Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2008
16.04.2008

2. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Cholesky-Verfahren)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, -1, 4)^T$.

Lösung: Zuerst prüfen wir, ob die Matrix positiv definit ist (offensichtlich ist die Matrix symmetrisch). Dazu berechnen wir z. B. die Determinanten der Hauptminoren:

$$\begin{aligned}
&\det(a_{11}) = \det(1) = 1 > 0, \\
&\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0 \text{ und} \\
&\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 6 + 2 + 2 - 2 - 4 - 3 = 1 > 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist A positiv definit und damit ist eine Choleskyzerlegung möglich. Wie im Skript auf Seite 18 bemerkt wird, kann dieser Test auf positive Definitheit implizit in den Algorithmus eingebaut werden. Man stoppt dabei, falls eines der Elemente $a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2$ nicht positiv ist. Dann ist die Matrix nicht positiv definit.

Wir führen nun den Algorithmus 3 der VL durch:

(j=1): $l_{11} = \sqrt{1} = 1$

(i=2): $l_{21} = 1$
(i=3): $l_{31} = -1$
(j=2): $l_{22} = \sqrt{2-1} = 1$
(i=3): $l_{32} = -1$
(j=3): $l_{33} = 1$

A besitzt also die Cholesky-Zerlegung $LL^T = A$, mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen des Gleichungssystem $Ax = b$ lösen wir zunächst $Ly = b$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_1 + y_2 &= -1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -1 \\ -y_1 - y_2 + y_3 &= 4 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 3 \end{aligned}$$

Danach erhalten wir x als Lösung von $L^T x = y$:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \end{aligned}$$

Folglich ist $x = (1, 2, 3)^T$ die Lösung des Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe G5 (Matrixnorm & Konditionszahl)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Matrixnormen $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$.

(b) Berechne die Konditionszahl bezüglich der drei Matrixnormen aus Teil (a).

Lösung:

(a) Für die Spaltensummennorm gilt

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,4} \sum_{i=1}^{4} |a_{ij}| = \max\{3, 3, 4, 4\} = 4.$$

Weiter gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $A^T A$ sind 16, 8, 4, 2. Daher ist

$$\|A\|_2 = 4.$$

Die Zeilensummennorm ist

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,4} \sum_{j=1}^{4} |a_{ij}| = \max\{4, 2, 4, 4\} = 4.$$

(b) Die Inverse von A ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Daher ist die Spaltensummennorm von A^{-1}

$$\|A^{-1}\|_1 = 1$$

und die Konditionszahl bezüglich dieser Norm

$$\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 4.$$

Es gilt $(A^{-1})^T A^{-1} = (AA^T)^{-1}$. Nun haben die Matrizen $A^T A$ und AA^T dieselben Eigenwerte, da sie zueinander ähnlich sind. (D.h. es gibt eine inv.bare Matrix M, mit $A^T A = M^{-1} A A^T M$ - nämlich $M = A$.) Die Eigenwerte der Inversen sind zudem die Inversen der Eigenwerte. Also sind die Eigenwerte von $(A^{-1})^T A^{-1}$ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{16}$. Daher gilt

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und für die Konditionszahl bezüglich dieser Norm

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Die Zeilensummennorm von A^{-1} ist

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{3}{4}$$

und die Konditionszahl bezüglich dieser Norm

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 3.$$

Aufgabe G6 (Störung der rechten Seite)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm, die von der $\|\cdot\|_\infty$-Norm induziert wird.

(b) Die rechte Seite werde nun durch

$$\Delta b = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

gestört. Gib eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung an.

(c) Löse nun die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $A\tilde{x} = b + \Delta b$ und vergleiche mit der Abschätzung aus Teil (b).

Lösung:

(a) Die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm ist $\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{6, 12, 5\} = 12, \\ \|A^{-1}\|_\infty &= \max\{15, 5, 2\} = 15. \end{aligned}$$

Daher ist $\mathrm{cond}_\infty(A) = 180$.

(b) Sei x die Lösung von $Ax = b$ und $\tilde{x}$ die Lösung von $A\tilde{x} = b + \Delta b$. Dann gilt nach Satz 2.3.3 aus der Vorlesung für den relativen Fehler

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

Daher ist

$$180 \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 180 \cdot \frac{0.1}{12} = \frac{180}{120} = \frac{3}{2}$$

eine obere Schranke für den relativen Fehler.

(c) Mit den Bezeichnungen aus Teil (b) gilt

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{x} = A^{-1}(b + \Delta b) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt einen relativen Fehler von

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2},$$

was genau der in Teil (b) errechneten oberen Schranke entspricht. In diesem Fall ist die Abschätzung also scharf.

Hausübung

Aufgabe H4 (Cholesky-Zerlegung)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & 12 \\ 0 & 12 & 41 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (-1, 10, 41)^T$.

Lösung: Zuerst prüfen wir, ob die Matrix positiv definit ist (Offensichtlich ist die Matrix symmetrisch). Dazu berechnen wir z. B. die Determinanten der Hauptminoren:

$$\det(a_{11}) = \det(1) = 1 > 0,$$
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} = 13 - 4 = 9 > 0 \text{ und}$$
$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & 12 \\ 0 & 12 & 41 \end{pmatrix} = 13 \cdot 41 + 0 + 0 - 12^2 - 2 \cdot 2 \cdot 41 = 9 \cdot 41 - 144 = 225 > 0.$$

Folglich ist A positiv definit und damit ist eine Choleskyzerlegung möglich. Wie im Skript auf Seite 18 bemerkt wird, kann dieser Test auf positive Definitheit implizit in den Algorithmus eingebaut werden. Man stoppt dabei, falls eines der Elemente $a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2$ nicht positiv ist. Dann ist die Matrix nicht positiv definit.

Wir führen nun den Algorithmus 3 der VL durch:

(j=1): $l_{11} = 1$

  (i=2): $l_{21} = 2$

  (i=3): $l_{31} = 0$

(j=2): $l_{22} = 3$

  (i=3): $l_{32} = 4$

(j=3): $l_{33} = 5$

A besitzt also die Cholesky-Zerlegung $LL^T = A$, mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen des Gleichungssystem $Ax = b$ lösen wir zunächst $Ly = b$:

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ 2y_1 + 3y_2 &= 10 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 4 \\ 4y_2 + 5y_3 &= 41 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 5 \end{aligned}$$

Danach erhalten wir x als Lösung von $L^T x = y$:

$$\begin{aligned} 5x_3 &= 5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 \\ 3x_2 + 4x_3 &= 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 &= -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \end{aligned}$$

Folglich ist $x = (-1, 0, 1)^T$ die Lösung des Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe H5 (Störung der Matrix)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Delta A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbf{R}$.

Betrachte das Gleichungssystem $Ax = b$ und das gestörte Gleichungssystem $(A + \Delta A)\tilde{x} = b$.

(a) Gib eine obere Schranke für den relativen Fehler in Abhängigkeit von α bezüglich der Spaltensummennorm und der Zeilensummennorm an.

(b) Für welche α garantieren die Schranken einen relativen Fehler von höchstens $\frac{1}{2}$?

(c) Berechne den exakten relativen Fehler für die maximalen Werte von α aus Teil (b).

Lösung:

(a) Nach Satz 2.3.3 gilt für den relativen Fehler

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A)\|\Delta A\|/\|A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Da keine Störung der rechten Seite vorliegt vereinfacht sich die obige Ungleichung mit Hilfe der Beziehung $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ zu

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}.$$

Es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich bezüglich der Spaltensummennorm für den relativen Fehler die Abschätzung

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} \leq \frac{\|A^{-1}\|_1 \|\Delta A\|_1}{1 - \|A^{-1}\|_1 \|\Delta A\|_1} = \frac{\frac{7}{2}|\alpha|}{1 - \frac{7}{2}|\alpha|} = \frac{1}{\frac{2}{7|\alpha|} - 1}$$

für $|\alpha| < \frac{2}{7}$.

Bezüglich der Zeilensummennorm ergibt sich

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{1}{\frac{1}{3|\alpha|} - 1}$$

für $|\alpha| < \frac{1}{3}$.

(b) Für die Abschätzung bezüglich der Spaltensummennorm muß (beachte $|\alpha| < \frac{2}{7}$, damit wir eine positive Oberschranke haben)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{2}{7|\alpha|} - 1} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \qquad 2 &\leq \frac{2}{7|\alpha|} - 1 \\ \Leftrightarrow \qquad 3 &\leq \frac{2}{7|\alpha|} \\ \Leftrightarrow \qquad |\alpha| &\leq \frac{2}{21} \end{aligned}$$

gelten, damit der relative Fehler kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Eine analoge Rechnung für die Abschätzung bezüglich der Zeilensummennorm ergibt

$$|\alpha| \leq \frac{1}{9}.$$

(c) Das Gleichungssystem $(A + \Delta A)x = b$ hat die eindeutige Lösung

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha - 1} \\ \frac{2-\alpha}{2-4\alpha} \end{pmatrix}$$

für $\alpha \neq \frac{1}{2}$. (Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist $A + \Delta A$ singulär.)

Das maximale α für die Abschätzung bezüglich der Spaltensummennorm ist $\alpha = \frac{2}{21}$.

Damit ergibt sich für den relativen Fehler

$$\frac{\|x_{\frac{2}{21}} - x_0\|_1}{\|x_0\|_1} = \frac{\left|\frac{1}{\frac{4}{21} - 1} + 1\right| + \left|\frac{2 - \frac{2}{21}}{2 - \frac{8}{21}} - 1\right|}{2} = \frac{\frac{4}{17} + \frac{3}{17}}{2} = \frac{7}{34}.$$

Das maximale α für die Abschätzung bezüglich der Zeilensummennorm ist $\alpha = \frac{1}{9}$. Damit ergibt sich für den relativen Fehler

$$\frac{\|x_{\frac{1}{9}} - x_0\|_\infty}{\|x_0\|_\infty} = \frac{\max\left\{\left|\frac{1}{\frac{2}{9}-1} + 1\right|, \left|\frac{2-\frac{1}{9}}{2-\frac{4}{9}} - 1\right|\right\}}{1} = \max\left\{\frac{2}{7}, \frac{3}{14}\right\} = \frac{2}{7}.$$

Aufgabe H6 (Kondition und Fehler)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Konditionszahl $\text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$.

(b) Schätze den relativen Fehler der Lösung in der Zeilensummennorm ab, wenn der Gauß-Algorithmus statt mit der Matrix A mit einer Matrix $\tilde{A}$ und statt mit der rechten Seite b mit dem Vektor $\tilde{b}$ gerechnet wird , für die gilt:

$$\|\tilde{A} - A\|_\infty = \|\Delta A\|_\infty \le 0.02 \qquad \text{und} \qquad \|\tilde{b} - b\|_\infty = \|\Delta b\|_\infty \le 0.001.$$

(c) Berechne die exakte Lösung des Gleichungssystems und des mit folgenden Matrizen gestörten Gleichungssystems

$$\Delta A = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix}, \qquad \Delta b = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleiche den Unterschied beider Ergebnisse mit der in (b) gemachten Abschätzung.

Lösung:

(a) Berechne A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow cond_{||\cdot||_\infty}(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty = 21 \cdot 21 = 441.$

(b) Fehlerformel aus Skript anwenden:
$\frac{||\tilde{x}-x||_\infty}{||x||_\infty} \le cond_{||\cdot||_\infty}(A) \left(\frac{||\tilde{b}-b||_\infty}{||b||_\infty} + \frac{||\tilde{A}-A||_\infty}{||A||_\infty}\right) \frac{1}{1-cond_{||\cdot||_\infty}(A)\frac{||\tilde{A}-A||_\infty}{||A||_\infty}} \le$
$\le 441 \cdot \left(\frac{0.001}{1} + \frac{0.02}{21}\right) \frac{1}{1-441\cdot\frac{0.02}{21}} \le 1.4845$

(c) Exakte Lösung des ungestörten Problems:
$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 11 & 1 \\ 9 & 10 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 11 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right)$
$\Rightarrow x_2 = 1,\ x_1 = -1;$

Exakte Lösung des gestörten Problems:
$\left(\begin{array}{cc|c} 9.99 & 11.01 & 0.999 \\ 9.01 & 9.99 & 1.001 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9.99 & 11.01 & 0.999 \\ 0 & 0.06006 & 0.1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow x = (-1.735, 1.665)^T$
Der exakte Fehler ist damit:
$\frac{||\tilde{x}-x||_\infty}{||x||_\infty} = 0.735$
Abschätzung um einen Faktor 2 zu pessimistisch.