Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
11. Juli 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den gesamten Inhalt von Kapitel 7 im Skript.
In dieser Woche gibt es keine Hausübungen, dafür aber ein größere Zahl an Gruppenübungen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Störungstheorie für Eigenwertprobleme)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Schätzen Sie die Eigenwerte der Matrix $C := A + B$ mit dem Störungssatz 7.1.5 der Vorlesung ab.

Lösung:

a) Die Matrix A kann als Blockmatrix in 4 2×2 Untermatrizen eingeteilt werden. Die Außerdiagonalblöcke sind identisch Null, daher zerfällt das charakteristische Polynom in 2 quadratische Faktoren.

$$\begin{aligned} det(A - \lambda \cdot I) &= det(A_{11} - \lambda \cdot I) \cdot det(A_{22} - \lambda \cdot I) \\ &= [(1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 2] \cdot [(3 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 2], \end{aligned}$$

Somit berechnen sich die Eigenwerte zu:

$$\lambda_1 = 4 \;\; \lambda_2 = 3 \;\; \lambda_3 = 1 \;\; \lambda_4 = 0.$$

b) Da die Matrix A symmetrisch ist, ist sie auch diagonalisierbar mit einer unitären Matrix T. Für unitäre Matrizen ist $\text{cond}(T) = 1$. Nach dem Satz 7.1.5 von Bauer/ Fike gilt somit für die Eigenwerte $\mu_1 \geq ... \geq \mu_4$ von $C = A + B$ die Abschätzung:

$$|\lambda_i - \mu_i| \leq \|B\|_2 = 10^{-5}.$$

Die Eigenwerte von C liegen also in den folgenden Intervallen:

$$\begin{aligned} \mu_1 &\in [4 - 10^{-5}, 4 + 10^{-5}] \\ \mu_2 &\in [3 - 10^{-5}, 3 + 10^{-5}] \\ \mu_3 &\in [1 - 10^{-5}, 1 + 10^{-5}] \\ \mu_4 &\in [-10^{-5}, 10^{-5}]. \end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Vektoriteration nach von Mises)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Verfahren nach von Mises ist ein einfaches Vektoriterationsverfahren (vgl. Definition 7.2.1) bei dem die Matrix B gleich A gewählt wird.

(a) Führen Sie vier Iterationen nach von Mises mit dem Startvektor $z^{(0)} = (1,1)^T$ durch (d. h. berechnen Sie $z^{(4)}$ und $R(z^{(3)},A)$). Verwenden Sie zur Normierung die Maximumsnorm.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).

(c) Was folgt aus Satz 7.2.2 über die Güte der Approximation?

Lösung:

(a) Für die Vektoriteration nach von Mises gilt

$$z^{(k+1)} = \frac{Az^{(k)}}{\|Az^{(k)}\|}.$$

Dies ergibt die folgenden Werte:

k	$Az^{(k)}$	$\|Az^{(k)}\|_\infty$	$z^{(k+1)}$
0	$(-1,1)^T$	1	$(-1,1)^T$
1	$(-1,-1)^T$	1	$(-1,-1)^T$
2	$(1,-1)^T$	1	$(1,-1)^T$
3	$(1,1)^T$	1	$(1,1)^T$

Daraus folgt

$$R(z^{(3)},A) = \frac{(z^{(3)})^T A z^{(3)}}{(z^{(3)})^T z^{(3)}} = 0$$

(b) Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + 1.$$

Daher hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$. Offensichtlich ist $R(z^{(3)},A)$ keine gute Näherung und da $z^{(4)} = z^{(0)}$ gilt, werden auch weitere Iterationen zu keiner Verbesserung führen. Bei diesem Beispiel versagt daher das Verfahren.

(c) Da $|\lambda_1| = 1 = |\lambda_2|$ gilt, sind die Vorraussetzungen des Satzes 7.2.2 *nicht erfüllt*. Daher liefert er uns *keine Aussage* über die Güte der Approximation.

Aufgabe G3 (Inverse Vektoriteration nach Wielandt)

Es soll der kleinste Eigenwert der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden.

(a) Führen Sie zwei Iterationen nach Wielandt mit $\mu = -8$ und $z^{(0)} = (1,0)^T$ aus (d. h. berechnen Sie $z^{(2)}$ und $R(z^{(1)},(A-\mu I)^{-1})$ sowie $\mu + \frac{1}{R(z^{(1)},(A-\mu I)^{-1})}$ als Näherung für den kleinsten Eigenwert).

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).

Lösung:

(a) Die Iterationsmatrix ist

$$(A+8I)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Zur Berechnung von $z^{(1)}$ löst man zunächst das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x = z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und setzt dann

$$z^{(1)} = \frac{x}{\|x\|_\infty}.$$

Welche Norm verwendet wird spielt keine Rolle, da im Rayleighquotienten die Länge des Vektors keine Rolle spielt und daher die Näherungslösung für den Eigenwert von der Norm unabhängig ist. Die normierten Vektoren können allerdings je nach verwendeter Norm unterschiedlich aussehen.

Dies ergibt

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den Vektor $z^{(2)}$ erhält man durch das Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x = z^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und anschließender Normierung

$$z^{(2)} = \frac{x}{\|x\|_\infty}.$$

Dies ergibt

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{20}{21} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$R(z^{(1)}, (A-\mu I)^{-1}) = \frac{(z^{(1)})^T (A-\mu I)^{-1} z^{(1)}}{(z^{(1)})^T z^{(1)}} = \frac{-\frac{20}{21}}{1} = -\frac{20}{21}.$$

Damit erhalten wir als Näherung für den kleinsten Eigenwert

$$\mu + \frac{1}{R(z^{(1)}, (A-\mu I)^{-1})} = -8 - \frac{21}{20} = -9.05.$$

(b) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\lambda^2 - 4\lambda - 117.$$

Daher hat A die Eigenwerte -9 und 13. Nach zwei Iterationen ist offensichtlich schon eine verhältnismäßig gute Näherung erreicht.

Aufgabe G4 (Shift-Strategie beim QR-Verfahren)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & -4 & 0 \\ 2 & 5.1 & 3 \\ 2 & 4 & 2.1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie den Wert von q aus Satz 7.3.2 an. Ein Eigenwert von A ist durch 1.1 gegeben.

(b) Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie hieraus mit der im Skript beschriebenen Vorgehensweise einen Shift μ.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A - \mu I$ und den Wert von q aus Satz 7.3.2. Ein Eigenwert der Matrix $A - \mu I$ ist durch 1.27 gegeben.

(d) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. Was hat der Shift in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit bewirkt?

Hinweis: Es ist empfehlenswert, die Eigenwerte nicht von Hand, sondern z.B. mit Matlab zu berechnen. Runden Sie alle (Zwischen-)Ergebnisse in dieser Aufgabe auf zwei Dezimalstellen.

Lösung:

(a) In Matlab liefert die Eingabe

```
A=[-0.9 -4 0; 2 5.1 3; 2 4 2.1];
eig(A)
```

die Eigenwerte $6.1, 1.1$ und -0.9. Wer die Eigenwerte von Hand ausrechnet, erhält das charakteristsische Polynom

$$\chi(\lambda) = (-0.9 - \lambda)(5.1 - \lambda)(2.1 - \lambda) - 24 - 12(-0.9 - \lambda) + 8(2.1 - \lambda).$$

Der Wert von q berechnet sich dann zu $q = \max\left\{\frac{11}{61}, \frac{9}{11}\right\} = \frac{9}{11}$.

(b) Die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5.1 & 3 \\ 4 & 2.1 \end{pmatrix}$$

sind durch 7.37 und -0.17 gegeben. Nach dem Skript wählen wir als Shift μ denjenigen Eigenwert, der am nächsten bei a_{33} liegt, also $\mu = -0.17$.

(c) Es ist

$$B := A - \mu I = A + 0.17I = \begin{pmatrix} -0.73 & -4 & 0 \\ 2 & 5.27 & 3 \\ 2 & 4 & 2.27 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $6.27, 1.27$ und -0.73. (Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $\chi(\lambda) = (-0.73 - \lambda)(5.27 - \lambda)(2.27 - \lambda) - 24 - 12(-0.73 - \lambda) + 8(2.27 - \lambda) = -\lambda^3 + 6.81\lambda^2 - 2.46\lambda - 5.81$.) Mit Satz 7.3.2 berechnen wir

$$q = \max\{1.27/6.27, 0.73/1.27\} = 0.57$$

.

(d) Der Wert von q hat sich durch die Verwendung der Shift-Strategie stark verringert, und wir erreichen dadurch eine höhere Konvergenzgeschwindikeit in diesem Schritt. Dies ist dadurch zu erklären, dass durch den Shift die Trennung der Variablen λ_n und λ_{n-1} verbessert wurde.

Aufgabe G5 (Gershgorin-Kreise und Bauer/Fike)

Gegeben sei die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie die zur Matrix $\tilde{A}$ gehörenden Gershgorin-Kreise.

(b) Stellen Sie die Matrix $\tilde{A}$ als $\tilde{A} = A + \Delta A$ mit geeigneten Matrizen A und ΔA dar und bestimmen Sie eine Näherung für das Spektrum $\sigma(\tilde{A})$ mit Hilfe des Satzes von Bauer/Fike.

(c) Zeichnen Sie die Ergebnisse aus den beiden ersten Aufgabenteilen und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} K_1 &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - 1| \le \frac{1}{5} \right\} \\ K_2 &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - 2| \le \frac{1}{10} \right\} \\ K_3 &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - 3| \le \frac{1}{10} \right\} \\ K_4 &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - 4| \le \frac{1}{10} \right\} \\ \sigma(\tilde{A}) &\subset K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 =: K \end{aligned}$$

(b) Wir wählen $A := \operatorname{diag}(1,2,3,4)$ und $\Delta A := \tilde{A} - A$ und somit ist $T = I$ und $\sigma(A) = \{1,2,3,4\}$. Wir erhalten $\operatorname{cond}_2(T) = 1$ und $\|\Delta A\|_2 = \frac{1}{5}$ und es ergibt sich als Näherung für das Spektrum von $\tilde{A}$

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A + \Delta A) \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - \lambda| \le \frac{1}{5} \right\} =: \bar{K}.$$

(c) Die Näherung durch die Gershgorin-Kreise ist genauer, denn es gilt $\sigma(\tilde{A}) \subset K \subsetneq \bar{K}$. Skizze siehe Abbildung 1.

Bemerkung: Man kann in (b) auch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

wählen. Dann ist wieder $\sigma(A) = \{1,2,3,4\}$ jedoch ergibt sich $\operatorname{cond}_2(T) \approx 1{,}105$ und $\|\Delta A\|_2 = \frac{1}{10}$. Für das Spektrum gilt

$$\sigma(\tilde{A}) \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \left\{ \mu \in \mathbb{C} \ : \ |\mu - \lambda| \le 0{,}1105 \right\}.$$

Diese Abschätzung ist besser als die mit $A = \operatorname{diag}(1,2,3,4)$ und liefert sogar eine bessere Näherung für den Eigenwert $\lambda_1 \approx 0{,}99$ als die Gershgorin-Kreise aus (a).

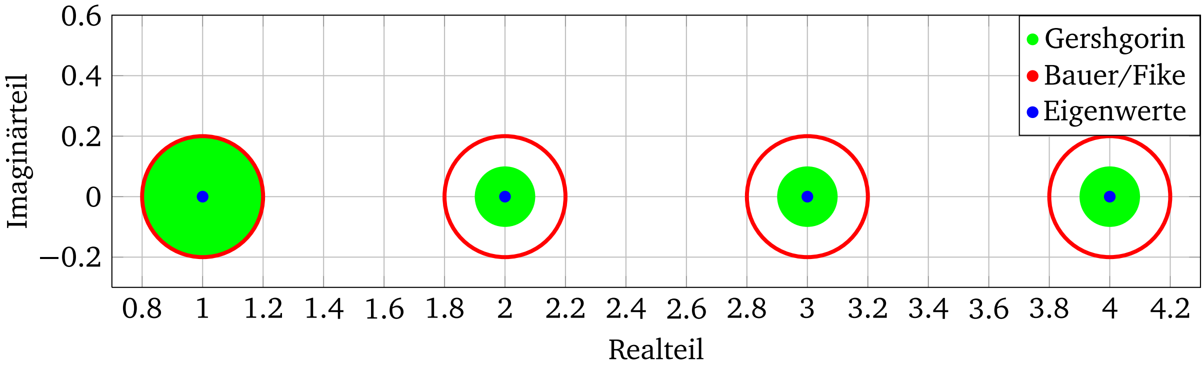

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe G5