Klausurzettel Mathematik für Informatiker III

Interpolation:

- *Lagrangesches Interpolationspolynom:* $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k L_{k,n}(x)$ mit $L_{k,n}(x)=\prod_{j=0\, j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ (zuerst $L_{k,n}(x)$ ausrechnen, dann in $p_n(x)$ einsetzen)
- *Newtonsche Interpolationspolynom:* $p_n(x)=\gamma_0+\sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x-x_0)\dots(x-x_{i-1})$, $\gamma_i=f_{[x_0,\dots,x_i]}$ und $f_{[x_j,\dots,x_{j+k}]}=\frac{f_{[x_{j+1},\dots,x_{j+k}]}-f_{[x_j,\dots,x_{j+k-1}]}}{x_{j+k}-x_j}$ + Schema Skript S. 8
  - Fehlerabschätzung für Interpolationspolynome:
    $max_{x\in[a,b]}|f(x)-p_n(x)|\leqslant max_{x\in[a,b]}\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$
- *Interpolation mit linearen Splines:*
  - Fehlerabschätzung: $max_{x\in[a,b]}|f(x)-s(x)|\leqslant\frac{1}{8} max_{x\in[a,b]}|f''(x)| h_{max}^2$
- *Interpolation mit kubischen Splines:* $s_i=\frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i}M_i+\frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}M_{i+1}\right)+c_i(x-x_i)+d_i$, $d_i=y_i-\frac{h_i^2}{6}M_i$, $c_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i)$
  - Glsystem: $$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1}-\frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
  - natürliche Randbedingungen: $M_0=M_n=0$
  - Vorgehen: berechne h_i s, stelle Glsystem auf, berechne damit M_i s, berechne d_i s, berechne c_i s, berechne s_i s
  - Fehlerabschätzung natürl. Randbedingungen: $|f(x)-s(x)|\leqslant\frac{h_{max}}{h_{min}}\sup_{\xi\in[a,b]}|f^{(4)}(\xi)|h_{max}^4$
  - Fehlerabschätzung hermite Randbedingungen: $|f(x)-s(x)|\leqslant\frac{5}{384}\sup_{\xi\in[a,b]}|f^{(4)}(\xi)|h_{max}^4$

Lineare Gleichungssysteme:

- *Gauß-Verfahren:* für $k=1,\dots,n-1$: $A^{(k)}$ beschreibt Ursprungsmatrix / Iterationsmatrix → $\tilde{A}^{(k)}$ beschreibt Matrix, bei der Zeilen vertauscht wurden → $b^{(k)}$ beschreibt Ursprungsvektor / Iterationsvektor → $\tilde{b}^{(k)}$ beschreibt Vektor, bei dem Zeilen vertauscht wurden → $L^{(k)}$ beschreibt Matrix, in der die Faktoren gespeichert werden → $\tilde{L}^{(k)}$ beschreibt die Matrix der Faktoren, bei der die Zeilen vertauscht wurden → Ergebnis ist $R=A^{(n)}, L=I+L^{(n)}, c=b^{(n)}$
  - *Matrizenklassen, die keine Pivotsuche erfordern:* $A=A^T$ und A hat lauter echt positive EWe (also ist A symmetrisch positiv definit) ; A ist strikt diagonaldominant, d.h. das Diagonalelement ist immer größer als die Summe der Zeileneinträge

- *Cholesky-Verfahren:* Cholesky-Zerlegung $L L^T = A$, L hat positive Diagonaleinträge

  Für $j=1,\dots,n$: $l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$

  Für $i=j+1,\dots,n$: $l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$

  - für $n=3$: $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$; $l_{21} = \dfrac{a_{21}}{l_{11}}$; $l_{31} = \dfrac{a_{31}}{l_{11}}$; $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$; $l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}}$;
    $l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$
  - Um $Ax=b \to L L^T x = b$ zu lösen, löse zunächst $Ly=b$ und anschließend $L^T x = y$
- *Normen:* euklidische Norm $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$ induziert $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$;

  Spaltensummennorm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ induziert $\|A\|_1 = max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$;

  Zeilensummennorm $\|x\|_\infty = max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ induziert $\|A\|_\infty = max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
- *Kondition:* $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$
- *Störeinfluss:* $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leqslant \dfrac{cond(A)}{1 - cond(A) \|\Delta A\| / \|A\|} \left(\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$

Nichtlineare Gleichungssysteme:

- *Jacobi-Matrix:* $F'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$
- *Lokales Newton-Verfahren:*
  Wähle Startpunkt $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, für $k=0,1,\dots$:
  1. Falls $F(x^{(k)}) = 0$: STOP mit Ergebnis $x^{(k)}$
  2. Berechne den Newton-Schritt $s^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ durch Lösen der Newton-Gleichung $F'(x^{(k)}) s^{(k)} = -F(x^{(k)})$
  3. Setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$
- *Schrittweitenwahl nach Armijo:* Sei $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ (gute Wahl $\delta = 10^{-3}$) fest gegeben. Wähle

  das größte $\sigma_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ mit $\|F(x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)})\|_2^2 \leqslant (1 - 2\delta\sigma_k) \|F(x^{(k)})\|_2^2$
- *Globales Newton-Verfahren:* wie lokales Newton-Verfahren, aber setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)}$

Numerische Integration (interpolatorische Quadratur):

- *Geschlossene Newton-Cotes-Formel:* $I_n(f) = h \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_i)$ mit Gewichten

  $\alpha_{i,n} = \int_0^n \prod_{j=0\, j \neq i}^{n} \dfrac{s-j}{i-j} ds$; $h = \dfrac{b-a}{n}$

n	$\alpha_{i,n}$	Fehler $E_n(f)$	Name
1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$-\dfrac{f^{(2)}(\xi)}{12} h^3$	Trapezregel

2	$\frac{1}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$	$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5$	Simpson-Regel
3	$\frac{3}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{3}{8}$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5$	3/8-Regel
4	$\frac{14}{45}$ $\frac{64}{45}$ $\frac{24}{45}$ $\frac{64}{45}$ $\frac{14}{45}$		Milne-Regel

- *Fehlerabschätzung:* $\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b p_n(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)-p_n(x)|\,dx\leqslant\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+2}$

- *Offene Newton-Cotes-Formel:* $\tilde{I}_n(f)=h\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\alpha}_{i,n}f(x_i)$ mit Gewichten

$\tilde{\alpha}_{i,n}=\int_0^{n+2}\prod_{j=1\,j\neq i}^{n+1}\frac{s-j}{i-j}\,ds$; $h=\frac{b-a}{n+2}$

n	$\alpha_{i,n}$	Fehler $\tilde{E}_n(f)$	Name
0	2	$\frac{f^{(2)}(\xi)}{3}h^3$	Rechteck-Regel
1	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{3f^{(2)}(\xi)}{4}h^3$	
2	$\frac{8}{3}$ $-\frac{4}{3}$ $\frac{8}{3}$	$\frac{28f^{(4)}(\xi)}{90}h^5$	

- Eine Integrationsformel $J(f)$ heißt *exakt vom Grad* n, falls sie alle Polynome bis mindestens vom Grad n exakt integriert → prüfen, ob $I(f)=J(f)$ für Basispolynome kleiner gleich n im Intervall $[-1,1]$

- Summierte Newton-Cotes-Formeln: teile $[a,b]$ in m Teilintervalle der Länge $H=\frac{b-a}{m}$ $\rightarrow h=\frac{H}{n}$

  - *Summierte geschlossene Newton-Cotes-Formel:* $S_N^{(n)}(f)=h\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n}\alpha_{i,n}f(x_{jn+i})$

  - *Summierte Trapezregel:* $S_N^{(1)}(f)=\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{m-1}(f(x_j)+f(x_{j+1})),\ x_j=a+jh$; Fehler $R_N^{(1)}(f)=-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$

  - *Summierte Simpson-Regel:* $S_N^{(2)}(f)=\frac{h}{3}\sum_{j=0}^{m-1}(f(x_{2j})+4f(x_{2j+1})+f(x_{2j+2})),\ x_j=a+jh$; Fehler $R_N^{(2)}(f)=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

  - *Summierte Rechteck-Regel:* $\tilde{S}_N^{(0)}(f)=2h\sum_{j=1}^{m}f(x_{2j-1}),\ x_j=a+jh$; Fehler $\tilde{R}_N^{(0)}(f)=\frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$

Numerische Behandlung von AWP gewöhnlicher Diff.-Gleichungen:

N Teilintervalle ; $h=\frac{b-a}{N}$

- *Explizites Euler-Verfahren (Konsistenzord. 1):* $\begin{array}{c} u_0 := y_0 \\ u_{j+1} := u_j + h\, f(t_j, u_j),\ j=0,\dots,N-1 \end{array}$
- *Implizites Euler-Verfahren (Konsistenzord. 1):* $\begin{array}{c} u_0 := y_0 \\ u_{j+1} := u_j + h\, f(t_{j+1}, u_{j+1}),\ j=0,\dots,N-1 \end{array}$
- *Verfahren von Heun, erstes Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung (Konsistenzord. 2):*
  $$u_0 = y_0$$
  $$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\left(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_j + h\, f(t_j, u_j))\right),\ j=0,\dots,N-1$$
- *Modifiziertes Euler-Verfahren, zweites Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung (Konsistenzord. 2):* $\begin{array}{c} u_0 = y_0 \\ u_{j+1} = u_j + h\, f(t_j + h/2, u_j + (h/2) f(t_j, u_j)),\ j=0,\dots,N-1 \end{array}$
- *Klassisches Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (Konsistenzord. 4):*
  $$\begin{array}{c} u_0 = y_0 \\ u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\ j=0,\dots,N-1 \end{array} \ \text{mit} \ \begin{array}{c} k_1 = f(t_j, u_j) \\ k_2 = f(t_j + h/2, u_j + (h/2) k_1) \\ k_3 = f(t_j + h/2, u_j + (h/2) k_2) \\ k_4 = f(t_{j+1}, u_j + h k_3) \end{array}$$
- *r-stufige explizite Runge-Kutta-Verfahren (implizit, falls Summation bis* r *):*
  $$k_i = f\left(t + \gamma_i h, u + h \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j\right), i=1,\dots,r \ \text{und} \ \phi(t,h;u) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i k_i \ ;$$
  $$u_{j+1} = u_j + h\, \phi(t_j, h; u_j, u_{j+1})$$
  - *Butcher-Schema:*
  $$\begin{array}{c|ccccc} \gamma_1 & 0 & & & & \\ \gamma_2 & \alpha_{21} & 0 & & & \\ \gamma_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \gamma_r & \alpha_{r1} & \cdots & \cdots & \alpha_{r,r-1} & 0 \\ \hline & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{r-1} & \beta_r \end{array}$$
- *Konsistenzordnungen:* $p=1$, wenn $\sum_{i=1}^{r} \beta_i = 1$; $p=2$, wenn zusätzlich $\sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i = \frac{1}{2}$; $p=3$, wenn zusätzlich $\sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i^2 = \frac{1}{3}$ und $\sum_{i,j=1}^{r} \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j = \frac{1}{6}$
- *Modellgleichung:* $y' = \lambda y, y(0) = 1$ $\rightarrow$ Lösung ist $y(t) = e^{\lambda t}$
  - A-stabil, wenn Anwendung auf Modellproblem für jede Schrittweite eine Folge produziert mit $|u_{j+1}| \leqslant |u_j| \quad \forall\, j \geqslant 0$
  - L-stabil, wenn A-stabil und $\lim_{j\to\infty} u_j = 0$
  - oft: $u_{j+1} = R(q) u_j$ mit $q = \lambda h$ $\rightarrow$ R ist Stabilitätsfunktion ; Stabilitätsgebiet $S = \{q \in \mathbb{C} : |R(q)| < 1\}$ $\rightarrow$ $A-stabil \Leftrightarrow |R(q)| \leqslant 1$; $L-stabil \Leftrightarrow |R(q)| < 1$

Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung:

- *Gershgorin-Kreise:* es gilt $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ mit $K_i := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}$
- *Vektoriteration nach von Mises findet größten EW:* $z^{(k+1)} = \frac{1}{\|A z^{(k)}\|} A z^{(k)}, k = 0, 1, \dots$
  - *Rayleigh-Quotient:* $R(z^{(k)}, A) = \frac{(z^{(k)})^H A z^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$

- *Inverse Vektoriteration von Wielandt:* $z^{(k+1)}=\frac{\hat{z}^{(k+1)}}{\|\hat{z}^{(k+1)}\|}$ mit $\hat{z}^{(k+1)}$ Lösung von $(A-\mu I)\hat{z}^{(k+1)}=z^{(k)}$
  - *Rayleigh-Quotient:* $R(z^{(k)},(A-\mu I)^{-1})=\frac{(z^{(k)})^H \hat{z}^{(k+1)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$ → Näherung für kleinsten EW $\mu+\frac{1}{R(z^{(1)},(A-\mu I)^{-1})}$
- *QR-Verfahren mit Shift:* Setze $A^{(1)}:=A$, für $l=1,2,\dots$ berechne $A^{(l)}-\mu_l I=:Q_l R_l$; $A^{(l+1)}:=R_l Q_l+\mu_l I$ mit unitärer Matrix Q_l und oberer Dreiecksmatrix R_l
  - $q:=max_{j=1,\dots,n-1}\left|\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\right|$ Maß für Konvergenzgeschwindigkeit, wobei $|\lambda_1|>|\lambda_2|>\dots$
  - Verbesserung der Konvergenz der letzten Zeile durch Shift: wähle als Shift denjenigen Eigenwert von $\begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(l)} & a_{n-1,n}^{(l)} \\ a_{n,n-1}^{(l)} & a_{n,n}^{(l)} \end{pmatrix}$, der am nächsten bei $a_{n,n}^{(l)}$ liegt (im Zweifel den mit positivem Imaginärteil)

Messreihen, Lage- und Streumaßzahlen

- *empirische Verteilungsfunktion:* $F(z)=F(z;x_1,\dots,x_n)=\frac{Zahl\ der\ x_i\ mit\ x_i\leq z}{n}$
- *p-Quantil:* $x_P=\begin{cases} x_{(np)},\ falls\ np\ ganzzahlig \\ x_{([np]+1)},\ falls\ np\ nicht\ ganzzahlig \end{cases}$
- *empirische Varianz:* $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
- *empirische Streuung:* $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$
- *empirische Kovarianz:* $s_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
- *empirischer Korrelationskoeffizient:* $r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$
- *Berechnung der Regressionsgerade:* $y=\hat{a}x+\hat{b}$ mit $\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}$, $\hat{b}=\bar{y}-\hat{a}\bar{x}$

Kombinatorik:

- *geordnete Probe mit Wiederholungen:* n^k
- *geordnete Probe ohne Wiederholungen:* $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$
- *ungeordnete Probe ohne Wiederholungen:* $nCk=\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

- bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit: vollständige Ereignisdisjunktion $A_1,\dots,A_n$

$\rightarrow\ P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)$

- Formel von Bayes: vollständige Ereignisdisjunktion $A_1,\dots,A_n \rightarrow$
$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\cdot P(B|A_k)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen:

- *Verteilungsfunktion:* Dichte $f \rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$; $F(x)=P(X\leqslant x)$
- *diskrete Verteilungen:*
  - *geometrische Verteilung:* $P(X=i)=(1-p)^{i-1}p, i=1,2,\dots$ „Warten auf den 1. Erfolg"
  - *Binomialverteilung* ($B(n,p)$): $P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, i=0,1,\dots,n$ „Anzahl Erfolge bei n Versuchen"
  - *Poissonverteilung:* $P(X=i)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, i=0,1,2,\dots$
  - *Erwartungswert:* $E(X)=\sum_i x_i P(X=x_i)$ bzw. $E(h(X))=\sum_i h(x_i)P(X=x_i)$
- *stetige Verteilungen:*
  - *Rechteckverteilung* ($R(a,b)$): $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & ,a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & ,\text{sonst}\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\geqslant b\end{cases}$
  - *Exponentialverteilung* ($Ex(\lambda)$): $f(t)=\begin{cases}0 & ,t<0\\ \lambda e^{-\lambda t} & ,t\geqslant 0\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\end{cases}$
  - *Normalverteilung* ($N(\mu,\sigma^2)$): $f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$; $F_{\mu,\sigma^2}(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
    - *Standard-Normalverteilung:* $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$
  - *Erwartungswert:* $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ bzw. $E(h(X))=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$
- *Varianz:* $Var(X)=E([X-E(X)]^2)$
- *Standardabweichung:* $\sqrt{Var(X)}$
- *Rechenregeln Erwartungswert:* $E(aX+b)=aE(X)+b$;
$E(h_1(X)+h_2(X))=E(h_1(X))+E(h_2(X))$; $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$;
$Var(aX+b)=a^2 Var(X)$

Verteilung	$E(X)$	$Var(X)$
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
$Ex(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$B(n,p)$	np	$np(1-p)$

- *Tschebyschevsche Ungleichung:* $P(|X-E(X)|\geqslant c)\leqslant\frac{Var(X)}{c^2}$, $c>0$

Schätzverfahren und Konfidenzintervalle:

- Schätzer T_n heißt *erwartungstreu*, wenn $E_\theta(T_n(X_1,\dots,X_n))=\tau(\theta)$

- Schätzerfolge heißt *konsistent*, wenn $\lim_{n\to\infty} P_\theta(|T_n(X_1,\dots,X_n)-\tau(\theta)|>\epsilon)=0$
  - bei erwartungstreuen Schätzern: wenn $\lim_{n\to\infty} Var_\theta(T_n(X_1,\dots,X_n))=0 \text{ für alle } \theta\in\Theta$
- *Maximum-Likelihood-Schätzer:* $L(\theta;x_1,\dots,x_n)=f_\theta(x_1)\cdot f_\theta(x_2)\cdot\dots\cdot f_\theta(x_n)$ → Maximum bilden: Nullstelle von $\ln(L)$ berechnen und prüfen, ob zweite Ableitung kleiner Null → dann ist Nullstelle ML-Schätzer
- *Konfidenzintervall für* μ *bei bekannter Varianz* $\sigma^2=\sigma_0^2$ mit Konfidenzniveau $1-\alpha$:
  $I(X_1,\dots,X_n)=\left[\overline{X}_{(n)}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\overline{X}_{(n)}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$
- *Konfidenzintervall für* μ *bei unbekannter Varianz* σ^2 mit Konfidenzniveau $1-\alpha$:
  $I(X_1,\dots,X_n)=\left[\overline{X}_{(n)}-t_{n-1;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}},\overline{X}_{(n)}+t_{n-1;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}}\right]$
- *Konfidenzintervall für* σ^2 *bei bekanntem Erwartungswert* $\mu=\mu_0$ mit Konfidenzniveau $1-\alpha$: $I(X_1,\dots,X_n)=\left[\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}},\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}\right]$
- *Konfidenzintervall für* σ^2 *bei unbekanntem Erwartungswert* mit Konfidenzniveau $1-\alpha$:
  $I(X_1,\dots,X_n)=\left[\frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}},\frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right]$

Tests bei Normalverteilungsannahmen:

- *Fehler 1. Art:* H_0 wird abgelehnt, obwohl H_0 zutrifft
- *Fehler 2. Art:* H_0 wird nicht abgelehnt, obwohl H_0 nicht zutrifft
- *Gauß-Test:*
  1. $X_1,\dots,X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu,\sigma_0^2)$-verteilt, σ_0^2 bekannt
  2. a) $H_0:\mu=\mu_0$, b) $H_0:\mu\leqslant\mu_0$, c) $H_0:\mu\geqslant\mu_0$
  3. Testgröße $T(X_1,\dots,X_n)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\overline{X}_{(n)}-\mu_0)$
  4. Ablehnung, falls a) $|T|>u_{1-\alpha/2}$, b) $T>u_{1-\alpha}$, c) $T<u_\alpha$
- *t-Test:*
  1. $X_1,\dots,X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu,\sigma_0^2)$-verteilt, σ_0^2 unbekannt
  2. a) $H_0:\mu=\mu_0$, b) $H_0:\mu\leqslant\mu_0$, c) $H_0:\mu\geqslant\mu_0$
  3. Testgröße $T(X_1,\dots,X_n)=\sqrt{n}\frac{\overline{X}_{(n)}-\mu_0}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$
  4. Ablehnung, falls a) $|T|>t_{n-1;1-\alpha/2}$, b) $T>t_{n-1;1-\alpha}$, c) $T<t_{n-1;\alpha}$
- *χ^2-Streuungstest:*
  1. $X_1,\dots,X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu,\sigma_0^2)$-verteilt, μ unbekannt
  2. a) $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$, b) $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$, c) $H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$
  3. Testgröße $T(X_1,\dots,X_n)=\frac{n-1}{\sigma_0^2}\cdot S_{(n)}^2$
  4. Ablehnung, falls a) $T<\chi^2_{n-1;\alpha/2}$, b) $T>\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$, c) $T<\chi^2_{n-1;\alpha}$

evt. Formel partielle Integration
evt. Logarithmengesetze