Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2007
02.07.2008

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE,iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Klausursprechstunden:
Wir bieten an folgenden Terminen ausserordentliche Sprechstunden an.

Mi., 13.08.	11:40 - 13:20 Uhr	S215/415 o. 417
Do., 14.08.	11:40 - 13:20 Uhr	S215/415 o. 417
Mo., 25.08.	11:40 - 13:20 Uhr, 14:25 - 16:05 Uhr	S215/415 o. 417
Di., 26.08.	11:40 - 13:20 Uhr, 14:25 - 16:05 Uhr.	S215/415 o. 417

Weitere Informationen zur Klausur finden Sie auf unserer Webseite.

Gruppenübung

Lösung zur Aufgabe G40 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

$$L(\theta, x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta} e^{-x_i^2/\theta} \text{ für } x_i > 0 \quad \forall i$$

$$\ln L(\theta, x_1, \dots, x_n) = n \ln(2/\theta) + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^2/\theta = n \ln 2 - n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - 1/\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta, x_1, \dots x_n) = -n/\theta + 1/\theta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Prüfen, ob dies Maximum ist:

$$\frac{d^2}{d\theta} \ln L(\hat{\theta}, x_1, \dots x_n) = \frac{n}{\hat{\theta}^2} - \frac{2}{\hat{\theta}^3} \sum x_i^2 = \frac{n}{\hat{\theta}^2} - \frac{2n}{\hat{\theta}^2} = -\frac{n}{\hat{\theta}^2} < 0$$

Es liegt also ein Maximum vor. Damit ist $\hat{\theta}$ ML-Schätzer.

Lösung zur Aufgabe G41 (Erwartungstreue und Konistenz von Schätzern)

a) Ein Schätzer T_n ist erwartungstreu für $\tau(\theta)$ falls $\forall\theta : E_\theta(T_n(X_1, ..., X_n)) = \tau(\theta)$.

$$E_\theta(\bar{X}_n) = E_\theta\left(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E_\theta = \frac{\theta - 1 + \theta + 1}{2} = \theta.$$

Somit ist der betrachtete Schätzer erwartungstreu.

b)

$$Var_\theta(\bar{X}_{(n)}) = Var_\theta\left(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right) = \frac{n \cdot Var_\theta(X_n)}{n^2} = \frac{(\theta + 1 - (\theta - 1))^2}{12n} = \frac{1}{3n}.$$

Und es gilt:

$$lim_{n\to\infty} Var_\theta(T_n(X_1, ..., X_n)) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n} = 0.$$

Die Schätzerfolge ist somit konsistent für $\tau(\theta) = \theta$.

Lösung zur Aufgabe G42 (Konfidenzintervalle)

(a) Der Mittelwert der Messwerte ist $\bar{x} = 184.8$ und das 0.995-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung $u_{0.995} \approx 2.5758$. Daher lautet das gesuchte Konfidenzintervall

$$\left[\bar{x} - u_{0.995}\frac{\sigma}{\sqrt{9}}, \bar{x} + u_{0.995}\frac{\sigma}{\sqrt{9}}\right] \approx [182.7393, 186.8607].$$

(b) Die Standardabweichung der Messwerte ist $s \approx 1.3134$ und das 0.995-Quantil der t_8-Verteilung $t_{8;0.995} \approx 3.3554$. Daher lautet das gesuchte Konfidenzintervall

$$\left[\bar{x} - t_{8;0.995}\frac{s}{\sqrt{9}}, \bar{x} + t_{8;0.995}\frac{s}{\sqrt{9}}\right] \approx [183.3310, 186.2690].$$

(c) Das 0.95-Quantil und das 0.05-Quantil der χ^2_8-Verteilung sind $\chi^2_{8;0.95} \approx 15.507$ und $\chi^2_{8;0.05} \approx 2.733$. Daher lautet das gesuchte Konfidenzintervall

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{8;0.95}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{8;0.05}}\right] \approx [0.8899307, 5.049453].$$

Lösung zur Aufgabe G43 (Exponentialverteilung, Binomialverteilung)

a) Die Zufallsvariable L beschreibe die Lebensdauer einer Glühbirne mit $L \sim Exp\left(\frac{1}{500}\ \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)$.

$$\begin{aligned} P(L \geq 500) &= 1 - P(L < 500) \ = \ 1 - F(500) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{500}\cdot\ln(4/3)\cdot 500}\right) = e^{\ln(3/4)} = 0.75. \end{aligned}$$

b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Glühbirnen mit einer Lebensdauer von über 500 Stunden. Mit $p = P(L \geq 500) = 0.75$ hat man $X \sim B(10, 0.75)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0.75^8 \cdot 0.25^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.75^9 \cdot 0.25^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.75^{10} \\ &\approx 0.2816 + 0.1877 + 0.0563 = 0.5256 \end{aligned}$$

c) Da $X \sim B(10, 0.75)$, folgt $E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0.75 = 7.5$ und $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 10 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 1.875$.

Lösung zur Aufgabe G44 (Dichte, Rechteckverteilung, Tschebyschevsche Ungleichung, Normalverteilung)

a) Offenbar gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Darüberhinaus gilt

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{30}x\right]_{105}^{135} = 1.$$

Also ist f eine Dichte.

b) Das Gewicht einer einzelnen Kiste kann durch eine Zufallsvariable X beschrieben werden, die $R(105, 135)$ verteilt ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\tfrac{1}{30}\mathrm{d}x = 120 \\ Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\tfrac{1}{30}\mathrm{d}x - 120^2 = 75 \end{aligned}$$

c) Sei $Y := X_1 + \ldots + X_{64}$ die Zufallsvariable, die das Gesamtgewicht von 64 Kisten beschreibt. Dann ist

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{64} E(X_i) = 64 \cdot E(X) = 64 \cdot 120 = 7680, \\ Var(Y) &= \sum_{i=1}^{64} Var(X_i) = 64 \cdot Var(X) = 64 \cdot 75 = 4800. \end{aligned}$$

Man beachte dabei die Unabhängigkeit und die identische Verteilung der X_i.
Gesucht ist nun

$$\begin{aligned} P(7560 \leq Y \leq 7800) &= P(-120 \leq Y - 7680 \leq 120) \\ &= P(-120 \leq Y - E(Y) \leq 120) \\ &= P(|Y - E(Y)| \leq 120) \\ &= 1 - P(|Y - E(Y)| \geq 120) \\ &\geq 1 - \frac{Var(Y)}{120^2} \qquad \text{(Ungleichung von Tschebycheff)} \\ &= 1 - \frac{4800}{120^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

d) Unter Verwendung des Zentralen Grenzwertsatzes erhält man

$$\begin{aligned} P(Y \leq 7800) &= P\left(\frac{Y - 7680}{\sqrt{4800}} \leq \frac{7800 - 7680}{\sqrt{4800}}\right) \\ &= P\left(\frac{Y - 7680}{\sqrt{4800}} \leq \sqrt{3}\right) \\ &\approx \Phi(\sqrt{3}) \approx \Phi(1.73) = 0.958. \end{aligned}$$