Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16.09.2009

Modulprüfung

„Mathematik IV für Elektrotechnik / Mathematik III für Informatik / Numerik und Stochastik für M. Edu “

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punktzahl	6	7	8	6	3	30
erreichte Punktzahl						

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze, Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 90 Minuten.
Als Hilfsmittel sind vier eigenhandschriftliche DIN-A4 Seiten und einfache Taschenrechner zugelassen. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Informationen zum Aushang werden auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

1. Aufgabe (Testverfahren) (6 Punkte)

Ein Hersteller von Präzisionswaagen gibt an, die Messgenauigkeit einer neuen und sehr preisgünstigen Waage sei nicht schlechter als die Messgenauigkeit des alten Modells. Ein potentieller Käufer möchte diese Angaben nun überprüfen. Dazu führt er mit der neuen Waage 30 Messungen eines Gewichts durch. Zu der entstandenen Messreihe $x_1, \ldots x_{30}$ wird die empirische Varianz $s^2 = 2.07 \cdot 10^{-11}$ berechnet. Aus langjähriger Erfahrung mit dem alten Modell ist bekannt, dass sich die Wiegeergebnisse der bisherigen Waage durch eine Zufallsvariable mit der Varianz $\sigma_0^2 = 1.5 \cdot 10^{-11}$ beschreiben lassen. Nehmen Sie an, dass $x_1, \dots x_{30}$ Realisierungen unabhängiger, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilter Zufallsvariablen sind. Es soll nun versucht werden die Angaben des Herstellers zu widerlegen.

a) Überprüfen Sie zum Niveau 0.05 die Nullhypothese, dass die neue Waage die Varianz der alten Waage nicht überschreitet.

b) Wie fällt die Überprüfung aus, wenn Sie auf Grundlage von 100 Messwerten die empirische Varianz $s^2 = 2.07 \cdot 10^{-11}$ berechnet hätten?

c) Beurteilen Sie das Testergebnis aus Teil b). Sind die Angaben des Herstellers gerechtfertigt?

2. Aufgabe (Verteilung,Tschebyschev,Zentraler Grenzwertsatz) (7 Punkte)

Die Lebensdauer eines Netzteiles (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2000} \ln \frac{20}{19}$ beschreiben. In einem Rechenzentrum werden 200 Rechner mit diesem Typ Netzteil angeschafft. Man ist nun unter anderem daran interessiert wieviele der Netzteile der angeschafften Rechner eine gewisse Betriebszeit überstehen. Wir nehmen an, dass die Lebensdauern der einzelnen Netzteile voneinander unabhängig sind.

Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung lautet

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Netzteil eine Betriebszeit von mehr als 2000 Stunden überdauert.

b) Nehmen Sie nun an, die Wahrscheinlichkeit aus a) sei $\frac{19}{20}$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyschevschen Ungleichung eine Unterschranke für die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 185 und 195 der 200 Netzteile eine Betriebsdauer von 2000 Stunden überstehen.
Hinweis: Für $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariablen Y gilt: $E(Y) = n \cdot p$, $Var(Y) = n \cdot p(1-p)$.

c) Berechnen Sie nun mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit, dass bis zu 195 der 200 Netzteile eine Betriebszeit von 2000 Stunden überstehen.

3. Aufgabe (Anfangswertprobleme) (8 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y'(t) = t^2\, y(t) \quad , \qquad y(1) = e^{\frac{1}{3}},$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^3}{3}}$, und zudem die folgende Mittelpunktregel

$$(M) \qquad u_{j+1} = u_j + hf\left(t_j + \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{2}u_j + \tfrac{1}{2}u_{j+1}\right)$$

zur Lösung von Anfangswertproblemen der Form $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, $y(a) = y_0$.

a) Stellen Sie die Verfahrensfunktion der Mittelpunktregel (M) für das gegebene Anfangswertproblem $(*)$ auf.

b) Berechnen Sie jeweils mit dem expliziten Euler-Verfahren und der Mittelpunktregel (M) für die Schrittweite $h = \frac{1}{10}$ Näherungen an $y(1.2)$ für $(*)$. Runden Sie dabei die Endergebnisse auf vier Stellen nach dem Komma.

c) Wie genau sind Ihre Approximationen?

d) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion für die Mittelpunktregel (M) und prüfen Sie, ob das Verfahren L–stabil ist.

e) Gegeben sei das Anfangswertproblem $(\#)\ y'(t) = (-3 + 3i)y(t), y(0) = 100$. Beurteilen Sie anhand Ihrer Ergebnisse aus d), ob für feste Schrittweite $h > 0$ die mit der Mittelpunktregel (M) berechneten numerischen Approximationen u_j, $j \in \mathbb{N}$, zum Anfangswertproblem $(\#)$ mit fortlaufender Zeit t abklingen, ob also die Folge (u_j) gegen Null konvergiert.

4. Aufgabe (Quadratur) (6 Punkte)

Die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung kann nicht geschlossen angegeben werden. Ihre Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ soll hier numerisch integriert werden.

a) Berechnen Sie mit der summierten Trapezregel eine Annäherung an das Integral $\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$, indem Sie das Intervall in zwei gleich große Teilintervalle zerlegen.

b) Wie genau ist Ihre Approximation?

c) Berechnen Sie für die summierte Trapezregel eine möglichst minimale Anzahl m von Teilintervallen, so dass der Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ höchstens 10^{-4} beträgt.

Runden Sie bei Ihren Berechnungen auf fünf Stellen nach dem Komma.

Hinweis: Um das Maximum einer Funktion abzuschätzen, genügt es hier, die Maxima der vorkommenden Faktoren und Summanden abzuschätzen und daraus eine Oberschranke zu berechnen.
Für die gegebenenfalls benötigten Ableitungen von f gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2 - 1)e^{-x^2/2},$$
$$f'''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x^3 + 3x)e^{-x^2/2}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^4 - 6x^2 + 3)e^{-x^2/2}.$$

5. Aufgabe (Multiple Choice) (3 Punkte)

Bei den Multiple Choice Aufgaben darf pro Frage eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen.

Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es Null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

(a) Gegeben sei eine Matrix mit Eigenwerten $-4, 2$ und 3. Welche der folgenden Aussagen ist richtig ?

- ☐ Die Vektoriteration nach von Mises liefert eine Annäherung an den Eigenwert 2 von A.
- ☐ Die inverse Vektoriteration von Wielandt mit $\mu = -3$ liefert eine Näherung an den Eigenwert 3.
- ☐ Die inverse Vektoriteration von Wielandt mit $\mu = -3$ liefert eine Näherung an den Eigenwert -4.

(b) Gegeben sei eine Messreihen mit zwei Merkmalen x und y. Für die Messreihe berechnet man den Korrelationskoeffizienten -0.95. Was können Sie daraus folgern?

- ☐ Für die Messreihe kann der Zusammenhang von x und y durch eine steigende Gerade beschrieben werden.
- ☐ Für die Messreihe kann der Zusammenhang von x und y durch eine fallende Gerade beschrieben werden.
- ☐ Die Regressiongerade der Messreihe besitzt die Steigung -0.95.

(c) Sei s ein kubischer Spline mit vier Knoten und p ein kubischer Interpolant zu den gleichen vier Knoten auf dem Intervall $[a, b]$.

- ☐ Diese Situation kann nie eintreten.
- ☐ Dann stimmen s und p überein.
- ☐ Dann gilt, dass s und p in den vier Knoten übereinstimmen; s und p stimmen aber nicht notwendig überall auf $[a, b]$ überein.