問題1.13について

$Fib(n) = (\Phi^n - \Psi^n)/2$の証明

n=0の時 fib(0)=0

n=1の時 fib(1)= $\sqrt{5}/\sqrt{5}$=1である.

ここで,

n=kの時 $Fib(k) = (\Phi^k - \Psi^k)/\sqrt{5}$

n=k+1の時 $Fib(k+1) = (\Phi^{k+1} - \Psi^{k+1})/\sqrt{5}$

が成り立つと仮定する.

$Fib(n) = (\Phi^n - \Psi^n)/2$の証明続き

$$Fib(k+2) = (\Phi^{k+2} - \Psi^{k+2})/\sqrt{5} = (\Phi^k \Phi^2 - \Psi^k \Psi^2)/\sqrt{5}$$
$$= (\Phi^k(\Phi+1) - \Psi^k(\Psi+1))/\sqrt{5}$$
$$= (\Phi^{k+1} - \Psi^{k+1})/\sqrt{5} + (\Phi^k - \Psi^k)/\sqrt{5}$$
$$= Fib(k+1) + Fib(k)$$

よって
$Fib(n) = (\Phi^n - \Psi^n)/\sqrt{5}$はフィボナッチ数の定義と一致する

Fib(n)が$\Phi^n/\sqrt{5}$に最も近い整数であることの証明

$$Fib(n) = (\Phi^n - \Psi^n)/\sqrt{5} \Rightarrow Fib(n) + \Psi^n/\sqrt{5} = \Phi^n/\sqrt{5}$$

$Fib(n) - \Psi^n/\sqrt{5} < \Phi^n/\sqrt{5} < Fib(n) + \Psi^n/\sqrt{5}$が成り立つ

ここで　$|\Psi| < 0.62$　であるから

$$|\Psi^n| < |\Psi| < 0.62$$

$|\Psi^n|/\sqrt{5} < 0.5$となる.

よって$Fib(n) - 0.5 < \Phi^n/\sqrt{5} < Fib(n) + 0.5$

となり$\Phi^n/\sqrt{5}$に最も近い整数はFib(n)である.