Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.03.2010

Modulprüfung
„Mathematik IV für Elektrotechnik / Mathematik III für Informatik / Numerik und Stochastik für M. Edu “

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punktzahl	5	8	8	5	4	30
erreichte Punktzahl						

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze, Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 90 Minuten.
Als Hilfsmittel sind vier eigenhandschriftliche DIN-A4 Seiten und einfache Taschenrechner zugelassen. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Informationen zum Aushang werden auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

1. Aufgabe (Testverfahren) (5 Punkte)

Es soll eine neue Produktionsmaschine für Kondensatoren angeschafft werden. Die bisherige Maschine stellt Kondensatoren mit einer mittleren Kapazität von 32.5 nF her. Um die Qualität der neuen Maschine zu prüfen werden bei einer Stichprobe von 5 Kondensatoren folgende Kapazitäten gemessen: [Einheit: nF]

31.5 33.5 32.5 33 34.5

Die Kapazität der Kondensatoren wird als unabhängig normalverteilt mit unbekannter Standardabweichung angenommen. *Bemerkung:* Eine Tabelle mit den benötigten Quantilen befindet sich im Anhang.

(a) Überprüfen Sie zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 32.5$.

(b) Überprüfen Sie zum Niveau $\alpha = 0.2$ dieselbe Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 32.5$.

(c) Entscheiden Sie anhand von Teil a) und b) für die folgenden Aussagen, ob Sie richtig oder falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründen Sie ihr Antworten.

1) Mit einer Sicherheit von 95 % besitzen die Kondensatoren der neuen Maschine eine mittlere Kapazität von mehr als 32.5 nF.

2) Mit einer Sicherheit von 80 % besitzen die Kondensatoren der neuen Maschine eine mittlere Kapazität von mehr als 32.5 nF.

3) Mit einer Sicherheit von 80 % besitzen die Kondensatoren der neuen Maschine eine mittlere Kapazität von höchstens 32.5 nF.

4) Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 in Aufgabe a) nicht abgelehnt wurde, obwohl es nicht zutrifft liegt bei 5%.

5) Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 in Aufgabe b) abgelehnt wurde, obwohl es zutrifft liegt bei 20%.

2. Aufgabe (Verteilung) (8 Punkte)

Eine Firma stellt Flash-Speicherkarten her, deren Breite durch eine normalverteilte Zufallsvariable X angemessen beschrieben werde. Dabei seien verschiedene Messungen unabhängig und identisch verteilt. Aus Erfahrung kennt man die Varianz von X, $\mathrm{Var}(X) = 0.0025$.

(a) Es sei bekannt, dass der Erwartungswert der Breite 30 mm beträgt.

(a1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Speicherkarte zwischen 29.9 und 30.1 mm breit ist?

(a2) Die Firma entnimmt der Produktion $n = 5$ Speicherkarten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Durchschnittsbreite dieser Stichprobe zwischen 29.9 und 30.1 mm liegt?

(b) Der Erwartungswert für die Breite der Speicherkarten sei nun unbekannt. Es soll die Mindestanzahl von durchzuführenden Messungen ermittelt werden, so dass die Differenz zwischen Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 kleiner als 0.01 mm ist.

(b1) Bestimmen Sie eine obere Schranke für diese Anzahl durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung. Geben Sie dabei die Verteilung des arithmetischen Mittels der Messungen an.

(b2) Bestimmen Sie die gesuchte Anzahl exakt.

3. Aufgabe (Anfangswertprobleme) (8 Punkte)

Gegeben sei das folgende Butcher-Tableau

$$\text{(BT)} \qquad \begin{array}{c|c} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}.$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zu (BT) gehörigen Runge-Kutta Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, um von t_j, u_j ausgehend u_{j+1} auszurechnen?

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y'(t) \ = \ t^2\, y(t) \quad , \qquad y(0) = 1,$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^3}{3}}$.
Berechnen Sie jeweils mit dem expliziten Euler-Verfahren und mit dem durch (BT) beschriebenen Runge-Kutta Verfahren für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ Näherungen an $y(1)$ für $(*)$. Runden Sie dabei die Ergebnisse auf fünf Stellen nach dem Komma.

c) Wie genau sind Ihre Approximationen?

d) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion für das durch (BT) beschriebene Runge-Kutta Verfahren und prüfen Sie, ob das Verfahren L-stabil ist.

e) Gegeben sei das Anfangswertproblem $(\#)\; y'(t) = (-3+3i)y(t), y(0) = 100$. Beurteilen Sie anhand Ihrer Ergebnisse aus d), ob für feste Schrittweite $h > 0$ die mit dem durch (BT) beschriebenen Runge-Kutta Verfahren berechneten numerischen Approximationen u_j, $j \in \mathbb{N}$, zum Anfangswertproblem $(\#)$ mit fortlaufender Zeit t abklingen, ob also die Folge (u_j) gegen Null konvergiert.

4. Aufgabe (Quadratur) (5 Punkte)

Die Verteilungsfunktion der χ_n^2-Verteilung kann nicht geschlossen angegeben werden. Für $n = 9$ soll ihre Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{105\sqrt{2\pi}} x^{7/2} e^{-x/2}\,, & x \geq 0 \\ 0\,, & x < 0 \end{cases}$$

hier numerisch integriert werden.
Runden Sie dabei auf fünf Stellen nach dem Komma.
Hinweis: Für die gegebenenfalls benötigten Ableitungen von f gilt für alle $x \in [0, 2.7]$:

$$0 \leq f'(x) \leq 0.026, \quad 0 \leq f''(x) \leq 0.014, \quad -0.02 \leq f'''(x) \leq 0.017\,.$$

a) Berechnen Sie mit der summierten Trapezregel eine Annäherung an das Integral $\int_0^{2.7} f(t)\,\mathrm{d}t$, indem Sie das Intervall in zwei gleich große Teilintervalle zerlegen.

b) Berechnen Sie den Fehler Ihrer Approximation mit Hilfe geeigneter Werte aus den Tabellen im Anhang und beurteilen Sie die Qualität Ihrer Lösung.

c) Berechnen Sie für die summierte Trapezregel eine möglichst minimale Anzahl m von Teilintervallen, so dass der Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(f) = \int_0^{2.7} f(t)\,\mathrm{d}t$ höchstens 10^{-5} beträgt.

5. Aufgabe (Multiple Choice) (4 Punkte)

Bei dieser Multiple Choice Aufgabe gibt es für jedes richtige Kreuz einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz gibt es Null Punkte in der entsprechenden Teilaufgabe. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

(a) $X_1, \dots X_n$ seien unabhängig und identisch $N(0,\theta)$-verteilt, mit $\theta > 0$. Für $T_n(X_1, \dots X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ gilt dann:

- ☐ T_n ist ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$.
- ☐ $\frac{1}{n} T_n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$.
- ☐ $\frac{1}{n-1} T_n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$.

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und F habe mindestens eine reelle Nullstelle.

- ☐ Dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.
- ☐ Wenn F' auf $\mathbb{R}$ nichtsingulär ist, dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.
- ☐ Wenn F' in den Nullstellen von F nichtsingulär ist, dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.

(c) Zum Cholesky-Verfahren:

- ☐ Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (symmetrisch) positiv definit. Dann gibt es eine eindeutige Cholesky-Zerlegung.
- ☐ Im allgemeinen erfordert das Cholesky-Verfahren mehr Rechenaufwand als die LR-Zerlegung.
- ☐ Das Cholesky-Verfahren kann bei symmetrischen Matrizen als Test auf positive Definitheit verwendet werden.