Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
16. Mai 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt der Kapitel 2 und 3 im Skript.
Die Donnerstag-Übungen wurden wegen des Feiertages verlegt. Bitte beachten Sie die Informationen auf der Webseite.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur)
Wir betrachten das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx$$

mit dem Wert $\ln(2)$.

(a) Simpsonregel
Berechnen Sie eine Näherung für $\ln(2)$ durch eine näherungsweise Berechnung des gegebenen Integrals mit Hilfe der Simpson-Regel und schätzen Sie den Fehler ab.

(b) $\frac{3}{8}$-Regel
Lässt sich Ihre Näherung für $\ln(2)$ verbessern, wenn Sie die $\frac{3}{8}$-Regel verwenden? Vergleichen Sie dazu sowohl die Fehlerabschätzungen, als auch die tatsächlichen Fehler.

Aufgabe G2 (Summierte Trapezregel)
Bestimmen Sie Näherungen für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Verwenden Sie dazu die summierte Trapezregel mit 2 bzw. 4 Teilintervallen

Aufgabe G3 (Quadraturfehler)
Geben Sie für die summierte Trapezregel und die summierte Simpson-Regel jeweils eine möglichst große Schrittweite h und eine minimale Anzahl m von Teilintervallen an, sodass der Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ höchstens 10^{-4} beträgt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Rechteckregel)

Eine andere Klasse von Quadraturformeln ergibt sich, wenn man die Knoten frei variieren lässt. Bei einem einzigen Knoten ergibt sich die Formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\omega_0 f(x_0).$$

a) Bestimmen Sie die Werte für ω_0 und x_0 so, dass die Quadraturformel beliebige Polynome bis zum Grad 1 exakt integriert. Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $a = 0,\ b = 1$ und bestimmen Sie anschließend die Formel für den Allgemeinfall.

b) Zeigen Sie, dass ein Polynom vom Grad 2 existiert welches die in a) erhaltene Rechteckregel nicht exakt integriert.

Aufgabe H2 (Exaktheit der Quadratur)

Prüfen Sie, ob die folgenden Formeln zur Berechnung des Integrals $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ exakt vom Grad 2 sind, also $I(f) = J(f)$ für alle Polynome vom Grad kleinergleich 2.

$$J(f) = \tfrac{b-a}{10}(f(a) + 4f(a + \tfrac{b-a}{3}) + 4f(b - \tfrac{b-a}{3}) + f(b)) \tag{1}$$

$$J(f) = \tfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{2}$$

Die zweite Formel entspricht der Simpsonregel. Zeigen Sie zudem, dass die Simpsonregel Polynome bis zum Grad 3 exakt integriert, jedoch nicht alle Polynome vom Grad 4.
Hinweis: Wieso ist der Nachweis für die Basiselemente x^k des Polynomraums ausreichend?
Es genügt das Integrationsintervall $[-1, 1]$ zu betrachten.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Newtoninterpolation)

(a) Implementieren Sie ein Programm, das zu $n + 1$ Stützstellen (x_i, y_i) $(i = 0,\dots n)$ den Wert des zugehörigen Newtoninterpolationspolynoms an einer Stelle x zurückgibt. Schreiben Sie dazu eine Routine, die mit Hilfe der dividierten Differenzen die Werte $\gamma_0,\dots\gamma_n$ berechnet und eine weitere Routine, die das Interpolationspolylom $p_n(x)$ an der Stelle x auswertet.
Testen Sie Ihr Programm für die Funktion $f(x) = \cos(\pi x)$ und die Stützstellen $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

(b) Implementieren Sie nun eine Erweiterung Ihres Programms, das für eine Funktion $f(x)$ den Wert $p_n(x)$ des zugehörigen Newtoninterpolationspolynoms auf einem Intervall $[a, b]$ mit $n + 1$ äquidistanten Stützstellen berechnet. Testen Sie Ihr Programm wieder an obigem Beispiel und für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für jeweils 6 bzw. 11 Stützstellen auf dem Intervall $[-5, 5]$. Vergleichen Sie anschließend das Interpolationspolynom mit der Funktion f.

Hinweis zu den Programmieraufgaben:
Wir empfehlen die Bearbeitung der gestellten Programmieraufgaben in **Matlab**. Die Lösungshinweise werden ebenfalls in Matlab erstellt. Falls Sie keinen Zugang zu Matlab haben, können Sie stattdessen auch die frei verfügbare Software **Octave** verwenden. Links und Informationen zu Matlab und Octave finden Sie auf unserer Webseite.