Fachbereich Mathematik

[redacted]HE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

22. September 2004

Klausur zur Diplomvorprüfung
Mathematik B für ET
SS 2004

NAME: .... MATRIKELNR.: ....

VORNAME: .... STUDIENGANG: ....

AUFGABE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
PUNKTE	12	13	9	14	12	13	11	10	13	9	116
ERREICHT	12 p	13	9			7	11	5	3		

NOTE

Bitte füllen Sie den Kopf des Aufgabenblatts JETZT und in BLOCKSCHRIFT (GROSSBUCHSTABEN) aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und nummerieren Sie diese fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal in der Mitte, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Sie dürfen Bücher, Skripte, eigene Notizen, Aufgabenblätter und deren Lösungen sowie einen (einfachen) Taschenrechner verwenden, aber keine **Handheld Computer, Notebooks etc.**

Sie dürfen die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge bearbeiten.

Bedenken Sie, dass alle Ergebnisse zu begründen sind. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A.

(b) Skizzieren Sie die *Zeilenkreise* nach Gerschgorin für die Matrix A in der komplexen Ebene, und begründen Sie mit diesen, dass alle Eigenwerte verschieden sind.

(c) Begründen Sie, dass die Potenzmethode nach von Mises unter der Voraussetzung eines *geeignet gewählten* Startvektors konvergiert. Führen Sie außerdem zwei Iterationsschritte für den Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus.

(d) Berechnen Sie mit der in (c) ermittelten Näherung $x^{(2)}$ alle (möglichen) Näherungen für den betragsmäßig größten Eigenwert von A, und vergleichen Sie diese mit dem tatsächlichen betragsmäßig größten Eigenwert.

Aufgabe 2 **(13 Punkte)**

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3 + x + 1\right)$ wird die Fixpunktgleichung

$$f(x) = x$$

betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass f in $[0, 1]$ genau einen Fixpunkt hat, und begründen Sie, dass die Picard-Iteration konvergiert.

(b) Berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 0$ zwei Iterationswerte x_1, x_2 der Picard-Iteration.

Geben Sie ferner eine möglichst gute Abschätzung für den Abstand von x_2 zur gesuchten (unbekannten) Lösung x^* an.

(c) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf das obige Problem an, und geben Sie die Iterationsvorschrift an. Berechnen Sie zwei Iterationsschritte für den Startwert $x_0 = 0$. Welche Konvergenzordnung hat dieses numerische Verfahren in der obigen Situation, falls es für einen Startwert in der Umgebung von x^* konvergiert (Begründung!)?

Aufgabe 3 **(9 Punkte)**

An einem Kiosk gaben Kunden in einem Zeitraum von 15 Minuten folgende Beträge (in Euro) aus:

1.30, 1.60, 3.40, 2.50, 2.00, 2.80, 3.30, 1.00, 1.90, 2.40, 1.60, 3.30, 1.40
3.80, 1.80, 1.70, 2.80, 2.70, 1.20, 1.40, 2.60, 3.20, 2.20, 2.40, 2.90.

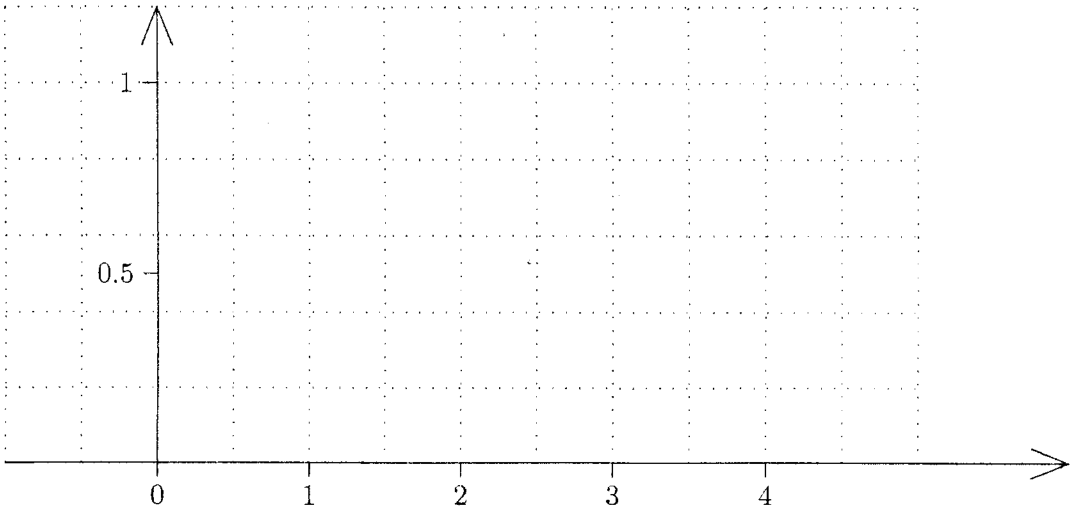
(a) Bestimmen Sie die Häufigkeitsverteilung zur Klassierung

$$(0, 2], \quad (2, 2.5], \quad (2.5, 3], \quad (3, 4],$$

und zeichnen Sie das zugehörige Histogramm in das nachstehende Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie die zur Konstruktion eines Boxplots notwendigen Maßzahlen (<u>ohne</u> arithmetisches Mittel).

Zeichnung zu Aufgabenteil (a)



Aufgabe 4 **(14 Punkte)**

Für $\theta > 0$ wird die Funktion $f_\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)}{\theta} e^{-(x^2+2x)/\theta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f_θ für $\theta > 0$ eine Dichte auf $\mathbb{R}$ ist, und berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_θ.

(b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichte f_θ gegeben ist durch

$$\sqrt{\pi\theta} e^{1/\theta} \left(1 - \Phi\left(\sqrt{\tfrac{2}{\theta}}\right)\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

(c) Seien $x_1, \ldots, x_n$ Realisationen stochastisch unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Dichte f_θ.
Ermitteln Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung $\widehat{\theta}$ für θ basierend auf der Stichprobe $x_1, \ldots, x_n > 0$.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Bei der Messung einer Reaktionszeit [in sec] auf einen Lichtreiz wurden folgende Werte gemessen:

`5, 3, 5, 6, 8, 3.`

Die Werte werden als Realisationen stochastisch unabhängiger und identisch normalverteilter Zufallsvariablen angenommen.

(a) Prüfen Sie die Aussage *Die erwartete Reaktionszeit ist größer als 4 sec* mit einem geeigneten Verfahren zum Signifikanzniveau 5%.

(b) Geben Sie ein zweiseitiges 95%–Konfidenzintervall für die erwartete Reaktionszeit an.

(c) Lässt sich zum Niveau 10% bestätigen, dass die Varianz σ^2 durch zehn nach oben beschränkt ist?

(d) Ermitteln Sie ein einseitiges unteres 99%–Konfidenzintervall für die Standardabweichung σ.

Aufgabe 6 **(13 Punkte)**

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme. Verwenden Sie zur Lösung von (c) einen <u>Potenzreihenansatz</u> $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

3 (a) $y' = \mathrm{e}^y$, $x < 1$, $y(0) = 0$

4 (b) $y' = x^2 y + (xy)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $y(0) = 1$

(c) $y'' = y + x$, $x \in \mathbb{R}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Aufgabe 7 **(11 Punkte)**

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.

(b) Welche gewöhnliche (homogene) Differentialgleichung $L(y) = 0$ höherer Ordnung gehört zu dem obigen Differentialgleichungssystem?

(1) Bestimmen Sie ein zugehöriges Fundamentalsystem für diese Differentialgleichung.

(2) Ermitteln Sie mittels des Ansatzes von der Störfunktion die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(y) = \cos(x).$$

Aufgabe 8 **(10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Mitteln der Funktionentheorie (alle Integrationswege sind jeweils positiv orientiert). Begründen Sie jeweils Ihre Vorgehensweise.

2 (a) $\displaystyle\oint_{K_1(i)} \frac{z^4 \mathrm{e}^{-z^2}}{z^2+1} dz$

2 (b) $\displaystyle\oint_{K_1(i)} \frac{(z^4-1)\mathrm{e}^{-z^2}}{z^2+1} dz$

8 (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-2x}{(x^2+3)(x^2+2)} dx$

Aufgabe 9 **(13 Punkte)**

(a) Ermitteln Sie die Laurent-Reihe der durch

$$f(z) = \frac{6}{(4+z)(2-z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-4, 2\}$$

gegebenen Funktion f mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$. Skizzieren Sie zudem den Konvergenzbereich der Reihe in der komplexen Ebene.

(b) Berechnen Sie das Minimum und Maximum sowie alle Minimal- und Maximalstellen der durch

$$f(z) = \left|1 - z^4\right|, \quad z \in \mathbb{C}$$

definierten Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Bereich $\{z : |z| \leq 1\}$.

Aufgabe 10 **(9 Punkte)**

$X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsdichte

$$f(x) = \alpha(1-x)^{\alpha-1}, \quad x \in (0,1),\ \alpha > 0.$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F, und skizzieren Sie diese in einem Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X_1.

(c) Begründen Sie, dass $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\frac{1}{\alpha+1}$ ist.

(d) Ermitteln Sie für großes $n \in \mathbb{N}$ <u>näherungsweise</u> die Wahrscheinlichkeit, dass der Schätzer $\overline{X}_n$ den Wert $\frac{1}{\alpha+1}$ unterschätzt, d.h.

$$P\left(\overline{X}_n < \frac{1}{\alpha+1}\right).$$

(1)

LZ

A1

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{+\frac{1}{2}}{\curvearrowleft} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

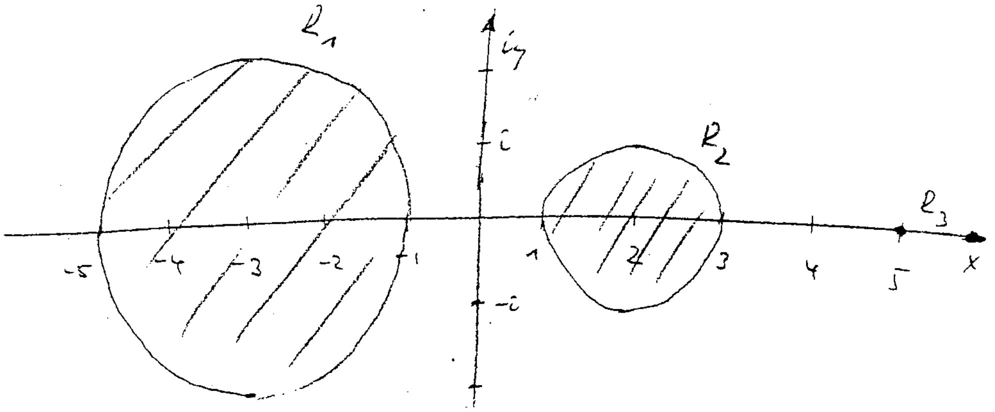
2

$\Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad A = L \cdot R$

(b) $R_1 = \{ z \mid |z-2| \leq 1 \}, \quad R_2 = \{ z \mid |z+3| \leq 2 \}$

$R_3 = \{ z \mid |z-5| \leq 0 \} = \{5\}$



2

Da die Mengen R_1, R_2, R_3 paarw. disjunkt sind, hat A drei verschiedene Eigenwerte. Ein Eigenwert ist 5.
(Da Null kein EW ist, ist A insbesondere regulär.)

1

(c) Nach (b) hat A drei verschiedene EW und ist damit diagonalähnlich. Bei Wahl eines geeignet Startvektors $x^{(0)}$ mit $\|x^{(0)}\|_\infty = 1$ konvergiert die Potenzmethode nach Satz 23.3.

1

Iterationen:

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^{(0)}\|_\infty = 1.$

$A x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A x^{(0)}\|_\infty = 5 \Rightarrow x^{(1)} = \frac{1}{5} A x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2

$A x^{(1)} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 2/5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A x^{(1)}\|_\infty = 5 \Rightarrow x^{(2)} = \frac{1}{5} A x^{(1)} = \begin{pmatrix} 11/25 \\ 2/25 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.08 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) Näherungen für λ_1:

$k=1$: $\|Ax^{(1)}\|_\infty \cdot \frac{x_1^{(2)}}{x_1^{(1)}} = 5 \cdot \frac{11/25}{3/5} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} = 3.\overline{6}$

$k=2$: / (da $x_2^{(1)} = 0$) (2)

$k=3$: $\|Ax^{(1)}\|_\infty \cdot \frac{x_3^{(2)}}{x_3^{(1)}} = 5 \cdot \frac{1}{1} = 5.$

Nach (b) liegen die EW in K_1, K_2, K_3 $\Rightarrow$ $|\lambda_1| \leq 5$.

Außerdem ist $\lambda = 5$ EW

Das char. Polynom $p(\lambda) = (5-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda)$ zeigt, dass

$\lambda_1 = 5$ der betragsmäßig größte EW von A ist (2)

$\Rightarrow$ Die dritte Näherung ist bereits gleich dem gesuchten EW.

A2

(a) Es gilt $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1/3$ $(\geq 0 \rightarrow f \nearrow)$ (3)

Wegen $|f'(x)| = \frac{1}{2}x^2 + 1/3 \underset{x\in[0,1]}{\leq} \frac{1}{2} + 1/3 = \underset{\underset{L}{\|}}{\frac{5}{6}} < 1$. ist f kontrahierend.

Wegen $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 1 + 1\right) = \frac{5}{6} \leq 1$ ist f selbstabb. auf $[0,1]$.

$\underset{\text{Satz 24.2}}{\Rightarrow}$ $f(x) = x$ hat genau eine Lösung x^* in $[0,1]$ und die Picard-Iteration konvergiert für $x_0 \in [0,1]$ gegen x^*.

(b) Picard-Iteration $x_{\nu+1} = f(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}_0$.

$x_0 = 0 \rightarrow x_1 = f(0) = 1/3$ (2)

$x_2 = f(1/3) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{54} + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+18+54}{54} = \frac{73}{162} \approx 0.451$

Fehlerabschätzung: a-posteriori-Abschätzung

$$|x_2 - x^*| \le \frac{L}{1-L}\,|x_2 - x_1|$$ ②

$\leadsto$ $\left|\frac{73}{162} - x^*\right| \le \frac{5/6}{1/6}\left|\frac{73}{162} - \frac{1}{3}\right| = 5\cdot\frac{19}{162} = \frac{95}{162} \approx 0.586$

(Bem.: Genauigkeit reicht lediglich aus, um festzustellen, dass x^* in $[0,1]$ liegt!! Im nächsten Schritt erhält man $x^* \in [0.3, 0.7]$.)

(c) Sei $F(x) = \varphi(x) - x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$\leadsto$ löse Gleichung $F(x) = 0$ mit Newton-Verfahren.

$F'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}$.

$\leadsto$ Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens:

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{F(x_\nu)}{F'(x_\nu)} = x_\nu - \frac{\frac{1}{6}x_\nu^3 - \frac{2}{3}x_\nu + \frac{1}{3}}{\frac{x_\nu^2}{2} - \frac{2}{3}}$$

② $$= x_\nu - \frac{x_\nu^3 - 4x_\nu + 2}{3x_\nu^2 - 4}$$

$x_0 = 0 \leadsto x_1 = 0 - \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$

① $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1/8 - 2 + 2}{3/4 - 4} = \frac{1}{2} + \frac{1/8}{13/4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{26} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \approx 0.538$

① Die Konvergenzordnung des Verfahrens hängt davon ab, ob $F'(x^*) = 0$ oder $F'(x^*) \ne 0$ gilt.

Wegen $F'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}$ und $F''(x) = x > 0$, $x \in [0,1]$ ist $F' \nearrow$

② $\Rightarrow$ $\underbrace{-\frac{2}{3}}_{=F'(0)} \le F'(x) \le \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}_{=F'(1)} = -\frac{1}{6} < 0$, $x \in [0,1]$, d.h. $F'(x) < 0$, $x \in [0,1]$

$\leadsto$ $F'(x^*) \ne 0$, da $x^* \in [0,1]$.

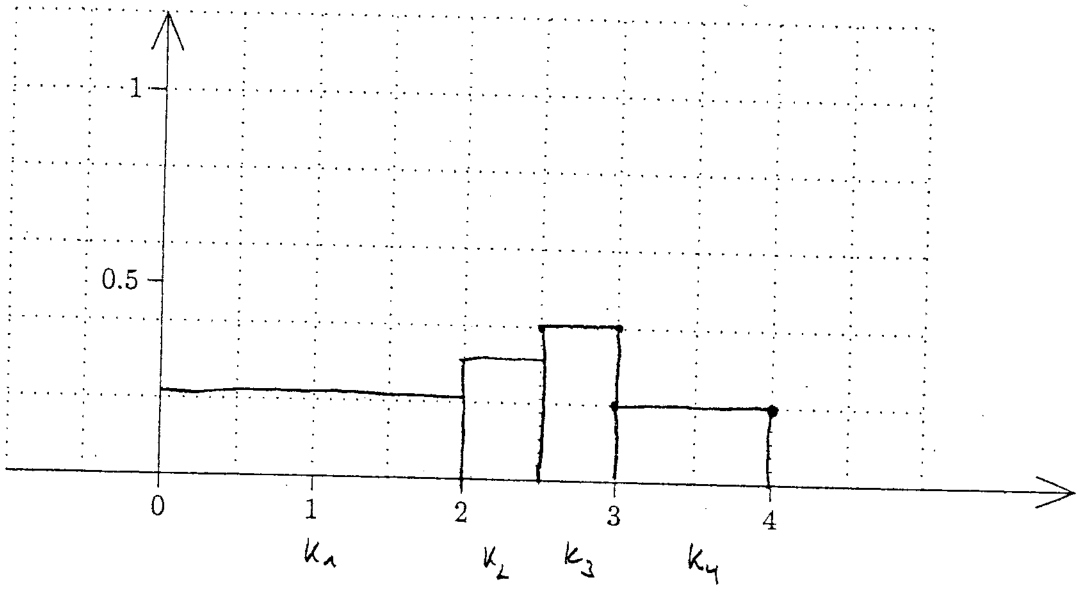
$\leadsto$ konvergiert das Newton-Verfahren für einen Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*, so konvergiert es quadratisch. ($x^* \approx 0.5391888728\ldots$)

A3

(a)

K_j		$n(K_j)$	$f(K_j)$	$b_j =$	$h_j = \frac{f(K_j)}{b_j}$
$(0, 2]$	卌 卌 I	11	0.44	2	0.22
$(2, 2.5]$	IIII	4	0.16	0.5	0.32
$(2.5, 3]$	卌	5	0.20	0.5	0.40
$(3, 4]$	卌	5	0.20	1	0.20
		Σ 25	Σ 1		

4



(b)

$x_{(1)} = 1{,}00$ (Min.)

$x_{(25)} = 3.80$ (Max.)

Median: $n \cdot p = \frac{25}{2} = 12.5 \leadsto \tilde{x}_{0.5} = x_{(13)} = 2.4$

5

0.25-Quartil: $n \cdot p = \frac{25}{4} = 6.25 \leadsto \tilde{x}_{0.25} = x_{(7)} = 1.6$

0.75-Quartil: $n p = \frac{75}{4} = 18.75 \leadsto \tilde{x}_{0.75} = x_{(19)} = 2.8$

A4

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{2(x+1)}{\theta} e^{-\frac{x^2+2x}{\theta}}\,dx = \int_0^\infty e^{-z}\,dz = -e^{-z}\Big|_0^\infty = 1.$ (1)

$z = \frac{x^2+2x}{\theta},\ dz = \frac{2(x+1)}{\theta}dx$

↳ Daher ist f_θ wegen $f_\theta(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$, eine Dichte.

$F_\theta(x) = 0, \quad x<0.$

$F_\theta(x) = \int_0^x f_\theta(t)\,dt = \int_0^x \frac{2(t+1)}{\theta} e^{-\frac{t^2+2t}{\theta}}\,dt \underset{\text{subst. s.o.}}{=} \int_0^{\frac{x^2+2x}{\theta}} e^{-z}\,dz$ (2)

$= 1 - e^{-\frac{x^2+2x}{\theta}}, \quad x \geq 0$

(b) $EX = \int_0^\infty x \cdot f_\theta(x)\,dx \underset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{x\cdot\left(-e^{-\frac{x^2+2x}{\theta}}\right)\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+2x}{\theta}}\,dx$ (5)

$= \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+2x+1}{\theta}+\frac{1}{\theta}}\,dx = e^{1/\theta}\int_0^\infty e^{-\frac{(x+1)^2}{\theta}}\,dx$

$= e^{1/\theta} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{\theta/2}}\right)^2}\,dx = e^{1/\theta}\sqrt{\frac{\theta}{2}} \int_{\sqrt{2/\theta}}^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy.$

$y = \frac{x+1}{\sqrt{\theta/2}} = \sqrt{\frac{2}{\theta}}(x+1)$

$dy = \sqrt{\frac{2}{\theta}}$

$= e^{1/\theta}\sqrt{\frac{\theta}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{2/\theta}}^\infty e^{-1/2\, y^2}\,dy}_{=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{\theta}}\right)} = \sqrt{\pi\theta}\, e^{1/\theta}\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{\theta}}\right)\right)$

(c) Likelihood fkt (Beachte: $x_i > 0\ \forall i$):

$L(\theta|x_i) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{2(x_i+1)}{\theta} e^{-\frac{x_i^2+2x_i}{\theta}}\right) = \frac{2^n}{\theta^n}\prod_{i=1}^n (x_i+1)\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n (x_i^2+2x_i)}$ (1)

log likelihood fkt:

$\ell(\theta) = \ln L(\theta|x_i) = n\ln 2 - n\ln\theta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n (x_i^2+2x_i)$

$$\frac{d}{d\theta} \ell(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_i)}_{= n\hat{\theta}} \stackrel{!}{=} 0 \iff \theta = \hat{\theta} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_i) \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \ell(\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}} = + \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \cdot n\hat{\theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{n}{\hat{\theta}^2} - \frac{2n}{\hat{\theta}^2} = -\frac{n}{\hat{\theta}^2} < 0$$

$\hookrightarrow$ $\hat{\theta}$ lok. Maximum von ℓ (1)

Wegen $\lim_{\theta \to \infty} \ell(\theta) = -\infty$ und (1)

$$\lim_{\theta \to 0} \ell(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \left(-n \ln \theta - \frac{n\hat{\theta}}{\theta} \right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-n}{\theta} \Big(\underbrace{\theta \ln \theta}_{\to 0} + \underbrace{\hat{\theta}}_{>0} \Big) = -\infty. \quad (1)$$

ist $\hat{\theta}$ glob. Max. von ℓ und somit von $L(\cdot \mid x_i)$

$\hookrightarrow$ $\hat{\theta}$ Maximum-Likelihood-Schätzer für θ. (1)

A5 Im folgenden werden die Größen $\overline{x}_n$ und $s_{(n)}^2$ benötigt.

$\hookrightarrow$ $\overline{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}(5+3+5+6+8+3) = \underline{\underline{5}}$ (1)

$s_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)^2 = \frac{1}{5}(0+4+0+1+9+4) = \underline{\underline{\frac{18}{5}}} = 3.6$ (1)

Seien $x_1, \ldots, x_6$ Realisationen von stoch. unabh., identisch verteilte ZV'en $X_1, \ldots, X_6$ mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\hookrightarrow$ μ erwartete Reaktionszeit, $\sigma^2 > 0$ unbekannt.

(a) $H_0: \underset{\mu_0}{\mu \leq 4} \longleftrightarrow A: \underbrace{\mu > 4}_{\text{nachzuweisen}}$ (1)

Test: t-Test.

Teststatistik: $t = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{S_n^{(2)}}} \overset{\text{Einsetzen}}{=} \sqrt{6}\,\frac{5-4}{\sqrt{\frac{18}{5}}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1.291$

$\hookrightarrow$ lehne H_0 ab, falls $t > t_{5;0.95} \underset{\text{Tab.}}{=} 2.0150$

$\hookrightarrow$ $t < t_{5;0.95}$, d.h. H_0 kann nicht verworfen werden
Es besteht daher kein Widerspruch zur Nullhypothese $\mu \leq 4$. 2

(b) $\mathcal{K} = \left[\bar{x}_n - t_{5;0.975}\cdot\sqrt{S_n^{(2)}/n}\,,\ \bar{x}_n + t_{5;0.975}\cdot\sqrt{S_n^{(2)}/n}\right]$

$\hookrightarrow$ Einsetzen $\mathcal{K} = \left[5 - 2.5706\cdot\sqrt{\frac{3}{5}},\ 5 + 2.5706\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\right]$

$= [3.009,\ 6.991]$. 2

(c) $H_0: \underset{\sigma_0^2}{\sigma^2 \geq 10} \longleftrightarrow A: \sigma^2 < 10.$ 1

$\hookrightarrow$ χ^2-Test; Teststatistik: $T = \frac{n-1}{\sigma_0^2}\, S_{(n)}^2$
$\hookrightarrow$ lehne H_0 ab, falls $T < \chi^2_{n-1;\,0.1}$.

$\hookrightarrow$ $T = \frac{5}{10}\cdot\frac{18}{5} = 1.8$, $\chi^2_{5;0.1} = 1.610$
d.h. $T > \chi^2_{5;0.1}$ 2

$\hookrightarrow$ H_0 kann nicht verworfen werden. Die Alternative $\sigma^2 < 10$ lässt sich daher zum Niveau 10% nicht bestätigen.

(d) Konf.bereich für σ^2: $\mathcal{K} = \left[0,\ \frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\alpha}}\, S_{(n)}^{2)}\right] \underset{\text{Einsetzen}}{=} \left[0,\ \frac{5}{0.554}\cdot\frac{18}{5}\right] = [0, 32.491]$

—"— σ: $\mathcal{K} = \left[0,\ \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\alpha}}\, S_{(n)}^2}\right] = [0,\ 5.700]$. 2

A6 (a) $y' = e^y \iff \frac{y'}{e^y} = 1$ (DGl in getrennten Veränderl.)

$\leadsto \int \frac{y'}{e^y}\,dx = x + c,\quad c \in \mathbb{R}.$

$\quad \shortparallel$

3 $\int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$

$\leadsto -e^{-y} = x + c \iff y = -\ln(-x-c)$

Wegen $y(0) = 0 \Rightarrow -\ln(-c) = 0 \iff -c = 1 \iff c = -1$

$\leadsto y(x) = -\ln(1-x)$ löst das AWP.

(b) (*) $y' = x^2(y + y^2) \iff y' = x^2 y + x^2 y^2$ Bernoulli-DGl mit $P(x) = x^2$, $r(x) = x^2$, $n = 2$

$\leadsto$ Subst. $z(x) = (y(x))^{1-n} = \frac{1}{y(x)}$ und z löst lin. DGl

$z' = -x^2 \cdot z - x^2 = -x^2(z(x) + 1)$

4 $\iff \frac{z'}{z+1} = -x^2$ (DGl in getr. Veränderlichen)

$\leadsto \int \frac{z'}{z+1}\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + c,\quad c \in \mathbb{R}.$

$\quad \shortparallel$

$\int \frac{1}{z+1}\,dz$

$\quad \shortparallel$

$\ln|z+1|$

$\leadsto \ln|z+1| = -\frac{1}{3}x^3 + c$, Wegen $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ folgt $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1.$

$\leadsto \ln 2 = c$

(*) Alternativ als DGl mit getrennten Variabl. auffassen $\Rightarrow \frac{y'}{\quad} = x^2$

$\leadsto \ln\left|\frac{1}{y}+1\right| = -\frac{1}{3}x^3 + \ln 2$

$$\left|\frac{1}{y}+1\right| = \exp\left(-\frac{1}{3}x^3 + \ln 2\right) = 2\, e^{-1/3 x^3}$$

Wegen $y(0)=1$ wird eine Lösung für y gesucht mit $y(x)>0$,

d.h. $\frac{1}{y(x)} + 1 = 2\, e^{-1/3 x^3}$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \left(2e^{-1/3 x^3} - 1\right)^{-1}$$

(C) Ansatz: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \rightarrow y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, $y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$

6

Wegen $y(0) = 0$: $a_0 = 0$

$y'(0) = 0$: $a_1 = 0$.

$\leadsto y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$; ferner $y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$

$\leadsto$ Einsetzen in Dgl

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k + x$$

$\leadsto$ Koeffizientenvergleich:

$a_2 = 0$ (konstante Terme)

$3 \cdot 2 \cdot a_3 = 1$ (lin. Terme)

$(k+2)(k+1) a_{k+2} = a_k$, $k \geq 4$

$\leadsto a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} a_k$, $k \geq 4$.

$\leadsto a_{2j} = 0$, $j \in \mathbb{N}_0$. (vollst. Ind.)

$a_1 = 0$, $a_{2j+1} = \frac{1}{(2j+1)!}$, $j \in \mathbb{N}$

(Ind. $a_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{(2\cdot 1+1)!}$, $a_{2(j+1)+1} = a_{(2j+1)+2} = \frac{1}{(2j+1+2)(2j+1+1)} a_{2j+1}$

$\underset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{(2(j+1)+1)!}$)

$\leadsto y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j+1} - x = \underline{\sinh(x) - x}$

löst AWP.

A7

(a) A hat das char. Polynom: $p(\lambda) = -\lambda\left(-\lambda(-2-\lambda)-3\right)$

$$= \lambda(-2\lambda-\lambda^2+3) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)$$

$\hookrightarrow$ A hat EW $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_2=-3$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 0$: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix} \overset{+3}{} \to \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -3$: $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \overset{-1}{} \to \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to v_3 = \begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow$ Ein Fundamentalsystem ist

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{y}_2(x) = e^x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{y}_3(x) = e^{-3x}\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}.$$ (4)

(b) DGl 3. Ordnung: $L(y) = y''' + 2y'' - 3y' = 0$. (zugeh. Matrix ist allgemein $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{pmatrix}$) (1)

char. Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda \underset{s.o.}{=} \lambda(\lambda-1)(\lambda+3)$.

(1) $\hookrightarrow$ Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1,\quad y_2(x) = e^x,\quad y_3(x) = e^{-3x}$$ (2)

allgem. Lösung $y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-3x}$.

Ansatz vom Typ der Störfkt.: $y(x) = a\sin x + b\cos x$. (4)

$\leadsto$ $y'(x) = a\cos x - b\sin x$, $y''(x) = -a\sin x - b\cos x$, $y^{(4)}(x) = -a\cos x + b\sin x$.

$\leadsto$ Einsetzen in Dgl: $-a\cos x + b\sin x + 2a\sin x - 2b\cos x - 3a\cos x + 3b\sin x = \cos x$.

$\leadsto$ Koeff. vgl.: $-a - 2b - 3a = 1 \wedge b - 2a + 3b = 0$.

$\Leftrightarrow -4a - 2b = 1 \wedge 2b - a = 0$.

$\Leftrightarrow a = 2b \wedge -10b = 1$

$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{10} \wedge a = -\frac{1}{5}$

$\leadsto$ $y(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-3x} - \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{10}\cos x$

ist allgem. Lösung der Dgl $L(y) = \cos x$.

A8

(a) $\oint_{K_1(i)} \frac{z^4 e^{-z^2}}{z^2+1}\,dz = \oint_{K_1(i)} \frac{z^4 e^{-z^2}}{(z+i)(z-i)}\,dz \underset{\text{Satz 18.1}}{=} 2\pi i \left.\frac{z^4 e^{-z^2}}{z+i}\right|_{z=i}$

$= 2\pi i \frac{i^4 e^{-i^2}}{2i} = \pi \cdot e.$ (2) ✓

(b) $\oint_{K_1(i)} \frac{(z^4-1)e^{-z^2}}{z^2+1}\,dz = \oint_{K_1(i)} \frac{(z^2+1)(z^2-1)e^{-z^2}}{z^2+1}\,dz = \oint_{K_1(i)} (z^2-1)e^{-z^2}\,dz = 0,$

da $f(z) = (z^2-1)e^{-z^2}$ regulär auf $\overline{U_1(i)}$. (2)

(c) Nach Satz 20.2 (vgl. Bem (11), S. 197) gilt mit $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x^2+3)(x^2+2)}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, \sqrt{3}i) + \operatorname{Res}(f, \sqrt{2}i)\right)$ (1)

(die Pole $x = -\sqrt{3}i$ bzw $x = -\sqrt{2}i$ sind nicht relevant, da sie negative Imaginärteile haben)

$2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, \sqrt{3}i) = \oint_{K_\varepsilon(\sqrt{3}i)} f(z)\,dz$, (mit ε klein) 2

$$= 2\pi i \; \frac{(\sqrt{3}i)^2 - 2\sqrt{3}i}{((\sqrt{3}i)^2+2)\; 2\sqrt{3}i} = \pi \cdot \frac{-3 - 2\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}} = \sqrt{3}\pi + 2\pi i$$

Satz 18.1

$2\pi i \; \mathrm{Res}(f, \sqrt{2}i) = \oint_{K_\varepsilon(\sqrt{2}i)} f(z)\,dz$ (mit ε klein) 2

$$= 2\pi i \; \frac{(\sqrt{2}i)^2 - 2\sqrt{2}i}{((\sqrt{2}i)^2+3)\; 2\cdot\sqrt{2}i} = \pi \cdot \frac{-2 - 2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2}\pi - 2\pi i.$$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \sqrt{3}\pi + \cancel{2\pi i} - \sqrt{2}\pi - \cancel{2\pi i} = \underline{\underline{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi}}$ 1

A9

(a) Partialbruchzerlegung von $f(z)$: $\quad f(z) = \frac{a}{4+z} + \frac{b}{2-z}$.

$\Rightarrow f(0) = \frac{6}{8} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} \iff 3 = a + 2b$

$f(1) = \frac{6}{5} = \frac{a}{5} + b \iff 6 = a + 5b$ $\quad \cdot 1$

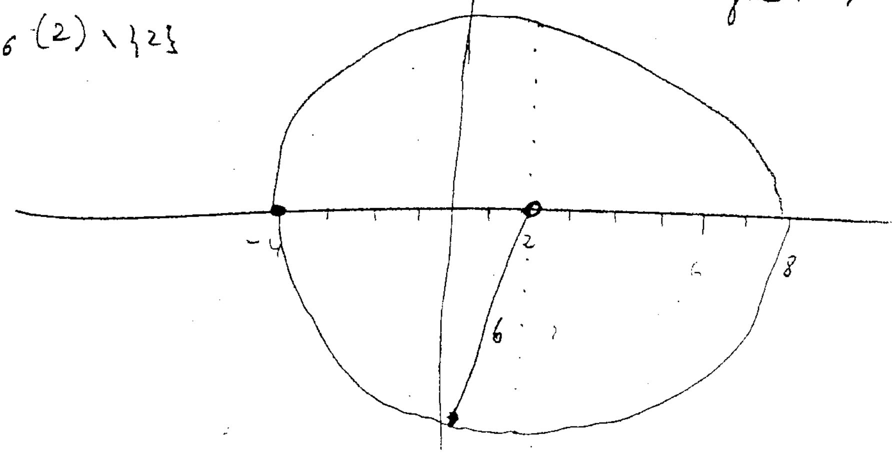
$\Rightarrow 3 = 3b \iff b = 1 \longrightarrow a = 1.$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{4+z} + \frac{1}{2-z}$

3

f hat Pole in $z=2$ und $z=-4$ und ist regulär in $U_6(2)\setminus\{2\}$

$\Rightarrow$ die Laurent-Reihe in $z_0 = 2$ konvergiert im Bereich $U_6(2)\setminus\{2\}$



1

[redacted]

↳ Mittels der geom. Reihe folgt.

$$f(z) = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4+z} = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{2-z}{6}}$$

$$= -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2-z}{6}\right)^k = -\frac{1}{z-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{6^{k+1}}(z-2)^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-2)^k \quad \text{mit } a_k = 0,\ k \le -2$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{6^{k+1}},\ k \geq -1.$$

ist Laurent-Reihe von f im Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ mit Konvergenzbereich $U_6(2)\setminus\{2\}$

(3)

(b) <u>Minima</u>: $f(z) \geq 0$ und $f(z) = 0 \iff |z^4 - 1| = 0 \iff z^4 = 1$

$\iff z \in \{1, i, -1, -i\}$.

↳ Minimalstellen sind $1, i, -1, -i$.

(2)

<u>Maxima</u>: Nach dem Satz vom Max. wird das Max. <u>nur</u> auf dem Rand $K_1(0)$ angenommen.

Sei $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi[$, Parametrisierung von $K_1(0)$.

$$\hookrightarrow |f(z(t))|^2 = |1 - z^4(t)|^2 = |1 - e^{4it}|^2 = |1 - \cos(4t) - i\sin(4t)|^2$$

$$= (1-\cos(4t))^2 + \sin^2(4t) = 2(1 - \cos(4t)) \leq 4$$

(4)

mit "=" $\cos(4t) = -1 \iff t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

↳ Maximalstellen sind daher

$$e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$e^{3i\pi/4} = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

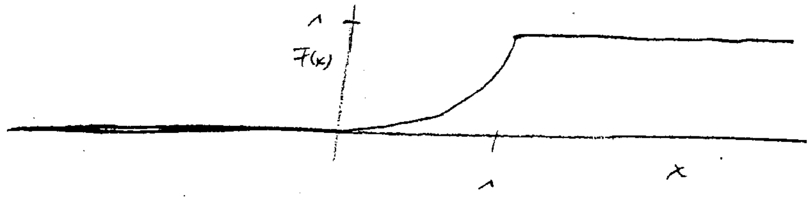
$$e^{5i\pi/4} = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

$$e^{7i\pi/4} = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

A10

(a) $F(x) = 0,\ x \le 0$, $\quad F(x) = \int_0^x \alpha(1-t)^{\alpha-1}\,dt = -(1-t)^\alpha\Big|_0^x = 1-(1-t)^\alpha,\ t \in (0,1)$

$F(x) = 1,\ x \ge 1$



(2)

(b) $$EX_1 = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^1 x\,\alpha(1-x)^{\alpha-1}\,dx = -\int_0^1 (1-x)\,\alpha(1-x)^{\alpha-1}\,dx + \int_0^1 \alpha(1-x)^{\alpha-1}\,dx$$

$$= 1 - \alpha\int_0^1 (1-x)^\alpha\,dx \underset{(a)}{=} 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

$$EX_1^2 = \int_0^1 x^2 \alpha(1-x)^{\alpha-1}\,dx \underset{\text{part. Int}}{=} \underbrace{-x^2(1-x)^\alpha\Big|_0^1}_{=0.} + 2\int_0^1 x(1-x)^\alpha\,dx$$

$$= \frac{2}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\alpha+2}$$ (Berechnung von EX_1 mit $\alpha+1$ statt α.)

$$= \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

↳ $$\operatorname{Var} X_1 = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{(\alpha+1)^2} = \frac{2(\alpha+1)-\alpha-2}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}$$

$$= \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}$$

(3)

(c) Für $\alpha > 0$ gilt:

$$E\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i \underset{(b)}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

↳ $\bar{X}_n$ erwartungstreu für $\gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

(2)

(d) Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt wegen $EX_i = \frac{1}{\alpha+1}\ \forall i$ und $0 < \operatorname{Var} X_i = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)} < \infty$

$$P\Big(\bar{X}_n < \underbrace{\frac{1}{\alpha+1}}_{\overset{\shortparallel}{E\bar{X}_n}\ (\text{nach (c)})}\Big) = P\left(\frac{\bar{X}_n - E\bar{X}_n}{\sqrt{\operatorname{Var}\bar{X}_n}} \le 0\right) \overset{ZGWS}{\approx} \phi(0) = 1/2.$$

↳ W' für Unterschätzung ist 1/2.

(2)