Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
23. Mai 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 4 bis einschließlich Abschnitt 4.2.4 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gaußsches Eliminationsverfahren)
Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche auf (A, b) an. Als Ergebnis erhalten Sie Matrizen L und R sowie den Vektor c.

(b) Lösen Sie das gestaffelte System $Rx = c$.

(c) Bestimmen Sie die Permutationsmatrix der Zerlegung $PA = LR$.

(d) Jede Zeilenvertauschung, also jeder Übergang $(A^{(k)}, b^{(k)}) \mapsto (\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)})$ ist durch Matrixmulitplikation darstellbar. Geben Sie für jede Iteration $(k = 1, \ldots n-1)$ die Matrix P_k an, für die gilt: $(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)}) = P_k(A^{(k)}, b^{(k)})$ und verifizieren Sie $P = P_{n-1} \cdots P_1$.

Lösung: zu a)
Zur Bestimmung der LR-Zerlegung führt man den Gauß-Algorithmus durch, dessen Verlauf in der folgenden Tabelle aufgeführt ist (Das Pivotelement ist eingerahmt):

k	$A^{(k)}$	$\tilde{A}^{(k)}$	$b^{(k)}$	$\tilde{b}^{(k)}$	$L^{(k)}$	$\tilde{L}^{(k)}$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ \boxed{2} & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Das Ergebnis ist

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

zu b):
Durch Rückwärtssubstitution erhält man als Lösung des Gleichungssystems $Rx = c$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{2} = 1, \\ x_2 &= \frac{6-4\cdot 1}{2} = 1, \\ x_1 &= \frac{12-6\cdot 1-4\cdot 1}{2} = 1. \end{aligned}$$

zu c) und d):
Die zugehörige Permutationsmatrix lautet

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Gaußsches Eliminationsverfahren)
Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche (Algorithmus 1) auf A und b an. Als Ergebnis erhalten Sie wieder eine linke untere Dreiecksmatrix L, eine rechte obere Dreiecksmatrix R und eine rechte Seite c.
(b) Bestimmen Sie die Permutationsmatrix P, für die gilt: $PA = LR$.
(c) Berechnen Sie eine Lösung des gestaffelten Systems $Ax = b$.
(d) Berechnen Sie nun eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
(a) Zur Bestimmung der LR-Zerlegung führt man das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche (VL: Algorithmus 1) durch:

1. Durchlauf ($k = 1$)

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1 Bestimme Pivotelement in der 1. Spalte: Zeile $r \geq 1$, so dass $a_{r1}^{(1)}$ vom Betrag her maximales Element der Spalte ist, also:

$a_{11}^{(1)} = 1$, d.h. $r = 1$.

Schritt 2 Da $k = r = 1$ ist keine Vertauschung notwendig.

Schritt 3 Berechne Multiplikatoren und neue Werte für A, b:

$\mathbf{i = 2}: \quad l_{21} = 1, \quad a_{21}^{(2)} = 0, \quad b_2^2 = 3$

$j = 2 : a_{22}^{(2)} = 1$

$j = 3 : a_{23}^{(2)} = 1,$

$j = 4 : a_{24}^{(2)} = -1$

$\mathbf{i = 3}: \quad l_{31} = 0, \quad b_3^2 = 1$

$\mathbf{i = 4}: \quad l_{41} = 1, \quad a_{41}^{(2)} = 0, \quad b_4^2 = -3$

$j = 2 : a_{42}^{(2)} = -1$

$j = 3 : a_{43}^{(2)} = 1,$

$j = 4 : a_{44}^{(2)} = 1$

Damit kann man die neuen Matrizen aufstellen:

$$(A^{(2)}, b^{(2)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Durchlauf $(k = 2)$

Schritt 1 Bestimme Pivotelement in der 2. Spalte: Zeile $r \geq 2$, so dass $a_{r2}^{(2)}$ vom Betrag her maximales Element der Spalte ist, also:

$a_{22}^{(2)} = 1$, d.h. $r = 2$.

Schritt 2 Da $k = r = 2$ ist keine Vertauschung notwendig.

Schritt 3 Berechne Multiplikatoren und neue Werte für A:

$\mathbf{i = 3}: \quad l_{32} = 1, a_{32}^{(3)} = 0, b_3^3 = -2$

$j = 3 : a_{33}^{(3)} = 1$

$j = 4 : a_{34}^{(3)} = 2$

$\mathbf{i = 4}: \quad l_{42} = -1, \quad a_{42}^{(3)} = 0, b_4^3 = 0$

$j = 3 : a_{43}^{(3)} = 2$

$j = 4 : a_{44}^{(3)} = 0$

Damit kann man die neuen Matrizen aufstellen:

$$(A^{(3)}, b^{(3)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, b^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Durchlauf $(k = 3)$

Schritt 1 Bestimme Pivotelement in der 3. Spalte: Zeile $r \geq 3$, so dass $a_{r3}^{(3)}$ vom Betrag her maximales Element der Spalte ist, also:

$a_{43}^{(3)} = 2$, d.h. $r = 3$.

Schritt 2 Vertauschung der 3. und 4. Zeile von A, L, b:

$$(\tilde{A}^{(3)}, b^{(3)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3 Berechne Multiplikatoren und neue Werte für A:

$\mathbf{i = 4}$: $\quad l_{43} = \frac{1}{2}, \quad a_{43}^{(4)} = 0, b_4^{(4)} = -2$

$j = 4 : a_{44}^{(4)} = 2$

Damit kann man die neuen Matrizen aufstellen:

$$(A^{(4)}, b^{(4)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad L^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind wir mit dem Algorithmus fertig und können die LR-Zerlegung der Matrix A angeben:

$$R = A^{(4)}, \quad L = I + L^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Permutationsmatrix hat die Form:

$$P = P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $PA = LR$.

(c) Die Lösung von $Rx = c$ lautet $x = (1, 2, 0, -1)$. Dies ist auch die Lösung des Systems $Ax = b$ (siehe Vorlesung).

(d) Wir sehen, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

gilt. Anwenden der Permutationsmatrix auf die rechte Seite ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} =: \hat{b}.$$

Wir können also äquivalent $Ax = \hat{b}$ lösen. Aus Aufgabenteil (a) wissen wir, dass $PA = LR$ gilt. Wir lösen nun das gestaffelte System

$$Ly = P\hat{b}, \qquad Rx = y.$$

Es gilt $P\hat{b} = (3, 1, -1, 5)^T$ und die Vorwärtssubstitution ergibt

$$\begin{aligned}
y_1 =& 3 \\
y_2 =& 1 - 3 = -2 \\
y_3 =& -1 - 3 - 2 = -6 \\
y_4 =& 5 + 2 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 10
\end{aligned}$$

und somit ergibt die anschließende Rückwärtssubstitution

$$\begin{aligned}
x_4 =& \frac{10}{2} = 5 \\
x_3 =& \frac{-6}{2} = -3 \\
x_2 =& -2 + 5 + 3 = 6 \\
x_1 =& 3 - 5 - 6 = -8
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)
Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Untersuchen Sie, ob die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, lösbar sind, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Der Rang von A ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

damit ist $\mathrm{Rang}(A) = 1$.

(b) Nach Vorlesung ist das LGS $Ax = b_i$ genau dann lösbar, wenn $\mathrm{Rang}(A) = 1 = \mathrm{Rang}(A, b_i)$ gilt. Bestimme $\mathrm{Rang}(A, b_1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathrm{Rang}(A, b_1) = 1$ und das LGS $Ax = b_1$ lösbar.
Bestimme $\mathrm{Rang}(A, b_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathrm{Rang}(A, b_2) = 2$ und das LGS $Ax = b_2$ nicht lösbar.

Aufgabe H2 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)
Gegeben seien die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Rang von A, B und C.

(b) Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme $Ax = a$, $Bx = b$ und $Cx = c$. Ein LGS ist unlösbar oder es hat genau eine Lösung oder es gibt unendlich viele Lösungen.

Welche der drei Fälle sind in obigen Gleichungssystemen jeweils möglich? Welche Dimension hat der Lösungsraum? Geben Sie gegebenenfalls eine rechte Seite an, für die ein bestimmter Fall eintritt. Begründen Sie in den übrigen Fällen, warum er jeweils nicht eintreten kann.

Lösung:

(a) Der Rang einer Matrix ergibt sich aus der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Das lässt sich hier jeweils direkt ablesen:

$$\text{Rang}(A) = 1, \text{Rang}(B) = 3, \text{Rang}(C) = 3$$

(b) Vorbemerkung: Das System $Ax = b$ ist unlösbar, falls $\text{Rang(A, b)} \neq \text{Rang(A)}$, es ist lösbar mit unendlich vielen Lösungen, falls $\text{Rang(A, b)} = \text{Rang(A)} < \dim(\text{x})$ und eindeutig lösbar, wenn $\text{Rang(A, b)} = \text{Rang(A)} = \text{n} = \dim(\text{x})$, wobei letzteres natürlich nur bei quadratischen Matrizen möglich ist.

zu A: Nach der Vorbemerkung ist das System entweder unlösbar oder besitzt unendlich viele Lösungen. Da $\text{Rang(A, a)} = \text{Rang(A)} = 1$ für beliebige rechte Seiten a gilt, besitzt es also unendlich viele Lösungen.

$$Ax = a \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_4 = a$$

ist zum Beispiel für $x = (a, 0, 17, 0)^T$ erfüllt. Die Dimension des Lösungsraums ist $n - \text{Rang(A)} = 4 - 1 = 3$.

zu B: Nach der Vorbemerkung ist das System entweder unlösbar oder besitzt unendlich viele Lösungen , denn $\text{Rang(B)} = 3 < \text{n} = 4$. Beide Fälle treten auf, denn das System ist für $b = b_1 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ lösbar (eine Lösung ist $x = (0, 0, 0, 0)^T$) und für $b = b_2 = (0, 0, 0, 0, 1)^T$ unlösbar, denn aus der letzten Zeile des LGS ergibt sich dann $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$. (Man sieht auch sofort, dass $\text{Rang(B, b}_2) = 4 > 3$). Ist das System für b lösbar, also $\text{Rang(B, b)} = 3$, so besitzt der Lösungsraum die Dimension $4 - 3 = 1$.

zu C: Nach der Vorbemerkung ist das System eindeutig lösbar, denn $\text{Rang(C)} = 3 = \dim(\text{C}) = \text{Rang(C, c)}$, für beliebige c. Die Dimension des Lösungsraums ist also 0.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: LR-Zerlegung)

(a) Implementieren Sie ein Programm, dass für eine gegebene quadratische Matrix A überprüft, ob diese regulär ist und gegebenenfalls eine Zerlegung $PA = LR$ berechnet. Dabei sei P eine Permutationsmatrix und L und R unterer bzw. obere Dreiecksmatrizen.

(b) Schreiben Sie zudem zwei Programme die gestaffelte Gleichungssysteme $Lz = d$ und $Ry = c$ durch Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution lösen.

(c) Testen Sie ihr Programm an den Aufgaben aus der Gruppenübung.

Lösung: Als Lösung könne Sie sich die Matlab-Dateien `LR_Zerlegung.m` und `ConstrPerm.m` für Aufgabenteil a) sowie `RueckSub.m` und `VorSub.m` für Aufgabenteil b) herunterladen. Das erste Programm liefert die Matrizen L und R, sowie den Permutationsvektor p. Dieser wird durch das zweite Programm in die Matrix P übersetzt. Um das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen genügt nun der Aufruf

```
[L,R,p]=LR_Zerlegung(A)
y=VorSub(L,b(p))
x=RueckSub(R,y)
```