Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

17. März 1999

Klausur zur Diplomvorprüfung

Mathematik B für ET

Bitte in Druckschrift deutlich lesbar ausfüllen:

Name: ....Vorname: ....

Fachrichtung: ....Matrikelnummer: ....

Wiederholer? ◯ (falls ja, bitte ankreuzen)

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren, am Schluß der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen und mit diesem zusammen persönlich abgeben. Lösungen sind zu begründen, es müssen die verwendeten Verfahren und Rechengänge angegeben werden. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Die Blätter sind *einseitig* zu beschreiben und anschließend mit der Rückseite nach oben abzulegen.

Elektronische Rechenhilfen sind zur Klausur nicht zugelassen!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Punkte	Note:
max. Punkte	22	23	20	22	25	18	19	16	25	14	204	
erreichte Punkte												

Allgemeine Hinweise: Beachten Sie:

$$\sinh(iz) = i\sin(z) \quad \text{und} \quad \cosh(iz) = \cos(z)\,.$$

$$3 < 3.14 < \pi < 3.15 < 10/3\,, \qquad 2.71 < e < 2.72 \qquad \text{und} \qquad \pi^2 < 10\,.$$

$$\int \frac{dx}{x(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{a^2+x^2} + c\,.$$

Aufgabe 1: (22 Punkte) **Entwicklung in eine Laurentreihe:**

Gegeben seien ein Punkt $z_0 = i\pi$ in $\mathbb{C}$ und die komplexe Funktion

$$f : D(f) \to \mathbb{C}, \quad D(f) \subseteq \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{\sinh(2z)}{(z - i\pi)} + \frac{1}{(z-2\pi)^2}\,.$$

a) Beschreiben und skizzieren Sie den **maximalen Definitionsbereich** von f — **welche Art von Singularitäten** liegen an den Definitionslücken vor? — und die **maximalen Konvergenzgebiete der möglichen Laurentreihenentwicklungen** von f **um** $\mathbf{z_0}$, und **entwickeln** Sie f in eine Laurentreihe **um** $\mathbf{z_0 = i\pi}$, die **für** $\mathbf{z_1 = 4}$ **konvergiert**.

b) Bestimmen Sie das **Residuum** von f an der Stelle $\mathbf{z_2 = 2\pi}$.

Aufgabe 2: (23 Punkte) **Gebrochen lineare Funktionen:**

Gegeben sei die gebrochen lineare Funktion $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$w(z) = \frac{2iz + 4 + 2i}{z+1}$$

a) Bestimmen Sie die **Werte**

$$w(-1), \quad w(0), \quad w(1), \quad w(i) \quad \text{und} \quad w(-i).$$

b) **Bestimmen und skizzieren** Sie die **Bildkurven**

- b_1) der **reellen Achse** und insbes. der **gerichteten Strecke** $\overline{(-1)0}$;
- b_2) der **imaginären Achse** und insbes. der **gerichteten Strecke** $\overline{0i}$;
- b_3) des **Kreises** $\mathbf{|z| = 1}$ und insbesondere des **gerichteten Viertelkreises** darauf von 1 nach i,

wobei für die Bilder der Strecken und des Kreisbogens jeweils der **Durchlaufsinn** zu markieren ist. Schreiben Sie an die Bildkurven, zu welchen Urbildkurven sie gehören. Falls für die Bilder der Kurven Kreisbögen auftreten, **bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des jeweiligen Kreises.**

c) Bestimmen Sie jeweils die **Bildmengen** $w(H_k)$ ($k \in \{1,2\}$) der Mengen

$$H_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \ge 0\}\,;$$
$$H_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1 \text{ und } \mathrm{Im}(z) \ge 0\}\,;$$

Skizzieren Sie H_k und $w(H_k)$ für $k \in \{1,2\}$.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

a) **Komplexe Potenzen:**
Berechnen Sie die **komplexen Potenzen**

$$(-2+2i)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad (-2+2i)^{\frac{i}{3}},$$

und geben Sie an, **wieviele Elemente** die Menge jeweils enthält.

b) **Ergänzung einer harmonischen reellen Funktion zu einer regulären komplexen Funktion:**
Die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$v(x,y) = 2x^2 + 6xy - 2y^2 + 3\cos(x)\cosh(y) - 2\sin(x)\sinh(y)$$

ist harmonisch (dies braucht nicht mehr gezeigt zu werden). Bestimmen Sie **alle reellen Funktionen** $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, daß die zugehörigen komplexen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$(*) \qquad f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

regulär sind.
Bestimmen Sie f **als Funktion von** $z = x + iy$ (d.h. verwandeln Sie die rechte Seite von $(*)$ in einen Ausdruck in der komplexen Variablen z).

Aufgabe 4: (22 Punkte)

a) **Funktionentheoretische Berechnung von Umlaufintegralen:**
Berechnen Sie die folgenden Umlaufintegrale bezüglich des Kreises $K := K_\pi(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \pi\}$:

$$a_1) \oint_K \frac{e^{z^2}}{(z-1)^3}\,dz\,, \qquad a_2) \oint_K \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cosh(z)}\,dz\,, \qquad a_3) \oint_K \frac{z^2+\frac{\pi^2}{4}}{\cosh(z)}\,dz\,.$$

b) **Lösung einer Differentialgleichung durch Potenzreihenansatz:**
Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + x^2 y' + x\,y = e^{x^2}$$

ansatzweise durch einen **Potenzreihenansatz** $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 bis a_5 (ggf. in Abhängigkeit von Parametern) und geben Sie **Rekursionsformeln für gerades und ungerades** $n \geq 6$ an.

Aufgabe 5: (25 Punkte)

Lineare Differentialgleichungen:

a) **Homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:**
Geben Sie **alle reellen Lösungen** der folgenden Differentialgleichung an:

$$y''' + y'' + 9\,y' + 9\,y = 0\,.$$

b) **Inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:**
Die Funktionen y_1 und y_2 mit

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

bilden ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2\,y = 4\,x^2 - 18\,x\,e^{-x}$$

(dies braucht nicht mehr nachgewiesen zu werden).
Bestimmen Sie eine **spezielle reelle Lösung** der Differentialgleichung.
Geben Sie **alle reellen Lösungen** der Differentialgleichung an.

c) **Anfangswertproblem:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - y' - 2\,y = 0\,, \quad y(1) = 2, \;\; y'(1) = 0$$

Beachten Sie, daß die linke Seite der Dgl. hier gleich der linken Seite der Differentialgleichung aus b) ist. (Die Lösung besteht aus Brüchen.)

Aufgabe 6: (18 Punkte)

a) **(Nicht)Lineare Differentialgleichung erster Ordnung:**
Verwandeln Sie die Differentialgleichung

$$2\,y\,y' - x\,y^2 - x = 0$$

durch eine geeignete Substitution (kein „Standardtyp“) in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung und lösen Sie diese — und damit die gegebene Differentialgleichung. (*Vgl. allgemeine Hinweise*)

b) **Reduktion der Ordnung bei linearen Differentialgleichungen:**
Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - \frac{2\,x\,y'}{x^2+1} + \frac{2\,y}{x^2+1} = 0\,.$$

Zeigen Sie, daß $y = x$ eine Lösung ist und bestimmen Sie mit Hilfe der Reduktion der Ordnung alle reellen Lösungen dieser Differentialgleichung.

Aufgabe 7: (19 Punkte) **Systeme linearer Differentialgleichungen:**

a) **Lösen eines homogenen Systems:**
Bestimmen Sie **alle reellen Lösungen** des folgenden homogenen Systems linearer Differentialgleichungen

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

b) **Lösen eines inhomogenen Systems:**
Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des folgenden inhomogenen Systems linearer Differentialgleichungen

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} e^{-x} .$$

Beachten Sie, daß die Matrix dieses Systems die Eigenwerte 1, 6 und -2 hat (dies braucht nicht mehr nachgewiesen zu werden).

Aufgabe 8: (16 Punkte) **Eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung:**

Die Zufallsgröße X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x - x^3) & \text{für } \; 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den **Wert der Konstanten** c so, daß f tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

b) Geben Sie die **Verteilungsfunktion** $F(x)$ der Zufallsgröße X an.

c) Berechnen Sie den **Erwartungswert** $E(X)$ von X.

d) Machen Sie den **Ansatz** für die Berechnung der **Varianz** $V(X)$ (= $11/225$) von X — es braucht dann nach Einsetzen aller bekannten Werte nicht weitergerechnet zu werden.

e) Bestimmen Sie die **Wahrscheinlichkeiten**

$$P\left(X \le \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad P\left(\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{4}\right) .$$

Aufgabe 9: (25 Punkte)

a) **Binomialverteilte Zufallsvariable:**
In einem Werk werden Elektromotoren hergestellt, wobei es bekannt sei, daß es genau $p\%$ Ausschuß gebe. Aus der (sehr großen) laufenden Produktion werde zufällig eine Stichprobe von n Motoren entnommen (wobei n sehr klein sei gegenüber dem Produktionsumfang). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit — bei a_1), a_2) und a_3) nur als Formel, bei a_4) als Zahlenwert —, daß in der Stichprobe

a_1) **kein Motor defekt** ist?

a_2) **genau ein Motor defekt** ist?

a_3) **mindestens zwei Motoren defekt** sind?

a_4) **höchstens zwei Motoren** defekt sind, wobei hier $\mathbf{p = 10(\%)}$ und $\mathbf{n = 4}$ sein sollen (die konkreten Zahlen gelten nur hier)?

b) **Numerische Integration:**

Bestimmen Sie mit Hilfe der **zusammengesetzten** SIMPSON-**Formel** für die Schrittweite $h := \frac{\pi}{6}$ näherungsweise das Integral

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{sin(t)}{t}\, dt$$

(vereinfachen Sie die auftretenden Brüche so weit es geht ohne sie zusammenzufassen) und geben Sie (als Formel mit eingesetzten Zahlen) eine **obere Abschätzung F für den Fehler** an, wobei die folgende Tabelle hilfreich sein könnte (es sei $f(x) := \sin(x)/x$ und $I := [2\pi, 3\pi]$)

g	f	f'	f''	f'''	$f^{(iv)}$	$f^{(v)}$
$\max\{g(x) \mid x \in I\} \leq$	$0,13$	$0,16$	$0,03$	$0,11$	$0,15$	$0,10$
$\min\{g(x) \mid x \in I\} \geq$	$0,00$	$-0,12$	$-0,14$	$-0,14$	$-0,05$	$-0,11$

Zeigen Sie, daß sich $\mathbf{10^{-4} < |F| < 10^{-3}}$ ergibt. (*Vgl. allgemeine Hinweise*)

Aufgabe 10: (14 Punkte) **Iterationsverfahren, eindeutiger Fixpunkt:**

a) **Zeigen Sie**, daß das Iterationsverfahren $x_{n+1} = g(x_n)$ mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \frac{x + e^{x/\pi}}{50} + \frac{x^2 \sin(x)}{90}$$

im Intervall $[-\pi, \pi]$ für jeden Startwert $x_0 \in [-\pi, \pi]$ konvergiert und zwar stets gegen denselben Wert $\bar{x}$, und daß als Lipschitz-Konstante $L = \frac{1}{4}$ gewählt werden kann.

b) **Zeigen Sie**, daß

$$|x_7 - \bar{x}| < \frac{1}{2000}$$

gilt für jeden Startwert $x_0 \in [-\pi, \pi]$.