Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
27. Juni 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den gesamten Inhalt von Kapitel 6, sowie 7.1 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stabilitätsbereich)

Es soll gezeigt werden, daß das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4) nicht L-stabil ist. Zeige dazu, dass

(a) das Polynom

$$R(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3 + \frac{1}{24}q^4$$

die Stabilitätsfunktion des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung ist und

(b) die Beziehung

$$|R(q)| < 1 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{C} \text{ mit } \Re(q) < 0$$

nicht gilt.

Lösung:

(a) Zum Bestimmen der Stabilitätsfunktion wendet man das Verfahren auf das Modellproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1 \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \Re(\lambda) < 0$$

an. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_j, u_j) = \lambda u_j, \\
k_2 &= f\left(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_1\right) = \lambda\left(u_j + \tfrac{h}{2}k_1\right) = \left(\lambda + \tfrac{h\lambda^2}{2}\right)u_j, \\
k_3 &= f\left(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_2\right) = \lambda\left(u_j + \tfrac{h}{2}k_2\right) = \left(\lambda + \tfrac{h\lambda^2}{2} + \tfrac{h^2\lambda^3}{4}\right)u_j, \\
k_4 &= f\left(t_{j+1}, u_j + hk_3\right) = \lambda\left(u_j + hk_3\right) = \left(\lambda + h\lambda^2 + \tfrac{h^2\lambda^3}{2} + \tfrac{h^3\lambda^4}{4}\right)u_j.
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}
u_{j+1} &= u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= \left(1 + \frac{h\lambda}{6} + \frac{2h\lambda}{6} + \frac{h^2\lambda^2}{6} + \frac{2h\lambda}{6} + \frac{h^2\lambda^2}{6} + \frac{h^3\lambda^3}{12} + \frac{h\lambda}{6} + \frac{h^2\lambda^2}{6} + \frac{h^3\lambda^3}{12} + \frac{h^4\lambda^4}{24}\right)u_j \\
&= \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{6} + \frac{h^4\lambda^4}{24}\right)u_j,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

(b) Für $q = -10$ gilt

$$|R(q)| = \left|1 - 10 + \frac{100}{2} - \frac{1000}{6} + \frac{10000}{24}\right| = 291 > 1.$$

Daher ist das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung nicht L-stabil.

Aufgabe G2 (Ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren)

Wir betrachten das implizite Runge-Kutta-Verfahren, das durch das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegeben ist. Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des obigen Verfahrens und zeigen Sie, daß das Verfahren A-stabil ist.

Lösung:

Nach dem gegeben Butcher-Schema gilt für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j + \tfrac{h}{4}, u_j + \tfrac{h}{4}k_1\right), \\ k_2 &= f\left(t_j + \tfrac{3h}{4}, u_j + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{4}k_2\right) \end{aligned}$$

und für die Iterationsvorschrift

$$u_{j+1} = u_j + h\left(\tfrac{k_1}{2} + \tfrac{k_2}{2}\right).$$

Bei Anwendung auf das Modellproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1 \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \Re(\lambda) < 0$$

ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda\left(u_j + \tfrac{h}{4}k_1\right), \\ k_2 &= \lambda\left(u_j + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{4}k_2\right). \end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda u_j}{1 - \frac{\lambda h}{4}}, \\ k_2 &= \frac{\lambda(u_j + \frac{h}{2}k_1)}{1 - \frac{\lambda h}{4}} = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2(1-\frac{\lambda h}{4})}}{1 - \frac{\lambda h}{4}}\lambda u_j = \frac{2(1 - \frac{\lambda h}{4}) + h\lambda}{2(1 - \frac{\lambda h}{4})^2}\lambda u_j = \frac{1 + \frac{\lambda h}{4}}{(1 - \frac{\lambda h}{4})^2}\lambda u_j \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= u_j + \frac{h}{2} \cdot \frac{\lambda u_j}{1 - \frac{\lambda h}{4}} + \frac{h}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda h}{4}}{(1 - \frac{\lambda h}{4})^2}\lambda u_j = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda h}{4}} + \frac{1 + \frac{\lambda h}{4}}{(1 - \frac{\lambda h}{4})^2}\right)\right) u_j \\ &= \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\left(\frac{1 - \frac{\lambda h}{4} + 1 + \frac{\lambda h}{4}}{(1 - \frac{\lambda h}{4})^2}\right)\right) u_j \\ &= \left(1 + \frac{\lambda h}{(1 - \frac{\lambda h}{4})^2}\right) u_j = \frac{(1 - \frac{\lambda h}{4})^2 + \lambda h}{(1 - \frac{\lambda h}{4})^2} u_j = \frac{(1 + \frac{\lambda h}{4})^2}{(1 - \frac{\lambda h}{4})^2} u_j \\ &= \frac{(4 + \lambda h)^2}{(4 - \lambda h)^2} u_j \end{aligned}$$

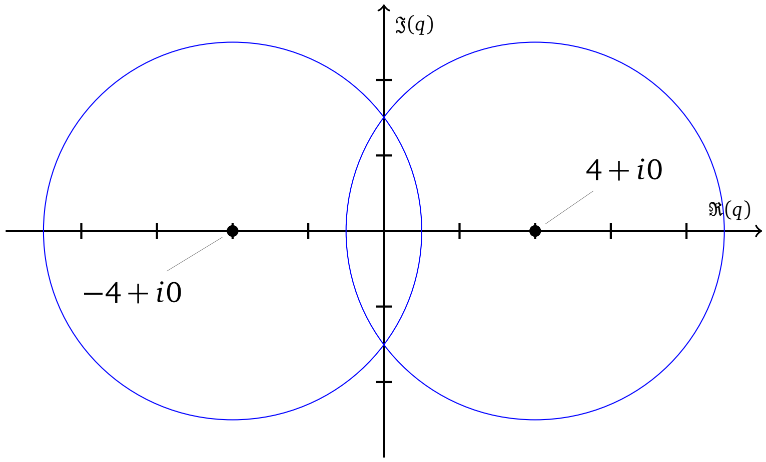
Folglich ist

$$R(q) = \frac{(4+q)^2}{(4-q)^2}$$

die Stabilitätsfunktion des Verfahrens. Das Stabilitätsgebiet des Verfahrens ist damit

$$\begin{aligned} S &= \{q \in \mathbb{C} \mid |R(q)| < 1\} = \left\{ q \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{(4+q)^2}{(4-q)^2} \right| < 1 \right\} \\ &= \left\{ q \in \mathbb{C} \mid \left|(4+q)^2\right| < \left|(4-q)^2\right| \right\} = \{q \in \mathbb{C} \mid |4+q| < |4-q|\} \\ &\supseteq \{q \in \mathbb{C} \mid \Re(q) < 0\}. \end{aligned}$$

Wir überlegen uns, warum die letzte Inklusion (es ist sogar eine Gleichheit) gilt (ohne ausreichende Begründung würde es hier in der Klausur keine Punkte geben!):
Sei $q = a + ib$ ein beliebiger Punkt in der negativen Halbebene ($\Re(q) < 0$) mit $|q+4| =: r$. Wir zeichnen nun jeweils einen Kreis mit Radius r um die Punkte $(4,0)$ und $(-4,0)$ in der komplexen Ebene:



Wie wir sehen, liegt jeder so gewählte Punkt q (in der negativen Halbebene und auf der Kreislinie um $-4+i0$) außerhalb des Kreises mit gleichem Radius um den Punkt $4+i0$. In anderen Worten

$$|4+q| < |4-q| \quad \text{für alle} \quad q \in \mathbb{C} \text{ mit } \Re(q) < 0.$$

Dies ist genau die letzte Inklusion. Folglich ist das Verfahren A-stabil.

Die obige Art der Argumentation funktioniert an dieser Stelle sehr gut und ist sehr anschaulich. Allerdings muss man sauber argumentieren. Wir zeigen daher einen zweiten Weg um die A-Stabilität nachzuweisen. Dieser ist weniger anfällig für Unsauberkeiten in der Argumentation und wird daher für die Klausur empfohlen:

Wir schreiben $q = a + ib$ und argumentieren:

$$\begin{array}{rrcl} & |4+q| & < & |4-q| \\ \Longleftrightarrow & |4+q|^2 & < & |4-q|^2 \\ \Longleftrightarrow & (4+a)^2 + b^2 & < & (4-a)^2 + b^2 \\ \Longleftrightarrow & 16 + 8a + a^2 + b^2 & < & 16 - 8a + a^2 + b^2 \\ \Longleftrightarrow & 16a & < & 0 \\ \Longleftrightarrow & \Re(q) = a & < & 0 \end{array}$$

Dies zeigt

$$\{q \in \mathbb{C} \mid |4+q| < |4-q|\} = \{q \in \mathbb{C} \mid \Re(q) < 0\}$$

und somit die A-Stabilität des Verfahrens.

Aufgabe G3 (Gershgorin-Kreise)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4+5i & 2 & -i & 3+4i \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die zur Matrix A gehörigen Gershgorin-Kreise in der komplexen Zahlenebene.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und zeichnen Sie diese in die Skizze ein.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 4 - 5i| \leq 8\}, \\ K_2 &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \leq 4\}, \\ K_3 &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \leq 2\}, \\ K_4 &= \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 12| \leq 0\} = \{12\}. \end{aligned}$$

Skizze siehe Abbildung 1.

(b) Die Eigenwerte $\lambda_1 = 4 + 5i$ und $\lambda_2 = 12$ lassen sich sofort ablesen. Für die mittlere Blockmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ und daraus die Eigenwerte $\lambda_3 = i$ und $\lambda_4 = -i$. Skizze siehe Abbildung 1.

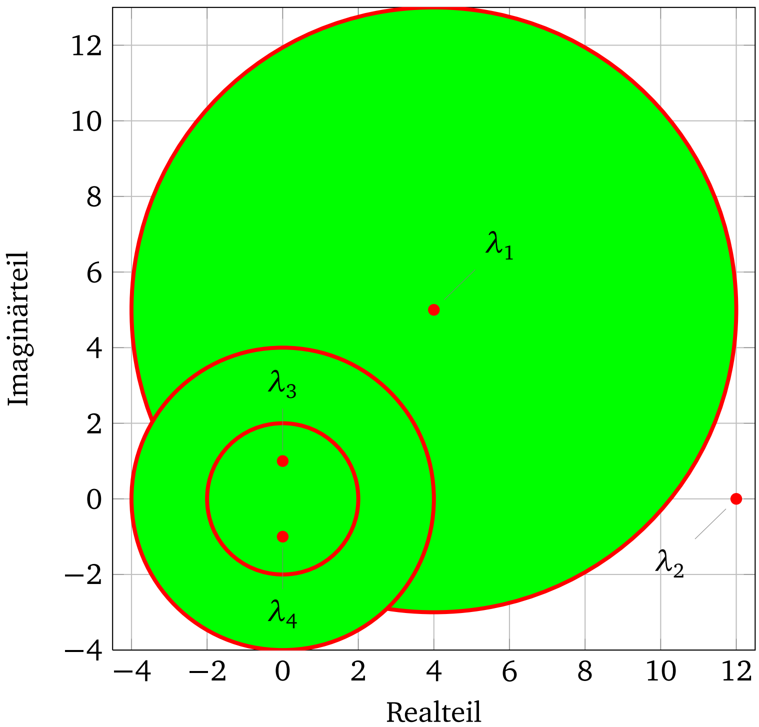


Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe G3

Hausübung

In der nächsten Woche wird es statt einer Gruppenübung eine Probeklausur geben. Diese wird bis zur darauffolgenden Woche durch ihre Tutoren korrigiert. Wir raten Ihnen, dieses Angebot anzunehmen. Damit Sie Zeit haben sich auf die Probeklausur vorzubereiten, gibt es in dieser Woche keine Hausübungen.