Semestralklausur zur Mathematik IV für ET

– Lösungsvorschläge –

Aufgabe 1.

a) Da A eine Tridiagonalmatrix ist, müssen wir

$$c = e = 0$$

wählen. Nach Satz 22.6 auf S.235 in [2] konvergiert das SOR-Verfahren für alle $\omega \in (0, 2)$, falls A symmetrisch und positiv definit ist. Aus der Symmetrieforderung folgen unmittelbar

$$b = 0 \quad \text{und} \quad d = -1.$$

Somit bleibt noch die positive Definitheit von A zu überprüfen, welche nach Satz 13.11 auf S.152 in [1] genau dann gegeben ist, wenn die führenden Hauptunterdeterminanten positiv sind:

$$\begin{aligned} \det(a) &= a \overset{!}{>} 0, \\ \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} &= 3a \overset{!}{>} 0, \\ \det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} &= 5a \overset{!}{>} 0. \end{aligned}$$

Somit ist A positiv definit, falls

$$a > 0.$$

b) Nach Satz 22.6 auf S.235 in [2] ist

$$\omega_L = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \widehat{\mu}^2}},$$

wobei

$$\widehat{\mu} = \rho(H).$$

Die Matrix

$$\begin{aligned} H &= I - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$P_H(\lambda) = (-1)^3 \cdot \det(H - \lambda I) = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \frac{1}{6}\lambda$$

und damit die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{1}{6}} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

Somit ist

$$\widehat{\mu} = \rho(H) = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

und wir erhalten

$$\omega_L = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \widehat{\mu}^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{6}}} \approx 1.0455.$$

c) Die Iterationsvorschrift des SOR-Verfahrens lautet

$$(D - \omega L) \cdot x^{(\nu)} = \left[(1 - \omega)D + \omega U\right] \cdot x^{(\nu-1)} + \omega b.$$

Somit ist

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot x^{(1)} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Durch die Anwendung des Gauß-Algorithmus ergibt sich dann die Lösung

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

a) Für die gegebene Differenzialgleichung $y' = f(x, y) = -2y(x)$ ergibt mit dem impliziten Euler-Verfahren (Algorithmus 27.2.):

$$u_{j+1} = u_j - 2hu_{j+1} \Rightarrow u_{j+1} = \frac{1}{1 + 2h}u_j$$

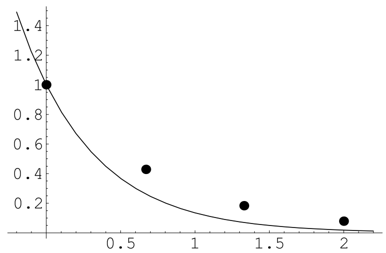
und somit die explizite Formel $u_j = \frac{1}{(1+2h)^j}$. Analog erhalten wir für das explizite Euler-Verfahren

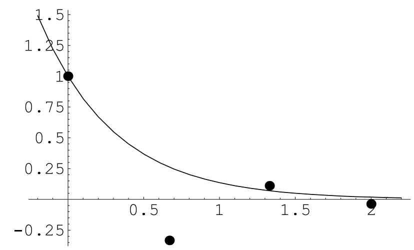
$$u_{j+1} = u_j - 2hu_j \Rightarrow u_{j+1} = (1 - 2h)u_j$$

Aus dieser Formel berechnen wir die Näherungswerte für die Schrittweite $h = \frac{b-a}{N} = \frac{2}{3}$ zu

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
impl.	$u_0 = 1$	$u_1 = \frac{3}{7}$	$u_2 = \frac{9}{49}$	$u_3 = \frac{27}{343}$
expl.	$u_0 = 1$	$u_1 = -\frac{1}{3}$	$u_2 = \frac{1}{9}$	$u_3 = -\frac{1}{27}$

b) Die Exakte Lösung lautet $y(x) = e^{-2x}$. In die linke Grafik wurden die näherungswerte für das implizite Verfahren mit eingetragen und in die rechte Grafik die Näherungswerte des expliziten Verfahrens.





c) Man sieht, dass die exakte Lösung nur positive Werte annimmt und somit das explizite Euler-Verfahren qualitativ unbrauchbare (da z.T. negative) Werte liefert.

Aufgabe 3.

a) Die Gerade g soll durch den Ursprung gehen. Es gilt also:

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

Der Koeffizient a soll nun so bestimmt werden, daß die Summe der Fehlerquadrate minimal wird:

$$r(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i)^2 \to min.$$

Zur Minimierung differenzieren wir bezüglich a und setzen die Ableitung gleich Null:

$$\frac{dr}{da} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i - y_i) \cdot x_i = 0,$$

Damit erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 - x_i \cdot y_i\right) = 0 \Leftrightarrow a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Und als Lösung ergibt sich schließlich:

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

b) Nach a) erhalten wir:

$$R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} I_i \cdot U_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} I_i^2} = \frac{0.1 \cdot 15 + 0.15 \cdot 24 + 0.16 \cdot 30 + 0.2 \cdot 31}{0.1^2 + 0.15^2 + 0.16^2 + 0.2^2} = \frac{16.1}{0.0981} \approx 164.1182.$$

Aufgabe 4.

a) Die Zufallsvariable X verfügt über die *Dichte*

$$f_a(x) = \begin{cases} a \cdot x^{-a-1} & \text{, falls } x > 1 \\ 0 & \text{, falls } x \leq 1 \end{cases}$$

und wir erhalten somit den *Erwartungswert*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_a(x)\,dx = \int\limits_{1}^{\infty} x \cdot f_a(x)\,dx = \int\limits_{1}^{\infty} a \cdot x^{-a}\,dx \\ &= a \cdot \int\limits_{1}^{\infty} x^{-a}\,dx = a \cdot \lim_{s\to\infty} \int\limits_{1}^{s} x^{-a}\,dx \\ &= \frac{a}{-a+1} \cdot \lim_{s\to\infty} \left[x^{-a+1}\right]_1^s \\ &= \frac{a}{-a+1} \cdot \lim_{s\to\infty} \left[s^{-a+1} - 1^{-a+1}\right] = \frac{a}{a-1}, \end{aligned}$$

wobei – um eine Division durch Null zu vermeiden und um die Konvergenz des uneigentlichen Integrals zu gewährleisten – der Parameter a nach Beispiel (7) auf S.260 in [1] der Bedingung

$$a > 1$$

genügen muss.

b) Für eine Messreihe $x_1, \ldots, x_n$ mit Messwerten gröer als 1 erhalten wir die *Likelihood-Funktion*

$$L(a; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_a(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(a \cdot x_i^{-a-1}\right) = a^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-a-1}$$

sowie die *Log-Likelihood-Funktion*

$$\begin{aligned}
\ln L(a; x_1, \ldots, x_n) &= \ln\left(a^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-a-1}\right) \\
&= \ln a^n + ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-a-1}\right) \\
&= n \cdot \ln a + (-a-1) \cdot \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= n \cdot \ln a - (a+1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i,
\end{aligned}$$

welche die gleichen Extremalstellen wie die Likelihood-Funktion besitzt. Zur Bestimmung einer kritischen Stelle berechnen wir

$$\frac{d}{da} \ln L(a; x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \overset{!}{=} 0$$

und erhalten

$$a = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i},$$

wobei an dieser Stelle wegen

$$\frac{d^2}{da^2} \ln L(a; x_1, \ldots, x_n) = -\frac{n}{a^2} < 0$$

ein Maximum vorliegt. Der *Maximum-Likelihood-Schätzwert* lautet somit

$$\widehat{a} = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}.$$

[1] v. Finckenstein/Lehn/Schellhaas/Wegmann: Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure. Band I. 2. Auflage. Stuttgart 2002.

[2] v. Finckenstein/Lehn/Schellhaas/Wegmann: Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure. Band II. Stuttgart 2002.