Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

SoSe 2008
07.05.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE,iST / Mathematik III für Inf Bsc“

## Gruppenübung

**Lösung zur Aufgabe G13** (Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur)

(a) Nach der Simpson-Regel gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+3}\,dx &\approx \frac{1-(-1)}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1+3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{0+3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3}\right)=\frac{1}{6}+\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\\ &= \frac{25}{36}=0.69\overline{4}.\end{aligned}$$

Für den Fehler gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+3}\,dx-\int_{-1}^{1}p_2(x)\,dx\right| &\le \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]}\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(4)}}{90}\left(\frac{1-(-1)}{2}\right)^5\\ &= \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]}\frac{24}{(x+3)^5}}{90}=\frac{\frac{24}{(-1+3)^5}}{90}=\frac{\frac{24}{32}}{90}=\frac{1}{120}.\end{aligned}$$

(b) Mit der 3/8-Regel erhält man als Näherung

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+3}\,dx &\approx \frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{3}+3}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{16}+\frac{9}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{9}{8}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{32}\right)\\ &= \frac{1}{8}+\frac{9}{32}+\frac{9}{40}+\frac{1}{16}=\frac{111}{160}=0.69375\end{aligned}$$

Der Fehler bei der Näherung mittels der Simpson-Regel ist $|0.69\overline{4}-\ln 2|\approx 0.001297263884$ und der der Näherung mittels der 3/8-Regel $|0.69375-\ln 2|\approx 0.0006028194401$. Folglich konnte der Fehler ungefähr halbiert werden.

Die aus der Vorlesung bekannten Abschätzungen für den Fehler liefern aber keine Garantie dafür, daß der Fehler der 3/8-Regel kleiner ist als der der Simpson-Regel. Denn der Fehler der Simpson-Regel ist kleiner als $\frac{1}{90}\max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)h^5$ und der der 3/8-Regel kleiner als $\frac{3}{80}\max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)h^5$.

**Lösung zur Aufgabe G14** (Exaktheit der Quadratur)

Ein beliebiges Polynom kann als Linearkombination seiner Basiselemente geschrieben werden. Da sowohl die Integration $I(f)$ als auch die Funktionale $J(f)$ linear sind, überträgt sich die Gültigkeit der Aussage von den Basiselementen auf alle Elemente dieses Raumes.

Ausserdem reicht es, die Aussage jeweils für das Intervall $[-1, 1]$ zu zeigen. Mit einer Substitution lässt sich die Aussage dann auf jedes Intervall übertragen.

**a)**

$$I(1) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$
$$J(1) = \tfrac{2}{10}(1+4+4+1) = 2$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad 0.

$$I(x) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$
$$J(x) = \tfrac{2}{10}(-1-\tfrac{4}{3}+\tfrac{4}{3}+1) = 0$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad kleinergleich 1.

$$I(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$
$$J(x^2) = \tfrac{2}{10}(1+\tfrac{4}{9}+\tfrac{4}{9}+1) = \tfrac{26}{45}$$

Aussage gilt nicht für alle Polynome vom Grad kleinergleich 2.

Damit ist die Behauptung aus der Aufgabenstellung falsch.

**b)**

$$J(1) = 1\cdot\tfrac{2}{6} + 1\cdot 4\cdot\tfrac{2}{6} + 1\cdot\tfrac{2}{6} = 2$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad 0.

$$J(x) = \tfrac{2}{6}\,(-1+0+1) = 0$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad kleinergleich 1.

$$J(x^2) = \tfrac{2}{6}\,(1+0+1) = \tfrac{2}{3}$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad kleinergleich 2.

$$I(x^4) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$
$$J(x^3) = \tfrac{2}{6}\,(-1+0+1) = 0$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad kleinergleich 3.

$$I(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \tfrac{2}{5}$$
$$J(x^4) = \tfrac{2}{6}\,(1+0+1) = \tfrac{2}{3} \neq \tfrac{2}{5}$$

Aussage gilt nicht für alle Polynome vom Grad kleinergleich 4.

Damit stimmt die Behauptung aus der Aufgabenstellung.

**Lösung zur Aufgabe G15** (Summierte Trapezregel)

Nach der Formel für die summierte Trapezregel gilt

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx \approx \frac{\frac{1-(-1)}{2}}{2}\left(\frac{1}{-1+3} + 2\cdot\frac{1}{0+3} + \frac{1}{1+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{24} = 0.708\overline{3}.$$

Für den Fehler gilt

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx - T(1)\right| \leq 1^2(1-(-1))\frac{\max\limits_{x\in[-1,1]}\left(\frac{1}{x+3}\right)''}{12} = \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]}\frac{2}{(x+3)^3}}{6} = \frac{\frac{2}{(-1+3)^3}}{6} = \frac{1}{24}.$$

Erinnere: Die exakte Lösung des Integrals ist $\ln 2 \approx 0.69314718$. Die Simpsonregel liefert $0.69\bar{4}$ mit der Fehlerschranke $\frac{1}{120}$.
Folglich ist die Näherung mit der Simpsonregel in diesem Beispiel erheblich besser als die mit der summierten Trapezregel; und auch die Fehlerabschätzung mit der Simpsonregel ist in diesem Beispiel erheblich besser als die mit der summierten Trapezregel, obwohl die Funktion bei beiden Näherungen an den gleichen Stellen ausgewertet wurde.

# Hausübung

**Lösung zur Aufgabe H13** (Summierte Trapezregel)

Zunächst soll die Anzahl der Teilintervalle bestimmt werden, damit der Fehler höchstens $10^{-4}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_{1}^{1.4} e^{-x^2}\,dx - T(h)\right| &\leq h^2(1.4-1)\frac{\max\limits_{x\in[1,1.4]}\left(e^{-x^2}\right)''}{12} = h^2\cdot 0.4\frac{\max\limits_{x\in[1,1.4]}\left(-2xe^{-x^2}\right)'}{12}\\ &= h^2\cdot 0.4\frac{\max\limits_{x\in[1,1.4]} e^{-x^2}(4x^2-2)}{12}.\end{aligned}$$

Um das obige Maximum zu bestimmen, betrachte die Ableitung von $f(x) := e^{-x^2}(4x^2-2)$:

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}(4x^2-2)\right) = -2xe^{-x^2}(4x^2-2) + 8xe^{-x^2} = e^{-x^2}x(12-8x^2).$$

Die Ableitung hat die Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Für die Funktionswerte an diesen Stellen gilt

$$
\begin{aligned}
f(0) &= e^{-0^2}(4\cdot 0^2-2) = -2\\
f\left(\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) &= e^{-\frac{3}{2}}(4\cdot\tfrac{3}{2}-2) = 4e^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ gilt, hat $f$ an der Stelle 0 ein Minimum und an den Stellen $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ Maxima. Da $\sqrt{\frac{3}{2}} \in [1, 1.4]$, gilt

$$\max_{x\in[1,1.4]} e^{-x^2}(4x^2-2) = 4e^{-\frac{3}{2}} < 0.9.$$

Daraus folgt für den Fehler

$$\left|\int_1^{1.4} e^{-x^2}\,dx - T(h)\right| \le h^2\cdot 0.4\cdot\frac{0.9}{12} = \left(\frac{\frac{2}{5}}{N}\right)^2 \frac{2}{5}\frac{\frac{9}{10}}{12} = \frac{1}{N^2}\frac{6}{1250}.$$

Damit der Fehler kleiner als $10^{-4}$ ist, muß

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{N^2}\tfrac{6}{1250} &\le \tfrac{1}{10000}\\
\Leftrightarrow \quad 48 &\le N^2
\end{aligned}
$$

gelten. Folglich muß $N$ mindestens 7 sein. Daher ist

$$e^{-1} + 2\sum_{i=1}^{6} e^{-\left(1+0.4\cdot\frac{i}{7}\right)^2} + e^{-(1.4)^2} \approx 0.0972094994$$

eine Näherung mit der geforderten Genauigkeit.

**Lösung zur Aufgabe H14** (Rechteckregel)

a) Damit die Quadraturformel alle Polynome bis zum Grad 1 exakt integriert, muss sie genau für alle Polynome vom Grad höchstens 1 exakt sein. Da die Polynome $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = x$ eine Basis vom Vekrorraum aller Polynome mit Höchstgrad 1 bilden, ist es ausreichend, die Exaktheit nur für diese Polynome zu zeigen:

$$\int_0^1 1\,dx = 1 = \omega_0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = \omega_0 x_0$$

Daraus erhält man: $w_0 = 1$ und $x_0 = \frac{1}{2}$ und

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Transformation für den Allgemeinfall (Substitution $x = a + (b-a)t$):

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\,dt\\
&\approx (b-a)\,f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\\
&= (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}
$$

b) Man betrachte $a = 0,\ b = 1$ und $p_2(x) = x^2$:

$$1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{aber} \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Die Rechteckregel ist also nicht exakt für $p_2$, daher integriert sie nicht alle Polynome vom Grad 2 exakt.

**Lösung zur Aufgabe H15** (`Programmieraufgabe`: Newtoninterpolation)

Als Loesung kannst Du Dir die Matlab-Dateien `gammas.m` und `newton interpol.m` für Aufgabenteil a) sowie `newton interpol f.m` für Aufgabenteil b) herunterladen. Die Funktionen können durch Aufruf von `TestF1.m` und `TestF2.m` getestet werden. Um die Funktionen mit den Polynomen zu vergleichen sehen die Aufrufe in Matlab wie folgt aus:

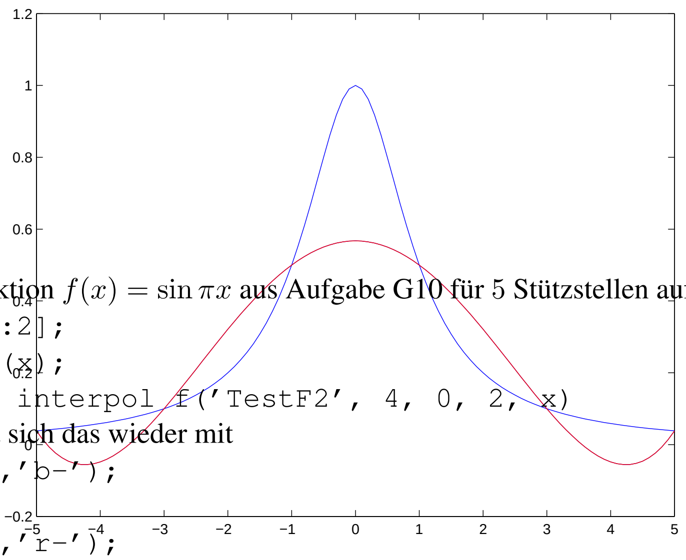
Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für 6 Stützstellen auf dem Intervall $[-5, 5]$:

```
x=[-5:0.1:5];
f=TestF1(x);
p=newton interpol f('TestF1', 5, -5, 5, x)
```

Plotten lässt sich das mit

```
plot(x,f,'b-');
hold on;
plot(x,p,'r-');
```

Dies liefert das Bild der blauen Funktion mit dem roten Interpolationspolynom:



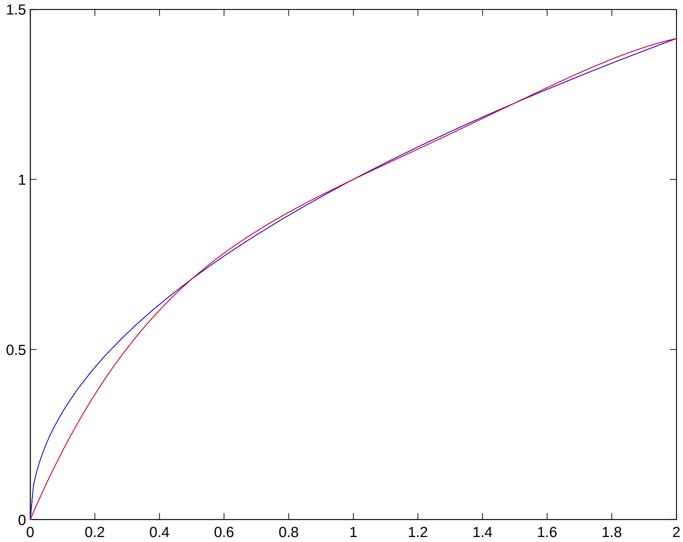

Für die Funktion $f(x) = \sin \pi x$ aus Aufgabe G10 für 5 Stützstellen auf dem Intervall $[0, 2]$:

```
x=[0:0.1:2];
f=TestF2(x);
p=newton interpol f('TestF2', 4, 0, 2, x)
```

Plotten lässt sich das wieder mit

```
plot(x,f,'b-');
hold on;
plot(x,p,'r-');
```

Dies liefert das folgende Bild der blauen Funktion mit dem roten Interpolationspolynom:


1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2