Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
13. Juni 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 6.1 im Skript.
Wegen des Campus-Festes TU meet&move entfallen an diesem Mittwoch die Nachmittags-Übungen, sowie die Vorlesung. Teilnehmer der betroffenen Gruppen können in dieser Woche eine andere Übung besuchen. Bitte nutzen Sie die freien Plätze in den frühen Mittwoch-Übungen, sowie Gruppe 6.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y - e^t, \quad y(0) = 2.$$

(a) Verwenden Sie nun die folgenden numerischen Verfahren mit Schrittweite 0.5, um auf dem Intervall $[0,1]$ Näherungswerte für $y(t)$ zu bestimmen:
- Explizites Euler-Verfahren,
- Verfahren von Heun,
- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren (4.Ordnung).

(b) Die analytische Lösung dieses AWPs lässt sich z.B. durch Variation der Konstanten berechnen und lautet

$$y(t) = (e^{-t} + 1)e^{2t} = e^t + e^{2t}.$$

Skizzieren und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der analytischen Lösung und beurteilen Sie ihre Qualität.

Aufgabe G2 (Butcher-Schema)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t y(t), \quad y(0) = 1,$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, sowie das folgende zweistufige, explizite Runge–Kutta Verfahren mittels des dazugehörigen Butcher–Schemas

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}.$$

a) Berechnen Sie zu dem gegebenen Anfangswertproblem die Verfahrensfunktion des Runge–Kutta Verfahrens zu dem Butcher–Schema.
b) Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ mit Schrittweite $\frac{1}{2}$ mit dem gegebenen Runge–Kutta Verfahren.
c) Geben Sie den (globalen) Diskretisierungsfehler des Runge–Kutta Verfahrens in $t = 1$ an.

Aufgabe G3 (Butcher-Schema)

Wir betrachten das Schema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \gamma_2 & \frac{1}{3} & & \\ \gamma_3 & \frac{1}{3} & \alpha_{32} & \\ \hline & \beta_1 & \beta_2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Parameter $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_{32}, \beta_1$ und β_2 so, dass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren unter den Bedingungen

$$\gamma_i = \sum_j \alpha_{ij} \text{ für } i = 1,2,3 \quad \text{und} \quad \gamma_3 = 2\gamma_2$$

höchstmögliche Konsistenzordnung besitzt. Geben Sie das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren an.

Hausübung

Aufgabe H1 (Entladung eines Kondensators)

Wir betrachten die Entladung eines Kondensators der Kapazität C über einem Ohmschen Widerstand R. Der Schalter S werde zur Zeit $t = 0$ geschlossen; zu diesem Zeitpunkt sei die Spannung am Kondensator U_0. Bezeichnet man mit $U = U(t), t \geq 0$ die Spannung am Kondensator und mit $U_R(t)$ den Spannungsabfall am Widerstand R, so muss offenbar zu jedem Zeitpunkt t gelten:

$$U_R(t) + U(t) = 0,$$

wobei nach dem Ohmschen Gesetz $U_R(t) = R \cdot I(t)$ gilt für die Stromstärke $I(t)$. Die Elektrische Ladung des Kondensators ist $Q(t) = CU(t)$. Für einen idealen Kondensator gilt die Differenzialgleichung $I(t) = Q'(t)$. Damit erhält man für die Spannung $U(t)$ am Kondensator die folgende lineare Differenzialgleichung

$$U'(t) + \frac{1}{RC}U(t) = 0,$$

mit dem Anfangwert $U(0) = U_0$.

(a) Lösen Sie dieses Anfangswertroblem mithilfe der Trennung der Veränderlichen.
(b) Sei nun $U_0 = 1, R = 2$ und $C = \frac{1}{4}$. Berechnen Sie sowohl mit dem expliziten Eulerverfahren, als auch mit dem modifizierten Eulerverfahren (2.Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung) jeweils mit Schrittweite $h = \frac{2}{3}$ Näherungswerte für die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems im Intervall $[0,2]$.
(c) Beurteilen Sie Ihre drei Näherungswerte, indem Sie sie miteinander und mit der exakten Lösung vergleichen.

Aufgabe H2 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Geben Sie für folgende Verfahren die Verfahrensgleichungen für u_{j+1} an und verwenden Sie die konstante Schrittweite $h = \frac{1}{10}$, um die Näherung u_{10} an $y(1)$ zu bestimmen:

- Verfahren von Heun,
- Klassiches Runge-Kutta-Verfahren (RK4).

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse miteinander, mit dem expliziten Eulerverfahren und der exakten Lösung $e = 2.7182818\ldots$.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Eulerverfahren und Verfahren von Heun)

Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren und das Verfahren von Heun zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Verfahren sollten jeweils als Eingabeparameter den Funktionsnamen der rechten Seite der Differenzialgleichung $f(t, y(t))$, den Anfangswert y_0, die Intervallgrenzen $a = t_0$ und $b = t_N$ sowie die Schrittweite h haben und die Näherungswerte $u_0, \ldots u_N$ zurückgeben. Testen Sie Ihre Programme an den Beispielen aus Aufgabe G1 und H2.