Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
26.05.2010

7. Übungsblatt zu FGdI 1

Gruppenübung

Aufgabe G1

Zeigen Sie, dass die Klasse der rekursiv aufzählbaren Σ-Sprachen unter Durchschnitt und Vereinigung abgeschlossen ist.
Folgerns sie daraus, dass auch die Klasse der entscheidbaren Σ-Sprachen unter Durchschnitt und Vereinigung abgeschlossen sind.
Hinweis: Sie können dafür die Tatsache benutzten, dass es für zwei beliebige Turingmaschinen immer eine Turingmaschine gibt, die diese beiden parallel simuliert. Diese Turingmaschine kann man aus der Beschreibung der beiden anderen explizit konstruieren (was aufwendig ist). Unter Annahme der Church-Turing-These ist klar, dass eine solche Konstruktion existieren muss, denn auch ein Computer kann die Ausführung von zwei Programmen parallel simulieren.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie eine kontextfreie Grammatik für die arithmetischen Terme über $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$, die minimal geklammert sind (d.h., wir berücksichtigen die Assoziativität der Addition und Multiplikation und geben der Multiplikation Priorität über die Addition).

Aufgabe G3

Sei w ein Wort über einem Alphabet Σ und

$$L_w := \Sigma^* \cdot w$$

die Sprache der Wörter, die auf w enden. Skizzieren Sie ein Verfahren, dass zu jedem Wort $w \in \Sigma^*$ den minimalen DFA $\mathcal{A}_w$ für L_w liefert.
Bemerkung: Die effiziente Berechnung und Simulation des Minimalautomaten für L_w ist die Grundlage für den sehr effizienten String-Matching-Algorithmus von Knuth, Morris und Pratt.
Hinweis 1: Versuchen Sie erst den minimalen DFA für L_w zu bestimmen im Fall $\Sigma = \{a, b\}$ und $w = abb$ und $w = ababb$.
Hinweis 2: Lesen Sie Paragraph 5.1 im Skript (Seiten 72 und 73).

Aufgabe G4

Sei $L \subseteq \{a\}^*$ eine kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet.

(a) Zeigen Sie, dass man L darstellen kann als endliche Vereinigung

$$L = L_0 \cup L_{k_1,p_1} \cup \cdots \cup L_{k_m,p_m}\,,$$

wobei L_0 eine endliche Sprache ist und

$$L_{k,p} := \{\, a^{k+ip} : i \in \mathbb{N} \,\}\,.$$

(b) Folgern Sie hieraus, dass jede kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet regulär ist.

Hinweis zu (a): Benutzen Sie das Pumping Lemma um zu zeigen, dass es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$L = L_0 \cup L_{k_1,p_1} \cup L_{k_2,p_2} \cup \ldots \quad \text{mit } p_1, p_2, \ldots \leq n\,,$$

wobei Sie zunächst unendlich viele Sprachen der Form $L_{k,p}$ zulassen. Argumentieren Sie im zweiten Schritt, wieso Sie mit endlich vielen solchen Sprachen auskommen.

Hausübung

Aufgabe H1 (7 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) Reguläre Sprachen sind entscheidbar.

(b) Es gibt kontextfreie Sprachen, die regulär sind.

(c) Ist L_1 regulär und $L_2 \subseteq L_1$, so ist L_2 auch regulär.

(d) Ist L_1 regulär und L_2 beliebig, dann ist

$$L = \{x \in \Sigma^* \,:\, \text{es existiert ein } y \in L_2, \text{ so dass } xy \in L_1\}$$

regulär.

(e) Das Komplement einer Sprache, die von einer Grammatik erzeugt wird, wird auch wieder von einer Grammatik erzeugt.

(f) Sind L_1 und L_2 kontextfrei, so ist $L_1 \backslash L_2$ entscheidbar.

(g) Die Sprache aller regulären Ausdrücke ist regulär.

Aufgabe H2 (8 Punkte)

Welche der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sind (i) regulär, (ii) kontexfrei, aber nicht regulär, oder (iii) nicht kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{x \in \Sigma^* \,:\, |x|_a > |x|_b\} \\
L_2 &= \{x \in \Sigma^* \,:\, |x|_a > |x|_b > |x|_c\} \\
L_3 &= \{x \in \Sigma^* \,:\, |x|_a > |x|_b \text{ und } |x|_b \leq 2010\} \\
L_4 &= \{x \in \Sigma^* \,:\, |x|_a > |x|_b \text{ und } |x|_b \geq 2010\}
\end{aligned}$$