Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
2. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
25. April 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den gesamten Inhalt von Kapitel 8 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

An der TU Darmstadt studieren ca. 22.500 Personen. Davon sind 6 500 weiblich und 16 000 männlich. Dabei studieren 6.8% der Student**innen** und 4.8% der Student**en** Mathematik. Ein Student (m/w) werde zufällig ausgewählt. Sei A das Ereignis, dass die Person Mathematik studiert, und B, dass sie weiblich ist.

a) Wie groß ist $P(A|B)$?

b) Wie groß ist der relative Anteil der Mathematik-Studierenden an der TU Darmstadt?

c) Wie groß ist $P(B|A)$?

d) Sind A und B unabhängig?

Lösung:

a) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass eine bestimmte Person Mathematik studiert unter der Bedingung, dass sie weiblich ist, steht bereits im Aufgabentext: $P(A|B) = 0.068$.

b) Unter den 22 500 Studenten (m/w) der TU Darmstadt gibt es $4.8\% \cdot 16\,000 = 768$ männliche und $6.8\% \cdot 6\,500 = 442$ weibliche Mathematikstudenten. Insgesamt ist der relative Anteil an Mathematikstudenten also

$$\frac{768 + 442}{22\,500} = \frac{1210}{22\,500} \approx 0.054$$

oder 5.4%.

c) Wir wenden die Formel von Bayes an:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.068 \cdot \frac{13}{45}}{0.054} \approx 0.364\,.$$

d) Wegen $P(A|B) = 0.068 \neq 0.054 = P(A)$ sind die Ereignisse A und B nicht unabhängig. An dieser Stelle kann man natürlich auch über $P(B|A) \neq P(B)$ oder $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ argumentieren.

Aufgabe G2 (Erwartungswert und Varianz, stetige Zufallsvariablen)

Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen X^2.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung:

a) Fallunterscheidung:

(i) $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^t dt = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}e^t \Big|_a^x = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^a\right) = \frac{1}{2}e^x.$$

(ii) $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^t dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^x\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{für } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^x, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

b) Für die Verteilungsfunktion $F(X^2)$ gilt:

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = 1 - \tfrac{1}{2}e^{-\sqrt{x}} - \tfrac{1}{2}e^{-\sqrt{x}} \\ &= 1 - e^{-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert $E(X^2)$ gilt (wegen der Symmetrie der Dichte f, mit partieller Integration):

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} x^2 \cdot \tfrac{1}{2}e^{-x}dx = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}dx = \\ &= \left[x^2(-e^{-x})\right]_0^\infty + \int_{0}^{\infty} 2x \cdot e^{-x}dx = 0 + \left[2x(-e^{-x})\right]_0^\infty + \int_{0}^{\infty} 2 \cdot e^{-x}dx \\ &= 0 + 2\left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

c) Für den Erwartungswert $E(X)$ gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot \tfrac{1}{2}e^x dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot \tfrac{1}{2}e^{-x}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[x(e^x)\right]_{-\infty}^0 - \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^x dx + \tfrac{1}{2}\left[x(-e^{-x})\right]_0^\infty + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx \\ &= 0 - \tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2.$$

Aufgabe G3 (Tschebyschevsche Ungleichung, Normalverteilung, zentraler Grenzwertsatz)

Der Durchmesser neu produzierter Autokolben werde durch eine normalverteilte Zufallsvariable X angemessen beschrieben. Aus Erfahrung kennt man die Varianz von X ($\mathrm{Var}(X) = 0.04(mm^2)$), der Erwartungswert ist jedoch unbekannt. Es soll die Mindestanzahl von durchzuführenden Messungen ermittelt werden, so dass die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 kleiner als $0.1(mm)$ ist.

(a) Bestimmen Sie eine obere Schranke für diese Anzahl durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung. Benutzen Sie dabei den zentralen Grenzwertsatz, um die Verteilung von $\bar{X}_{(n)}$ zu bestimmen.

(b) Bestimmen Sie die gesuchte Anzahl exakt. Transformieren Sie dazu (an geeigneter Stelle) auf Standardnormalverteilung und benutzen Sie die entsprechende Tabelle.

Lösung: Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$, die die n Messungen beschreiben, sind unabhhängig und identisch $N(\mu, 0.04)$-verteilt mit dem gesuchten Erwartugswert μ. Dann ist das arithmetische Mittel $\bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ nach Satz 8.7.2 $N\left(\mu, \frac{0.04}{n}\right)$-verteilt. Gesucht ist nun das minimale n mit $P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - \mu\right| < 0.1\right) \geq 0.9$.

(a) Wir formen die linke Seite der Ungleichung so um, dass wir die Tschebyschevsche Ungleichung anwenden können:

$$P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - \mu\right| < 0.1\right) = 1 - P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - \mu\right| \geq 0.1\right) = 1 - P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - E(\bar{X}_{(n)})\right| \geq 0.1\right)$$

Nach der Tschebyschevschen Ungleichung ergibt sich:

$$P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - E(\bar{X}_{(n)})\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_{(n)})}{0.1^2}$$

und somit

$$P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - \mu\right| < 0.1\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_{(n)})}{0.1^2} = 1 - \frac{4}{n}.$$

Ist also die rechte Seite dieser Ungleichung größer oder gleich 90 %, so gilt das auch für die linke. Wir fordern daher

$$1 - \frac{4}{n} \geq 0.9$$

was äquivalent ist zu $n \geq 40$.

(b) Wir lösen den Betrag auf und erhalten

$$P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - \mu\right| < 0.1\right) = P(-0.1 < \bar{X}_{(n)} - \mu < 0.1) = P\left(\frac{-0.1\sqrt{n}}{0.2} < \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{0.04/n}} < \frac{0.1\sqrt{n}}{0.2}\right)$$

Die Zufallsvariable $\frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{0.04/n}}$ ist $N(0,1)$-verteilt, daher gilt

$$P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - \mu\right| < 0.1\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & P\left(\left|\bar{X}_{(n)}-\mu\right|<0.1\right)\geq 0.9 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1\geq 0.9 \\ \Longleftrightarrow \quad & \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\geq 0.95 \end{aligned}$$

Wir schlage das Quantil $u_{0,95}$ nach und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{n}}{2}\geq 1.64 \\ \Longleftrightarrow \quad & n\geq 10.7584 \\ \Leftarrow \quad & n\geq 11. \end{aligned}$$

Die gesuchte minimale Anzahl ist somit 11.

Hausübung

Aufgabe H1 (Binomialverteilung, Poissonverteilung, diskrete Zufallsvariable)

a) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimmen Sie die Verteilung von X sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht Nieten.

b) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechnen Sie für diese Seite die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mehr als drei Abfragen innerhalb einer Minute gibt.

Lösung:

a) X ist binomialverteilt mit Parametern $n=10$ und $p=0.7$, d.h.

$$P(X=k)=\binom{10}{k}\cdot 0.7^k\cdot 0.3^{10-k},\quad k=0,\dots,10$$

und $P(X=k)=0$ sonst. Gefragt ist

$$\begin{aligned} P(X\geq 8) &= P(X=8)+P(X=9)+P(X=10) \\ &= \binom{10}{8}0.7^8\cdot 0.3^2+\binom{10}{9}0.7^9\cdot 0.3+0.7^{10} \\ &\approx 0.3828. \end{aligned}$$

b) Aus $P(X=0)=0.05$ folgt wegen

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda),\quad k=0,1,\dots$$

(bzw. $P(X=k)=0$ sonst) direkt

$$\exp(-\lambda)=0.05,$$

also $\lambda = \ln(20)$. Gefragt ist

$$\begin{aligned} P(X>3) &= 1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)) \\ &= 1-\exp(-\lambda)\cdot\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{6}\right)\approx 0.3518. \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Normalverteilung)

(a) Wir gehen von einer normalverteilten Zufallsvariablen Y mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 aus (kurz: $Y \sim N(0,1)$, auch als Standardnormalverteilung bezeichnet) und betrachten die Zufallsvariable $Z = 5\cdot Y + 100$. Man kann zeigen, dass Z wieder normalverteilt ist. Überprüfen Sie, dass $E(Z) = 100$ und $Var(Z) = 25$ gilt.

(b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Größe (in mm) einer bestimmten Pflanze im Alter von 30 Tagen. Es wird angenommen, dass X normalverteilt ist mit Erwartungswert 100 und Varianz 25, also $X \sim N(100,25)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(90 \le X \le 110) \qquad \text{und} \qquad P(X > 107).$$

Nutzen Sie dabei die Ergebnisse aus a).

Lösung:

a) Wir wissen aus dem Skript, dass gilt (X ersetzen wir dabei durch Y):

$$\begin{aligned} E(a\cdot Y+b) &= a\cdot E(Y)+b \quad \text{und} \\ Var(a\cdot Y+b) &= a^2\cdot Var(Y) \end{aligned}$$

für reelle Zahlen a und b. Mit $a=5$ und $b=100$ folgt hier

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(5\cdot Y+100) = 5\cdot E(Y)+100 = 5\cdot 0+100 = 100 \quad \text{und} \\ Var(Z) &= Var(5\cdot Y+100) = 5^2\cdot Var(Y) = 25\cdot 1 = 25. \end{aligned}$$

b) Die Zufallsvariable X besitzt genau dieselbe Verteilung wie Z aus Teilaufgabe a), nämlich $X \sim N(100,25)$. Wir können deshalb X durch $5\cdot Y+100$ ersetzen und die Verteilungsfunktion Φ von Y benutzen (also die Standardnormalverteilung). Der Zusammenhang zwischen der Funktion Φ und der Zufallsvariablen Y lautet nach Definition

$$P(Y \le y) = \Phi(y).$$

Um Φ an der Stelle y auszuwerten, benötigen wir die entsprechende Statistische Tabelle (siehe Webseite).

$$\begin{aligned} P(90\le X\le 110) &= P(90\le 5\cdot Y+100\le 110) = P(-2\le Y\le 2) \\ &= P(Y\le 2)-P(Y\le -2) \\ &= \Phi(2)-\Phi(-2) = 0.9772-(1-0.9772) = 0.9544\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X>107) &= P(5\cdot Y+100>107) = P(Y>1.4) \\ &= 1-P(Y\le 1.4) = 1-\Phi(1.4) = 1-0.9192 = 0.0808\,. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass der Zusammenhang zwischen X und Φ lautet:

$$P(X\le x) = \Phi\left(\frac{x-100}{5}\right).$$

Dieser Vorgang heißt Standardisierung (also Erwartungswert μ abziehen und durch die Standardabweichung σ – die Wurzel aus der Varianz – teilen).

Aufgabe H3 (Erwartungswert und Varianz)
Die Zufallsvariable X sei gegeben durch

$$P(X=x)=\begin{cases}3c, & \text{falls } x\in\{1,4\};\\ 2c, & \text{falls } x\in\{2,3\};\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

mit einer gewissen Konstanten c.

a) Bestimmen Sie die Konstante c und die Verteilungsfunktion von X.
b) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.
c) Es sei $Y=2X-1$ und $Z=\frac{X-2}{\sqrt{5}}$. Berechnen Sie $E(Y)$, $E(Z)$, $Var(Y)$ und $Var(Z)$.

Lösung:

a) Für die diskret verteilte Zufallsvariable X gilt:

$$1=F(4)=P(X\leq 4)=\sum_{i=1}^{4}P(X=i)=3c+2c+2c+3c=10c$$

$$\Rightarrow c=0.1.$$

Daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion F:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 0.3, & 1\leq x<2;\\ 0.5, & 2\leq x<3,\\ 0.7, & 3\leq x<4,\\ 1, & 4\leq x.\end{cases}$$

b)

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot P(X=x_i)=1\cdot 0.3+2\cdot 0.2+3\cdot 0.2+4\cdot 0.3=2.5.$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2\cdot P(X=x_i)=1\cdot 0.3+2^2\cdot 0.2+3^2\cdot 0.2+4^2\cdot 0.3=7.7.$$

$$\Rightarrow \quad Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=7.7-6.25=1.45.$$

c)

$$E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1=2\cdot 2.5-1=4.$$

$$Var(Y)=Var(2X-1)=2^2\cdot Var(X)=4\cdot 1.45=5.8.$$

$$E(Z)=E\left(\frac{X-2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot E(X)-\frac{2}{\sqrt{5}}=0.2236.$$

$$Var(Z)=Var\left(\frac{X-2}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot Var(X)=0.29.$$