Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2008
30.04.2008

4. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Newtonsche Interpolationsformel)

Gegeben sei die Funktion $f : [0,2] \to [-1,1] : x \mapsto \sin(\pi x)$ und die Stützstellen $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

(a) Berechne das Newtonsche Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen.

(b) Gib eine obere Schranke für den Abstand von f und dem Interpolationspolynom an.

(c) Um welchen Faktor verbessert sich die Schranke, wenn die Stützstellen $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\}$ hinzugefügt werden?

Lösung:

(a) Für die Stützstellen ergeben sich die folgenden Funktionswerte:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y_i := f(x_i)$	0	1	0	-1	0

Die Koeffizienten des Newtonschen Interpolationspolynom ergeben sich aus dem Schema der dividierten Differenzen:

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
x_0 = 0 & y_0 = 0 & \searrow & & & & & & \\
 & & & 2 & \searrow & & & & \\
x_1 = \frac{1}{2} & y_1 = 1 & \swarrow\!\!\!\!\nwarrow & & & -4 & \searrow & & \\
 & & & -2 & \swarrow\!\!\!\!\nwarrow & & & \frac{8}{3} & \searrow \\
x_2 = 1 & y_2 = 0 & \swarrow\!\!\!\!\nwarrow & & & 0 & \swarrow\!\!\!\!\nwarrow & & & 0\ . \\
 & & & -2 & \swarrow\!\!\!\!\nwarrow & & & \frac{8}{3} & \nearrow \\
x_3 = \frac{3}{2} & y_3 = -1 & \swarrow\!\!\!\!\nwarrow & & & 4 & \nearrow & & \\
 & & & 2 & \nearrow & & & & \\
x_4 = 2 & y_4 = 0 & \nearrow & & & & & &
\end{array}
$$

Daraus erhält man

$$p_4(x) = 2x - 4x(x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{8}{3}x(x - \tfrac{1}{2})(x - 1).$$

Die Funktion f und das Interpolationspolynom p_4 sind in Abbildung 1 dargestellt.

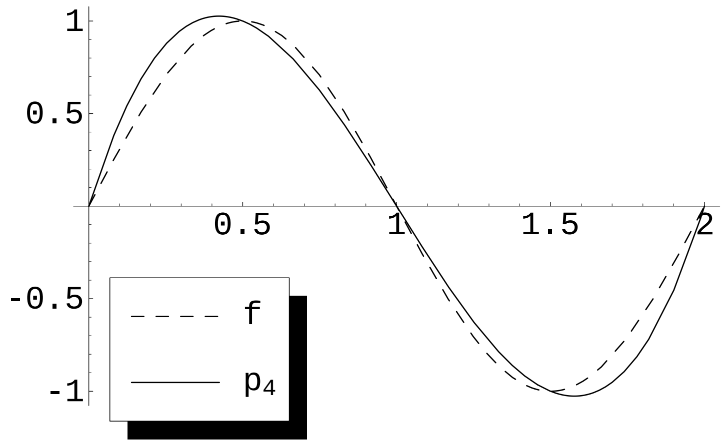

Abbildung 1: Die Funktion f und das Interpolationspolynom p_4.

(b) Nach Korollar 4.1.3 gilt

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_4| \leq \max_{x\in[0,2]} \left|f^{(5)}(x)\right| \frac{2^5}{5!}.$$

Für die fünfte Ableitung von f gilt

$$f^{(5)} = \pi^5 \cos(\pi x).$$

Folglich ist

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_4| \leq \frac{(2\pi)^5}{5!} \approx 81.6052$$

(c) Mit den neu hinzugefügten Stützstellen gilt

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_8| \leq \frac{(2\pi)^9}{9!} \approx 42.0587$$

Dies stellt eine Verbesserung um den Faktor $\frac{5!(2\pi)^4}{9!} \approx 0.515392$ dar. Die Schranke hat sich durch das Hinzufügen der Stützstellen zwar verbessert, ist aber offensichtlich ziemlich schwach und von geringem Nutzen.

Aufgabe G11 (Kubische Splines)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1,1] \to [1,2] : x \mapsto 2^{\cos(\frac{\pi}{2}x)}.$$

Interpoliere die Funktion f durch kubische Splines. Verwende dabei die Zerlegung $\Delta = \{-1,0,1\}$ und natürliche Randbedingungen.

Lösung: Es gilt

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 1 \quad \text{und} \quad h_0 = h_1 = 1.$$

Daraus ergibt sich für die drei Momente M_0, M_1, M_2 das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

welches die eindeutige Lösung

$$M_0 = 0, \quad M_1 = -3, \quad M_2 = 0$$

besitzt.

Damit ergibt sich für die Konstanten c_i und d_i

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2-1}{1} - \frac{1}{6}(-3-0) = \frac{3}{2}, \\ c_1 &= \frac{1-2}{1} - \frac{1}{6}(0-(-3)) = -\frac{3}{2}, \\ d_0 &= 1, \\ d_1 &= 2 - \frac{1}{6}(-3) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} s_0(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)^3 + \frac{3}{2}(x+1) + 1 & x \in [-1,0] \\ s_1(x) &= \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = s_0(-x) & x \in [0,1] \end{aligned}$$

Die Funktion f und der Spline s sind in Abbildung 2 dargestellt.

Aufgabe G12 (Inverse Interpolation)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1] \to [-1, \tfrac{3}{4}] : x \mapsto x^2 - \frac{1}{4^x}.$$

(a) Zeige, daß die Funktion f eine Umkehrfunktion besitzt.

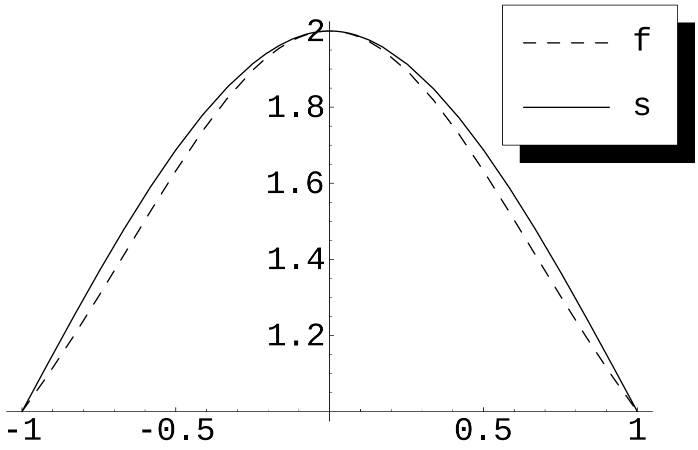

Abbildung 2: Die Funktion f und der Spline s.

(b) Berechne ein Newtonsches Interpolationspolynom vom Grad 2 zur *Umkehrfunktion* von f. Versuche dabei die Stützstellen so zu wählen, daß die Stützstellen sowie die zugehörigen Funktionswerte rational sind.

Lösung:

(a) Für $x \in [0,1]$ ist sowohl x^2 als auch $-\frac{1}{4^x}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Folglich ist auch f streng monoton wachsend und daher umkehrbar. (Da $f(0) = -1$ und $f(1) = \frac{3}{4}$ gilt, ist $f([0,1]) = [-1, \frac{3}{4}]$).

(b) Für $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ erhält man rationale Funktionswerte:

$$f(0) = -1, \quad f(\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad f(1) = \frac{3}{4}.$$

Daher kann man -1, $-\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ gut als Stützstellen zur Interpolation der Umkehrfunktion verwenden. Das Schema der dividierten Differenzen lautet dann

$$\begin{array}{r|lcccc}
y_0 = -1 & x_0 = 0 & \searrow & & & \\
 & & & \frac{2}{3} & \searrow & \\
y_1 = -\frac{1}{4} & x_1 = \frac{1}{2} & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & -\frac{2}{21} \\
 & & & \frac{1}{2} & \nearrow & \\
y_2 = \frac{3}{4} & x_2 = 1 & \nearrow & & &
\end{array}\; .$$

Daraus erhält man

$$p_2(x) = \frac{2}{3}(x+1) - \frac{2}{21}(x+1)(x+\frac{1}{4}).$$

Die Funktion f^{-1} und das Interpolationspolynom p_2 sind in Abbildung 3 dargestellt.

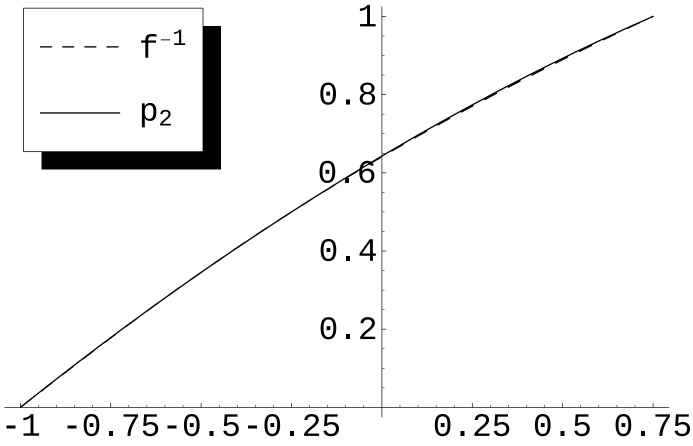

Abbildung 3: Die Funktion f^{-1} und das Interpolationspolynom p_2.

Hausübung

Aufgabe H10 (Interpolation)

Die unbekannte Funktion f soll durch Polynome approximiert werden.

(a) Gegeben seien die folgenden vier Stützpunkte:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	$\frac{1}{2}$
y_i	-1	1	2	0

Berechne mit dem Newtonverfahren zu diesen ein Interpolationspolynom.

(b) Als fünfter Stützpunkt komme $(x_4, y_4) = (\frac{3}{2}, 0)$ zu den vieren aus Aufgabenteil (a) hinzu. Berechne zu diesen fünf Stützpunkten ein Interpolationspolynom.

(c) Die Funktion f sei beliebig oft differenzierbar und über die Ableitungen sei bekannt, dass $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $x \in [0, 2]$ und alle $n \in \mathbf{N}$ gilt. Gib für die in Teil (a) und (b) berechneten Interpolationspolynome *jeweils* eine Fehlerabschätzung an.

Lösung:

(a) In Anbetracht von Aufgabenteil (b) wird das Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen berechnet:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
x_0 = 0 & y_0 = -1 & \searrow & & & & & & \\
 & & & 2 & \searrow & & & & \\
x_1 = 1 & y_1 = 1 & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & -\frac{1}{2} & \searrow & & \\
 & & & 1 & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & -\frac{1}{3} & . \\
x_2 = 2 & y_2 = 2 & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & -\frac{2}{3} & \nearrow & & \\
 & & & \frac{4}{3} & \nearrow & & & & \\
x_3 = \frac{1}{2} & y_3 = 0 & \nearrow & & & & & &
\end{array}$$

Daraus ergibt sich das Interpolationspolynom

$$p_3(x) = -1 + 2x - \tfrac{1}{2}x(x-1) - \tfrac{1}{3}x(x-1)(x-2).$$

(b) Um das Interpolationspolynom für die fünf Stützstellen zu berechnen, kann das Schema aus Aufgabenteil (a) erweitert werden:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
x_0 = 0 & y_0 = -1 & \searrow & & & & & & & & \\
 & & & 2 & \searrow & & & & & & \\
x_1 = 1 & y_1 = 1 & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & -\frac{1}{2} & \searrow & & & & \\
 & & & 1 & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & -\frac{1}{3} & \searrow & & \\
x_2 = 2 & y_2 = 2 & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & -\frac{2}{3} & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & \frac{14}{3} & . \\
 & & & \frac{4}{3} & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & \frac{20}{3} & \nearrow & & \\
x_3 = \frac{1}{2} & y_3 = 0 & {}^{\nearrow}_{\searrow} & & & \frac{8}{3} & \nearrow & & & & \\
 & & & 0 & \nearrow & & & & & & \\
x_4 = \frac{3}{2} & y_4 = 0 & \nearrow & & & & & & & &
\end{array}$$

Daraus ergibt sich das Interpolationspolynom

$$p_4(x) = -1 + 2x - \tfrac{1}{2}x(x-1) - \tfrac{1}{3}x(x-1)(x-2) + \tfrac{14}{3}x(x-1)(x-2)(x-\tfrac{1}{2}).$$

(c) Nach dem Skript gilt die folgende Fehlerabschätzung:

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x\in[0,2]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(2-0)^{n+1}.$$

Damit ergibt sich für p_3 die Abschätzung

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{\frac{1}{2^4}}{4!}2^4 = \frac{1}{24}$$

und für p_3

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{\frac{1}{2^5}}{5!}2^5 = \frac{1}{120}.$$

Aufgabe H11 (Kubische Splines)

Interpoliere die Funktion

$$f : [0,2] \to [-1,1] : x \mapsto \sin(\pi x)$$

durch kubische Splines. Verwende dabei die Zerlegung

$$\Delta = \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2\}$$

und natürliche Randbedingungen. **Lösung:** Es gilt

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y_i	0	1	0	-1	0

sowie $h_i = \frac{1}{2}$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für die Konstanten c_i und d_i

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1-0}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}(-12-0) = 3, \\
c_1 &= \frac{0-1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}(0-(-12)) = -3, \\
c_2 &= \frac{-1-0}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}(12-0) = -3, \\
c_3 &= \frac{0-(-1)}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}(0-12) = 3, \\
d_0 &= 0 - \frac{0}{24} = 0, \\
d_1 &= 1 - \frac{-12}{24} = \frac{3}{2}, \\
d_2 &= 0 - \frac{0}{24} = 0, \\
d_3 &= -1 - \frac{12}{24} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
s_0(x) &= -4x^3 + 3x && x \in [0, \tfrac{1}{2}] \\
s_1(x) &= -4\,(1-x)^3 - 3\left(x - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{3}{2} && x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \\
s_2(x) &= 4(x-1)^3 - 3(x-1) && x \in [1, \tfrac{3}{2}] \\
s_3(x) &= 4(2-x)^3 + 3\left(x - \tfrac{3}{2}\right) - \tfrac{3}{2} && x \in [\tfrac{3}{2}, 2]
\end{aligned}$$

Die Funktion f und der Spline s sind in Abbildung 4 dargestellt.

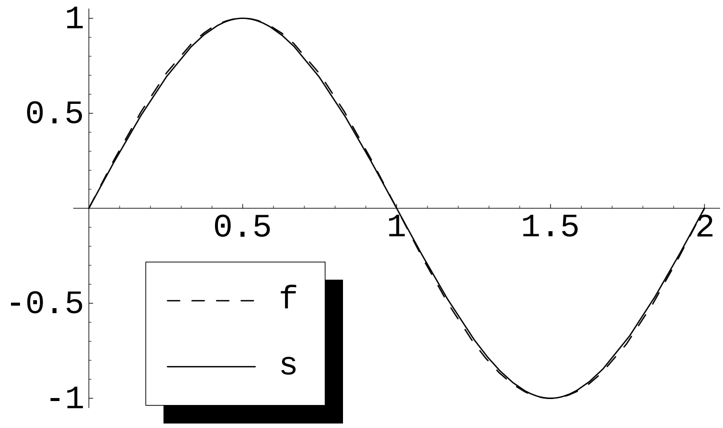

Abbildung 4: Die Funktion f und der Spline s.

Aufgabe H12 (Quadratische Splines)

Ein quadratischer Spline $s \in S_{\Delta,2}$ ist nach Definition einmal stetig differenzierbar und aus quadratischen Polynomen zusammengesetzt. Dann ist $s'(x)$ offensichtlich stetig und stückweise linear. Es bietet sich also an, s_i durch Integration von s_i' zu bestimmen. Seien $Q_i = s'(x_i)$, für $i = 0, \ldots, n$. Dann gilt nach (4.7) der Vorlesung

$$s_i'(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} Q_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} Q_{i+1}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Durch einfache Intergration ergibt sich folgender Ansatz:

$$s_i(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)} Q_{i+1} - \frac{(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)} Q_i\right] + c_i.$$

Wir wollen nun analog zum kubischen Fall (siehe Vorlesung) Bestimmungsgleichungen für die Q_i herleiten:

(a) Bestimme mit Hilfe der Bedingung $s_i(x_i) = y_i$ die Integrationskonstante c_i dieses Ansatzes.

(b) Nutze nun die Bedingung $s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$, um mit Hilfe von (a) n Bestimmungsgleichungen für die Q_i aufzustellen.

(c) Nimmt man nun zu den Gleichungen aus Teil (b) die Bedingung $s'(x_0) = f'(x_0)$ hinzu, so erhält man zur Bestimmung der $Q_0, \dots, Q_n$ ein Gleichungssystem

$$Hq = b,$$

mit $q = (Q_0, \dots, Q_n)^T$. Gib die Matrix H und die rechte Seite b dieses Systems an. Sind die Q_i durch dieses System eindeutig festgelegt?

(d) Stelle nun das System zur Bestimmung der $Q_0, \dots, Q_n$ für die Zusatzbedingung $s'(x_0) = s'(x_n)$ statt $s'(x_0) = f'(x_0)$ auf. Untersuche auch hier, ob die Q_i immer eindeutig festgelegt sind.

(e) Berechne für die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ den quadratischen Spline-Interpolanten mit der Zusatzbedingung aus Teil (c). Verwende die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$. Skizziere die Funktion f und ihren Spline-Interpolanten.

Lösung:

(a)

$$s_i(x_i) = y_i$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(x_i - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)}Q_{i+1} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)}Q_i\right] + c_i = y_i$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\left[-(x_{i+1} - x_i)Q_i\right] + c_i = y_i$$

$\Rightarrow$

$$c_i = y_i + \frac{1}{2}\left[(x_{i+1} - x_i)Q_i\right].$$

(b) Wir nutzen nun, dass die Stetigkeitsbedingung $s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$ gelten muss: Es ist n.V. $s_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} s_i(x_{i+1}) &= \frac{1}{2}\left[\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)}Q_{i+1} - \frac{(x_{i+1} - x_{i+1})^2}{(x_{i+1} - x_i)}Q_i\right] + c_i \\ &= \frac{1}{2}\left[(x_{i+1} - x_i)Q_{i+1}\right] + y_i + \frac{1}{2}\left[(x_{i+1} - x_i)Q_i\right] \\ &= \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left[Q_{i+1} + Q_i\right] + y_i \end{aligned}$$

Damit ist $s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$ erfüllt, wenn gilt:

$$\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left[Q_{i+1} + Q_i\right] + y_i = y_{i+1}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left[Q_{i+1} + Q_i\right] = y_{i+1} - y_i.$$

Da dies für $i = 0, \dots n-1$ gelten muss ergibt dies n Gleichungen.

(c) Mit der zusätzlichen Bedingung erhält man mit der Notation der Vorlesung $h_i = x_{i+1} - x_i$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_0}{2} & \frac{h_0}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{2} & \frac{h_1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{2} & \frac{h_{n-1}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ y_1 - y_0 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_0}{2} & \frac{h_0}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{2} & \frac{h_1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{2} & \frac{h_{n-1}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ y_1 - y_0 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $h_i \neq 0$, da für die Zerlegung $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ gilt. Damit ist die Matrix nichtsingulär, da alle Diagonalelemente ungleich Null sind und die Determinante damit ebenfalls nicht verschwindet. Das System ist eindeutig lösbar und die Q_i eindeutig festgelegt.

(d) Nimmt man alternativ die Bedingung $s'(x_0) = s'(x_n)$, so erhält man das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{h_0}{2} & \frac{h_0}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{2} & \frac{h_1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{2} & \frac{h_{n-1}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 - y_0 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Berechnet man hier die Determinante der Matrix nach der Zeilenentwicklungsformel, so erhält man

$$\det = 1(-1)^2 \cdot \det \left[\begin{pmatrix} \frac{h_0}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_1}{2} & \frac{h_1}{2} & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{2} & \frac{h_{n-1}}{2} \end{pmatrix} \right] + (-1)(-1)^{(n+2)} \cdot \det \left[\cdot \begin{pmatrix} \frac{h_0}{2} & \frac{h_0}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{h_1}{2} & \frac{h_1}{2} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{2} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{2} + (-1)^{(n+3)} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{2}.$$

Damit ist die Matrix singulär, wenn n gerade ist. In diesem Fall sind die Q_i nicht eindeutig bestimmt.

(e) Die Formel des Spline-Interpolanten lautet mit der Konstante aus (a):

$$s_i(x) = s_i(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x-x_i)^2}{(x_{i+1}-x_i)}Q_{i+1} - \frac{(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)}Q_i\right] + y_i + \frac{1}{2}\left[(x_{i+1}-x_i)Q_i\right].$$

Mit der vorgegebenen Zerlegung gilt

$$n = 2, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, h_0 = h_1 = h_2 = 1.$$

Ausserdem ist

$$y_0 = \sin(-\pi) = 0, y_1 = \sin(0) = 0, y_2 = \sin(\pi) = 0$$

und

$$f'(x_0) = \cos(\pi x_0)\pi = \cos(-\pi)\pi = -\pi.$$

Damit lautet das Gleichungssystem für die Q_i:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_0 = -\pi, Q_1 = \pi, Q_2 = -\pi.$$

Damit ist der Splineinterpolant auf dem Intervall $[-1, 0]$

$$s_0(x) = \frac{1}{2}\left[(x+1)^2\pi - (-x)^2(-\pi)\right] + \frac{1}{2}(-\pi) = \frac{1}{2}\pi\left[(x+1)^2 + x^2 - 1\right]$$

und auf dem Intervall $[0, 1]$

$$s_1(x) = \frac{1}{2}\left[x^2(-\pi) - (1-x)^2\pi\right] + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi\left[-x^2 - (1-x)^2 + 1\right].$$

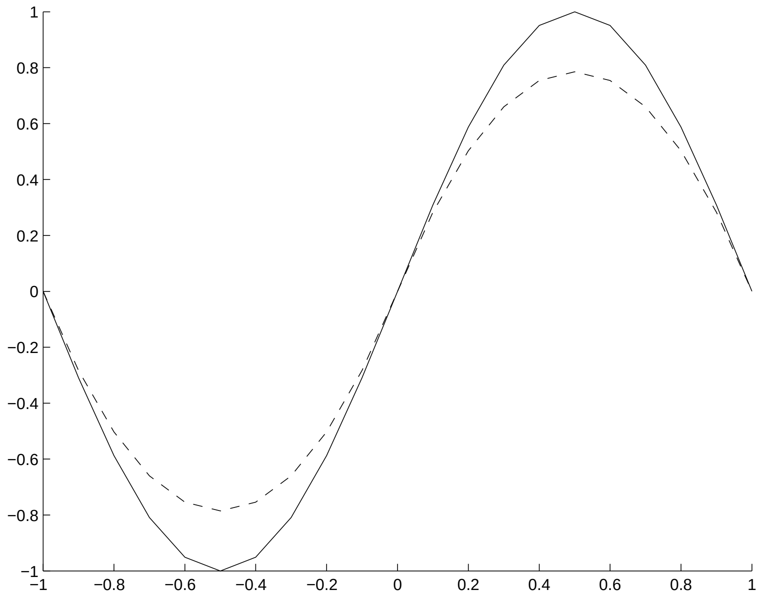

Abbildung 5: Die Funktion f und der Spline s.