

# Mathematik IV f. Elektrotechnik

# Mathematik III f. Informatik

## 2. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Martin Kiehl  
Davorin Lešnik, Ph.D.  
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012  
25. April 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den gesamten Inhalt von Kapitel 8 im Skript.

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

An der TU Darmstadt studieren ca. 22.500 Personen. Davon sind 6 500 weiblich und 16 000 männlich. Dabei studieren 6.8% der Studentinnen und 4.8% der Studenten Mathematik. Ein Student (m/w) werde zufällig ausgewählt. Sei  $A$  das Ereignis, dass die Person Mathematik studiert, und  $B$ , dass sie weiblich ist.

- Wie groß ist  $P(A|B)$ ?
- Wie groß ist der relative Anteil der Mathematik-Studierenden an der TU Darmstadt?
- Wie groß ist  $P(B|A)$ ?
- Sind  $A$  und  $B$  unabhängig?

#### Aufgabe G2 (Erwartungswert und Varianz, stetige Zufallsvariablen)

Die Zufallsvariable  $X$  sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen  $X^2$ .
- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X$ .

#### Aufgabe G3 (Tschebyschevsche Ungleichung, Normalverteilung, zentraler Grenzwertsatz)

Der Durchmesser neu produzierter Autokolben werde durch eine normalverteilte Zufallsvariable  $X$  angemessen beschrieben. Aus Erfahrung kennt man die Varianz von  $X$  ( $\text{Var}(X) = 0.04(\text{mm}^2)$ ), der Erwartungswert ist jedoch unbekannt. Es soll die Mindestanzahl von durchzuführenden Messungen ermittelt werden, so dass die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 kleiner als  $0.1(\text{mm})$  ist.

- Bestimmen Sie eine obere Schranke für diese Anzahl durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung. Benutzen Sie dabei den zentralen Grenzwertsatz, um die Verteilung von  $\bar{X}_{(n)}$  zu bestimmen.
- Bestimmen Sie die gesuchte Anzahl exakt. Transformieren Sie dazu (an geeigneter Stelle) auf Standardnormalverteilung und benutzen Sie die entsprechende Tabelle.

---

## Hausübung

---

### Aufgabe H1 (Binomialverteilung, Poissonverteilung, diskrete Zufallsvariable)

- Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable  $X$  beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimmen Sie die Verteilung von  $X$  sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht Nieten.
- Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechnen Sie für diese Seite die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mehr als drei Abfragen innerhalb einer Minute gibt.

### Aufgabe H2 (Normalverteilung)

- Wir gehen von einer normalverteilten Zufallsvariablen  $Y$  mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 aus (kurz:  $Y \sim N(0, 1)$ , auch als Standardnormalverteilung bezeichnet) und betrachten die Zufallsvariable  $Z = 5 \cdot Y + 100$ . Man kann zeigen, dass  $Z$  wieder normalverteilt ist. Überprüfen Sie, dass  $E(Z) = 100$  und  $Var(Z) = 25$  gilt.
- Die Zufallsvariable  $X$  beschreibe die Größe (in  $mm$ ) einer bestimmten Pflanze im Alter von 30 Tagen. Es wird angenommen, dass  $X$  normalverteilt ist mit Erwartungswert 100 und Varianz 25, also  $X \sim N(100, 25)$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(90 \leq X \leq 110) \quad \text{und} \quad P(X > 107).$$

Nutzen Sie dabei die Ergebnisse aus a).

### Aufgabe H3 (Erwartungswert und Varianz)

Die Zufallsvariable  $X$  sei gegeben durch

$$P(X = x) = \begin{cases} 3c, & \text{falls } x \in \{1, 4\}; \\ 2c, & \text{falls } x \in \{2, 3\}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit einer gewissen Konstanten  $c$ .

- Bestimmen Sie die Konstante  $c$  und die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- Berechnen Sie  $E(X)$  und  $Var(X)$ .
- Es sei  $Y = 2X - 1$  und  $Z = \frac{X-2}{\sqrt{5}}$ . Berechnen Sie  $E(Y)$ ,  $E(Z)$ ,  $Var(Y)$  und  $Var(Z)$ .