Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2008
23.04.2008

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE,iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Gruppenübung

Lösung zur Aufgabe G7 (Iterationsverfahren)

(a) **1.Jacobi-Verfahren** Wir betrachten zunächst die Iterationsmatrix. Es ist $B := D$, damit ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ also } (I - B^{-1}A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt:

$$\|(I - B^{-1}A)\|_\infty = \max\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3} < 1.$$

Nach Satz 3.2.3 der Vorlesung konvergiert das Jacobiverfahren also.

Wenden wir nun das Verfahren auf den Startvektor $x^{(0)} = (-5, -7)$ an:

$\underline{k = 1:}$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-5 - 2(-7)) \\ \frac{1}{2}(1 - (-1)(-5)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\underline{k = 2:}$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-5 - 2(-2)) \\ \frac{1}{2}(1 - (-1)(-3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.Gauss-Seidel-Verfahren:
Hier ist

$$B = D - L = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Iterationsmatrix ist also:

$$(I - B^{-1}A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \|(I - B^{-1}A)\|_\infty = \frac{2}{3} < 1$$

Somit konvergiert nach Satz 3.2.3 auch das Gauß-Seidel-Verfahren.
Die Iterationsschritte mit Startvektor $x^{(0)} = (-5, -7)$ sehen folgendermaßen aus:

$\underline{k = 1:}$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-5 - 2(-7)) \\ \frac{1}{2}(1 - (-1)(-3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>$k = 2$:</u>

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-5 - 2(-1)) \\ \frac{1}{2}(1 - (-1)1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Wir führen nun 2 Verfahrensschritte mit dem SOR-Verfahren zum Parameter $\omega = \frac{12}{10}$ durch:

<u>$k = 1$:</u>

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{10}(-5) + \frac{12}{10}\frac{1}{-3}(-5 - 2(-7)) \\ -\frac{2}{10}(-7) + \frac{12}{10}\frac{1}{2}(1 - (-1)(-\frac{26}{10})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.6 \\ 0.44 \end{pmatrix}$$

<u>$k = 2$:</u>

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{10}(-2.6) + \frac{12}{10}\frac{1}{-3}(-5 - 2(0.44)) \\ -\frac{2}{10}0.44 + \frac{12}{10}\frac{1}{2}(1 - (-1)(2.872)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.872 \\ 2.23520 \end{pmatrix}.$$

Lösung zur Aufgabe G8 (Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren)

(a) Für die Iterationsmatrix $M := I - B^{-1}A$ folgt

$$M = -\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

charakteristisches Polynom :

$$det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + 1 - 1 - 2\lambda + 2\lambda + 0.25\lambda = -\lambda^3 + 0.25\lambda,$$

es hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{0.25} = \pm 0.5$$

und damit ist $\rho(M) = 0.5$, d.h. (globale) Konvergenz.

(b)

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ und } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & -1 \\ 0 & 0.25 & -0.5 \\ 0 & -1.5 & -1 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom :

$$det(M - \lambda I) = -\lambda((0.25 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0.75) = -\lambda(\lambda^2 + 0.75\lambda - 1)$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = -0.375 \pm \sqrt{1 + (0.375)^2} \Rightarrow \lambda_2 \approx 0.693, \lambda_3 \approx -1.443,$$

womit $\rho(M) = 1.443000 > 1$ folgt und damit keine globale Konvergenz (genauer: zu jeder rechten Seite b existieren Startvektoren, sodaß das Iterationsverfahren nicht gegen x^* - und sogar überhaupt nicht - konvergiert).

Lösung zur Aufgabe G9 (Lagrangesche Polynominterpolation)

(a) Das Lagrange-Interpolationspolynom ist definiert durch

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_{i,3}(x),$$

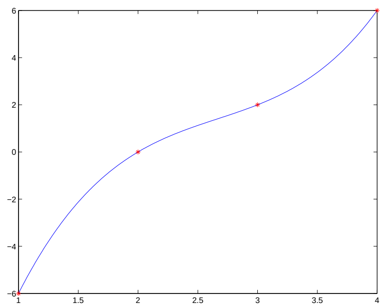
also hier wobei die $L_{i,n}(x)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
L_{0,3}(x) &= \prod_{j=0,j\neq 0}^{3} \tfrac{x-x_j}{x_0-x_j} = \tfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\tfrac{x-x_2}{x_0-x_2}\tfrac{x-x_3}{x_0-x_3} = \tfrac{x-2}{-1}\tfrac{x-3}{-2}\tfrac{x-4}{-3} \\
L_{2,3}(x) &= \prod_{j=0,j\neq 2}^{3} \tfrac{x-x_j}{x_2-x_j} = \tfrac{x-x_0}{x_2-x_0}\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\tfrac{x-x_3}{x_2-x_3} = \tfrac{x-1}{2}\tfrac{x-2}{1}\tfrac{x-4}{-1} \\
L_{3,3}(x) &= \prod_{j=0,j\neq 3}^{3} \tfrac{x-x_j}{x_3-x_j} = \tfrac{x-x_0}{x_3-x_0}\tfrac{x-x_1}{x_3-x_1}\tfrac{x-x_2}{x_3-x_2} = \tfrac{x-1}{3}\tfrac{x-2}{2}\tfrac{x-3}{1}
\end{aligned}$$

Da $y_1 = 0$ müssen wir $L_{1,3}$ nicht berechnen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= -6 \cdot \frac{x-2}{-1}\frac{x-3}{-2}\frac{x-4}{-3} + 2 \cdot \frac{x-1}{2}\frac{x-2}{1}\frac{x-4}{-1} + 6 \cdot \frac{x-1}{3}\frac{x-2}{2}\frac{x-3}{1} \\
&= (x-2)(x-3)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)(x-2)(x-3) \\
&= (x-2)[(x-3)(x-4) - (x-1)(x-4) + (x-1)(x-3)] \\
&= (x-2)[(x^2-7x+12) - (x^2-5x+4) + (x^2-4x+3)] = \\
&= (x-2)[(x^2-7x+12) + x - 1)] = (x-2)[x^2-6x+11)] = \\
&= x^3 - 6x^2 + 11x - 2x^2 + 12x - 22 = x^3 - 8x^2 + 23x - 22
\end{aligned}$$

(b) Das Interpolationspolynom ist blau eingezeichnet und geht - wie verlangt- durch die roten Interpolationspunkte:



Hausübung

Lösung zur Aufgabe H7 (Jacobi-Verfahren)

(a) Für die Hauptunterdeterminanten von A gilt:

$$det(A_1) = 1 > 0$$

$$det(A_2) = 1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a \in (-1, 1)$$

$$det(A_3) = 2 * (a-1)^2 * (a+0.5) > 0 \Leftrightarrow a \in (-0.5, 1)$$

Somit muß $a \in (-0.5, 1)$ gefordert werden.
Alternativ kann man auch die Eigenwerte von A in AbhÄngigkeit von a bestimmen: $1-a, 1-a, 1+2a$. Sie sind für $a \in (-0.5, 1)$ positiv.

(b) A ist strikt diagonaldominant genau dann, wenn $1 > 2 * |a|$, d. h. $a \in (-0.5, 0.5)$.

(c) Es ist $B = D$. Darum hat die Iterationsmatrix die Form

$$M := (I - B^{-1}A) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$$

Für die Eigenwerte von M gilt:

$$0 = det(M - \lambda * I) = -\lambda^3 + 3 * a^2 * \lambda - 2 * a^3$$

$$\lambda_1 = a \qquad \lambda_2 = a \qquad \lambda_3 = -2 * a$$

$$\rho(B) = 2 * |a| < 1 \Leftrightarrow a \in (-0.5, 0.5)$$

Das Jacobi-Verfahren konvergiert demnach für $a \in (-0.5, 0.5)$.

Lösung zur Aufgabe H8 (Spektralradius und Konvergenz)

(a) Nach Satz 3.2.5 konvergieren alle drei Verfahren, da A strikt diagonaldominant ist.

(b) A ist irreduzibel, da es gar keine Null-Einträge besitzt. Die Diagonalelemente sind positiv und die restlichen Elemente negativ. Da nach (a) auch das Jakobi-Verfahren konvergiert, ist A also eine M-Matrix.

(c) A ist eine irreduzible M-Matrix. Folglich existiert nach Satz 3.2.9 ein $\omega_0 > 1$ derart, dass der Spektralradius der Iterationsmatrix des SOR-Verfahrens kleiner 1 und monoton fallend in ω ist für alle $\omega \in]0, \omega_0]$.
Die Iterationsmatrix C hat die Form: $C = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$.
Wir haben folgende Matrizen:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D - \omega L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\omega & 2 \end{pmatrix},$$

$$(1 - \omega)D + \omega U = \begin{pmatrix} 2(1 - \omega) & \omega \\ 0 & 2(1 - \omega) \end{pmatrix}, \quad (D - \omega L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\omega}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} (1 - \omega) & \frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2}(1 - \omega) & (\frac{\omega^2}{4} + (1 - \omega)) \end{pmatrix}.$$

Mit geeigeneten Befehlen für Maximum, Absolutbetrag und Eigenwerte können wir uns nun den Spektralradius in Abhängigkeit von ω anschauen (in Matlab z.B. $\rho(C) = \max(\text{abs}(\text{eig}(C)))$), siehe Abbildung 1. ω_0 ist nun gerade das Urbild des Minimums der Kurve. Zur Berechnung von ω_0 gehen wir wie folgt vor. Das Charakteristische Polynom der Iterationsmatrix lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda(\omega - \frac{\omega^2}{8} - 1) + (\omega - 1)^2.$$

Damit ergeben sich als Eigenwerte der Iterationsmatrix

$$\lambda_{1,2} = (\frac{\omega^2}{8} - \omega + 1) \pm \frac{1}{8}\omega\sqrt{\omega^2 - 16\omega + 16}.$$

Als Betrag der Eigenwerte ergibt sich entsprechend

$$|\lambda_1(\omega)| = |\frac{\omega^2}{8} - \omega + 1 + \frac{1}{8}\omega\sqrt{\omega^2 - 16\omega + 16}|,$$

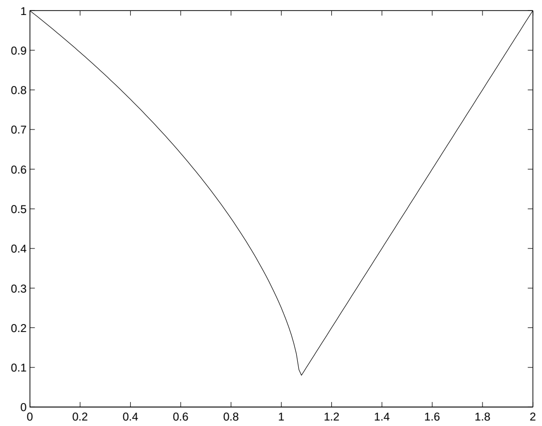


Abbildung 1: Spektralradius der Iterationsmatrix in Abhängigkeit von ω.

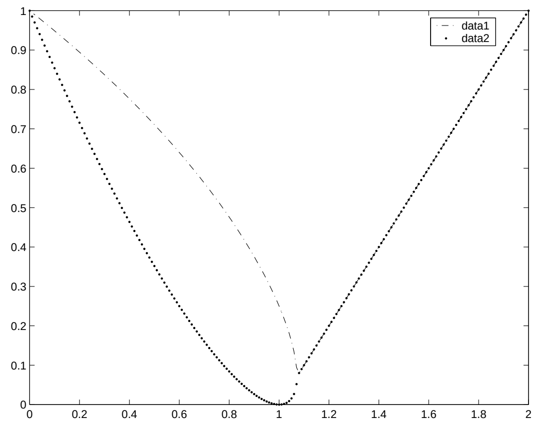


Abbildung 2: Betrag der EWe in Abhängigkeit von ω, $|\lambda_1| =$ data1, $|\lambda_2| =$ data2.

$$|\lambda_2(\omega)| = |\tfrac{\omega^2}{8} - \omega + 1 - \tfrac{1}{8}\omega\sqrt{\omega^2 - 16\omega + 16}|,$$

Drucken wir nun diese beiden Kurven in ein Diagramm (siehe Abbildung 2) und vergleichen mit Abbildung 1, dann erkennen wir, dass beide Kurven ab der Stelle ω_0 übereinstimmen und monoton steigend sind. ω_0 ist offenbar jener Wert, sodass unter der Wurzel Null steht. Die Nullstellen dieser quadratischen Gleichung sind $\omega_1 = 8+4\sqrt{3}$ und $\omega_2 = 8-4\sqrt{3}$. Da $\omega \in [0,2]$ gilt, folgt $\omega_0 = 8 - 4\sqrt{3} \approx 1.07179677$.

Lösung zur Aufgabe H9 (Lagrangesche Polynominterpolation)

Die Tabelle der Interpolationspunkte lautet

i	0	1	2
x_i	$\frac{1}{4}$	1	4
y_i	$\frac{1}{2}$	1	2

Das Lagrange-Interpolationspolynom ist definiert durch

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i L_i(x)$$

wobei die $L_i(x)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \prod_{\substack{j=0\\j\neq 0}}^{2} \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{x-1}{\frac{1}{4}-1}\frac{x-4}{\frac{1}{4}-4} = \frac{16}{45}(x^2-5x+4)\\
L_1(x) &= \prod_{\substack{j=0\\j\neq 1}}^{2} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\frac{x-4}{1-4} = -\frac{4}{9}(x^2-\frac{17}{4}x+1)\\
L_2(x) &= \prod_{\substack{j=0\\j\neq 2}}^{2} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{x-\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{4}}\frac{x-1}{4-1} = \frac{4}{45}(x^2-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4})
\end{aligned}$$

Das Interpolationspolynom lautet demnach

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i L_i(x) = -\frac{4}{45}x^2 + \frac{7}{9}x + \frac{14}{45}$$

und der Interpolationsfehler in den Punkten $\frac{1}{2}$ und 2 beträgt $|\sqrt{\frac{1}{2}} - p(\frac{1}{2})| = |0.7071 - 0.6778| = 0.0293$ bzw. $|\sqrt{2} - p(2)| = |1.414 - 1.5111| = 0.0969$.