Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
20. Juni 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den gesamten Inhalt von Kapitel 6 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Steife Differenzialgleichungen)
Es soll das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Es handelt sich hierbei um eine steife Differenzialgleichung.

(a) Schreiben Sie für das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Au_j$, wobei A eine 2×2-Matrix ist, und führen Sie drei Iterationsschritte aus.

(b) Schreiben Sie für das implizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Bu_j$, wobei B eine 2×2-Matrix ist, und führen Sie drei Iterationsschritte aus.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus Teil (a) und (b). Welches Verfahren beschreibt das qualitative Verhalten der gesuchten Funktion besser?

Lösung: *Bemerkung:* Die Matrix $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = (\lambda + 7)^2 - 9$$

und daher die Eigenwerte -10 und -4. Da alle Eigenwerte einen negativen Realteil besitzen und es einen Eigenwert mit einem Realteil, der deutlich kleiner als -1 ist, gibt sowie einen Eigenwert mit Realteil nahe bei -1, handelt es sich um eine steife Differentialgleichung.

(a) Für die Iterationsvorschrift des expliziten Euler-Verfahrens (mit Schrittweite $h = 1$) gilt

$$u_{j+1} = u_j + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} u_j = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right) u_j = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} u_j.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ u_1 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}, \\ u_2 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ -72 \end{pmatrix}, \\ u_3 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ -72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -756 \\ 702 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Für die Iterationsvorschrift des impliziten Euler-Verfahrens (mit Schrittweite $h=1$) gilt

$$u_{j+1} = u_j + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} u_{j+1}.$$

Das Auflösen der Gleichung nach u_{j+1} ergibt

$$u_{j+1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right)^{-1} u_j = \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} u_j.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
u_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
u_1 &= \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.290909 \\ 0.109091 \end{pmatrix}, \\
u_2 &= \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{55} \\ \frac{6}{55} \end{pmatrix} = \frac{1}{55^2} \begin{pmatrix} 146 \\ 96 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.0482645 \\ 0.0317355 \end{pmatrix}, \\
u_3 &= \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{146}{55^2} \\ \frac{96}{55^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{55^3} \begin{pmatrix} 1456 \\ 1206 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.00875131 \\ 0.00724869 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Offensichtlich liefern beide Verfahren sehr unterschiedliche Ergebnisse. Da es sich um eine steife Differentialgleichung handelt, sollte die Lösung für wachsende t gegen Null gehen. Dieses Verhalten wird vom impliziten Euler-Verfahren offensichtlich besser beschrieben.

Aufgabe G2 (Konsistenz des implizites Euler-Verfahrens)

Zeigen Sie, dass das implizite Euler–Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b],$$

wobei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 1 ist.

Lösung: Da nach Voraussetzung $y'(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, ist $y(t)$ auf diesem Intervall 2-mal stetig diff.bar. Taylorentwicklung liefert mit einem $\xi_1 \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
y(t+h) = y(t) + y'(t)h + \frac{h^2}{2} y''(t + \xi_1 h) = \\
y(t) + f(t, y(t))h + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Beim impliziten Eulerverfahren ist

$$\phi(t, h; y(t), y(t+h)) = f(t+h, y(t+h))$$

Taylorentwicklung von f ergibt mit einem $\xi_2 \in [0, 1]$

$$f(t+h, y(t+h)) = f(t, y(t)) + f'(t + \xi_2 h, y(t + \xi_2 h))h = f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h)$$

Damit gilt für den lokalen Abbruchfehler

$$\begin{aligned}
\tau(t, h) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t) - h\phi(t, h; y(t), y(t+h))) \\
&= \frac{1}{h}(y(t) + f(t, y(t))h + \mathcal{O}(h^2) - y(t) - h[f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h)]) \\
&= \frac{1}{h}(y(t) + f(t, y(t))h + \mathcal{O}(h^2) - y(t) - hf(t, y(t)) - \mathcal{O}(h^2))) \\
&= \frac{1}{h}\mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung.

Aufgabe G3 (Anfangswertproblem)
Gegeben sei das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen Runge-Kutta Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um von $t_i, u_i \approx y(t_i)$ ausgehend u_{i+1} zu berechnen?

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t + 3y(t)\,, \quad y(1) = 2.$$

Berechnen Sie mit dem oben beschriebenen Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite $h = 1/2$ eine Näherung für $y(2)$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i + 1 \cdot h; u_i + h \cdot 1 \cdot k_1) \\ u_{i+1} &= u_i + hk_1 \end{aligned}$$

b) Verfahren angewendet auf

$$y' = t + 3y$$

liefert

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \\ t_0 &= 1 \\ u_0 &= y(1) = 2 \\ k_1 &= f(t_0 + h; u_0 + hk_1) = f(1 + \frac{1}{2}; 2 + \frac{1}{2}k_1) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 3(2 + \frac{k_1}{2}) = 7.5 + \frac{3}{2}k_1 \\ k_1 &= -15 \\ u_1 &= u_0 + hk_1 = -5.5 \\ k_1 &= f(t_1 + h; u_1 + hk_1) = f(2; -5.5 + \frac{1}{2}k_1) \\ &= 2 + 3(-5.5 + \frac{1}{2}k_1) = -14.5 + \frac{3}{2}k_1 \\ k_1 &= 29 \\ u_2 &= u_1 + hk_1 = 9 \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Konsistenz der impliziten Trapezregel)
Zeigen Sie, dass die implizite Trapezregel

$$u_{j+1} = u_j + \tfrac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1}))$$

zur Lösung eines Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b],$$

wobei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 2 ist.
Hinweis: Benutzen Sie eine Taylorentwicklung für $y(t+h)$ der Ordnung 3 (also bis $\mathcal{O}(h^3)$) und für $f(t+h, y(t+h))$ der Ordnung 2 nach h in $h = 0$.

Lösung: Da nach Voraussetzung $y'(t)$ auf dem Intervall $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar ist, ist $y(t)$ auf diesem Intervall 3-mal stetig diff'bar. Taylorentwicklung liefert mit einem $\xi \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + y'(t)h + \tfrac{1}{2}h^2 y''(t) + \tfrac{1}{6}h^3 y'''(t+\xi h) \\ &= y(t) + f(t, y(t))h + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t)) f(t.y(t)) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

da $y''(t)$ nach Voraussetzung stetig diff'bar ist und somit $y'''(t+\xi h)$ mit $\xi \in [0, 1]$ beschränkt ist.
Bei der impliziten Trapezregel ist

$$\phi(t, h; y(t), y(t+h)) = \tfrac{1}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h)))$$

Taylorentwicklung von f nach h in $h = 0$ ergibt

$$f(t+h, y(t+h)) = f(t, y(t)) + hf_t(t, y(t)) + hf_y(t, y(t)) f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2),$$

da $f'(t, y(t))$ nach Voraussetzung stetig diff'bar ist und somit die zweite Ableitung beschränkt ist.
Damit gilt für den Konsistenzfehler

$$\begin{aligned} \tau(t,h) &= \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t) - h\phi(t, h; y(t), y(t+h))) \\ &= \frac{1}{h}(y(t) + f(t, y(t))h + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t)) f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3) \\ &\quad - y(t) - h\tfrac{1}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h)))) \\ &= \frac{1}{h}(f(t, y(t))h + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t)) f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3) \\ &\quad - h(\tfrac{1}{2}f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}(f(t, y(t)) + hf_t(t, y(t)) + hf_y(t, y(t)) f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2)))) \\ &= \tfrac{1}{h}\mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe H2 (Butcher-Schema)
Zeigen Sie, dass das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

mindestens Konsistenzordnung 3 besitzt.

Lösung: Wir prüfen zunächst, ob die Voraussetzung von Satz 6.1.6 gilt, d.h. ob $\gamma_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}$ gilt. Dies ist offensichtlich erfüllt. Nach dem Satz besitzt das Verfahren nun für alle mindestens p-mal stetig differenzierbaren Funktionen die Konsistenzordnung $p = 1$, falls

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i = 1.$$

Da hier

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

gilt, ist das Verfahren also mindestens von Konsistenzordnung 1. Nachprüfen der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i = \frac{1}{2}$$

also hier

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

zeigt die Konsistenz der Ordnung 2.
Für Konsistenz der Ordnung 3 müsste gelten:

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i^2 = \frac{1}{3},$$
$$\sum_{i,j=1}^{r} \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j = \frac{1}{6}.$$

Die erste Bedingung

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{3}) + \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{6}{16} = -\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{6}{4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16}{3 \cdot 16} = \frac{1}{3}$$

ist hier wieder erfüllt. Wegen $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$ wird die 2.Bedingung zu

$$\beta_2 \alpha_{21} \gamma_1 + \beta_3 \alpha_{31} \gamma_1 + \beta_3 \alpha_{32} \gamma_2 + \beta_4 \alpha_{41} \gamma_1 + \beta_4 \alpha_{42} \gamma_2 + \beta_4 \alpha_{43} \gamma_3 = \frac{1}{6}.$$

Da $\gamma_1 = 0$ ist, liefert einsetzen

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) =$$

$$-\frac{1}{24} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} = -\frac{1}{24} + \frac{10}{48} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Die zweite Bedingung ist also ebenfalls erfüllt. Damit besitzt das Verfahren mindestens Konsistenzordnung 3.