Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
18. April 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 8 bis einschließlich Abschnitt 8.3 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Verteilungsfunktion, Maßzahlen)

In einer Automobilfabrik wurden bei 20 Fahrzeugen eines Typs folgende Höchstgeschwindigkeiten gemessen:

141, 142, 143, 144, 144, 144, 145, 145, 146, 147, 147, 148, 150, 150, 151, 151, 152, 138, 140, 141

(a) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe.

(b) Zeichnen Sie ein Histogramm mit Klasseneinteilung

$$(v-1, v+1], \qquad v = 138, 140, 142, 144, 146, 148, 150, 152.$$

(c) Berechnen Sie den Median, das arithmetische Mittel, das p-Quantil für $p = 0.25$ und $p = 0.75$.

(d) Berechnen Sie die empirische Varianz und die empirische Streuung für die **verkleinerte Stichprobe**, bestehend aus den ersten 7 Messwerten.

(e) Angenommen bei der Übertragung der Messdaten ist ein Fehler passiert und es wurde bei einer der Messungen statt 145 km/h 345 km/h übertragen. Welche Auswirkung hat das auf die in Aufgabe (c) und (d) berechneten Maßzahlen?

Lösung:

(a) Wir ordnen die Stichprobe und schreiben die Merkmale mit ihren Häufigkeiten in eine Tabelle:

Geschwindigkeit	138	140	141	142	143	144	145	146	147	148	150	151	152
abs. Häufigkeit	1	1	2	1	1	3	2	1	2	1	2	2	1

Die empirische Verteilungsfunktion ist $F_n(z; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \cdot ($ Anzahl der $x_i : x_i \leq z)$ (Siehe Abbildung 1).

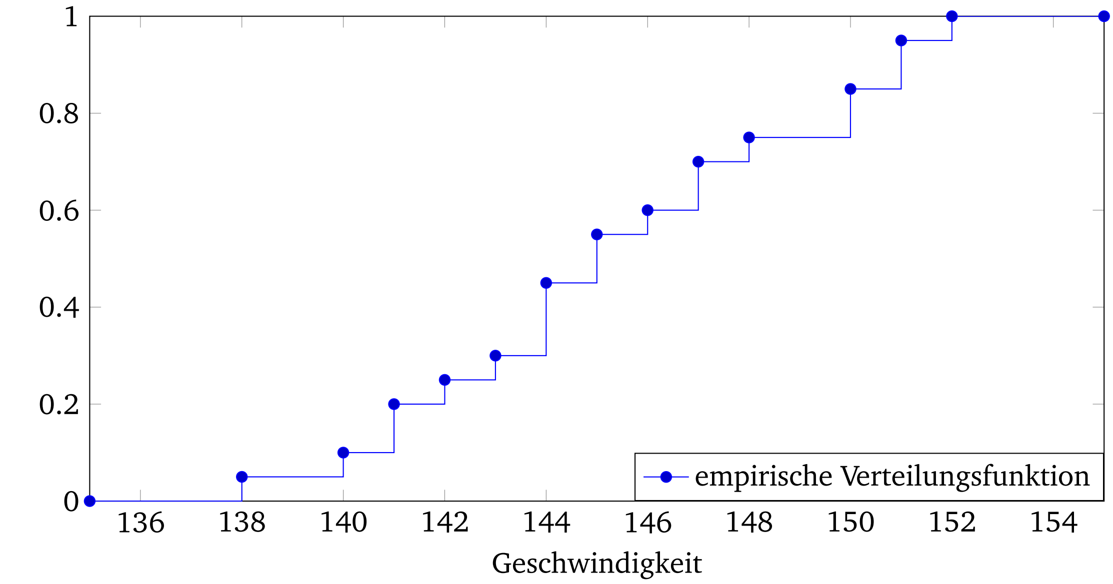

Abbildung 1: Verteilungsfunktion aus Aufgabe G1 (a)

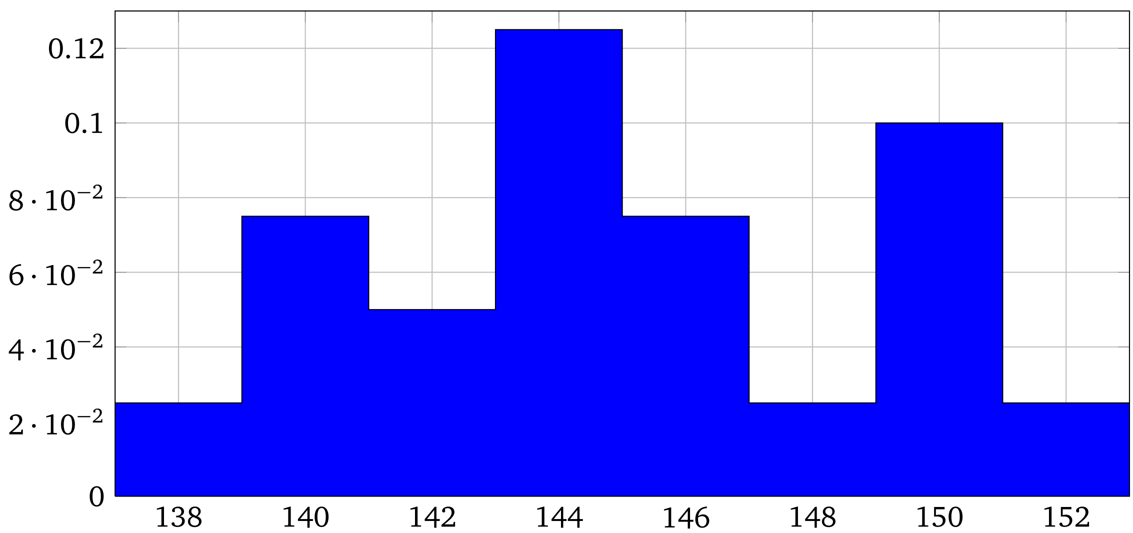

Abbildung 2: Histogramm aus Aufgabe G1 (b)

(b) Wir sortieren die Stichprobe nach Klassen und bestimmen die Häufigkeiten:

Klassenmittelpunkt v	138	140	142	144	146	148	150	152
abs. Häufigkeit	1	3	2	5	3	1	4	1

Die Klassenbreite beträgt 2, daher beträgt die Höhe der Balken $\frac{1}{40}$ der absoluten Häufigkeiten. Das Histogramm ist in Abbildung 2 aufgetragen.

(c) Es ergeben sich folgende Maßzahlen:

$$
\begin{aligned}
&\text{Mittelwert } \bar{x} && = \tfrac{2909}{20} = 145.45 \\
&\text{Median } \tilde{x} && = x_{(10)} = 145 \\
&\text{0.25-Quantil } x_{0.25} && = x_{(5)} = 142 \\
&\text{0.75-Quantil } x_{0.75} && = x_{(15)} = 148
\end{aligned}
$$

(d) Es ergeben sich folgende Maßzahlen:

$$
\begin{aligned}
&\text{Neuer Mittelwert } \bar{x}_{\text{klein}} && = \tfrac{1003}{7} = 143.29 \\
&\text{Empirische Varianz } s^2_{\text{klein}} && = \tfrac{1}{6}\big((141-143.29)^2 + (142-143.29)^2 + (143-143.29)^2 \\
& && +(144-143.29)^2 + (144-143.29)^2 + (145-143.29)^2\big) \\
& && = 1.9048 \\
&\text{Empirische Streuung } s_{\text{klein}} && = \sqrt{1.9048} = 1.3801.
\end{aligned}
$$

(e) Die Mittelwerte erhöhen sich relativ stark, der der großen Stichprobe ist jetzt schon bei 155.45, bei der kleinen bei 171.86 , was deutlich über dem Durchschnitt der ursprünglichen Stichprobe liegt. Der Median bleibt gleich, da noch immer $\tilde{x} = x_{10} = 145$ ist, das untere Quantil bleibt ebenfalls erhalten und das obere Quantil verschiebt sich nach rechts auf $\tilde{x}_{0.75} = 150$. Der Median und die Quantile sind also unempflindlicher gegenüber Ausreißern.

Die Varianz und die Streuung erhöhen sich sehr stark auf $\tilde{s}^2_{\text{klein}} = 5830.48$ bzw. $s_{\text{klein}} = 76.36$. Dies ist zu erwarten, da die Daten durch den sehr hohen Wert sehr viel stärker gestreut sind als vorher.

Aufgabe G2 (Zweidimensionale Messreihen)

Im Vorfeld der Fußball-Weltmeisterschaft der Frauen brachte ein Fachmagazin im vergangenen Jahr ein Sonderheft mit den Steckbriefen der Spielerinnen heraus. Diese enthalten neben Informationen zu Alter, Position und Vereinszugehörigkeit auch Angaben zu Größe und Gewicht. Bei der Erhebung der Daten erhielt man folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5	6
Größe (in cm): x_i	174	170	172	167	170	175
Gewicht (in kg): y_i	69	64	68	57	63	71

a) Stellen Sie die Messergebnisse in einem Punktediagramm dar.

b) Ein Teil der Steckbriefe ist nicht ganz vollständig. Bei manchen fehlt die Angabe zum Körpergewicht. Um trotzdem einen Wert im Heft angeben zu können, möchten die Redakteure durch lineare Regression einen plausiblen Wert für das Gewicht aus der Körpergröße ermitteln.

Berechnen Sie die empirischen Streuungen, die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten dieser zweidimensionalen Messreihe. Ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Größe und Gewicht hier gerechtfertigt? Warum?

c) Wir nehmen nun an, ein linearer Zusammenhang sei begründet. Berechnen Sie die Regressionsgerade zur Vorhersage des Gewichts an Hand der Größe einer Fußballspielerin und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm.

d) Bestimmen Sie einen Vorhersagewert für das Gewicht einer Fußballspielerin bei einer Größe von 168 cm.

e) Eine weitere Fußballspielerin ist 155 cm groß und wiegt 84 kg. Betrachten Sie nun die um dieses Wertepaar erweiterte Messreihe. Beurteilen Sie anhand geeigneter statistischer Maßzahlen, ob ein linearer Zusammenhang zwischen Größe und Gewicht von Fußballspielerinnen gerechtfertigt ist.

Runden Sie Ihre Ergebnisse dabei auf vier Stellen nach dem Komma.

Lösung:

a) Das Punktediagramm inklusive der Geraden aus c) ist in Abbildung 3 aufgetragen.

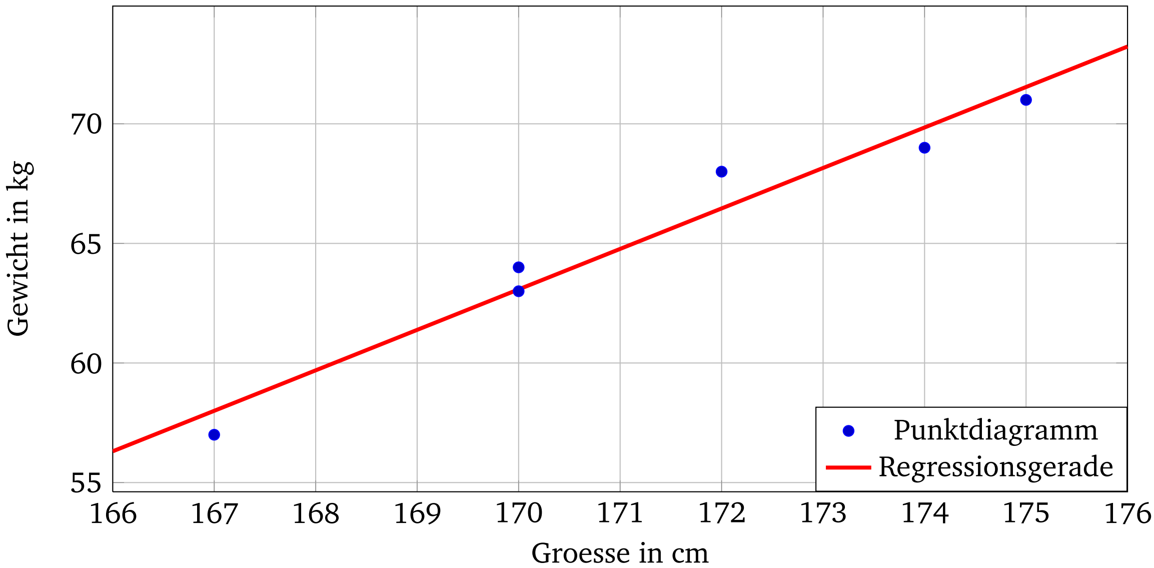

Abbildung 3: Punktdiagramm und Regressionsgerade aus Aufgabe G2

b) Es ist $\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{514}{3} = 171{,}3333$ und $\bar{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{196}{3} = 65{,}3333$.
Als empirische Streuungen erhalten wir

$$s_x^2 = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - 6\bar{x}^2\right) = \frac{1}{5}(176174 - 6\cdot(\tfrac{514}{3})^2) = \tfrac{26}{3} \approx 8{,}6667,$$

und damit

$$s_x \approx 2{,}9439$$

[alternativ mit der Formel $s_x^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2$]
und

$$s_y^2 = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} y_i^2 - 6\bar{y}^2\right) = \frac{1}{5}(25740 - 6\cdot(\tfrac{196}{3})^2)) = \frac{388}{15} \approx 25{,}8667,$$

und damit

$$s_y \approx 5{,}0859\,.$$

Als empirische Kovarianz erhalten wir

$$s_{xy} = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6}(x_i y_i) - 6\bar{x}\bar{y}\right) = \frac{1}{5}(67236 - \tfrac{604464}{9}) = \tfrac{44}{3} \approx 14{,}6667\,.$$

[Alternativ mit der Formel $s_{xy} = \frac{1}{5}(\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))$.]
Und somit ergibt sich für den empirischen Korrelationskoeffizienten:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{14,6667}{2,9439 \cdot 5,0859} \approx 0.9796\ .$$

Da der Korrelationskoeffizient nahe bei 1 ist, kann man einen linearen Zusammenhang annehmen. (Die Residuenquadrate werden klein.)

c) Nach Skript bestimmt man die Regressionsgerade

$$y = \hat{a}x + \hat{b},$$

mit

$$\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{14,6667}{8,6667} = \tfrac{22}{13} \approx 1,6923$$

und

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} = 65,3333 - 1.6923 \cdot 171.3333 = -\tfrac{2920}{13} \approx -224,614\ .$$

Die Regressionsgerade $y = 1,6923x - 224,614$ lässt sich also einzeichnen (siehe Abbildung 3)).

d) Das voraussichtliche Gewicht einer Fußballspielerin bei einer Größe von 168 cm ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung der Regressionsgeraden:

$$1.6923 \cdot 168 - 224,614 = 59,6923\ .$$

Demnach ist ein Gewicht von $59,6923$ kg zu erwarten.

e) Nach den gleichen Formeln wie oben ergeben sich folgende statistische Maßzahlen

$$\bar{x} = 169, \qquad \bar{y} = 68, \qquad s_{xy} = -\tfrac{94}{3} \approx -31,3333,$$
$$(s_x^2 = \tfrac{136}{3} \approx 45,3333), \quad s_x \approx 6,733, \qquad (s_y^2 = \tfrac{214}{3} \approx 71,3333) \quad s_y \approx 8,4459.$$

Als empirischen Korrelationskoeffizienten erhält man

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-31,3333}{6,733 \cdot 8,4459} \approx -0.551\ .$$

Da der empirische Korrelationskoeffizient weder dicht an 1 noch -1 ist, ist hier ein linearer Zusammenhang nicht gerechtfertigt.

Aufgabe G3 (Kombinatorik)

Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, vier davon heißen Buben. Nach dem Mischen der Karten erhalten die drei Spieler (Alex, Bodo und Carl) jeweils zehn Karten. Die verbleibenden zwei Karten bilden den sogenannten Skat. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Mindestens ein Bube befindet sich im Skat.

B: Carl hat genau einen Buben.

C: Ein Spieler hat genau drei Buben.

D: Jeder Spieler besitzt mindestens einen Buben.

Lösung: Wir betrachten folgende Ereignisse:

S_i: Es befinden sich genau i Buben im Skat, $i = 0, 1, 2$

A_i: Es befinden sich genau i Buben auf Alex' Hand, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

B_i: Es befinden sich genau i Buben auf Bodos Hand, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

C_i: Es befinden sich genau i Buben auf Carls Hand, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

Annahme: alle möglichen Kartenverteilungen sind gleichwahrscheinlich.

- Ereignis A:
$$P(A) = 1 - P(S_0) = 1 - \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} \approx 0.2379.$$
Erläuterung: Es gibt $\binom{32}{2}$ Möglichkeiten, den Skat zu bilden. Von diesen Möglichkeiten sind die für A günstigen genau diejenigen, bei denen aus der Menge der Buben mindestens eine Karte genommen wurde. Wir betrachten das Gegenereignis (also „kein Bube im Skat"), bei dem die beiden Karten im Skat aus der Menge der restlichen Karten (28 an der Zahl) stammen. Dafür gibt es $\binom{28}{2}$ Möglichkeiten. Der Faktor $\binom{4}{0}$ gibt an, dass aus der Menge der Buben keine Karte entnommen wurde, und ist definitionsgemäß gleich 1. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis S_0 beträgt nach Laplace $\frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}}$. Durch Bildung der Gegenwahrscheinlichkeit gelangt man zum gewünschten Resultat.

- Ereignis B:
$$P(B) = P(C_1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} \approx 0.4283.$$

- Ereignis C: Da A_3, B_3 und C_3 paarweise unvereinbar sind, gilt:
$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_3 \cup B_3 \cup C_3) = P(A_3) + P(B_3) + P(C_3) \\ &= 3 \cdot P(A_3) = 3 \cdot \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{7}}{\binom{32}{10}} \approx 0.2202. \end{aligned}$$

- Ereignis D:
$$\begin{aligned} P(D) &= P((A_1 \cap B_1 \cap C_1) \cup (A_2 \cap B_1 \cap C_1) \cup (A_1 \cap B_2 \cap C_1) \cup (A_1 \cap B_1 \cap C_2)) \\ &= P(A_1 \cap B_1 \cap C_1) + 3 \cdot P(A_2 \cap B_1 \cap C_1) \\ &= \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{9} \cdot \binom{3}{1}\binom{19}{9} \cdot \binom{2}{1}\binom{10}{9}}{\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}} + 3 \cdot \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8} \cdot \binom{2}{1}\binom{20}{9} \cdot \binom{1}{1}\binom{11}{9}}{\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}} \\ &\approx 0.4310. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Verteilungsfunktion, Histogramm)

Am Frankfurter Flughafen wurde im Februar täglich um 8:00 Uhr die Windgeschwindigkeit gemessen. Die Messungen ergaben:

20.1	18.4	8.0	8.0	8.6	8.6	9.2	9.7	9.7	9.7	9.7	10.9	11.5	11.5	11.5
12	12	12	12.6	13.2	13.8	14.3	14.9	14.9	14.9	16.6	16.6	6.9	7.4	

(a) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion der angegebenen Messreihe und zeichnen Sie ein Histogramm mit folgender Klasseneinteilung: $(5.0, 7.0]$, $(7.0, 9.0]$, $(9.0, 11.0]$, $\cdots$ $(19.0, 21.0]$

(b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Median und die empirische Varianz.

Lösung: Wir sortieren die Messreihe und erhalten:

6.9	7.4	8.0	8.0	8.6	8.6	9.2	9.7	9.7	9.7	9.7	10.9	11.5	11.5	11.5
12	12	12	12.6	13.2	13.8	14.3	14.9	14.9	14.9	16.6	16.6	18.4	20.1	

(a) Die Verteilungsfunktion ist in Abbildung 4 zu sehen.

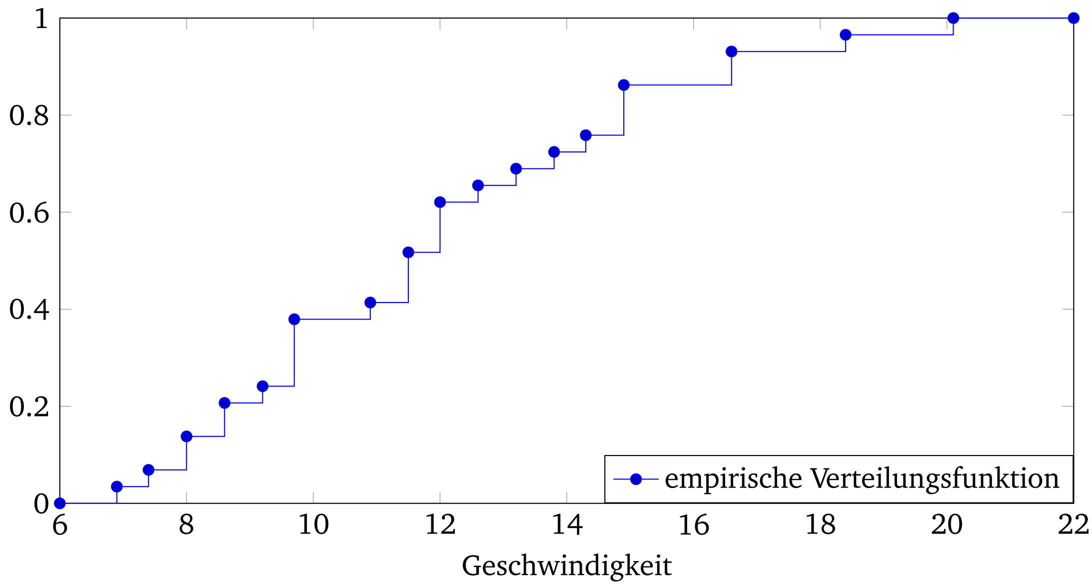

Abbildung 4: Empirische Verteilungsfunktion aus Aufgabe H1

Beim Histogramm (siehe Abbildung 5) ist zu beachten, dass eine Klassenbreite von 2 gewählt wurde. Die Höhe der Balken entspricht also der Hälfte der folgenden relativen Häufigkeiten:

$$\frac{1}{29}, \quad \frac{5}{29}, \quad \frac{6}{29}, \quad \frac{7}{29}, \quad \frac{6}{29}, \quad \frac{2}{29}, \quad \frac{1}{29}, \quad \frac{1}{29}.$$

(b) Mittelwert: $\bar{x} = 11.9724$, Median: $\tilde{x} = x_{(15)} = 11.5$, Empirische Varianz: $s^2 = 11.3456$.

Aufgabe H2 (Zweidimensionale Messreihen)

Eine Strecke wurde an 15 verschiedenen Tagen und zu unterschiedlichen Tageszeiten mit dem gleichen Fahrzeug abgefahren. Dabei wurde jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit v_i (in km/h) und die Verkehrsdichte d_i (in Anzahl Fahrzeuge pro km) ermittelt. Dies ergab die folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_i	29	40	42	47	50	56	57	60	60	62	63	67	69	74	82
d_i	40	37	34	30	25	19	23	21	13	16	21	13	16	11	7

(a) Stellen Sie die beobachteten Daten zunächst in einem Punktediagramm graphisch dar und berechnen Sie dann den empirischen Korrelationskoeffizienten.

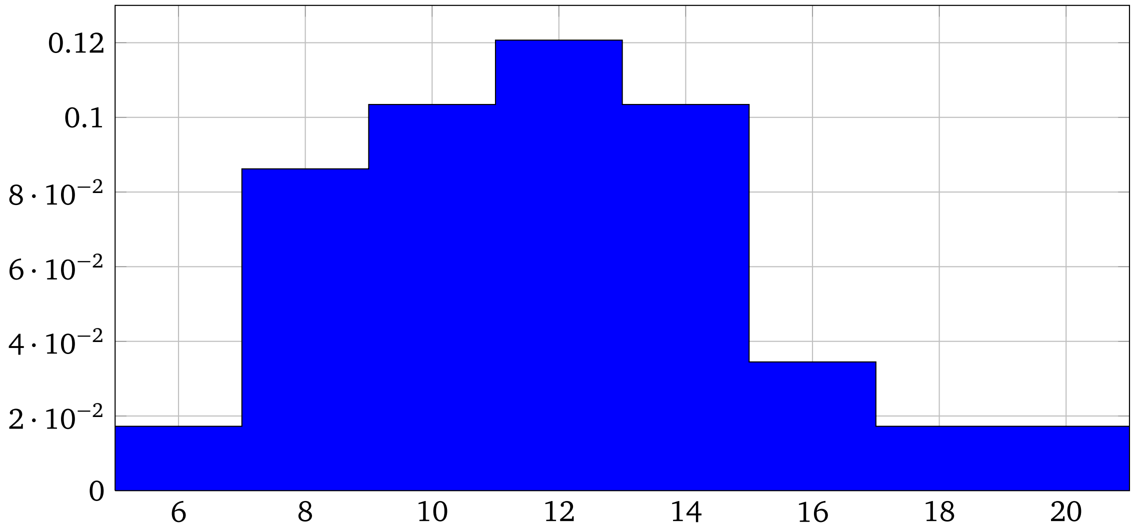

Abbildung 5: Histogramm aus Aufgabe H1

(b) Die Ergebnisse von Teil (a) legen nahe, dass der Zusammenhang zwischen Durchschnittsgeschwindigkeit v und Verkehrsdichte d durch eine Gerade beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Regressionsgerade

$$d = \hat{a}v + \hat{b}$$

zur Messreihe (v_i, d_i), $i = 1, \ldots, 15$ und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm ein.

(c) Da die Durchschnittsgeschwindigkeit leichter zu ermitteln ist als die Verkehrsdichte, sollen mit Hilfe der in Teil (b) berechneten Regressionsgerade Schätzwerte für die Verkehrsdichte bestimmt werden. Geben Sie den Schätzwert für die Verkehrsdichte bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 55 km/h an.

Lösung:

(a) Die Daten sind in Abbildung 6 graphisch dargestellt.

Um den empirischen Korrelationskoeffizienten berechnen zu können, müssen erst die arithmetischen Mittel

$$\bar{v} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} v_i = \frac{286}{5} = 57.2,$$
$$\bar{d} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} d_i = \frac{326}{15} = 21.7\overline{3},$$

die empirischen Streuungen

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}(v_i - \bar{v})^2} \approx 13.8471245081,$$
$$s_d = \sqrt{\frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}(d_i - \bar{d})^2} \approx 9.8449890566$$

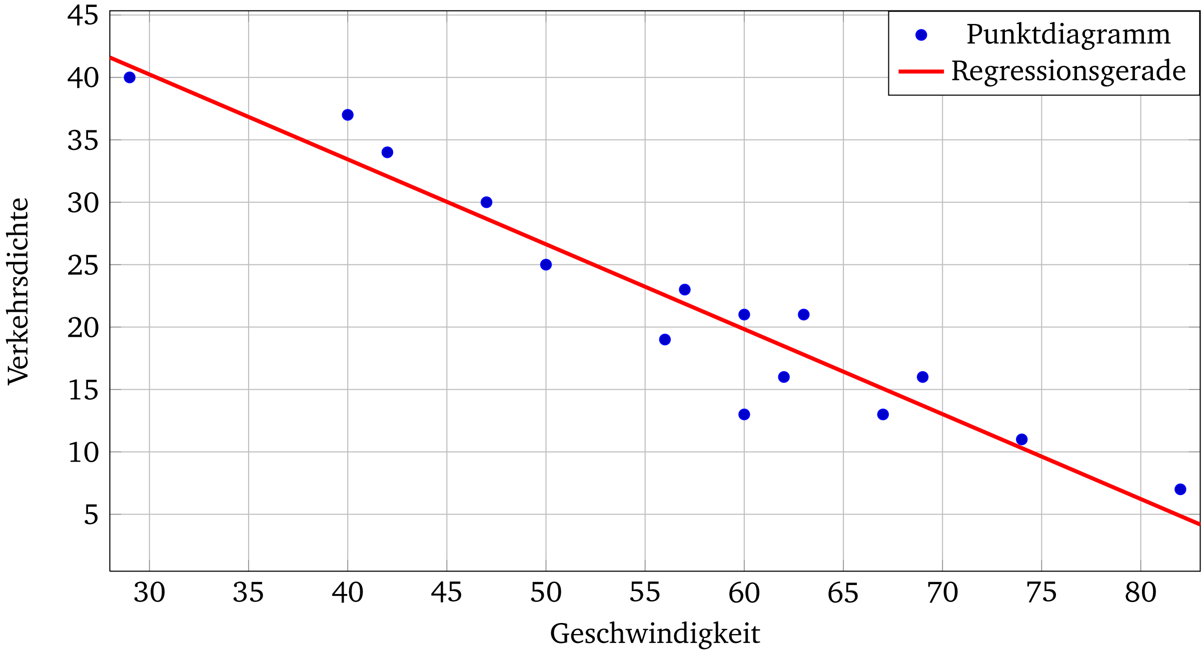

Abbildung 6: Die Daten und die Regressionsgerade.

sowie die empirische Kovarianz

$$s_{vd} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}(v_i - \bar{v})(d_i - \bar{d}) \approx -130.4428571429$$

berechnet werden. Dann folgt

$$r_{vd} = \frac{s_{vd}}{s_v s_d} \approx -0.9568535397.$$

Dies zeigt, daß der Zusammenhang zwischen v und d gut durch eine fallende Gerade beschrieben werden kann.

(b) Für die Koeffizienten der Regressionsgerade gilt

$$\hat{a} = \frac{s_{vd}}{s_v^2} \approx -0.6803009984,$$
$$\hat{b} = \bar{d} - \hat{a}\bar{v} \approx 60.6465504396.$$

Die Regressionsgerade ist in Abbildung 6 darstellt.

(c) Als Schätzwert für eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 55 km/h erhält man

$$\hat{a} \cdot 55 + \hat{b} \approx 23.2299955297.$$

Aufgabe H3 (Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit)

Eine Firma möchte ihren Kunden den Zugriff auf ihre persönlichen Daten über das Internet ermöglichen. Für den Zugang müssen die Kundennummer und eine PIN eingegeben werden. Nachdem die PIN dreimal hintereinander falsch eingegeben wurde, wird der Zugang gesperrt und der Kunde informiert.

(a) Angenommen einem Hacker sei die Kundennummer bekannt und er probiert nun zufällig gewählte PINs aus. (Jede PIN wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt.) Wieviele Stellen muss die PIN mindestens haben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Hackerangriff unbemerkt bleibt, höchstens 10^{-6} ist?

(b) Wieviele Stellen wären nötig, wenn anstelle der PIN ein Passwort verwendet würde? Dabei soll das Passwort aus Buchstaben (ohne Umlaute) und Ziffern bestehen, wobei Groß- und Kleinschreibung nicht beachtet wird.

Lösung:

(a) Bezeichne n die Anzahl der Stellen der PIN. Betrachte zunächst einen einzelnen Versuch. Wir wählen als Ergebnismenge Ω_1 die Menge aller möglichen PINs:

$$\Omega_1 = \{0, \ldots, 10^n - 1\}$$

Ist der Versuch des Hackers erfolgreich, so soll dies Ereignis mit E bezeichnet werden, das Ereignis eines Fehlversuchs mit N. Da es nur eine richtige PIN gibt, gilt $P(E) = \frac{1}{10^n}$ und $P(N) = 1 - \frac{1}{10^n}$.

Da der Hacker höchstens drei Versuche macht und wir annehmen, dass der Hacker keine PIN zweimal probiert, ist die Ergebnismenge für diese drei Versuche

$$\Omega_2 = \Omega_1^3 = \{(v_1, v_2, v_3) \mid v_1, v_2 \neq v_1, v_3 \notin \{v_1, v_2\} \in \Omega_1\},$$

die aus $(10^n) \cdot (10^n - 1) \cdot (10^n - 2)$ Elementen besteht.

Sei p die PIN. Dann ist das Ereignis, daß alle Versuche fehlschlagen,

$$A_{NNN} = \{(v_1, v_2, v_3) \in \Omega_2 \mid v_1 \neq p, v_2 \neq p, v_3 \neq p\}.$$

Die Menge A_{NNN} hat $(10^n - 1) \cdot (10^n - 2) \cdot (10^n - 3)$ Elemente. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_{NNN}) = \frac{(10^n - 1) \cdot (10^n - 2) \cdot (10^n - 3)}{(10^n) \cdot (10^n - 1) \cdot (10^n - 2)} = \frac{10^n - 3}{10^n}.$$

Das Ereignis A, daß mindestens einer der Versuche erfolgreich ist, ist

$$A = \Omega_2 \setminus A_{NNN} = A_{NNN}^c$$

Folglich gilt

$$P(A) = 1 - P(A_{NNN}) = 1 - \frac{10^n - 3}{10^n} = \frac{10^n}{10^n} - \frac{10^n - 3}{10^n} = \frac{3}{10^n}.$$

Darauf kommt man auch durch folgende Überlegung: Angenommen der erste Versuch v_1 ist die PIN, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(v_1 = p) = \frac{1}{10^n}$ (v_2 und v_3 können beliebige Zahlen der Restmenge sein.). Ist $v_1 \neq p$, aber $v_2 = p$, so geschieht dies mit W-keit $P(v_1 \neq p, v_2 = p) = \frac{10^n-1}{10^n}\frac{1}{10^n-1}$, d.h. im ersten Versuch erwische ich eine der $10^n - 1$ anderen Möglichkeiten , im zweiten Versuch dann genau eine der $10^n - 1$ verbleibenden. Im dritten Versuch ergibt sich analog $P(v_1 \neq p, v_2 \neq p, v_3 = p) = \frac{10^n-1}{10^n}\frac{10^n-2}{10^n-1}\frac{1}{10^n-2}$. Addiert man diese auf, ergibt sich ebenfalls $\frac{3}{10^n}$. In der folgenden Tabelle sind für verschiedene n die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ aufgeführt:

n	1	2	3	4	5	6	7
$P(A)$	0.3	0.03	0.003	0.0003	0.00003	0.000003	0.0000003

Folglich sollte die PIN mindestens sieben Stellen haben, um den Sicherheitsanforderungen zu genügen.

(b) Bei dem Passwort stehen 36 verschiedene Zeichen zur Verfügung. Bezeichnet n wieder die Anzahl der Stellen, so sind 36^n Passwörter möglich. Eine analoge Rechnung wie in Teil (a) ergibt (mit gleicher Bezeichung)

$$P(A) = 1 - \left(\frac{36^n - 3}{36^n} \right) = \frac{3}{36^n}$$

und

n	1	2	3	4	5
$P(A)$	0,083333	0,0023148148	0,0000643004	0,0000017861225	4,9614515E-8

Folglich genügen schon fünf Stellen.

Aufgabe H4 (Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit)

Sepp, Hinz und Kunz schauen zusammen ein Fussball-WM-Spiel. Für den Fall, dass das Bier nicht reichen sollte, haben sie das folgende Verfahren verabredet um denjenigen zu ermitteln, der Nachschub besorgen muss:

Zunächst werfen Hinz und Kunz eine Münze. Zeigt diese Zahl, scheidet Hinz aus bei Kopf Kunz. Dann werfen Sepp und der Nichtausgeschiedene eine Münze. Ist das Ergebnis Zahl, dann muss Sepp das Bier holen ansonsten der Nichtausgeschiedene.

(a) Wählen Sie eine Bezeichung für die Ergebnisse des im Verfahren durchgeführten Zufallsexperiments und geben Sie die Ergebnismenge an.

(b) Geben Sie dann die Ereignisse

A_1 : Sepp muss Bier holen.
A_2 : Hinz muss Bier holen.
A_3 : Kunz muss Bier holen.

mit Hilfe der in (a) gewählten Bezeichnung an. Welche dieser Ereignisse sind Elementarereignisse?

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$, $P(A_2)$ und $P(A_3)$. Ist das Verfahren gerecht?

Lösung:

(a) Ist das Ergebnis eines Münzwurfes Kopf, so soll dies mit K bezeichnet werden, ist es Zahl, mit Z. Da zwei Münzwürfe durchgeführt werden, wird ein Ergebnis des Zufallsexperiment als Paar $(i, j) \in \{K, Z\}^2$ dargestellt, wobei i das Ergebnis des ersten Münzwurfes und j das Ergebnis des zweiten Münzwurfes ist. Die Ergebnismenge ist

$$\Omega = \{K, Z\}^2 = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}.$$

(b) Für die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 gilt

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(K, Z), (Z, Z)\}, \\ A_2 &= \{(K, K).\}, \\ A_3 &= \{(Z, K)\} \end{aligned}$$

Elementarereignisse sind einelementige Ereignisse. Folglich sind A_2 und A_3 Elementarereignisse.

(c) Da beim Münzwurf alle Elementarereignisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten, gilt für $\omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \\ P(A_2) &= \frac{1}{4}, \\ P(A_3) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist Sepp gegenüber Hinz und Kunz stark benachteiligt. Folglich ist das Verfahren nicht gerecht.