Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
20. Juni 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den gesamten Inhalt von Kapitel 6 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Steife Differenzialgleichungen)
Es soll das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Es handelt sich hierbei um eine steife Differenzialgleichung.

(a) Schreiben Sie für das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Au_j$, wobei A eine 2×2-Matrix ist, und führen Sie drei Iterationsschritte aus.

(b) Schreiben Sie für das implizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Bu_j$, wobei B eine 2×2-Matrix ist, und führen Sie drei Iterationsschritte aus.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus Teil (a) und (b). Welches Verfahren beschreibt das qualitative Verhalten der gesuchten Funktion besser?

Aufgabe G2 (Konsistenz des implizites Euler-Verfahrens)
Zeigen Sie, dass das implizite Euler–Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b],$$

wobei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 1 ist.

Aufgabe G3 (Anfangswertproblem)
Gegeben sei das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen Runge-Kutta Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um von $t_i, u_i \approx y(t_i)$ ausgehend u_{i+1} zu berechnen?

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t + 3y(t)\,, \quad y(1) = 2.$$

Berechnen Sie mit dem oben beschriebenen Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite $h = 1/2$ eine Näherung für $y(2)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konsistenz der impliziten Trapezregel)
Zeigen Sie, dass die implizite Trapezregel

$$u_{j+1} = u_j + \tfrac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1}))$$

zur Lösung eines Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b],$$

wobei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 2 ist.
Hinweis: Benutzen Sie eine Taylorentwicklung für $y(t + h)$ der Ordnung 3 (also bis $\mathcal{O}(h^3)$) und für $f(t + h, y(t + h))$ der Ordnung 2 nach h in $h = 0$.

Aufgabe H2 (Butcher-Schema)
Zeigen Sie, dass das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}
\end{array}$$

mindestens Konsistenzordnung 3 besitzt.