Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
6. Juni 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt der Kapitel 4 und 5 im Skript.
Die Donnerstag-Übungen wurden wegen des Feiertages verlegt. Bitte beachten Sie die Informationen auf der Webseite.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Störung der rechten Seite)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm, die von der $\|\cdot\|_\infty$-Norm induziert wird.

(b) Die rechte Seite werde nun durch $\Delta b = (-0.1, 0.1, -0.1)^T$ gestört. Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung an.

(c) Lösen Sie nun die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $A\tilde{x} = b + \Delta b$ und vergleichen Sie mit der Abschätzung aus Teil (b).

Aufgabe G2 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führen Sie 4 Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Tragen Sie die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden ?

d) Bestimmen Sie ein maximales Intervall um $x_N = 0$, so daß jeder Startpunkt $x^{(0)}$ aus diesem Intervall gegen $x_N = 0$ konvergiert.

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle zu finden?

Aufgabe G3 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x) \quad := \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 - x_2 - \frac{1}{10} \cdot (1 + x_1^4)^{\frac{1}{4}} \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 - e^{-x_1^2} \cdot \cos x_2 \end{pmatrix}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Iterierten $x^{(k+1)}$, $(k = 0, 1, \ldots)$ an, welches bei der Anwendung des Newton-Verfahrens auf das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ entsteht.

b) Berechnen Sie zum Startvektor $x^{(0)} = (0, 0)^T$ die Näherung $x^{(1)}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-10, 10]$.

(b) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift zur Berechnung einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren.

(c) Zeigen Sie, dass das (lokale) Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x| > 1$ nicht konvergiert. Was passiert für $|x| = 1$?

(d) Berechnen Sie nun für den Startpunkt $x^{(0)} = 2$ eine Nullstelle von F mit dem globalisierten Newton-Verfahren mit der Schrittweitenregel von Armijo. Veranschaulichen Sie sich das Verfahren mit Schrittweitensuche an einer Skizze, d.h. zeichnen Sie die Iterierten in Ihre Skizze der Funktion ein.

(e) Welchen Wert hat der Index l aus Satz 4.2.2, ii) in diesem Beispiel?

Aufgabe H2 (Newton-Verfahren)

Das Newton-Verfahren soll verwendet werden, um die Schnittpunkte der Ellipse

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1$$

mit dem Kreis um den Ursprung mit Radius 3, also $x_1^2 + x_2^2 = 9$, numerisch zu bestimmen.

(a) Geben Sie eine zweidimensionale Funktion $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ an, deren Nullstellen die Schnittpunkte dieser Ellipse mit dem Kreis sind.

(b) Berechnen Sie für den Startpunkt $(x_1, x_2)^{(0)} = (2, 2)$ einen Schritt des lokalen Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion F.

(c) Beurteilen Sie die Qualität des berechneten Iterationspunktes $x^{(1)}$ anhand einer Skizze.

(d) Überprüfen Sie, ob der Startpunkt $(0, 0)$ zum Auffinden einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren geeignet ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Lokales Newton-Verfahren)

(a) Schreiben Sie ein Programm, welches das lokale Newton-Verfahren aus der Vorlesung implementiert. Das Verfahren terminiere, falls $\|F(x^{(k)})\| \leq tol$ oder $k \geq k_{\max}$. Es sollte folgende Eingabeparameter haben: Die Funktion $F(x)$ und deren Ableitung, den Startpunkt x^0 und die Anzahl von Iterationen $k_{\max}$, die maximal durchgeführt werden sollen, sowie die Toleranz tol.
Ausgegeben werden sollte der letzte Iterationspunkt x^k, die Anzahl der benötigten Iterationen k und der aktuelle Funktionswert $F(x^k)$ bzw. ein Hinweis auf Erfolg oder Misserfolg des Verfahrens.

(b) Testen Sie Ihr Verfahren an den Funktionen aus G2 und H1, sowie an:
- $F3(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$, für Startpunkte $x^0 \in \{2, -1, 0, 0.00001, 10\}$.
- $F4(x) = \sin(12 \cdot x)$, für Startpunkte $x^0 \in \{0.1, 0.09, 3.14\}$.

(c) Testen Sie Ihr Programm außerdem für weitere sinnvolle Startwerte Ihrer Wahl und versuchen Sie das Verhalten Ihres Programms für die obigen Funktionen zu erklären.