微分方程式

$$\frac{d(\pi \circ \gamma^*)}{dt} = \gamma'(t), \quad (\pi \circ \gamma^*)(0) = \gamma(0) \quad (4.30)$$

の解である. 一方, γ もこの常微分方程式の解であるから, 初期値付き常微分方程式の解の一意性より,

$\pi \circ \gamma^* = \gamma$ が成り立つ. □

定義 4.15 (平行移動). 点 $y \in E$ および $\pi(y)$ を始点とする M 内の道 γ を考える. γ の終点を x とする. このとき、持ち上げ γ^* の終点 $\gamma^*(1) \in E$ を y の γ に沿った平行移動 (あるいは平行移動の結果) という.

定理 4.7. M を多様体, $\pi: E \rightarrow M$ を F ファイバー束とする. また, $\mathcal{H} \subset TE$ を接続とする. このとき, 次は同値である.

1. \mathcal{H} は平坦である.
2. 任意の $y \in E$ について, $\pi(y)$ を始点とする道 γ に沿った y の平行移動の結果は, γ のホモトピー類にしかよらない.

Proof. よくある持ち上げについての議論から (詳細略), 次の補題に帰着される. □

補題 4.5. 単連結な多様体 M 上の自明な F ファイバー束 $\pi: E \rightarrow M$ を考える. $\mathcal{H} \subset TE$ を接続とする. このとき, 次は同値である.

1. E は自明な F ファイバー束であり, 接続 \mathcal{H} は自明である.
2. 任意の $y \in E$ について, $\pi(y)$ を始点とする道 γ に沿った y の平行移動の結果は, γ によらない.

Proof. 条件 2 を仮定する. 点 $x \in M$ を固定する. また, 同一視 $\pi^{-1}(x) = F$ を一つ固定する. このとき, 点 $y \in E$ に対し, $\pi(y)$ から x への道 γ を任意にとり, $(\pi(y), \gamma^*(1)) \in M \times \pi^{-1}(x) = M \times F$ を対応させることで, 写像 $E \rightarrow M \times F$ が定まる. これが同型であること, および E のファイバー束としての自明化を与えることが示せる. この同型で接続 \mathcal{H} をファイバー束 $E \times F$ にコピーしたもの \mathcal{H} と書くことにする. これについて $\mathcal{H} = p_E^{-1}TE$ を示せばよい. 接続 \mathcal{H} は, M の道 γ の (x, f) を始点とする持ち上げ γ^* が

$$[0, 1] \rightarrow E; \quad t \mapsto (\gamma(t), f) \quad (4.31)$$

で与えられるという性質を持っている. これより, 任意のベクトル $\xi \in T_x M$ の持ち上げ $\xi^* \in T_{(x, f)} E$ は $(\xi, 0) \in T_x M \oplus T_f F = T_{(x, f)} E$ であることがわかる. よって主張が従う. □

定義 4.16. (曲率) M を多様体, $\pi: E \rightarrow M$ を F ファイバー束とする. また, $\mathcal{H} \subset TE$ を接続とする. $p_V: TE \rightarrow \mathcal{V}$, $p_H: TE \rightarrow \mathcal{H}$ をそれぞれ接続 \mathcal{H} から定まる射影とする. このとき, $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$ に対し,

$$R(X, Y) = p_V[p_H X, p_H Y] \in \Gamma(E, \mathcal{V}) \quad (4.32)$$

と定める. この対応 $R(-, -)$ は, 微分形式

$$R \in \Omega^2(E, \mathcal{V}) \quad (4.33)$$

を定めている. これを接続 \mathcal{H} の曲率という.

定理 4.8. M を多様体, $\pi: E \rightarrow M$ を F ファイバー束とする. また, $\mathcal{H} \subset TE$ を接続とし, $R \in \Omega^2(E, \mathcal{V})$ を曲率とする. このとき, 次は同値である.

1. P は平坦.
2. $R = 0$.

Proof. □

4.6 主 G 束の接続

定義 4.17 (主 G 束の接続). M は多様体, G は Lie 群であるとする. 主 G 束 $P \rightarrow M$ 上の接続 \mathcal{H} とは, G ファイバー束としての接続 $\mathcal{H} \subset TP$ であって, 条件

$$\forall g \in G, \forall y \in P, \quad (dr_g)_y \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{y \cdot g} \quad (4.34)$$

を満たすものをいう.

注意 4.6. M を多様体, G を Lie 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする.

1. 各点 $y \in P$ について, 作用 $y \cdot -: G \rightarrow y \cdot G \subset P; g \mapsto y \cdot g$ は同型 $d(y \cdot -)_e: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_y$ を定める.
2. 1 の同型は, 垂直部分ベクトル束 $\mathcal{V} \subset TP$ と自明なベクトル束 $M \times \mathfrak{g}$ の同型を定める.
3. 任意の $\xi \in \mathfrak{g}$ に対し, 垂直ベクトル場

$$M \rightarrow M \times \mathfrak{g} \cong \mathcal{V}; x \mapsto (x, \xi) \quad (4.35)$$

を X_ξ と書く.

定義 4.18 (接続形式). M を多様体, G を Lie 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. また $\mathcal{H} \subset TP$ を接続とする. このとき, 自然なベクトル束の射

$$TP \rightarrow TP/\mathcal{H} = \mathcal{V} \cong M \times \mathfrak{g} \quad (4.36)$$

が定まるので, 自然な微分形式

$$\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \quad (4.37)$$

が定まる. これを接続 \mathcal{H} の接続形式という.

定理 4.9. M を多様体, G を Lie 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. このとき, P の接続の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ は次の条件を満たす.

1. 任意の $\xi \in \mathfrak{g}$ に対し, $\omega(X_\xi) = \xi$.
2. 任意の $g \in G$ に対し, $r_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$.

逆に, 上の条件を満たす $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ が与えられたとき, これはある唯一の接続の接続形式である.

注意 4.7. 定義 4.8 によると, 条件 2 は, G の随伴表現に関して ω が不変であることを主張している.

Proof. $\mathcal{H} \subset TP$ を接続とし, $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を接続形式とする. これが条件 1 を満たすことは明らかである. 条件 2 を満たすことを示す. まず, 任意の $g \in G$ と $y \in P$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{y \cdot -} & P \\ g^{-1} \cdot - \cdot g \downarrow & & \downarrow r_g \\ G & \xrightarrow{y \cdot g \cdot -} & P \end{array} \quad (4.38)$$

は可換であるから、図式

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{d(y \cdot -)_e} & \mathcal{V}_y \\
 \text{Ad}_{g^{-1}} \downarrow & & \downarrow (dr_g)_y \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{d(y \cdot g \cdot -)_e} & \mathcal{V}_{y \cdot g}
 \end{array} \quad (4.39)$$

も可換である。よって、可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \omega(y \cdot g) & & \\
 \mathfrak{g} & \xleftarrow{d(y \cdot -)_e} & \mathcal{V}_y & \xleftarrow{\omega(y \cdot g)} & T_y P \\
 \text{Ad}_{g^{-1}} \downarrow & & \downarrow (dr_g)_y & & \downarrow (dr_g)_y \\
 \mathfrak{g} & \xleftarrow{d(y \cdot g \cdot -)_e} & \mathcal{V}_{y \cdot g} & \xleftarrow{\omega(y)} & T_{y \cdot g} P
 \end{array} \quad (4.40)$$

が得られる。これは条件 2 の等式に他ならない。

逆に、条件 1 と条件 2 を満たす微分形式 $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ が与えられたとする。これはベクトル束の射 $\omega: TP \rightarrow M \times \mathfrak{g}$ を定める。条件 1 よりこれは全射であり、従って核 $\mathcal{H} = \text{Ker } \omega \subset TP$ は部分ベクトル束である。さらに、点 $y \in P$ におけるベクトルで $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{H}_y$ の元であるようなものを考える。これは \mathcal{V}_y の元なので、ある $\xi \in \mathfrak{g}$ を用いて $X_\xi(y)$ と表示することができる。さらに \mathcal{H}_y の元であることから $\omega(X_\xi(y)) = 0$ である。条件 1 を用いることで $\xi = 0$ が得られる。よって $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{H}_y = 0$ であり、 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{V} = TP$ であることがわかった。よって、 $\mathcal{H} \subset TP$ はファイバー束としての接続である。最後に、図式 (4.40) において、左側の四角形は常に可換、大きな四角形は条件 2 より可換であり、 $d(y \cdot -)_e$ および $d(y \cdot g \cdot -)_e$ が同型であることから、右の四角形が可換となる。この右の四角形の 2 つの水平方向の射の核をとることで、 $(dr_g)_y \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{y \cdot g}$ が得られる。よって $\mathcal{H} \subset TP$ は主 G 束としての P の接続である。 \square

定理 4.10. M を多様体、 G を Lie 群、 $P \rightarrow M$ を主 G 束とする。 G の Maurer-Cartan 形式を θ と書く。 ω を P の接続の接続形式とする。 P の切断 $\sigma: M \rightarrow P$ に対し、 $\mathcal{A}_\sigma = \sigma^* \omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ とおく。2 つの切断 $\sigma, \tau: M \rightarrow P$ をとり、 σ から τ への変換関数を $\varphi_{\sigma\tau}$ とする。すなわち、 $\varphi_{\sigma\tau}: M \rightarrow G$ は $\tau = \sigma \cdot \varphi_{\sigma\tau}$ が成立するような唯一の関数である。このとき、

$$\mathcal{A}_\tau = \text{Ad}(\varphi_{\sigma\tau}) \mathcal{A}_\sigma + \varphi_{\sigma\tau}^{-1} d\varphi_{\sigma\tau} \quad (4.41)$$

が成り立つ。ここで、右辺第 2 項は、Maurer-Cartan 形式の引き戻し $\varphi_{\sigma\tau}^* \theta$ を表している (注意 4.4 を参照)。

Proof. 作用写像 $P \times G \rightarrow P; (y, g) \mapsto g \cdot y$ のことを α と書く。

任意の $x \in M$ および $\xi \in T_x M$ をとる。また、 $\sigma(x), \tau(x), \varphi_{\sigma\tau}(x)$ のことを単に s, t, g と書くことにする。微分

$$d\alpha_{(s,g)}: T_s P \oplus T_g G \rightarrow T_t P \quad (4.42)$$

を

$$d\alpha_{(s,g)} = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (4.43)$$

$$\alpha_1 = d(- \cdot g)_s: T_s P \rightarrow T_t P, \quad (4.44)$$

$$\alpha_2 = d(s \cdot -)_g: T_g G \rightarrow T_t P \quad (4.45)$$

のように分解する. すると, $\tau: W \longrightarrow P$ は

$$M \xrightarrow{\sigma \times \varphi_{g\tau}} P \times G \xrightarrow{\alpha} P \quad (4.46)$$

という合成であるため,

$$(\mathcal{A}_\tau)_x(\xi) = (\omega_t \circ d\tau_x)\xi = (\omega_\tau \circ \alpha_1 \circ d\sigma_x)(\xi) + (\omega_\tau \circ \alpha_2 \circ (d\varphi_{\sigma\tau})_x)(\xi) \quad (4.47)$$

と書くことができる. 第 1 項については,

$$(\omega_\tau \circ \alpha_1 \circ d\sigma_x)(\xi) = (\omega_\tau \circ (dr_g)_s \circ d\sigma_x)(\xi) = (\sigma^* r_g^* \omega)_x(\xi) = \text{Ad}_g(\sigma^* \omega)_x(\xi) = \text{Ad}_g(\mathcal{A}_\sigma)_x(\xi) \quad (4.48)$$

となる. ここで定理 4.9 の 1 を用いた. 第 2 項について調べるために, 写像 $\omega_t \circ \alpha_2: T_g G \longrightarrow \mathfrak{g}$ と Maurer-Cartan 形式との関係について考える. $T_g G$ の元を $dl_g \eta$ ($\eta \in \mathfrak{g}$) という形で表示すると, ここでの値は

$$(\omega_t \circ \alpha_2)(dl_g \eta) = (\omega_t \circ d(s \cdot -)_g \circ d(g \cdot -)_e)(\eta) = \omega_t(d(sg \cdot -)_e(\eta)) = \omega_t(X_\eta(sg)) = \eta \quad (4.49)$$

となる. ここで最後に定理 4.9 の 2 を用いた. よって, $\omega_t \circ \alpha_2$ は Maurer-Cartan 形式の g での値 θ_g に他ならない. 従って, 式 4.47 の第 2 項は

$$(\omega_\tau \circ \alpha_2 \circ (d\varphi_{\sigma\tau})_x)(\xi) = (\theta_g \circ (d\varphi_{\sigma\tau})_x)(\xi) = (\varphi_{\sigma\tau}^* \theta_g)(\xi) \quad (4.50)$$

となる. 以上の計算より (4.41) が示された. \square

定理 4.11. M を多様体, G を Lie 群, $P \longrightarrow M$ を主 G 束とする. M の開被覆 $M = \cup_\lambda U_\lambda$ および各 U_λ 上での切断 $\sigma_\lambda: U_\lambda \longrightarrow P|_{U_\lambda}$ が与えられたとする. $\varphi_{\lambda\rho}: U_\lambda \cap U_\rho \longrightarrow G$ を σ_ρ から σ_λ への変換関数とする. 次の 2 つの集合を考える.

1. P 上の接続の全体.
2. 微分形式の集合 $\{\mathcal{A}_\lambda \in \Omega^1(U_\lambda, \mathfrak{g})\}_\lambda$ であって, 任意の λ, ρ について, $U_\lambda \cap U_\rho$ 上で

$$\mathcal{A}_\lambda = \text{Ad}(\varphi_{\lambda\rho})\mathcal{A}_\rho + \varphi_{\lambda\rho}^{-1} d\varphi_{\lambda\rho} \quad (4.51)$$

が成り立つものの全体.

これらの集合の間には自然な全単射が存在し, 集合 1 から集合 2 への写像は, $\mathcal{A}_\lambda = \sigma_\lambda^* \omega$ によって与えられる.

Proof. 集合 1 から集合 2 への写像が定まることは, 定理 4.10 より従う. 逆に, 集合 2 の元 $\{\mathcal{A}_\lambda\}_\lambda$ が与えられたとしよう. 定理 4.9 から容易にわかるように, 自明束の接続形式は, ある切断の引き戻すことにより, 底空間の \mathfrak{g} 値 1 形式と一対一に対応している. よって, U_ρ 上の自明束 $P|_{U_\rho}$ 上の接続形式 ω_ρ であって $\sigma_\rho^* \omega_\rho = \mathcal{A}_\rho$ となるようなものが唯一存在する. 定理 4.41 より $U_\lambda \cap U_\rho$ 上で,

$$\sigma_\rho^* \omega_\lambda = \text{Ad}(\varphi_{\lambda\rho})\mathcal{A}_\rho + \varphi_{\lambda\rho}^{-1} d\varphi_{\lambda\rho} \quad (4.52)$$

が成り立ち, 集合 2 の条件より,

$$\sigma_\rho^* \omega_\lambda = \mathcal{A}_\rho \quad (4.53)$$

となる. すなわち,

$$\sigma_\rho^* \omega_\lambda = \sigma_\rho^* \omega_\rho \quad (4.54)$$

が成り立つ。再び、接続形式はその引き戻しの結果から一意に定まることを用いると、

$$\omega_\lambda = \omega_\rho \quad (4.55)$$

が結論される。よって、微分形式の集合 $\{\omega_\lambda\}_\lambda$ は貼りあって、 P 上の接続形式すなわち集合 1 の元を定める。 \square

定義 4.19. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする。 $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続の接続形式とする。この接続に関して、ベクトル場の水平成分を取り出す写像を $h_\theta: \mathfrak{X}(P) \rightarrow \mathfrak{X}(P)$ と書く。 V を G の有限次元表現とする。このとき、

$$\nabla_\theta(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\omega(h_\theta(X_1), \dots, h_\theta(X_{k+1})) \quad (X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(P)) \quad (4.56)$$

より定まる写像

$$\nabla_\theta: \Omega_{\text{inv}}^k(P, V) \rightarrow \Omega_{\text{basic}}^{k+1}(P, V) \quad (4.57)$$

を θ に関する共変微分という。特に、定理 4.5 より、共変微分は写像

$$\Omega^k(M, P(V)) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, P(V)) \quad (4.58)$$

を定めるが、こちら共変微分と呼び、同じ記号 ∇_θ で表す。

Proof. G 不変微分形式 $\omega \in \Omega^k(P, V)$ に対し、 $\nabla_\theta(\omega)$ が基礎的であることは、次のようにして分かる。水平であることは明らかである。 G 不変性を示す。 $r_g: P \xrightarrow{\sim} P$ は同型であるから、この同型でベクトル場を押し出す写像 $dr_g: \mathfrak{X}(P) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(P)$ が定義できる。主 G 束の接続の定義より、 dr_g は水平・垂直方向への直和分解を保つ。よって、 $h_\theta \circ dr_g = dr_g \circ h_\theta$ が成り立つ。 $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(P)$ を任意にとる。すると、 ω の G 不変性を用いた

$$\begin{aligned} (r_g^* \nabla_\theta \omega)(X_0, \dots, X_k) &= d\omega(h_\theta(dr_g X_0), \dots, h_\theta(dr_g X_k)) \\ &= d\omega(dr_g(h_\theta X_0), \dots, dr_g(h_\theta X_k)) \\ &= (r_g^* d\omega)(h_\theta X_0, \dots, h_\theta X_k) \\ &= d(r_g^* \omega)(h_\theta X_0, \dots, h_\theta X_k) \\ &= \rho(g^{-1})d\omega(h_\theta X_0, \dots, h_\theta X_k) \\ &= \rho(g^{-1})(\nabla_\theta \omega)(X_0, \dots, X_k) \end{aligned}$$

という計算より、 $\nabla_\theta \omega$ が G 不変であることがわかる。 \square

定理 4.12. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする。 $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続の接続形式とする。 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ を G の有限次元表現とする。 *Lie* 代数 \mathfrak{g} の V における表現

$$\mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V; \quad \xi \otimes v \mapsto d\rho_e(\xi)v \quad (4.59)$$

を用いて、写像

$$\Omega^*(P, \mathfrak{g} \otimes V) \rightarrow \Omega^*(P, V) \quad (4.60)$$

が定まる。この写像と外積を合成することで定義される写像

$$\Omega^k(P, \mathfrak{g}) \otimes \Omega^l(P, V) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{k+l}(P, \mathfrak{g} \otimes V) \rightarrow \Omega^{k+l}(P, V) \quad (4.61)$$

のことを $\omega \otimes \eta \longrightarrow \omega \wedge_\rho \eta$ と書くことにする. このとき, 微分形式 $\omega \in \Omega_{\text{basic}}^k(P, V)$ に対し,

$$\nabla_\theta \omega = d\omega + \theta \wedge_\rho \omega \quad (4.62)$$

が成り立つ.

Proof. まず, 右辺が水平であることを示す. 点 $y \in P$ と y における任意の垂直ベクトルをとる. 右作用の微分により得られる同型 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_y P$ によってこれらのベクトル空間を同一視し, 考えている垂直ベクトルを $\xi \in \mathfrak{g}$ と表記する. このとき, $\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$ と i_ξ の Leibnitz 則より,

$$i_\xi(d\omega + \theta \wedge_\rho \omega) = \mathcal{L}_\xi \omega - (d \circ i_\xi)\omega + i_\xi \theta \wedge_\rho \omega - \theta \wedge_\rho i_\xi \omega \quad (4.63)$$

である. ω の水平性より,

$$i_\xi \omega = 0 \quad (4.64)$$

である. さらに, ω の G 不変性 $r_g^* \omega = \rho(g^{-1})\omega$ の両辺を g について ξ 方向微分することで, 等式

$$\mathcal{L}_\xi \omega = -(d\rho_e \xi)\omega \quad (4.65)$$

が得られる. また, 接続形式の条件 1 より,

$$i_\xi \theta = \theta_y(\xi) = \xi \quad (4.66)$$

である. これらを代入することで,

$$i_\xi(d\omega + \theta \wedge_\rho \omega) = -(d\rho_e \xi)\omega + \xi \wedge_\rho \omega = 0 \quad (4.67)$$

を得る.

主張の等式 $\nabla_\theta \omega = d\omega + \theta \wedge_\rho \omega$ の両辺が共に水平であることがわかったので, 等式を示すには, 水平ベクトル場 $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(P)$ を任意に取り,

$$(\nabla_\theta \omega)(X_0, \dots, X_k) = (d\omega + \theta \wedge_\rho \omega)(X_0, \dots, X_k) \quad (4.68)$$

を示せば良い. 接続形式 θ の定義より, 水平ベクトル場 X_i に対し $\theta(X_i) = 0$ であるから, 結局,

$$(\nabla_\theta \omega)(X_0, \dots, X_k) = d\omega(X_0, \dots, X_k) \quad (4.69)$$

を示せば良い. これは明らかである. \square

定理 4.13. M を多様体, G を Lie 群, $P \longrightarrow M$ を主 G 束とする. $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続の接続形式とする. $\rho: G \longrightarrow \text{GL}(V)$ を G の有限次元表現とする. $\sigma: M \longrightarrow P$ を切断とする. $\mathcal{A} = \sigma^* \theta$ とおく. 切断 σ から得られるベクトル束 $P(V)$ の自明化

$$P(V) \xrightarrow{\sim} M \times V; \quad [(\sigma(x), v)] \longmapsto (x, v) \quad (4.70)$$

があることに注意する. この同型のもとでの共偏微分

$$\nabla_\theta: \Omega^k(M, V) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M, V) \quad (4.71)$$

は

$$\nabla_\theta \omega = d\omega + \mathcal{A} \wedge_\rho \omega \quad (4.72)$$

と表示される.

Proof. 定理 (4.12) の等式の両辺を σ で引き戻せば良い. \square

定理 4.14. $(\rho, V), (\sigma, W)$ をそれぞれ G の有限次元表現とする. $\omega \in \Omega_{\text{basic}}^k(P, V)$ および $\eta \in \Omega_{\text{basic}}^l(P, W)$ について,

$$\nabla_{\theta}(\omega \otimes \eta) = \nabla_{\theta}\omega \otimes \eta + (-1)^k \omega \otimes \nabla_{\theta}\eta \quad (4.73)$$

が成り立つ.

Proof. まず,

$$\theta \wedge_{\rho \otimes \sigma} (\omega \otimes \eta) = (\theta \wedge_{\rho} \omega) \otimes \eta + (-1)^k \omega \otimes (\theta \wedge_{\sigma} \eta) \quad (4.74)$$

であることが容易に示せる. これと公式 4.13 を用いて

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta}(\omega \otimes \eta) &= d(\omega \otimes \eta) + \theta \wedge_{\rho \otimes \sigma} (\omega \otimes \eta) \\ &= d\omega \otimes \eta + (-1)^k \omega \otimes d\eta + (\theta \wedge_{\rho} \omega) \otimes \eta + (-1)^k \omega \otimes (\theta \wedge_{\sigma} \eta) \\ &= \nabla_{\theta}\omega \otimes \eta + (-1)^k \omega \otimes \nabla_{\theta}\eta \end{aligned}$$

と示される. \square

定義 4.20. M を多様体, G を *Lie* 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続の接続形式とする. 随伴表現により \mathfrak{g} を G の表現であるとみなす. このとき, 接続形式の性質 2 より, $\theta \in \Omega_{\text{inv}}^1(P, \mathfrak{g})$ である. よって, θ の共偏微分 $\nabla_{\theta}\theta$ が定義され, これは $\Omega_{\text{basic}}^1(P, \mathfrak{g}) \cong \Omega^1(M, P(\mathfrak{g}))$ の元である. この $\Omega_{\text{basic}}^1(P, \mathfrak{g})$ あるいは $\Omega^1(M, P(\mathfrak{g}))$ の元である微分形式を, この接続の曲率といい,

$$\tilde{F}_{\theta} \in \Omega_{\text{basic}}^1(P, \mathfrak{g}) \quad (4.75)$$

および

$$F_{\theta} \in \Omega^1(M, P(\mathfrak{g})) \quad (4.76)$$

と書く.

定義 4.21. M を多様体, \mathfrak{g} を *Lie* 代数とする. *Lie* 積が誘導する写像

$$\bigotimes^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}; \quad g \otimes h \rightarrow [g, h] \quad (4.77)$$

が存在する. よって, 積

$$\Omega^p(M, \mathfrak{g}) \times \Omega^q(M, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+q}(M, \bigotimes^2 \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^{p+q}(M, \mathfrak{g}) \quad (4.78)$$

が定まる. この写像を $(\omega, \eta) \mapsto [\omega \wedge \eta]$ と書く.

注意 4.8. *Lie* 積の交代性と外積の交代性により, 定義 4.21 の積の交代性は

$$[\alpha \wedge \beta] = (-1)^{pq+1} [\beta \wedge \alpha] \quad (4.79)$$

である.

注意 4.9. $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ とする. 定義 4.21 の積について,

$$[\alpha \wedge [\beta \wedge \gamma]] + [\gamma \wedge [\alpha \wedge \beta]] + [\beta \wedge [\gamma \wedge \alpha]] = 0 \quad (4.80)$$

が成り立つ. 実際, $\wedge TM$ の局所枠 $(e_i)_i$ をとって

$$\alpha = \alpha^i e_i, \quad \beta = \beta^j e_j, \quad \gamma = \gamma^k e_k \quad (\alpha^i, \beta^j, \gamma^k \in \mathfrak{g}) \quad (4.81)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} [\alpha \wedge [\beta \wedge \gamma]] &= [\alpha^i, [\beta^j, \gamma^k]] e_i \wedge e_j \wedge e_k \\ [\gamma \wedge [\alpha \wedge \beta]] &= [\gamma^k, [\alpha^i, \beta^j]] e_k \wedge e_i \wedge e_j = [\gamma^k, [\alpha^i, \beta^j]] e_i \wedge e_j \wedge e_k \\ [\beta \wedge [\gamma \wedge \alpha]] &= [\beta^j, [\gamma^k, \alpha^i]] e_j \wedge e_k \wedge e_i = [\beta^j, [\gamma^k, \alpha^i]] e_i \wedge e_j \wedge e_k \end{aligned}$$

であるから, これらの和は

$$([\alpha^i, [\beta^j, \gamma^k]] + [\gamma^k, [\alpha^i, \beta^j]] + [\beta^j, [\gamma^k, \alpha^i]]) e_i \wedge e_j \wedge e_k = 0 \quad (4.82)$$

となる.

定理 4.15. M を多様体, G を Lie 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続の接続形式とする. 曲率形式について, 公式

$$\tilde{F}_\theta = d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] \quad (4.83)$$

が成り立つ.

Proof. 左辺は定義から明らかに水平的である. 一方, 右辺も水平的であることは, 次の計算によって確かめられる. 任意の点 $y \in P$ をとり, 同型 $d(y \cdot -)_e: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} T_y P$ によりこれらのベクトル空間を同一視する. $\xi \in \mathfrak{g}$ をとる. このとき, まず

$$i_\xi d\theta = \mathcal{L}_\xi \theta - di_\xi \theta = \mathcal{L}_\xi \theta \quad (4.84)$$

である. さらに, θ の G 不変性 $r_g^* \theta = \text{Ad}_{g^{-1}} \theta$ の両辺を g について ξ 方向微分することで, 最終的に等式

$$i_\xi d\theta = \mathcal{L}_\xi \theta = \text{ad}_{-\xi} \theta = [-\xi, \theta] = -[\xi, \theta] \quad (4.85)$$

を得る. 一方,

$$i_\xi [\theta \wedge \theta] = [i_\xi \theta, \theta] - [\theta, i_\xi \theta] = 2[i_\xi \theta, \theta] = 2[\xi, \theta] \quad (4.86)$$

である. ここで, 挿入演算子 i_ξ が -1 次の微分作用素であることと, 接続形式の条件 1 を用いた. 以上の結果を用いると, 公式の右辺に i_ξ を作用させると 0 になること, すなわち水平性が示される.

公式の両辺が水平的であることが示されたので, 両辺を水平ベクトル場で評価した値が等しいことを確認すればよいが, これは共偏微分と曲率形式の定義から明らかである. \square

定理 4.16. M を多様体, G を Lie 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続の接続形式とする. $\sigma: M \rightarrow P$ を切断とし, $\mathcal{A} = \sigma^* \theta$ とおく. 切断 σ の存在により, G の随伴表現に付随するベクトル束 $P(\mathfrak{g})$ には自然な自明化が存在する. これにより F_θ は自明ベクトル束 $M \times \mathfrak{g}$ に値を持つとみなすことができる. この状況で, 曲率形式について公式

$$F_\theta = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}] \quad (4.87)$$

が成り立つ.

Proof. 定理 4.15 の両辺を σ で引き戻せばよい. \square

定理 4.17. M を多様体, G を Lie 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする. $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続の接続形式とする. このとき, Bianchi の恒等式

$$\nabla_\theta \tilde{F}_\theta = 0, \quad \nabla_\theta F_\theta = 0 \quad (4.88)$$

が成り立つ.

Proof. 後者は前者より従うので, 前者を示す. まず, $\alpha \in \Omega^k(P, \mathfrak{g})$, $\beta \in \Omega^k(P, \mathfrak{g})$ について $\alpha \wedge_{\text{ad}} \beta = [\alpha, \beta]$ であることに注意すると,

$$\nabla_\theta \tilde{F}_\theta = d \left(d\theta + \frac{1}{2} [\theta \wedge \theta] \right) + \theta \wedge_{\text{ad}} \left(d\theta + \frac{1}{2} [\theta \wedge \theta] \right) \quad (4.89)$$

$$= \frac{1}{2} d[\theta \wedge \theta] + [\theta \wedge d\theta] + \frac{1}{2} [\theta \wedge [\theta \wedge \theta]] \quad (4.90)$$

である. 最初の 2 項については,

$$d[\theta \wedge \theta] = [d\theta \wedge \theta] - [\theta \wedge d\theta] = -2[\theta \wedge d\theta] \quad (4.91)$$

より打ち消しあう. この計算については注意 4.8 も参照せよ. 最後の項については, 注意 4.9 より 0 である. \square

4.7 Yang-Mills 方程式

M を擬 Riemann 多様体, G を Lie 群, $P \rightarrow M$ を主 G 束とする.

定義 4.22. $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続の接続形式とし, $F_\theta \in \Omega^2(M, P(\mathfrak{g}))$ をその曲率とする.

1. Hodge \star 作用素

$$\star: \bigwedge^p TM^* \xrightarrow{\cong} \bigwedge^{n-p} TM^* \quad (4.92)$$

に随伴束 $P(\mathfrak{g})$ をテンソル積して得られるバンドルの同型も \star と書く. これにより $\star F_\theta \in \Omega^{n-2}(M, P(\mathfrak{g}))$ が得られる.

2. $(\cdot, \cdot): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ を随伴作用について不変な内積とする. すなわち

$$\forall g \in G, \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}, \quad (\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\eta)) = (\xi, \eta) \quad (4.93)$$

が成り立つ. この内積は, 非退化双線形形式

$$\Omega^p(M, P(\mathfrak{g})) \times \Omega^{n-p}(M, P(\mathfrak{g})) \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} \Omega^n(M, \mathbb{R}) \quad (4.94)$$

を定める. この積も (\cdot, \cdot) と書かれる.

内積 (\cdot, \cdot) に関する接続形式 θ の Yang-Mills 作用 $S_{\text{YM}}(\theta)$ とは

$$S_{\text{YM}}(\theta) = \int_M (F_\theta, \star F_\theta) \quad (4.95)$$

のことである.

以下, Ad 不変内積 $(\cdot, \cdot): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ を固定し, これに関する Yang-Mills 作用を考える.

定理 4.18. 接続形式 $\theta \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ が $S_{\text{YM}}(\theta)$ の停留点である必要十分条件は, *Yang-Mills* 方程式

$$\nabla_\theta \star F_\theta = 0 \quad (4.96)$$

を満たすことである.

Proof. 接続形式 θ とその変分 $\theta + \eta$ を考える. 接続形式の差である η は基礎的である. これより, 共変微分 $\nabla_\theta \eta \in \Omega_{\text{basic}}^2(P, \mathfrak{g})$ が定義され, 公式

$$\nabla_\theta \eta = d\eta + [\theta, \eta] \quad (4.97)$$

が成り立つ. これを用いると,

$$F_{\theta+\eta} = d(\theta + \eta) + \frac{1}{2}[\theta + \eta, \theta + \eta] = F_\theta + \nabla_\theta \eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta] \quad (4.98)$$

を得る. Hodge \star 作用素の性質

$$\int_M (\alpha, \star \beta) = \int_M (\star \alpha, \beta) \quad (4.99)$$

および, Leibnitz 則 4.14 より ∇_θ についての部分積分の公式が成立することに注意すると,

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}}(\theta + \eta) - S_{\text{YM}}(\theta) &= \int_M (F_\theta, \star \nabla_\theta \eta) + (\nabla_\theta \eta, \star F_\theta) + O(\eta^2) \\ &= 2 \int_M (\nabla_\theta \eta, \star F_\theta) + O(\eta^2) \\ &= -2 \int_M (\eta, \nabla_\theta \star F_\theta) + O(\eta^2) \end{aligned}$$

となる. よって停留条件は Yang-Mills 方程式 $\nabla_\theta \star F_\theta = 0$ である. \square

4.8 Dirac 方程式

定義 4.23. M を符号が (p, q) の擬 Riemann 多様体とし, そのフレーム束を FM とする. 普遍被覆写像 $\text{Spin}(p, q) \rightarrow \text{SO}(p, q)$ を π と書く. M のスピノール構造とは, $\text{Spin}(p, q)$ 主束 SM と π 同変写像 $\lambda: SM \rightarrow FM$ の組 (SM, λ) のことである. スピノール構造を持つ多様体において, $\text{Spin}(p, q)$ 束 SM はスピノール束と呼ばれる.

注意 4.10. 定理 4.2 により, 写像 λ により同型 $FM = SM \times_{\text{Spin}(p, q)} \text{SO}(p, q)$ が与えられている. また, コホモロジー間の写像 $\pi_*: H^1(M, \text{Spin}(p, q)) \rightarrow H^1(M, \text{SO}(p, q))$ によって SM が定めるコホモロジー類は FM が定めるコホモロジー類にうつる.

以下では, 擬 Riemann 多様体 M にはスピノール構造 λ が与えられているものとする.

定義 4.24. 被覆写像 $\pi: \text{Spin}(p, q) \rightarrow \text{SO}(p, q)$ により自然な同型 $d\pi: \mathfrak{spin}(p, q) \rightarrow \mathfrak{so}(p, q)$ が定まっている. よって, *Levi-Civita* 接続の接続形式 $\Theta \in \Omega^1(M, \text{SO}(M))$ から, 微分形式 $d\pi^{-1}(\lambda^* \Theta) \in \Omega^1(SM, \mathfrak{spin}(p, q))$ が定まる. この微分形式は主 $\text{Spin}(p, q)$ 束 SM の接続形式であり, 対応する接続を SM の *Levi-Civita* 接続と呼ぶ.

以下では、 G を Lie 群（ゲージ群と呼ばれる）とし、 V は有限次元複素ベクトル空間であって、表現 $\rho_C: \text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(V)$ と $\rho_G: G \rightarrow \text{GL}(V)$ を持つものとする。また、 $\text{Im}(\rho_C)$ の元と $\text{Im}(\rho_G)$ の元は互いに可換であるとする。

P を主 G 束とし、主 $\text{Spin}(p, q) \times G$ 束 $SM \times_M P$ のことを SP と書く。また、 $\text{Spin}(p, q) \times G$ 表現 V に付随するベクトル束のことを SPV と書く。

定義 4.25. 線形写像

$$\mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\rho_C} \text{End}(V) \quad (4.100)$$

はベクトル束の準同型

$$TM \longrightarrow \text{End}_M(SP) \quad (4.101)$$

を誘導する（右辺は SPV のベクトル束としての自己準同型束である）。具体的には、これは次の写像の合成である。

1. スピン構造から得られる同型

$$TM = FM \times_{\text{SO}(p, q)} \mathbb{R}^{p+q} \cong SM \times_{\text{Spin}(p, q)} \text{SO}(p, q) \times_{\text{SO}(p, q)} \mathbb{R}^{p+q} = SM \times_{\text{Spin}(p, q)} \mathbb{R}^{p+q}. \quad (4.102)$$

ここで、 $\text{Spin}(p, q)$ の \mathbb{R}^{p+q} への作用は $\sigma \cdot v = \pi(\sigma) \cdot v = \sigma \cdot v \cdot \sigma^{-1}$ により与えられている。

2. 包含写像 $\mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R})$ が誘導する写像

$$SM \times_{\text{Spin}(p, q)} \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow SM \times_{\text{Spin}(p, q)} \text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R}). \quad (4.103)$$

ここで、 $\text{Spin}(p, q)$ の $\text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R})$ への作用は $\sigma \cdot v = \sigma \cdot v \cdot \sigma^{-1}$ により与えられている。

3. 自然な同型

$$SM \times_{\text{Spin}(p, q)} \text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R}) = (SM \times_M P) \times_{\text{Spin}(p, q) \times G} \text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R}). \quad (4.104)$$

ここで、 $\text{Spin}(p, q)$ の $\text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R})$ への作用は $(\sigma, g) \cdot v = \sigma \cdot v \cdot \sigma^{-1}$ により与えられている。

4. ρ_C が誘導する写像

$$(SM \times_M P) \times_{\text{Spin}(p, q) \times G} \text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R}) \longrightarrow (SM \times_M P) \times_{\text{Spin}(p, q) \times G} \text{End}(V). \quad (4.105)$$

ここで、 $\text{End}(V)$ への $\text{Spin}(p, q) \times G$ への作用は

$$(\sigma, g) \cdot f = \rho_C(\sigma) \circ \rho_G(g) \circ f \circ \rho_C(\sigma)^{-1} \circ \rho_G(g)^{-1} \quad (4.106)$$

により与えられている。 $\text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R})$ と G の V への作用の可換性により、写像 $\rho_C: \text{Cl}^{p+q}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(V)$ は $\text{Spin}(p, q) \times G$ 準同型写像である。

5. 自然な同型

$$(SM \times_M P) \times_{\text{Spin}(p, q) \times G} \text{End}(V) = \text{End}_M(SP). \quad (4.107)$$

これは定理 4.3 により与えられるものである。

この写像 $TM \rightarrow \text{End}_M(SP)$ により定まる積を $TM \otimes_M SP \rightarrow SP; v \otimes \varphi \mapsto v \cdot \varphi$ という記号で書き、Clifford 積と呼ぶ。また、計量による同型 $TM \cong TM^\vee$ を用いて、同様に微分形式の Clifford 積 $TM^\vee \otimes_M SP \rightarrow SP$ も定める。

定義 4.26. $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ を P の接続形式とする。このとき、ベクトル束の写像

$$SPV \xrightarrow{\nabla_{\Theta \otimes \theta}} TM^\vee \otimes_M SPV \longrightarrow SPV \quad (4.108)$$

が定まる。ここで、 $\Theta \in \Omega^1(SM, \mathfrak{spin}(p, q))$ は SM の *Levi-Civita* 接続であり、1 つ目の写像は SP 上の接続形式 $\Theta \otimes \theta$ による共偏微分である。2 つ目の写像は *Clifford* 積である。これを *Dirac* 作用素と呼び、 D^θ と書く。

以下では、正の数 m を固定する。また、 \mathbb{R} 線型同型写像 $V \xrightarrow{\sim} \bar{V}^\vee; \psi \mapsto \bar{\psi}$ であって、 $\mathrm{Cl}^{p+q}(\mathbb{R})$ の表現としても G の表現としても同型であるようなものが与えられているとする。このとき、ベクトル束の双線型形式

$$SP\bar{V}^\vee \otimes SPV \longrightarrow SP\mathbb{C} = M \times \mathbb{C}; \bar{\psi} \otimes \psi' \mapsto \bar{\psi}\psi' \quad (4.109)$$

が定まることに注意する。

定義 4.27. *Dirac* 作用とは、

$$S_{\mathrm{Dirac}}(\psi, \theta) = \int_M \star(\bar{\psi}(D^\theta + m)\psi) \quad (4.110)$$

のことである。

定理 4.19. (*Dirac* 方程式)

定義 4.28. *Dirac* 作用 $S_{\mathrm{Dirac}}(\psi, \theta)$ のもとで、*Dirac* 場 $\psi \in \Gamma(M, SPV)$ に伴う電流密度とは、*Clifford* 積 $(X, \psi) \mapsto X \cdot \psi$ とペアリング $(\bar{\psi}, \psi') \mapsto \bar{\psi}\psi'$ を用いて構成される写像

$$j: P(\mathfrak{g}) \otimes TM^\vee \longrightarrow \mathbb{C} \times M; \xi \otimes \omega \mapsto \bar{\psi}(\omega \cdot \xi\psi) \quad (4.111)$$

のことである (\mathfrak{g} は G の随伴表現である)。これは $P(\mathfrak{g})$ の切断にパラメータづけられた M 上のベクトル場であると見做すことができる。

定理 4.20. θ の変分 $\eta \in \Omega^1_{\mathrm{basic}}(P, \mathfrak{g}) \cong \Omega^1(M, P(\mathfrak{g}))$ について、*Dirac* 作用 $S_{\mathrm{Dirac}}(\psi, \theta)$ の変分は

$$S_{\mathrm{Dirac}}(\psi, \theta + \eta) - S_{\mathrm{Dirac}}(\psi, \theta) = \int_M \star(j, \eta) \quad (4.112)$$

となる。

5 量子力学

5.1 量子化

状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ の時間発展方程式は、エルミート演算子 H を用いて

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (5.1)$$

と書ける。

シュレーディンガー方程式を使って、観測量 O の期待値の運動方程式を求めると、

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | i[O, H] | \psi(t) \rangle \quad (5.2)$$

となる。ここに現れている積 $(A, B) \mapsto i[A, B]$ は、観測量（すなわちエルミート演算子）の空間に定まる Lie 積であることに注意する。

一方、ハミルトン力学によると、物理量 \mathcal{O} の運動方程式は、ハミルトニアン \mathcal{H} を用いて

$$\frac{d}{dt}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}, \mathcal{H}\} \quad (5.3)$$

と書くことができる。ここで $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ は物理量 \mathcal{A}, \mathcal{B} のポアソン積である。これは定義によると、物理量（すなわち相空間上の関数）の空間に定まる Lie 積であり、かつ $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$ を満たすものである（ Q_i はそれぞれ、 i 番目の力学変数の位置とその正準共役運動量である）。明示的には、公式

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q_i} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial P_i} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial P_i} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial Q_i} \right) \quad (5.4)$$

で与えられる。特に、位置 Q_i と運動量 P_i の運動方程式は

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \quad (5.5)$$

となる（正準運動方程式）。

古典系があったとき、それを近似的に再現する量子系を構成することを、その古典系を量子化（quantize）するという。量子化は、より精緻な物理理論を得ようとするものであるから、単に論理的な考察だけでは達成できず、いくつかの仮説が必要となる。特に、古典系の物理量をどのエルミート演算子に対応させるかを仮定しなくてはならない。式 (5.2) と (5.3) を比較することで、エルミート演算子の選び方について重要な指針が得られる。

1. 古典系の一般化位置 Q_i に対応するエルミート演算子 Q_i と、その正準共役運動量に対応するエルミート演算子 P_i は、関係 $i[Q_i, P_j] = \delta_{ij} \iff [P_i, Q_j] = i\delta_{ij}$ を満たすように選ぶべきである。
2. 古典系におけるハミルトニアンの定義式 $\mathcal{H} = \mathcal{H}((P_i)_i, (Q_i)_i)$ を与える多項式を \mathcal{H} とするとき、量子系では、 \mathcal{H} のある非可換多項式への持ち上げ H を用いて $H = H((P_i)_i, (Q_i)_i)$ という関係式が成り立つべきである。

このルールに基づいて量子化を行なったとしよう。公式 (5.4) の証明と似た考察により、非可換多項式 f に対し、

$$i[Q_i, f] = \frac{\partial f}{\partial P_i}, \quad i[P_i, f] = -\frac{\partial f}{\partial Q_i} \quad (5.6)$$

が示せる（両辺が f に作用する微分作用素であることから、 $f = P_j, f = Q_j$ の場合に成り立つことを確認すれば良い）。よって、位置演算子 Q_i と運動量演算子 P_i の期待値は、次の方程式に従うことが保証される。

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | Q_i | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \partial H / \partial P_i | \psi(t) \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | P_i | \psi(t) \rangle = -\langle \psi(t) | \partial H / \partial Q_i | \psi(t) \rangle \quad (5.7)$$

したがって、量子系の位置演算子と運動量演算子の期待値が従う運動方程式は、古典系での運動方程式と等しくなる。以上の方針による量子化を正準量子化（canonical quantization）という。

5.2 Green 関数

力学変数のインデックスの集合を P とする。ハミルトニアン H の固有状態の全体を $\{|n\rangle\}_n$ と書き、状態 $|n\rangle$ のエネルギー固有値を E_n とする。これらの固有状態のうち、エネルギーが最小の状態 $|0\rangle$ は縮退していないと仮定する。

以下では、 $\delta \in (0, 2\pi)$ を固定したとき、写像 $te^{-i\delta} \mapsto t$ によって部分集合 $e^{-i\delta}\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ を数直線 \mathbb{R} と同一視する。これにより、 $e^{-i\delta}\mathbb{R}$ の元の大小関係を定義する。また、関数 $f: e^{-i\delta}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、 $\tau = te^{-i\delta}$ における微分係数 $\frac{df}{d\tau}(\tau)$ とは、

$$\frac{df}{d\tau}(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f((t+\varepsilon)e^{-i\delta}) - f(te^{-i\delta})}{(t+\varepsilon)e^{-i\delta} - te^{-i\delta}} \quad (5.8)$$

のことである。

定義 5.1. 実数 $\delta \in (0, 2\pi)$ に対し n 点 Green 関数 $G_\delta((t_1, p_1), \dots, (t_n, p_n))$ とは、変数 $t_1, \dots, t_n \in e^{-i\delta}\mathbb{R}$ と力学変数のインデックス $p_1, \dots, p_n \in P$ に対する関数

$$G_\delta((t_1, p_1), \dots, (t_n, p_n)) = \langle 0 | \mathcal{T}\{Q_{p_1}(t_1) \cdots Q_{p_n}(t_n)\} | 0 \rangle \quad (5.9)$$

のことをいう。ここで $Q_{p_i}(t) = e^{iHt}Q_{p_i}e^{-iHt}$ である。ただし、以上は形式的な定義である（次の定理を見よ）。

注意 5.1. 本来は Green 関数とは場の量子論の文脈で用いられる用語であるが、類似物を量子力学の文脈で議論するために同じ用語を用いている。

定理 5.1. $\delta > 0$ に対し、Green 関数 $G_\delta((t_1, p_1), \dots, (t_n, p_n))$ は収束し、解析的である。

Proof. H の固有値は下に有界であることから、 $e^{iH\tau} = \sum_n e^{iE_n\tau} |n\rangle \langle n|$ は $\Im\tau > 0$ の範囲で絶対収束し、解析的である。形式的には $e^{iH\tau} |0\rangle = |0\rangle$ であるから、 $t_1 > \cdots > t_n$ に対し、

$$G_\delta((t_1, p_1), \dots, (t_n, p_n)) = \langle 0 | Q_{p_1} e^{-iH(t_1-t_2)} Q_{p_2} \cdots Q_{p_{n-1}} e^{-iH(t_{n-1}-t_n)} Q_{p_n} | 0 \rangle \quad (5.10)$$

であり、 $\Im(t_i - t_{i-1}) < 0$ であるから主張を得る。 \square

以下で J と書けば、コンパクト台な連続関数 $J: e^{-i\delta}\mathbb{R} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ のこととする。 J はソース関数と呼ばれる。

定義 5.2. 任意のソース関数 J と $\tau \in \mathbb{C}$ に対し、

$$H^J(\tau) = H + \sum_p J((\tau, p)) Q_p \quad (5.11)$$

とおく。

定義 5.3. 任意の J , $\delta \in (0, 2\pi)$ と $\tau_0, \tau_1 \in e^{-i\delta}\mathbb{R}$ に対し、演算子 $U^J(\tau_1, \tau_0)$ とは次の条件を満たす唯一のものである。

$$U^J(\tau, \tau) = 1, \quad i \frac{\partial}{\partial \tau_1} U^J(\tau_1, \tau_0) = H^J(\tau_1) U^J(\tau_1, \tau_0). \quad (5.12)$$

また、 $J = 0$ のときは U^J のことを単に U と書く。

定理 5.2. $J = 0$ のとき、 $\tau_0, \tau_1 \in e^{-i\delta}\mathbb{R}$ に対し、

$$U(\tau_1, \tau_0) = e^{-iH(\tau_1 - \tau_0)} \quad (5.13)$$

である。特に、 $Q_p(\tau) = U(0, \tau) Q_p U(\tau, 0)$ である。

Proof. 偏微分方程式の解になっていることを確かめれば良い。 \square

定理 5.3. $\delta \in (0, 2\pi)$ を固定し、以下の σ, τ_0, τ_1 は $e^{-i\delta}\mathbb{R}$ の元とする. このとき, $U^J(\tau_1, \tau_0)$ の J についての汎関数微分は次のようになる.

$$\frac{\delta U^J(\tau_1, \tau_0)}{\delta J(\sigma, p)} = \begin{cases} -iU^J(\tau_1, \sigma)Q_p U^J(\sigma, \tau_0) & (\sigma \in (\tau_1, \tau_0)) \\ 0 & (\sigma \notin [\tau_0, \tau_1]) \end{cases} \quad (5.14)$$

Proof. 示すべき等式の右辺を $F_{\tau_1, \tau_0}(\sigma)$ とおく. $e^{-i\delta}\mathbb{R} \times \{p\}$ に台を持つ任意のコンパクト台関数 $\Delta J_p(\sigma)$ に対し,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta U^J(\tau_1, \tau_0)}{\delta J_p(\sigma, p)} \Delta J_p(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_1, \tau_0}(\sigma) \Delta J_p(\sigma) d\sigma \quad (5.15)$$

であることを示せば良い. この左辺には汎関数微分の定義を用い, この右辺には $F_{\tau_1, \tau_0}(\sigma)$ の定義を代入することで, 示すべき等式は

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} U^{J+\varepsilon\Delta J_p}(\tau_1, \tau_0) \right|_{\varepsilon=0} = -i \int_{\tau_0}^{\tau_1} U^J(\tau_1, \sigma) Q_p U^J(\sigma, \tau_0) \Delta J_p(\sigma) d\sigma \quad (5.16)$$

となる. τ_0 は固定し, この等式の両辺を τ_1 の関数であるとみなす. $\tau_1 = \tau_0$ のときは両辺ともに 0 であり等しいから, 両辺が同じ一階の常微分方程式を満たすことを示せば良い. 実際, 両辺共に関数 $f(\tau_1)$ についての常微分方程式

$$i \frac{df}{d\tau_1}(\tau_1) = Q_p U^J(\tau_1, \tau_0) \Delta J(\tau_1) + H^J(\tau_1) f(\tau_1) \quad (5.17)$$

を満たすことが示される.

まず, 左辺の τ_1 による微分は, (微分と極限の交換および) 積の微分法を用いて,

$$\begin{aligned} i \left. \frac{d}{d\tau_1} \frac{dU^{J+\varepsilon\Delta J_p}(\tau_1, \tau_0)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{dH^{J+\varepsilon\Delta J_p}(\tau_1) U^{J+\varepsilon\Delta J_p}(\tau_1, \tau_0)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \frac{dH^{J+\varepsilon\Delta J_p}(\tau_1)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} U^J(\tau_1, \tau_0) + H^J(\tau_1) \left. \frac{dU^{J+\varepsilon\Delta J_p}(\tau_1, \tau_0)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \Delta J_p(\tau_1) Q_p U^J(\tau_1, \tau_0) + H^J(\tau_1) \left. \frac{dU^{J+\varepsilon\Delta J_p}(\tau_1, \tau_0)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

となるのでよい. 一方, 右辺の τ_1 による微分は, 容易に証明できる公式

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x, y) dy = f(x, x) + \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (5.18)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau_1} \int_{\tau_0}^{\tau_1} U^J(\tau_1, \sigma) Q_p U^J(\sigma, \tau_0) \Delta J_p(\sigma) d\sigma \\ &= U^J(\tau_1, \tau_1) Q_p U^J(\tau_1, \tau_0) \Delta J_p(\tau_1) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dU^J(\tau_1, \sigma)}{d\tau_1} Q_p U^J(\sigma, \tau_0) \Delta J_p(\sigma) d\sigma \\ &= Q_p U^J(\tau_1, \tau_0) \Delta J_p(\tau_1) - iH^J(\tau_1) \int_{\tau_0}^{\tau_1} Q_p U^J(\sigma, \tau_0) \Delta J_p(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

と計算されるので, こちらもよい. □

定理 5.4. $\delta \in (0, 2\pi)$ を固定し, 相異なる $\tau_1, \dots, \tau_n \in e^{-i\delta}\mathbb{R}$ をとる. また, 十分に大きい $\tau \in e^{-i\delta}\mathbb{R}$ をとる ($e^{-i\delta}\mathbb{R}$ を数直線と同一視して順序を与えていることに注意). このとき,

$$i^n \left. \frac{\delta^n U^J(\tau, -\tau)}{\delta J(\tau_1, p_1) \cdots \delta J(\tau_n, p_n)} \right|_{J=0} = U(\tau, 0) \mathcal{T}\{Q_{p_1}(\tau_1) \cdots Q_{p_n}(\tau_n)\} U(0, -\tau) \quad (5.19)$$

が成り立つ。

Proof. $\tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_n$ であると仮定する。この仮定により一般性は失われない。このとき、定理 5.3 と性質 $U(\tau'', \tau) = U(\tau'', \tau')U(\tau', \tau)$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\delta^n U^J(\tau, -\tau)}{\delta J(\tau_1, p_1) \cdots \delta J(\tau_n, p_n)} \Big|_{J=0} &= U(\tau, \tau_1) Q_{p_1} U(\tau_1, \tau_2) \cdots U(\tau_{n-1}, \tau_n) Q_{p_n} U(\tau_n, -\tau) \\ &= U(\tau, 0) Q_{p_1}(\tau_1) \cdots Q_{p_n}(\tau_n) U(0, -\tau) \end{aligned}$$

となる。 □

定理 5.5. $\delta \in (0, 2\pi)$ を固定し、 $\tau_1, \dots, \tau_n \in e^{-i\delta}\mathbb{R}$ をとる。任意の状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ をとる。このとき、

$$G_\delta((\tau_1, p_1), \dots, (\tau_n, p_n)) = \lim_{\tau \rightarrow e^{-i\delta}\infty} \frac{i^n}{\langle \beta | U(\tau, -\tau) | \alpha \rangle} \frac{\delta^n \langle \beta | U^J(\tau, -\tau) | \alpha \rangle}{\delta J(\tau_1, p_1) \cdots \delta J(\tau_n, p_n)} \Big|_{J=0} \quad (5.20)$$

が成り立つ。

Proof. まず、右辺の分母を計算する。ハミルトニアン H の固有状態は完全系をなすので、

$$\begin{aligned} \langle \beta | U(\tau, -\tau) | \alpha \rangle &= \sum_{m,n} \langle \beta | m \rangle \langle m | U(\tau, -\tau) | n \rangle \langle n | \alpha \rangle \\ &= \sum_{m,n} \langle \beta | m \rangle e^{-2iE_n\tau} \langle m | n \rangle \langle n | \alpha \rangle \\ &= \sum_n e^{-2iE_n\tau} \langle \beta | n \rangle \langle n | \alpha \rangle \\ &\sim e^{-2iE_0\tau} \langle \beta | 0 \rangle \langle 0 | \alpha \rangle \quad (\tau \rightarrow e^{-i\delta}\infty) \end{aligned}$$

である（最後に $\tau \rightarrow e^{-i\delta}\infty$ の極限における主要項を取り出した）。

同様に、右辺の分子について

$$\begin{aligned} i^n \frac{\delta^n \langle \beta | U^J(\tau, -\tau) | \alpha \rangle}{\delta J(\tau_1, p_1) \cdots \delta J(\tau_n, p_n)} \Big|_{J=0} &= \langle \beta | U(\tau, 0) \mathcal{T}\{Q_{p_1}(\tau_1) \cdots Q_{p_n}(\tau_n)\} U(0, -\tau) | \alpha \rangle \\ &= \sum_{m,n} \langle \beta | U(\tau, 0) | m \rangle \langle m | \mathcal{T}\{Q_{p_1}(\tau_1) \cdots Q_{p_n}(\tau_n)\} U(0, -\tau) | n \rangle \langle n | \alpha \rangle \\ &= \sum_{m,n} \langle \beta | e^{-iE_m\tau} | m \rangle \langle m | \mathcal{T}\{Q_{p_1}(\tau_1) \cdots Q_{p_n}(\tau_n)\} e^{-iE_n\tau} | n \rangle \langle n | \alpha \rangle \\ &= \sum_{m,n} e^{-i(E_m+E_n)\tau} \langle \beta | m \rangle \langle n | \alpha \rangle \langle m | \mathcal{T}\{Q_{p_1}(\tau_1) \cdots Q_{p_n}(\tau_n)\} | n \rangle \\ &\sim e^{-2iE_0\tau} \langle \beta | 0 \rangle \langle 0 | \alpha \rangle \langle 0 | \mathcal{T}\{Q_{p_1}(\tau_1) \cdots Q_{p_n}(\tau_n)\} | 0 \rangle \quad (\tau \rightarrow e^{-i\delta}\infty) \end{aligned}$$

である。よって主張を得る。 □

定理 5.6. $q \in \mathbb{R}$ に対し $|q\rangle$ を位置が確定した状態とする。このとき

$$G_\delta(\tau_1, \dots, \tau_n) = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow e^{-i\delta}\infty} \frac{i^n}{\int_{-L}^L \int_{-L}^L dq_i dq_f \langle q_f | U(\tau, -\tau) | q_i \rangle} \frac{\delta^n \int_{-L}^L \int_{-L}^L dq_i dq_f \langle q_f | U^J(\tau, -\tau) | q_i \rangle}{\delta J(\tau_1) \cdots \delta J(\tau_n)} \Big|_{J=0} \quad (5.21)$$

や

$$G_\delta(\tau_1, \dots, \tau_n) = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow e^{-i\delta}\infty} \frac{i^n}{\int_{-L}^L dq \langle q | U(\tau, -\tau) | q \rangle} \frac{\delta^n \int_{-L}^L dq \langle q | U^J(\tau, -\tau) | q \rangle}{\delta J(\tau_1) \cdots \delta J(\tau_n)} \Big|_{J=0} \quad (5.22)$$

なども成り立つ.

Proof. 定理 5.5 と同様の方法で示すことができる. \square

5.3 経路積分法

定理 5.7. $\delta \in (0, \pi)$ および $\tau_f, \tau_i \in e^{-i\delta}\mathbb{R}$ を固定する. このとき

$$\langle q_f | U^J(\tau_f, \tau_i) | q_i \rangle = \int_{\substack{q(\tau_f)=q_f, \\ q(\tau_i)=q_i}} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left(i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[p \frac{dq}{d\tau} - H(p, q) - Jq \right] \right) \quad (5.23)$$

が成り立つ. ここで, $p(\tau), q(\tau)$ は数直線 $e^{-i\delta}\mathbb{R}$ 上の関数である.

定義 5.4. τ_1, \dots, τ_n を複素数とする.

1. n 点 *Wightman* 関数とは、関数

$$W(\tau_1, \dots, \tau_n) = \langle 0 | Q(\tau_1) \cdots Q(\tau_n) | 0 \rangle = \langle 0 | Q e^{-iH(\tau_1-\tau_2)} Q \cdots Q e^{-iH(\tau_{n-1}-\tau_n)} Q | 0 \rangle \quad (5.24)$$

のことである. この関数は $\Im(\tau_1) < \cdots < \Im(\tau_n)$ の範囲で解析的である.

2. n 点 *Schwinger* 関数とは、関数

$$S(\tau_1, \dots, \tau_n) = W(-i\tau_1, \dots, -i\tau_n) = \langle 0 | Q e^{-H(\tau_1-\tau_2)} Q \cdots Q e^{-H(\tau_{n-1}-\tau_n)} Q | 0 \rangle \quad (5.25)$$

のことである. この関数は $\Re(\tau_1) > \cdots > \Re(\tau_n)$ の範囲で解析的である.

6 φ^4 理論

6.1 自由な実スカラー場の理論の 2 点 Green 関数

この節では、ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2) \quad (6.1)$$

(m は正の定数) により定まる場の理論の 2 点 Green 関数を求める. この理論の運動方程式は、Klein-Gordon 方程式

$$(\partial^2 + m^2)\varphi = 0 \quad (6.2)$$

である. また、ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^2) \quad (6.3)$$

である.

ある時刻 t における場の演算子 $\mathbf{x} \mapsto \varphi(t, \mathbf{x})$ の Fourier 変換 $\hat{\varphi}(t; \mathbf{k})$ を用いて、 $\varphi(x)$ を

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3\mathbf{k} \hat{\varphi}(t; \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (6.4)$$

と表示する。 $\varphi(x)$ がエルミートであることは $\hat{\varphi}(t; \mathbf{k})^\dagger = \hat{\varphi}(t; -\mathbf{k})$ と同値であることに注意する。 $E(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ とおく。場の演算子の運動方程式 $(\partial^2 + m^2)\varphi = 0$ より、Fourier 変換 $\hat{\varphi}(t; \mathbf{k})$ についての運動方程式

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - (i\mathbf{k})^2 + m^2 \right) \hat{\varphi}(t; \mathbf{k}) = 0 \iff \frac{d^2 \hat{\varphi}(t; \mathbf{k})}{dt^2} = -E(\mathbf{k})^2 \hat{\varphi}(t; \mathbf{k}) \quad (6.5)$$

が得られる。この微分方程式の一般解は

$$\hat{\varphi}(t; \mathbf{k}) = A(\mathbf{k}) e^{-iE(\mathbf{k})t} + B(\mathbf{k}) e^{iE(\mathbf{k})t} \quad (6.6)$$

であり、条件 $\hat{\varphi}(t; \mathbf{k})^\dagger = \hat{\varphi}(t; -\mathbf{k})$ は $B(\mathbf{k})^\dagger = A(-\mathbf{k})$ と同値である。

よって

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3\mathbf{k} \hat{\varphi}(t; \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3\mathbf{k} (A(\mathbf{k}) e^{-iE(\mathbf{k})t} + B(\mathbf{k}) e^{iE(\mathbf{k})t}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3\mathbf{k} (A(\mathbf{k}) e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + B(-\mathbf{k}) e^{i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3\mathbf{k} (A(\mathbf{k}) e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + A(\mathbf{k})^\dagger e^{i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3\mathbf{k} (A(\mathbf{k}) e^{-ikx} + A(\mathbf{k})^\dagger e^{ikx}) \Big|_{k_0=E(\mathbf{k})} \end{aligned}$$

と表示することができる。これは、 $\varphi(x)$ がエルミートであるようなクライン・ゴールドン方程式の一般解である。

ここで、消滅演算子 $a(\mathbf{k})$ を

$$\frac{a(\mathbf{k})}{\sqrt{2E(\mathbf{k})}} = A(\mathbf{k}) \quad (6.7)$$

により定めれば、

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}} (a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) \Big|_{k_0=E(\mathbf{k})} \quad (6.8)$$

となる。

この表示を用いて、複素時刻 $t \in \mathbb{C}$ に対する $\varphi(t, \mathbf{x})$ の値を定義する。

定理 6.1. 数 $E \in \mathbb{R}_{>0}, \tau \in e^{-i\delta}\mathbb{R}$ に対し、積分

$$I(\tau, E) = \int_{-e^{i\delta}\infty}^{e^{i\delta}\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - E^2} d\omega \quad (\omega \in e^{i\delta}\mathbb{R}) \quad (6.9)$$

を計算すると、

$$I(\tau, E) = \begin{cases} \frac{\pi i}{E} e^{-iE\tau} & (\tau > 0) \\ \frac{\pi i}{E} e^{iE\tau} & (\tau < 0) \end{cases} \quad (6.10)$$

となる。

Proof. 留数定理。 □

定理 6.2. $\delta \in (0, 2\pi)$ と $x, y \in e^{-i\delta}\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ に対し、

$$iG_\delta(x, y) = \int_{k_0 \in e^{-i\delta}\mathbb{R}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2} \quad (6.11)$$

が成り立つ。

Proof. グリーン関数

$$G_\delta(x, y) = \langle 0 | \mathcal{T}\{\varphi(x)\varphi(y)\} | 0 \rangle \quad (6.12)$$

を計算する。 $x^0 > y^0$ のとき、 $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ より

$$\langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{E(\mathbf{k})E(\mathbf{k}')}} \langle 0 | a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') | 0 \rangle e^{-ikx} e^{ik'y} \Big|_{k_0=E(\mathbf{k}), k'_0=E(\mathbf{k}')} \quad (6.13)$$

である。交換関係 $[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ より $\langle 0 | a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') | 0 \rangle = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ となるため、

$$\langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2(2\pi)^3 E(\mathbf{k})} e^{-ik(x-y)} \Big|_{k_0=E(\mathbf{k})} \quad (6.14)$$

が得られる。よって、一般の x, y に対し、

$$G_\delta(x, y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} (\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)}) \Big|_{k_0=E(\mathbf{k})} \quad (6.15)$$

である。定理 6.1 を用いると、

$$\begin{aligned} G_\delta(x, y) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 4\pi i} \left(\theta(x^0 - y^0) I(x^0 - y^0, E(\mathbf{k})) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \theta(y^0 - x^0) I(x^0 - y^0, E(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 4\pi i} \left(\theta(x^0 - y^0) I(x^0 - y^0, E(\mathbf{k})) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \theta(y^0 - x^0) I(x^0 - y^0, E(\mathbf{k})) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 4\pi i} (\theta(x^0 - y^0) + \theta(y^0 - x^0)) I(x^0 - y^0, E(\mathbf{k})) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\pi i} I(x^0 - y^0, E(\mathbf{k})) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\pi i} \int_{-e^{i\delta}\infty}^{e^{i\delta}\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0(x^0-y^0)}}{k_0^2 - E(\mathbf{k})^2} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\pi i} \int_{-e^{i\delta}\infty}^{e^{i\delta}\infty} dk_0 \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2} \end{aligned}$$

より主張を得る。 □

参考文献

- [1] <https://ncatlab.org/nlab/show/The+Dirac+Electron>