Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
02.06.2010

1. Übungsblatt zu FGdI 2

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchstens eine der Variablen p, q, r wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r, s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

Aufgabe G2

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \rightarrow \psi$.

(ii) Wenn $\varphi \models \psi$ und φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iii) Wenn $\varphi \models \psi$ und ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iv) $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen.

(i) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

(ii) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

(iii) $\{\neg\psi, \psi \rightarrow \varphi\} \models \neg\varphi$

(iv) $\{\neg\varphi, \psi \rightarrow \varphi\} \models \neg\psi$

Aufgabe G3

Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \ldots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat;

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder hat.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

(a) Wir versuchen, ein verteiltes System in der Aussagenlogik zu modellieren. Angenommen wir wollen n Prozesse für s Zeiteinheiten beobachten. Jeder Prozess kann sich an jedem Zeitpunkt im Zustand p, q oder r befinden. Wir führen Aussagenvariablen p_t^i, q_t^i und r_t^i ein, die auf wahr gesetzt werden, wenn Prozess i zur Zeit t im entsprechenden Zustand ist. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in AL:

(i) Zu jedem Zeitpunkt ist höchstens ein Prozess in Zustand q.

(ii) Es sind immer mindestens zwei Prozesse in Zustand p.

(iii) Wenn sich ein Prozess in Zustand q befindet, dann wechselt er nach spätestens 3 Zeiteinheiten in den Zustand r.

(b) Konstruieren Sie induktiv über n aussagenlogische Formeln

$$\varphi_n(x_n, \ldots, x_0, y_n, \ldots, y_0),$$

welche genau dann wahr sind, wenn die in $x_n \ldots x_0$ kodierte Binärzahl $\sum_i x_i 2^i$ kleiner ist als die in $y_n \ldots y_0$ kodierte.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Wir definieren folgende partielle Ordnung auf $\mathbb{B}^n$:

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{b}' \quad \text{:gdw.} \quad b_i \leq b_i' \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

$\mathbf{b} \leq \mathbf{b}'$ heißt also, dass überall wo in $\mathbf{b}$ eine 1 steht, auch in $\mathbf{b}'$ eine 1 steht. Es ist also z.B. $(0,0,1) \leq (0,1,1)$, aber nicht $(1,1,0) \leq (0,1,1)$.
Eine Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ heißt *monoton* gdw.

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{b}' \Longrightarrow f(\mathbf{b}) \leq f(\mathbf{b}')$$

für alle $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{B}^n$. Eine AL_n-Formel φ ohne Negationszeichen heißt *positiv*.
In Folgenden soll gezeigt werden, dass positive Formeln φ gerade die monotonen Booleschen Funktionen f_φ repräsentieren (vgl. Abschnitt 3.1).

(a) Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass für eine positive aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathrm{AL}_n$ die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f_\varphi : & \mathbb{B}^n & \to & \mathbb{B} \\ & \mathbf{b} & \mapsto & \varphi[\mathbf{b}] \end{array}$$

monoton ist.

(b) Analog zum Beweis von Satz 3.2, definiert man für $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^n$ den positiven Anteil von $\varphi_{\mathbf{b}}$ durch

$$\varphi_{\mathbf{b}}^{+} := \bigwedge \{p_i \,:\, b_i = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\varphi_{\mathbf{b}}^{+} \equiv \bigvee \{\varphi_{\mathbf{b}'} \,:\, \mathbf{b} \leq \mathbf{b}'\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ durch eine positive Formel in AL_n dargestellt wird.

Hinweis: Ersetzen Sie $\varphi_{\mathbf{b}}$ durch $\varphi_{\mathbf{b}}^{+}$ in der Formel, die im Beweis von Satz 3.2 für φ_f gegeben wird.