Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
23. Mai 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 4 bis einschließlich Abschnitt 4.2.4 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gaußsches Eliminationsverfahren)
Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche auf (A, b) an. Als Ergebnis erhalten Sie Matrizen L und R sowie den Vektor c.

(b) Lösen Sie das gestaffelte System $Rx = c$.

(c) Bestimmen Sie die Permutationsmatrix der Zerlegung $PA = LR$.

(d) Jede Zeilenvertauschung, also jeder Übergang $(A^{(k)}, b^{(k)}) \mapsto (\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)})$ ist durch Matrixmulitplikation darstellbar. Geben Sie für jede Iteration $(k = 1, \dots n-1)$ die Matrix P_k an, für die gilt: $(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)}) = P_k(A^{(k)}, b^{(k)})$ und verifizieren Sie $P = P_{n-1} \cdots P_1$.

Aufgabe G2 (Gaußsches Eliminationsverfahren)
Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche (Algorithmus 1) auf A und b an. Als Ergebnis erhalten Sie wieder eine linke untere Dreiecksmatrix L, eine rechte obere Dreiecksmatrix R und eine rechte Seite c.

(b) Bestimmen Sie die Permutationsmatrix P, für die gilt: $PA = LR$.

(c) Berechnen Sie eine Lösung des gestaffelten Systems $Ax = b$.

(d) Berechnen Sie nun eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)
Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Untersuchen Sie, ob die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, lösbar sind, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)
Gegeben seien die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Rang von A, B und C.

(b) Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme $Ax = a$, $Bx = b$ und $Cx = c$. Ein LGS ist unlösbar oder es hat genau eine Lösung oder es gibt unendlich viele Lösungen.

Welche der drei Fälle sind in obigen Gleichungssystemen jeweils möglich? Welche Dimension hat der Lösungsraum? Geben Sie gegebenenfalls eine rechte Seite an, für die ein bestimmter Fall eintritt. Begründen Sie in den übrigen Fällen, warum er jeweils nicht eintreten kann.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: LR-Zerlegung)

(a) Implementieren Sie ein Programm, dass für eine gegebene quadratische Matrix A überprüft, ob diese regulär ist und gegebenenfalls eine Zerlegung $PA = LR$ berechnet. Dabei sei P eine Permutationsmatrix und L und R unterer bzw. obere Dreiecksmatrizen.

(b) Schreiben Sie zudem zwei Programme die gestaffelte Gleichungssysteme $Lz = d$ und $Ry = c$ durch Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution lösen.

(c) Testen Sie ihr Programm an den Aufgaben aus der Gruppenübung.