

Mathematik IV f. Elektrotechnik

Mathematik III f. Informatik

4. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
9. Mai 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 2 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lagrangesches Interpolationspolynom)

Es seien folgende Daten gegeben:

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
y_k	-6	0	2	6

(1)

- (a) Bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom vom Grad ≤ 3 , das die Interpolationsbedingungen für (1) erfüllt.
- (b) Zeichnen Sie das Interpolationspolynom und die Interpolationspunkte.

Aufgabe G2 (Interpolation)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 8x^4 - 18x^3 + 10x^2 + 0,5x.$$

Lesen Sie sich zuerst beide Aufgabenteile durch und entscheiden Sie sich dann für eine der Ihnen bekannten Interpolationsformeln. Begründen Sie Ihre Wahl.

- (a) Berechnen Sie zu f und den Stützstellen $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ das Interpolationspolynom vom Grad ≤ 2 auf dem Intervall $[0, 1]$.
- (b) Berechnen Sie zu f und den Stützstellen $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ das Interpolationspolynom vom Grad ≤ 3 auf dem Intervall $[0, 1]$.

Aufgabe G3 (Kubische Splines)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow [1, 2] : \quad x \mapsto 2^{\cos(\frac{\pi}{2}x)}.$$

Interpolieren Sie die Funktion f durch einen kubischen Spline. Verwenden Sie dabei die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$ und natürliche Randbedingungen.

Aufgabe G4 (Fehlerabschätzung)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, 2] \rightarrow [-1, 1] \quad x \mapsto \sin(\pi x)$$

Geben Sie folgende Fehlerabschätzungen für $x \in [0, 2]$ an:

- (a) bei kubischer Spline-Interpolation mit Hermite-Randbedingungen unter Verwendung der Zerlegung $\Delta = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.
- (b) bei linearer Spline Interpolation mit gleicher Zerlegung Δ .
- (c) bei Polynom-Interpolation (vom Grad ≤ 4) an den Stützstellen $x_k = \frac{k}{2}$ für $k = 0, \dots, 4$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lagrangesches Interpolationspolynom)

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Lagrange-Interpolationspolynoms $p(x)$ zwischen den Stützstellen $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ interpoliert werden. Vergleichen Sie die Punktauswertungen von f und p in den Punkten $x = \frac{1}{2}$ und $x = 2$ und skizzieren Sie die Graphen von f und p .

Aufgabe H2 (Inverse Interpolation)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow [-1, \frac{3}{4}] : x \mapsto x^2 - \frac{1}{4^x}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion besitzt.
- (b) Berechnen Sie ein Newtonsches Interpolationspolynom vom Grad 2 zur *Umkehrfunktion* von f . Versuchen Sie dabei die Stützstellen so zu wählen, dass die Stützstellen sowie die zugehörigen Funktionswerte rational sind.

Aufgabe H3 (Newtonsche Interpolationsformel & Lineare Splines)

Gegeben seien die folgenden Messwerte

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	0	0	0	0	1	0	0	0	0

- (a) Berechnen Sie das zugehörige Newtonsche Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen und fertigen Sie eine Skizze an.
- (b) Zeichnen Sie den linearen Spline zu den Messwerten in die Skizze ein und vergleichen Sie. Welche Interpolation ist besser?