Klausur

Mathematik IV für Elektrotechnik
Mathematik III für Informatik
Numerik und Stochastik für M. Edu
Mathematik B für ET - Teil 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

14. März 2012

Name: ____________________ Matrikelnummer: ␣␣␣␣␣␣␣

Vorname: ____________________ Studiengang: ________________

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ
Punktzahl	6	3	5	6	5	5	30
erreichte Punktzahl							

Die Aufgaben 1, 2 und 4 sind ausführlich auf zusätzlichen Blättern zu lösen. Nummerieren Sie die Blätter durch und beschriften Sie diese mit Name und Matrikelnummer. Legen Sie die Blätter am Ende der Klausur in Ihr Aufgabenblatt. **Die Ergebnisse zu den Fill-In-Aufgaben (Aufgabe 3, 5 und 6) sind in die vorgesehenen Kästchen einzutragen.** Rechnungen zu diesen Aufgaben sind auf gesonderten Blättern durchzuführen und werden **nicht korrigiert!** Die Ergebnisse sind entweder als exakte Brüche anzugeben oder auf 4 Nachkommastellen zu runden.

Die Klausurdauer beträgt 90 Minuten.

Als Hilfsmittel sind vier eigenhandschriftliche DIN-A4-Seiten und Taschenrechner zugelassen. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.

Bitte geben Sie keine Formelsammlungen oder Blätter mit Nebenrechnungen zu Fill-In-Aufgaben ab.

Es werden ca. 4 Wochen Korrekturzeit benötigt. Über den Aushang der Ergebnisse und den Termin der Klausureinsicht informieren wir Sie auf der Fachbereichs-Webseite zur Veranstaltung "Mathematik IV f. ET" im Sommersemester 2011.

Aufgabe 1 (Anfangswertaufgabe)

Diese Aufgabe ist auf einem zusätzlichen Blatt zu lösen. Alle Zwischenschritte müssen angegeben werden!

a) **Lösen eines Anfangswertproblems:** Gegeben sei folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ \hline & 1 \end{array} \tag{$*$}$$

(i) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen impliziten Runge-Kutta-Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um eine Näherung u_{j+1} an $y(t_{j+1})$ von $u_j \approx y(t_j)$ aus zu berechnen?

(ii) Es sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \sin(t) \cdot y(t), \quad y(\pi) = 2 \tag{$**$}$$

gegeben. Berechnen Sie unter Verwendung des durch das Butcher-Tableau ($*$) gegebenen Runge-Kutta-Verfahrens für die Schrittweite $h = \frac{\pi}{4}$ eine Näherung an $y(\frac{3}{2}\pi)$ für ($**$).

(iii) Berechnen Sie den Fehler zur exakten Lösung $y(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{2}{e}$. (Hinweis: Die hier berechnete Näherung muss nicht unbedingt eine gute sein.)

b) **Stabilität**

(i) Wie lautet die Stabilitätsfunktion für das durch ($*$) beschriebene Verfahren?

(ii) Für ein anderes Verfahren sei die Stabilitätsfunktion gegeben durch

$$\tilde{R}(q) = \frac{2+q}{2-q}.$$

Überprüfen Sie, ob das zugehörige Verfahren A-stabil ist.

Aufgabe 2 (Newtonverfahren)

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $F(x) = 0$, wobei F gegeben ist durch

$$F(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Führen Sie einen Schritt des globalisierten Newtonverfahrens mit Schrittweitenwahl nach Armijo mit $\delta = 10^{-3}$ und Startpunkt $x^{(0)} = 2$ durch.

Diese Aufgabe ist auf einem zusätzlichen Blatt zu lösen. Alle Zwischenschritte müssen angegeben werden!

Aufgabe 3 (Interpolation)

Es soll die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ interpoliert werden. Dabei sollen die Stützstellen äquidistant gewählt sein, d.h. $x_i = \frac{1}{2} + \frac{i}{2n}, \quad i = 0, \ldots, n.$

Hinweis: Die Ableitungen lauten

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

a) Berechnen Sie für $n = 2$ das eindeutige Polynom p_2 vom Grad ≤ 2, dass folgende Interpolationsbedingungen erfüllt:

$$p_2(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2.$$

Verwenden Sie dazu nachstehendes Schema und tragen Sie die berechneten Werte in die jeweiligen Kästchen ein.

$x_0 = \frac{1}{2}$	$\boxed{}$	$\searrow$			
			$\boxed{}$	$\searrow$	
$x_1 = \frac{3}{4}$	$\boxed{}$	$\nearrow$ $\searrow$			$\boxed{}$
			$\boxed{}$	$\nearrow$	
$x_2 = 1$	$\boxed{}$	$\nearrow$			

Geben Sie das Interpolationspolynom an:

$p_2(x) =$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Korollars aus dem Skript eine obere Schranke für den Interpolationsfehler von p_2 auf $[\frac{1}{2}, 1]$.

Geben Sie zuerst die **Fehlerformel** und dann das **Ergebnis (Zahlwert)** an:

$\lvert f(x) - p_2(x) \rvert \leq$	$=$

c) Berechnen Sie nun mit Hilfe des Satzes aus dem Skript eine obere Schranke für den Interpolationsfehler eines **Linearen Splines** s auf $[\frac{1}{2}, 1]$ unter Verwendung der gleichen Stützsellen wie in b).

Geben Sie zuerst die **Fehlerformel** und dann das **Ergebnis (Zahlwert)** an:

$\lvert f(x) - s(x) \rvert \leq$	$=$

Aufgabe 4 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig identisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$, d.h. die Dichte lautet

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}.$$

Diese Aufgabe ist auf einem zusätzlichen Blatt zu lösen. Alle Zwischenschritte müssen angegeben werden!

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\sigma}_n$ für σ.

b) Weisen Sie nach, dass $\hat{\sigma}_n^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.

Aufgabe 5 (Testverfahren)

In einer Fabrik werden die Produkte durch eine Kamera auf optische Mängel überprüft. Dazu wird ein Bild des Produktes aufgenommen und mit einem gespeicherten Idealbild verglichen. Ist die Abweichung zu groß, wird das Produkt aussortiert. Eine IT-Firma hat ein neues Verfahren entwickelt, das die Ähnlichkeit des Produktes mit dem Ideal in einem Zahlenwert ausdrückt. Die Firma behauptet, dass die Varianz der Werte beim Vergleich intakter Produkte mit dem Ideal höchstens 4 beträgt. Bei einer Stichprobe von 24 zufällig ausgewählten Erzeugnissen ergibt sich jedoch eine empirische Varianz von 5. Es soll nun überprüft werden, ob die Behauptung der IT-Firma falsch ist. Sie können dabei annehmen, dass die Werte normalverteilt sind.

a) Wie lautet die Nullhypothese und welches Testverfahren aus der Vorlesung ist dazu geeignet, diese zu überprüfen?

H_0 :	Verfahren:

b) Wie lautet die zu betrachtende Testgröße?

$T(X_1, \ldots, x_n) =$

c) Geben Sie die Bedingung an, bei der die Nullhypothese abzulehnen ist:

Ablehnung, falls...

d) Es soll nun der Test zum Niveau $0,05$ durchgeführt werden. Geben Sie sowohl den Zahlwert der Testgröße, als auch den Zahlwert des benötigten Quantils an.

Testgröße:	Quantil:

e) Beurteilen Sie auf Grund der Werte aus d), ob die Nullhypothese abzulehnen ist.

Die Nullhypothese wird...

Aufgabe 6 (Vermischte Fragen zur Statistik)

a) Sei X Standard-Normalverteilt. Gesucht ist ein symmetrisches Intervall um den Ursprung $I = [-a, a]$, sodass $P(X \in I) = 0,9$ gilt. Geben Sie den Wert für a an:

a=

b) Sei Y eine $N(2,4)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(-1 \leq Y \leq 1.8)$ und geben Sie das Ergebnis an:

$P(-1 \leq Y \leq 1.8) =$

c) Ein fairer Würfel (mit den Zahlen 1-6) wird zweimal geworfen. Betrachten Sie folgende Ereignisse:

- $A :=$ "Im ersten Wurf fällt eine ungerade Zahl"
- $B :=$ "Die Summe beider Würfe ergibt den Wert 7"
- $C :=$ "Im zweiten Wurf fällt eine Zahl ≤ 2"

Prüfen Sie die Ereignisse auf Unabhängigkeit und kreuzen Sie die entsprechende Antwort an. Es ist nur eine Antwort richtig.

☐ Die drei Ereignisse sind **paarweise und vollständig unabhängig**.

☐ Die drei Ereignisse sind **paarweise aber nicht vollständig unabhängig**.

☐ Die drei Ereignisse sind **vollständig aber nicht paarweise unabhängig**.

☐ Die drei Ereignisse sind **weder paarweise noch vollständig unabhängig**.

d) Gegeben sei folgende Messreihe:

$$22 \quad 45 \quad 8 \quad 58 \quad 12 \quad 35.$$

Geben Sie den Median $\tilde{x}$ und die Empirische Varianz s^2 an:

$\tilde{x} =$	$s^2 =$