Mathematik II für ET
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Priska Jahnke
Dr. Sergiy Nesenenko
Florian Steinberg

SS2013
19.04.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gaußscher Algorithmus)
Sei $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann beschreibt die Menge $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a^T x = b\}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Ebenen E_1, E_2 und E_3, die durch die Vektoren $a_1 = (-1, 2, 3)^T$, $a_2 = (3, -2, 1)^T$, $a_3 = (2, 4, -8)^T$ und die Skalare $b_1 = 7$, $b_2 = 1$, $b_3 = 8$ gegeben sind.

(b) Finden Sie Beispiele von drei Ebenen, die keinen bzw. mehr als einen Schnittpunkt haben.

Aufgabe G2 (Lineare Abbildungen)
Zeigen Sie welche der folgenden Abbildungen eine lineare Abbildung beschreiben.

(a) $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto p(x)$, für beliebige Polynome p über $\mathbb{C}$.

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto \alpha u$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ fest.

(d) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_2 \\ v_1 + 2v_2 \\ 3v_1 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildungen!

Aufgabe G3 (Berechnung von Determinanten)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$

(a) mittels der Entwicklung nach Zeilen oder Spalten

(b) mittels elementarer Umformungen zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Hausübung

Aufgabe H1 (Gaußscher Algorithmus) (6 Punkte)
Für welche Werte des Parameters $k \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 3z &= -3 \\ x + 2y + kz &= 1 \\ 2x + ky - z &= -2 \end{aligned}$$

(i) keine, (ii) genau eine, (iii) mehrere Lösungen? Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen in Abhängigkeit von k.

Aufgabe H2 (Geradenschnitte und Hessesche Normalform) (6 Punkte)

Gegeben seien die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$g_2 : \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

b) Wie groß ist der Schnittwinkel der beiden Geraden?

c) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene an, die durch $(0, 8, 15)^T$ und die beiden Richtungsvektoren von g_1 und g_2 gegeben ist.

Aufgabe H3 (Vandermonde-Matrix) (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Gleichung für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\det V = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b).$$