Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2008
21.05.2008

7. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE,iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Globalisiertes Newton-Verfahren)

Wir betrachten wieder die Funktion $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aus Aufgabe G17, also

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

In G17 haben wir gezeigt, dass das lokale Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x^0| > 1$ nicht konvergiert.

(a) Verwende nun das globalisierte Newton-Verfahren mit der Schrittweitenregel von Armijo, um für den Startpunkt $x^{(0)} = 2$ eine Nullstelle von F zu berechnen .

(b) Veranschauliche Dir das Verfahren und die Schrittweitensuche an einer Skizze, d.h. zeichne die Iterierten $x^{(k)}$ in Deine Skizze der Funktion aus Aufgabe G17 ein.

(c) Welchen Wert hat der Index l aus Satz 6.2.2, ii) in diesem Beispiel?

Lösung: Zur Erinnerung, die Iterationsvorschrift lautete

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k}{\sqrt{(x^k)^2 + 1}}((x^k)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = -(x^{(k)})^3,$$

also

$$s^{(k)} = -x^k((x^k)^2 + 1).$$

(a) Um globale Konvergenz gewährleisten zu können, wenden wir nun das globalisierte Newtonverfahren auf die gegebene Funktion an. Wir berechnen also eine Suchrichtung s^k aus der Newtongleichung

$$F'(x^k) \cdot s^k = -F(x^k),$$

bestimmen dazu eine geeignete Schrittweite σ_k und nehmen als nächsten Iterationspunkt

$$x^{k+1} = x^k + \sigma_k s^k.$$

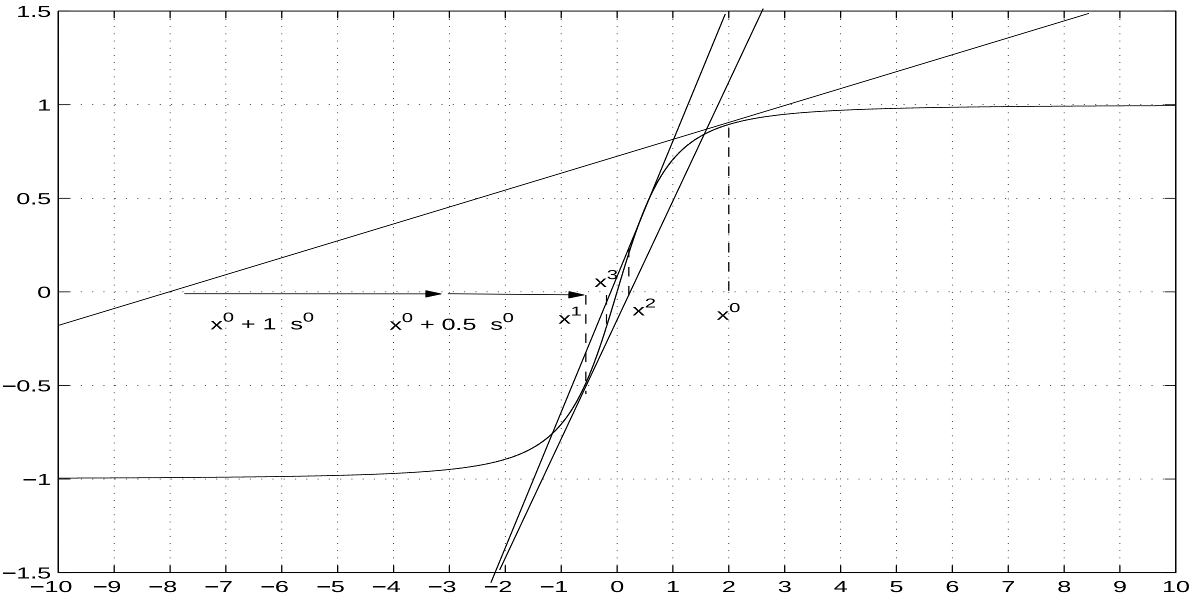
Anstatt wie im lokalen Newtonverfahren immer $\sigma_k = 1$ zu wählen, suchen wir das größte $\sigma_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots\}$, welches die Armijo-Bedingung

$$\|F(x^{k+1})\|_2^2 \le (1 - 2\delta\sigma_k)\|F(x^k)\|_2^2$$

erfüllt. Wir wählen hier $\delta = 10^{-3}$. Bei diesem Vorgehen ergibt sich die folgende Iterationsfolge für $x^0 = 2$:

k	x^k	$-F(x^k)$	$F'(x^k)$	s^k	σ_k	$x^k + \sigma_k s^k$	$\|F(x^{k+1})\|_2^2$	$(1-0.002\sigma_k)\|F(x^k)\|_2^2$
0	2	-0.8944	0.08944	-10	1	-8	0.9846	0.7984
					$\frac{1}{2}$	-3	0.9	0.7992
					$\frac{1}{4}$	-0.5	0.2	0.79996
1	-0.5	0.4472	0.7155	0.625	1	0.125	0.0154	0.1996
2	0.125	-0.124	0.977	-0.127	1	-0.002	$3.8147 \cdot 10^{-6}$	0.0154
3	-0.002	- 0.002	1	- 0.002	1	$-8 \cdot 10^{-9}$	$6.4 \cdot 10^{-17}$	$3.992 \cdot 10^{-6}$
...								

(b) Zunächst veranschaulichen wir uns die Schrittweitensuche im 0-ten Schritt, indem wir die Tangente an $F(x^0)$ einzeichnen. Deren Schnittpunkt mit der x-Achse ergibt x^1 bei $\sigma_0 = 1$. Verkürzt man nun den Schritt s^0 um den Faktor $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ erhält man $x^1 = -3$, bei $\sigma_0 = \frac{1}{4}$ erhält man $x^1 = -0.5$, für welches die Armijo-Bedingung erfüllt ist. In den Schritten $k = 1, 2, 3$ ist keine Schrittweitenverkürzung notwendig.



(c) Der Index $l \geq 0$ aus dem Satz 6.2.2. gibt an, ab welcher Iteration das Verfahren in das lokale Newton-Verfahren übergeht. Da ab $k = 1$ immer Schrittweite $\sigma = 1$ gewählt wird, ist hier $l = 1$, also schon nach der $0-$ ten Iteration.

Aufgabe G20 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y - e^t, \quad y(0) = 2.$$

(a) Verwende nun die folgenden numerischen Verfahren mit Schrittweite 0.5, um auf dem Intervall $[0, 1]$ Näherungswerte für $y(t)$ zu bestimmen:

- Explizites Euler-Verfahren,
- Verfahren von Heun,

- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren (4.Ordnung).

(b) Die analytische Lösung dieses AWPs lässt sich z.B. durch Variation der Konstanten berechnen und lautet

$$y(t) = (e^{-t} + 1)e^{2t} = e^t + e^{2t}.$$

Skizziere und vergleiche Deine Ergebnisse mit der analytischen Lösung und beurteile ihre Qualität.

Lösung:

(a) Die Verfahrensvorschriften der verschiedenen Verfahren für das gegebene Problem lassen sich folgendermaßen vereinfachen:

- Euler: $u_{j+1} = (1 + 2h)u_j - he^{t_j}$
- Heun: $u_{j+1} = (1 + 2h + 2h^2)u_j - (\frac{h}{2}(1 + e^h) + h^2)e^{t_j}$
- RK4: Hier ist $u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, mit

$$\begin{aligned} k_1 &= 2u_j - e^{t_j}, \\ k_2 &= 2(u_j + \tfrac{h}{2}k_1) - e^{t_j+\frac{h}{2}}, \\ k_3 &= 2(u_j + \tfrac{h}{2}k_2) - e^{t_j+\frac{h}{2}}, \\ k_4 &= 2(u_j + hk_3) - e^{t_j+h}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Werte für die u_j:

	Stützpunkte	Euler	Heun	RK4	exakte Lsg.
i	t_i	u_i	u_i	u_i	$y(t_i)$
0	0	2	2	2	2
1	0.5	3.5	4.0878	4.3546	4.367
2	1	6.17	8.7156	10.0426	10.1073

(b) Die Werte der Fehler $|u_i - y(t_i)|$ pro Verfahren und Iteration sind in folgender Tabelle eingetragen:

Iteration i	Euler	Heun	RK4
0	0	0	0
1	$\lvert 3.5 - 4.367\rvert \approx$ 0.867	$\lvert 4.0878 - 4.367\rvert \approx$ 0.2792	$\lvert 4.3546 - 4.367\rvert \approx$ 0,0124
2	$\lvert 6.17 - 10.1073\rvert \approx$ 3,9373	$\lvert 8.7156 - 10.1073\rvert \approx$1,3917	$\lvert 10.0426 - 10.1073\rvert \approx$ 0,0647

Wie man hieran sieht, sind die Näherungen des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens die besten Näherungen an die exakte Lösung. Zeichnet man die Näherungspunkte und die exakte Lösung in eine Skizze, werden die Unterschiede zwischen den drei Verfahren nochmal deutlich.

Aufgabe G21 (Konsistenz des implizites Euler-Verfahrens)

Zeige, dass das implizite Euler–Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b],$$

wobei $f : [a, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 1 ist.

Lösung:

Da nach Voraussetzung $y'(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, ist $y(t)$ auf diesem Intervall 2-mal stetig diff.bar. Taylorentwicklung liefert mit einem $\xi_1 \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} y(t + h) = y(t) + y'(t)h + \frac{h^2}{2}y''(t + \xi_1 h) = \\ y(t) + f(t, y(t))h + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Beim impliziten Eulerverfahren ist

$$\phi(t,h;y(t),y(t+h)) = f(t+h,y(t+h))$$

Taylorentwicklung von f ergibt mit einem $\xi_2 \in [0,1]$

$$f(t+h,y(t+h)) = f(t,y(t)) + f'(t+\xi_2 h, y(t+\xi_2 h))h = f(t,y(t)) + \mathcal{O}(h)$$

Damit gilt für den lokalen Abbruchfehler

$$\begin{aligned}
\tau(t,h) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t) - h\phi(t,h;y(t),y(t+h))) \\
&= \frac{1}{h}(y(t) + f(t,y(t))h + \mathcal{O}(h^2) - y(t) - h[f(t,y(t)) + \mathcal{O}(h)]) \\
&= \frac{1}{h}(y(t) + f(t,y(t))h + \mathcal{O}(h^2) - y(t) - hf(t,y(t)) - \mathcal{O}(h^2))) \\
&= \frac{1}{h}\mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung.

Hausübung

Aufgabe H19 (Entladung eines Kondensators)

Wir betrachten die Entladung eines Kondensators der Kapazität C über einem Ohmschen Widerstand R. Der Schalter S werde zur Zeit $t = 0$ geschlossen; zu diesem Zeitpunkt sei die Spannung am Kondensator U_0. Bezeichnet man mit $U = U(t), t \geq 0$ die Spannung am Kondensator und mit U_R den Spannungsabfall am Widerstand R, so muss offenbar zu jedem Zeitpunkt t gelten:

$$U_R + U(t) = 0,$$

mit $U_(t) = R \cdot I(t)$ und Stromstärke I. Die Elektrische Ladung des Kondensators ist $Q(t) = CU(t)$. Für einen idealen Kondensator gilt die Differenzialgleichung $I(t) = Q'(t)$. Damit erhält man für die Spannung $U(t)$ am Kondensator die folgende lineare Differenzialgleichung

$$U'(t) + \frac{1}{RC}U(t) = 0,$$

mit dem Anfangwert $U(0) = U_0$.

(a) Löse dieses Anfangswertroblem mithilfe der Trennung der Veränderlichen.

(b) Sei nun $U_0 = 1$, $R = 2$ und $C = \frac{1}{4}$. Berechne sowohl mit dem expliziten Eulerverfahren, als auch mit dem modifizierten Eulerverfahren (2.Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung) jeweils mit Schrittweite $h = \frac{2}{3}$ Näherungswerte für die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems im Intervall $[0,2]$.

(c) Beurteile Deine drei Näherungswerte, indem Du sie miteinander und mit der exakten Lösung vergleichst.

Lösung: Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement zur Speicherung von Energie in einem elektrischen Feld. Er besteht aus zwei Metallflächen, den Elektroden, die durch einen dazwischenliegenden Isolator getrennt sind. Werden die Elektroden mit den Polen einer Spannungsquelle verbunden, so fließt kurzzeitig ein elektrischer Strom, er lädt eine Elektrode positiv, die andere negativ

auf. Diese Ladung des Kondensators bleibt erhalten, wenn er von der Spannungsquelle getrennt wird: der Kondensator behält deren Spannung bei. Entnimmt man dem Kondensator Ladung bzw. einen Strom, sinkt seine Spannung wieder. Die gespeicherte Ladung ist proportional zu der Spannung des Kondensators. Die Proportionalitätskonstante wird als Kapazität bezeichnet, sie ist das wesentliche Merkmal eines Kondensators. Je größer die Kapazität ist, umso mehr Ladung kann ein Kondensator bei einer bestimmten Spannung speichern.
Der elektrische Widerstand (Formelzeichen: R) charakterisiert die Eigenschaft von Materialien, den durch elektrische Felder bzw. Spannungen hervorgerufenen elektrischen Strom zu hemmen.
$U_R + U(t) = 0$ gilt nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz (in einer Masche addieren sich alle Teilspannungen zu Null.)

(a)
$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC}dt.$$
und Integration liefert
$$\ln(U(t)) - \ln(U_0) = -\frac{1}{RC}t, \qquad \text{falls } U_0 \neq 0,$$
und somit
$$U(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

(b) Die AWA lautet also
$$y'(t) = -2y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 2]$$
Nach Vorauss. ist
$$h = 2/3, t_0 = 0, t_1 = 2/3, t_2 = 4/3, t_3 = 2, u_0 = 1.$$
Expl. Euler:
$$u_{j+1} = u_j - 2hu_j = u_j(1 - 4/3) = -1/3u_j.$$
$$u_1 = -1/3$$
$$u_2 = 1/9,$$
$$u_3 = -1/27.$$
Modifizierter Euler:
$$u_{j+1} = u_j - 2h(u_j + h/2(-2u_j)) = u_j(1 - 2h + 2h^2) = u_j(1 - \frac{4}{3} + \frac{8}{9}) = \frac{5}{9}u_j$$

(c) Vergleich mit der exakten Lösung $y(t) = e^{-2t}$:

t	exakte Lsg.	expl. Euler	mod. Euler
0	1	1	1
2/3	0.64	-1/3 = -0.3333	5/9 = 0.55555
4/3	0.17	1/9 = 0.1111	$(5/9)^2 = 0.3086$
2	0.02	-1/27 =- 0.037037	$(5/9)^3 = 0.17146$

Da das Eulerverfahren hier negative Werte liefert, ist die Approximation offensichtlich sehr schlecht. Das modifizierte Eulerverfahren gibt schon eher das Verhalten der exakten Lsg. wieder, nimmt jedoch nicht stark genug ab.

Aufgabe H20 (Konsistenz der impliziten Trapezregel)

Zeige, daß die implizite Trapezregel $u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1}))$ zur Lösung eines Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b]$, wobei $f : [a, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 2 ist.
Hinweis: Benutze eine Taylorentwicklung für $y(t+h)$ der Ordnung 3 (also bis $\mathcal{O}(h^3)$) und für $f(t+h, y(t+h))$ der Ordnung 2 nach h in $h = 0$.

Lösung: Da nach Voraussetzung $y'(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar ist, ist $y(t)$ auf diesem Intervall 3-mal stetig diff'bar. Taylorentwicklung liefert mit einem $\xi \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + y'(t)h + \tfrac{1}{2}h^2 y''(t) + \tfrac{1}{6}h^3 y'''(t+\xi h) \\ &= y(t) + f(t, y(t))h + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t)) f(t.y(t)) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

da $y''(t)$ nach Voraussetzung stetig diff'bar ist und somit $y'''(t+\xi h)$ mit $\xi \in [0, 1]$ beschränkt ist.
Bei der impliziten Trapezregel ist

$$\phi(t, h; y(t), y(t+h)) = \tfrac{1}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h)))$$

Taylorentwicklung von f nach h in $h = 0$ ergibt

$$f(t+h, y(t+h)) = f(t, y(t)) + hf_t(t, y(t)) + hf_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2),$$

da $f'(t, y(t))$ nach Voraussetzung stetig diff'bar ist und somit die zweite Ableitung beschränkt ist.
Damit gilt für den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned} \tau(t, h) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t) - h\phi(t, h; y(t), y(t+h))) \\ &= \frac{1}{h}(y(t) + f(t, y(t))h + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3) \\ &\quad - y(t) - h\tfrac{1}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h)))) \\ &= \frac{1}{h}(f(t, y(t))h + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3) \\ &\quad - h(\tfrac{1}{2}f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}(f(t, y(t)) + hf_t(t, y(t)) + hf_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2)))) \\ &= \tfrac{1}{h}\mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe H21 (`Programmieraufgabe:` Globalisiertes Newton-Verfahren)

(a) Implementiere das globalisierte Newton-Verfahren für Gleichungssysteme (Algorithmus 5 der Vorlesung). Schreibe dazu zunächst eine Routine, die zu den Eingabeparametern $x^{(k)}$, $s^{(k)}$, dem Funktionsnamen der Funktion F und einem $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$ gemäss der Schrittweiten-Regel von Armijo eine Schrittweite σ_k bestimmt. Ändere nun Deine Implementierung des lokalen Newton-Verfahrens aus Aufgabe H17, indem Du sie um die Schrittweitensteuerung erweiterst.

(b) Teste Dein Verfahren an den folgenden Funktionen:

- $F1(x) = x^3 - x$, für Startpunkte: $x^0 \in \{2, 0.5, -0.5, 0.4\}$. Prüfe die Korrektheit Deines Programm im Vergleich mit den Ergebnissen aus Aufgabe H16 für $x^{(0)} = 2$.
- $F2(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$, für Startpunkte $x^0 \in \{1, 2, 3, -1\}$. Prüfe die Korrektheit Deines Programm im Vergleich mit den Ergebnissen aus Aufgabe G19 für $x^{(0)} = 2$.

(c) Vergleiche die Ergebnisse mit dem lokalen Newton-Verfahren.