Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

17. März 1999

Klausur zur Diplomvorprüfung

Mathematik B für ET

Bitte in Druckschrift deutlich lesbar ausfüllen:

Name: .... Vorname: ....

Fachrichtung: .... Matrikelnummer: ....

Wiederholer? ◯ (falls ja, bitte ankreuzen)

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren, am Schluß der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen und mit diesem zusammen persönlich abgeben. Lösungen sind zu begründen, es müssen die verwendeten Verfahren und Rechengänge angegeben werden. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Die Blätter sind *einseitig* zu beschreiben und anschließend mit der Rückseite nach oben abzulegen.

Elektronische Rechenhilfen sind zur Klausur nicht zugelassen!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Punkte	Note:
max. Punkte	22	23	20	22	25	18	19	16	25	14	204	
erreichte Punkte												

Allgemeine Hinweise: Beachten Sie:

$$\sinh(iz) = i\sin(z) \quad \text{und} \quad \cosh(iz) = \cos(z)\,.$$

$$3 < 3.14 < \pi < 3.15 < 10/3\,, \qquad 2.71 < e < 2.72 \qquad \text{und} \qquad \pi^2 < 10\,.$$

$$\int \frac{dx}{x(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{a^2+x^2} + c\,.$$

Aufgabe 1: (22 Punkte) **Entwicklung in eine Laurentreihe:**

Gegeben seien ein Punkt $z_0 = i\pi$ in $\mathbb{C}$ und die komplexe Funktion

$$f : D(f) \to \mathbb{C}, \quad D(f) \subseteq \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{\sinh(2z)}{(z-i\pi)} + \frac{1}{(z-2\pi)^2}\,.$$

a) Beschreiben und skizzieren Sie den **maximalen Definitionsbereich** von f — **welche Art von Singularitäten** liegen an den Definitionslücken vor? — und die **maximalen Konvergenzgebiete der möglichen Laurentreihenentwicklungen** von f **um** $\mathbf{z_0}$, und **entwickeln** Sie f in eine Laurentreihe **um** $\mathbf{z_0 = i\pi}$, die **für** $\mathbf{z_1 = 4}$ **konvergiert**.

b) Bestimmen Sie das **Residuum** von f an der Stelle $\mathbf{z_2 = 2\pi}$.

Aufgabe 2: (23 Punkte) **Gebrochen lineare Funktionen:**

Gegeben sei die gebrochen lineare Funktion $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$w(z) = \frac{2iz + 4 + 2i}{z+1}$$

a) Bestimmen Sie die **Werte**

$$w(-1), \quad w(0), \quad w(1), \quad w(i) \quad \text{und} \quad w(-i).$$

b) **Bestimmen und skizzieren** Sie die **Bildkurven**

b_1) der **reellen Achse** und insbes. der **gerichteten Strecke** $\overline{(-1)0}$;

b_2) der **imaginären Achse** und insbes. der **gerichteten Strecke** $\overline{0i}$;

b_3) des **Kreises** $|\mathbf{z}| = \mathbf{1}$ und insbesondere des **gerichteten Viertelkreises** darauf von 1 nach i,

wobei für die Bilder der Strecken und des Kreisbogens jeweils der **Durchlaufsinn** zu markieren ist. Schreiben Sie an die Bildkurven, zu welchen Urbildkurven sie gehören. Falls für die Bilder der Kurven Kreisbögen auftreten, **bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des jeweiligen Kreises.**

c) Bestimmen Sie jeweils die **Bildmengen** $w(H_k)$ $(k \in \{1,2\})$ der Mengen

$$H_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \ge 0\}\,;$$
$$H_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1 \text{ und } \mathrm{Im}(z) \ge 0\}\,;$$

Skizzieren Sie H_k und $w(H_k)$ für $k \in \{1,2\}$.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

a) **Komplexe Potenzen:**
Berechnen Sie die **komplexen Potenzen**

$$(-2+2i)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad (-2+2i)^{\frac{i}{3}},$$

und geben Sie an, **wieviele Elemente** die Menge jeweils enthält.

b) **Ergänzung einer harmonischen reellen Funktion zu einer regulären komplexen Funktion:**
Die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$v(x,y) = 2\,x^2 + 6\,x\,y - 2\,y^2 + 3\,\cos(x)\,\cosh(y) - 2\,\sin(x)\,\sinh(y)$$

ist harmonisch (dies braucht nicht mehr gezeigt zu werden). Bestimmen Sie **alle reellen Funktionen** $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, daß die zugehörigen komplexen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$(*) \qquad f(x+i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

regulär sind.
Bestimmen Sie f **als Funktion von** $z = x + i\,y$ (d.h. verwandeln Sie die rechte Seite von $(*)$ in einen Ausdruck in der komplexen Variablen z).

Aufgabe 4: (22 Punkte)

a) **Funktionentheoretische Berechnung von Umlaufintegralen:**
Berechnen Sie die folgenden Umlaufintegrale bezüglich des Kreises $K := K_\pi(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \pi\}$:

$$\text{a}_1) \quad \oint_K \frac{e^{z^2}}{(z-1)^3}\,dz\,, \qquad \text{a}_2) \quad \oint_K \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cosh(z)}\,dz\,, \qquad \text{a}_3) \quad \oint_K \frac{z^2+\frac{\pi^2}{4}}{\cosh(z)}\,dz\,.$$

b) **Lösung einer Differentialgleichung durch Potenzreihenansatz:**
Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + x^2\,y' + x\,y = e^{x^2}$$

ansatzweise durch einen **Potenzreihenansatz** $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 bis a_5 (ggf. in Abhängigkeit von Parametern) und geben Sie **Rekursionsformeln für gerades und ungerades** $n \geq 6$ an.

Aufgabe 5: (25 Punkte)

Lineare Differentialgleichungen:

a) **Homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:**
Geben Sie **alle reellen Lösungen** der folgenden Differentialgleichung an:

$$y''' + y'' + 9\,y' + 9\,y = 0\,.$$

b) **Inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:**
Die Funktionen y_1 und y_2 mit

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

bilden ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2\,y = 4\,x^2 - 18\,x\,e^{-x}$$

(dies braucht nicht mehr nachgewiesen zu werden).
Bestimmen Sie eine **spezielle reelle Lösung** der Differentialgleichung.
Geben Sie **alle reellen Lösungen** der Differentialgleichung an.

c) **Anfangswertproblem:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - y' - 2\,y = 0\,, \quad y(1) = 2, \ \ y'(1) = 0$$

Beachten Sie, daß die linke Seite der Dgl. hier gleich der linken Seite der Differentialgleichung aus b) ist. (Die Lösung besteht aus Brüchen.)

Aufgabe 6: (18 Punkte)

a) **(Nicht)Lineare Differentialgleichung erster Ordnung:**
Verwandeln Sie die Differentialgleichung

$$2\,y\,y' - x\,y^2 - x = 0$$

durch eine geeignete Substitution (kein „Standardtyp") in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung und lösen Sie diese — und damit die gegebene Differentialgleichung. (*Vgl. allgemeine Hinweise*)

b) **Reduktion der Ordnung bei linearen Differentialgleichungen:**
Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - \frac{2\,x\,y'}{x^2+1} + \frac{2\,y}{x^2+1} = 0\,.$$

Zeigen Sie, daß $y = x$ eine Lösung ist und bestimmen Sie mit Hilfe der Reduktion der Ordnung alle reellen Lösungen dieser Differentialgleichung.

Aufgabe 7: (19 Punkte) **Systeme linearer Differentialgleichungen:**

a) **Lösen eines homogenen Systems:**
Bestimmen Sie **alle reellen Lösungen** des folgenden homogenen Systems linearer Differentialgleichungen

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

b) **Lösen eines inhomogenen Systems:**
Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des folgenden inhomogenen Systems linearer Differentialgleichungen

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} e^{-x} \,.$$

Beachten Sie, daß die Matrix dieses Systems die Eigenwerte 1, 6 und -2 hat (dies braucht nicht mehr nachgewiesen zu werden).

Aufgabe 8: (16 Punkte) **Eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung:**

Die Zufallsgröße X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x - x^3) & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den **Wert der Konstanten** c so, daß f tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

b) Geben Sie die **Verteilungsfunktion** $F(x)$ der Zufallsgröße X an.

c) Berechnen Sie den **Erwartungswert** $E(X)$ von X.

d) Machen Sie den **Ansatz** für die Berechnung der **Varianz** $V(X)$ (= $11/225$) von X — es braucht dann nach Einsetzen aller bekannten Werte nicht weitergerechnet zu werden.

e) Bestimmen Sie die **Wahrscheinlichkeiten**

$$P\left(X \le \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad P\left(\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{4}\right).$$

Aufgabe 9: (25 Punkte)

a) **Binomialverteilte Zufallsvariable:**
In einem Werk werden Elektromotoren hergestellt, wobei es bekannt sei, daß es genau $p\%$ Ausschuß gebe. Aus der (sehr großen) laufenden Produktion werde zufällig eine Stichprobe von n Motoren entnommen (wobei n sehr klein sei gegenüber dem Produktionsumfang). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit — bei a_1), a_2) und a_3) nur als Formel, bei a_4) als Zahlenwert —, daß in der Stichprobe

a_1) **kein Motor defekt** ist?

a_2) **genau ein Motor defekt** ist?

a_3) **mindestens zwei Motoren defekt** sind?

a_4) **höchstens zwei Motoren** defekt sind, wobei hier $\mathbf{p = 10}(\%)$ und $\mathbf{n = 4}$ sein sollen (die konkreten Zahlen gelten nur hier)?

b) **Numerische Integration:**

Bestimmen Sie mit Hilfe der **zusammengesetzten** SIMPSON-**Formel** für die Schrittweite $h := \frac{\pi}{6}$ näherungsweise das Integral

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{sin(t)}{t}\, dt$$

(vereinfachen Sie die auftretenden Brüche so weit es geht ohne sie zusammenzufassen) und geben Sie (als Formel mit eingesetzten Zahlen) eine **obere Abschätzung F für den Fehler** an, wobei die folgende Tabelle hilfreich sein könnte (es sei $f(x) := \sin(x)/x$ und $I := [2\pi, 3\pi]$)

g	f	f'	f''	f'''	$f^{(iv)}$	$f^{(v)}$
$\max\{g(x) \mid x \in I\} \leq$	0,13	0,16	0,03	0,11	0,15	0,10
$\min\{g(x) \mid x \in I\} \geq$	0,00	−0,12	−0,14	−0,14	−0,05	−0,11

Zeigen Sie, daß sich $\mathbf{10^{-4} < |F| < 10^{-3}}$ ergibt. (*Vgl. allgemeine Hinweise*)

Aufgabe 10: (14 Punkte) **Iterationsverfahren, eindeutiger Fixpunkt:**

a) **Zeigen Sie**, daß das Iterationsverfahren $x_{n+1} = g(x_n)$ mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \frac{x + e^{x/\pi}}{50} + \frac{x^2 \sin(x)}{90}$$

im Intervall $[-\pi, \pi]$ für jeden Startwert $x_0 \in [-\pi, \pi]$ konvergiert und zwar stets gegen denselben Wert $\bar{x}$, und daß als Lipschitz-Konstante $L = \frac{1}{4}$ gewählt werden kann.

b) **Zeigen Sie**, daß

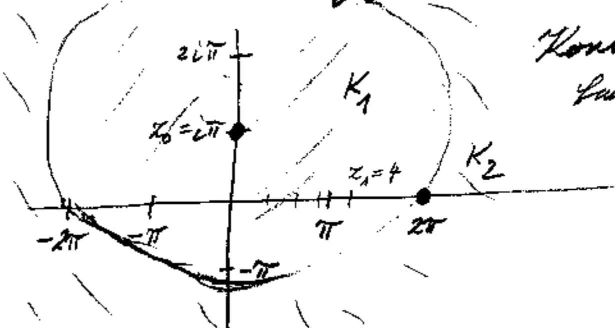
$$|x_7 - \bar{x}| < \frac{1}{2000}$$

gilt für jeden Startwert $x_0 \in [-\pi, \pi]$.

Mathematik B für ET 17.3.1999

Aufgabe 1.

a) f hat Definitionslücken bei $z = i\pi$ und $z = 2\pi$.
Da $k i\pi$ die Nullstellen von $\sinh z$ sind (wegen $\sinh(ix) = i\sin x$) ist $z = i\pi$ auch eine Nullstelle von $\sinh 2z$, also ist $z = i\pi$ eine **hebbare Singularität**: $D(f) = \mathbb{C}\setminus\{2\pi, i\pi\}$, $i\pi$ hebbar.
$z = 2\pi$ ist dagegen ein **Pol zweiter Ordnung**, da $\frac{1}{(z-2\pi)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2\pi)^n$ dort seine Laurent-Entw.



Konvergenzgebiete der Laurentreihen um $z_0 = i\pi$

$K_1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \underset{(-)}{\le} |z - i\pi| < \sqrt{5}\pi \}$ — da hebbare Sing.

$K_2 := \{ z \in \mathbb{C} \mid \sqrt{5}\pi < |z - i\pi| \}$

$z_1 = 4$ liegt in K_1, also werden beide Summanden nach (posit.) Potenzen von $(z - i\pi)$ entwickelt

$$\sinh(2(z - i\pi + i\pi)) = \sinh(2(z-i\pi) + i2\pi)$$
$$= \sinh(2(z-i\pi))\underbrace{\cosh(2\pi i)}_{=\cos 2\pi = 1} + \cosh(2(z-\pi i))\underbrace{\sinh 2\pi i}_{=0}$$
$$= \sinh 2(z-i\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-i\pi)^{2n+1}$$

$\boxed{\text{oder direkt mit: } \sinh 2z = -i\sin(2zi) \text{ zeigt, daß } \sinh 2z = \sinh 2(z-i\pi) = \sinh(2z-2\pi i)}$

$$\frac{1}{(z-2\pi)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{z-2\pi}\right)$$ (vgl. Mathematik I), deren Reihe kann im Konvergenzbereich gliedweise differenziert werden (vgl. Mathe. II).

$$\frac{-1}{z-2\pi} = \frac{-1}{z - i\pi + i\pi - 2\pi} = \frac{1}{\pi(2-i) - (z-i\pi)} = \frac{1}{\pi(2-i)\left(1 - \frac{z-i\pi}{\pi(2-i)}\right)}$$
$$= \frac{1}{\pi(2-i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i\pi)^n}{(\pi(2-i))^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i\pi)^n}{\pi^{n+1}(2-i)^{n+1}}$$
↓ Ableitung
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-i\pi)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z-i\pi)^n}{\pi^{n+2}(2-i)^{n+2}} = \text{Regulärteil}$$

konvergiert in $K_1' = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i\pi| < \sqrt{5} \}$.

b) Da $\frac{\sinh 2z}{z - i\pi}$ an der Stelle $z_2 = 2\pi$ regulär ist und da $\frac{1}{(z-2\pi)^2}$ dort die Laurententwicklung vom zweiten Summanden ist, ist $\operatorname{Res}_{z=2\pi} f(z) = 0$.

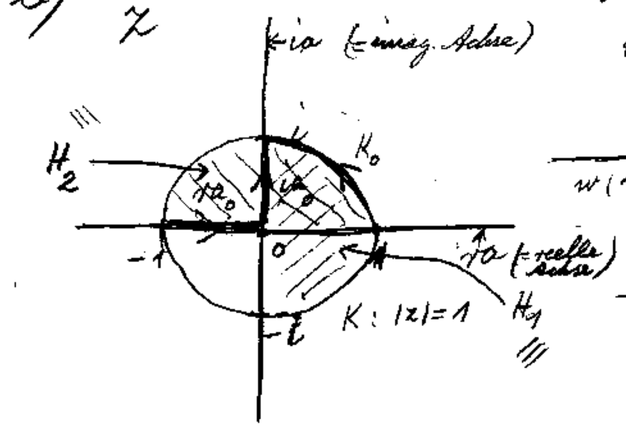
Aufgabe 2: $\quad w(z) = \dfrac{2iz+4+2i}{z+1}$

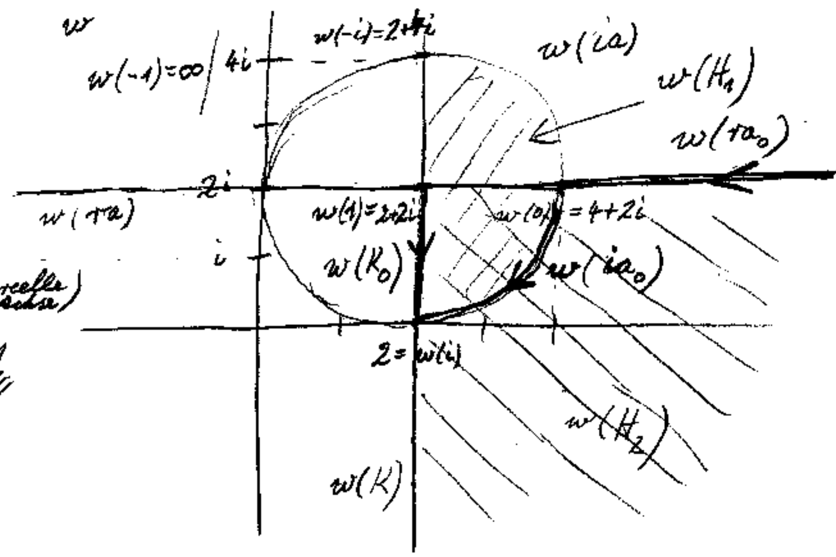
a)

$z=$	-1	0	1	i	$-i$
$w=$	∞	$4+2i$	$2+2i$	2	$2+4i$

$\dfrac{-2i+4+2i}{-1+1}$ $\quad \dfrac{4+4i}{2}$ $\quad \dfrac{-2+4+2i}{i+1}$ $\quad \dfrac{2+4+2i}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2(3+i)(1+i)}{2} = (3-1)+i(3+1)$

b)





$w(ra)$ und $w(K_0)$ sind Geraden

$w(ra) = \{ w\in\mathbb{C} \mid w = t+2i,\ t\in\mathbb{R}\}$ $\qquad w(ra_0) = \{ w\in\mathbb{C} \mid w = t+2i,\ t\geq 4 \text{ in } \mathbb{R}\}$ Halbgerade

$w(K_0) = \{ w\in\mathbb{C} \mid w = 2+ti,\ t\in\mathbb{R}\}$. $\qquad w(K_0) = \{ w\in\mathbb{C} \mid w = 2+ti,\ 0\leq t\leq 2\}$ Strecke

Das Bild der imaginären Achse ist ein Kreis mit Mittelpunkt $2+2i$ und Radius 2

$w(ia) = \{ w\in\mathbb{C} \mid |w-(2+2i)| = 2\}$

$w(ia_0) = \{ w\in\mathbb{C} \mid w = 2+2i+2e^{it},\ \tfrac{3}{2}\pi \leq t \leq 2\pi\}$

Richtungen vgl. Skizze.

c) $w(H_1) = \{ w\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w)\geq 2 \text{ und } |w-(2+2i)|\leq 2\}$

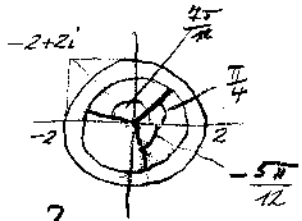
vgl. Skizze oben unter b)

$w(H_2)$ enthält $w(-1)=\infty$ und den unteren Quadranten von $w(H_1)$, also ist (verfolge $-1\to 0\to 1\to i\to -1$)

$w(H_2) = \{ w\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w)\geq 2 \text{ und } \operatorname{Im}(w)\leq 2\}$

Aufgabe 3

a) $(-2+2i)^{1/3} = \left(\sqrt{8}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)^{1/3}$



$$= \left\{ e^{\left(\frac{1}{2}\ln 8 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)/3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}},\ \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)},\ \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}_{=1+i},\ \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}},\ \sqrt{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}} \right\}$$

hat 3 Elemente, da e^{iz} 2π-periodisch ist.

$$(-2+2i)^{\frac{i}{3}} = \left(e^{(\ln\sqrt{8} + \frac{3}{4}\pi)}\right)^{i/3} =$$

$$= \left\{ e^{\left(\ln\sqrt{8} + i\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)\right)\frac{i}{3}} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \frac{i}{2}\ln 2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dies ist eine unendliche Menge positiver reeller Zahlen mit unterschiedlichen Beträgen und festem Argument.

Aufgabe 3 (Fortsetzung)

b) $v(x,y) = 2x^2 + 6xy - 2y^2 + 3\cos x \cosh y - 2\sin x \sinh y$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ liefern

$$u = \int v_y \, dx + c(y) = -\int v_x \, dy + c(x)$$

$$u(x,y) = \int v_y \, dx = \int (6x - 4y + 3\cos x \sinh y - 2\sin x \cosh y) \, dx$$

$$= 3x^2 - 4xy + 3\sin x \sinh y + 2\cos x \cosh y + c(y)$$

$$= -\int v_x \, dy = -\int (4x + 6y - 3\sin x \cosh y - 2\cos x \sinh y) \, dy$$

$$= -4xy - 3y^2 + 3\sin x \sinh y + 2\cos x \cosh y + c(x)$$

Vergleich liefert

$$u(x,y) = 3x^2 - 4xy - 3y^2 + 3\sin x \sinh y + 2\cos x \cosh y + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Um $f(z)$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst

$$f(x+0y) = u(x,0) + i\,v(x,0) = \underline{3x^2} + 2\cos x + i(\underline{2x^2} + \underline{3\cos x}) + c$$

Also ist nach dem eindeutigen Fortsetzungsprinzip

$$f(z) = (3+2i)z^2 + (2+3i)\cos z + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 4

a) $K = K_{\pi}(0)$

a_1) $$\oint_K^{1\in K_\pi(0)} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(e^{z^2}\right)\Big|_{z=1} = \pi i(2+4z^2)e^{z^2}\Big|_{z=1} = 6\pi e i$$

NR: $$\left(e^{z^2}\right)'' = \left(2ze^{z^2}\right)' = (2+4z^2)e^{z^2}$$

a_2) $$\oint_K \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cosh(z)}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=\frac{i\pi}{2}} \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cosh z} + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{i\pi}{2}} \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cosh z}\right)$$

Denn $\cosh(z)$ hat innerhalb von K die Nullstellen $z_1 = \frac{i\pi}{2}$ und $z_2 = -\frac{i\pi}{2}$. Dies sind einfache Nullstellen, also berechnen sich die Residuen als

$$\frac{z_i - \frac{\pi}{2}}{\sinh z_i}: \quad \frac{\frac{i\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{\underbrace{\sinh i\frac{\pi}{2}}_{=i\sin\frac{\pi}{2}=i}} = \frac{\pi}{2i}(-1+i) = -\frac{\pi i}{2}(-1+i) = \frac{\pi}{2}(1+i)$$

$$\frac{-\frac{i\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{\underbrace{\sinh\left(-i\frac{\pi}{2}\right)}_{=-i\sin\frac{\pi}{2}=-i}} = \frac{+\frac{\pi}{2}(1+i)}{+i} = \frac{-\pi i}{2}(1+i) = \frac{\pi}{2}(1-i)$$

$$\oint_K \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cosh z}\,dz = 2\pi i\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}(1+i)+\frac{\pi}{2}(1-i)}_{\pi}\right) = \underline{\underline{2\pi^2 i}}$$

a_3) $$\oint_K \frac{z^2+\frac{\pi^2}{4}}{\cosh z}\,dz$$ Wie bei a_2) liegen in K die einfachen Nullstellen $\pm i\frac{\pi}{2}$ von $\cosh z$. Diese sind jedoch auch (einfache) Nullstellen des Zählers, sodaß es sich beide Male um hebbare Singularitäten handelt. Also ist

$$\oint_K \frac{z^2+\frac{\pi^2}{4}}{\cosh z}\,dz = 0$$

Aufgabe 4 (Fortsetzung)

b) $y'' + x^2 y' + xy = e^{x^2}$

Ansatz:

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad x^2 y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$2\cdot 1\cdot a_2 + (3\cdot 2\cdot a_3 + a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_{n-1}\right) x^n$$

$$= 1 + 0x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_0 + 6a_3 = 0, \quad a_3 = -\frac{a_0}{6}$

$4\cdot 3\, a_4 + 2a_1 = \frac{1}{1!} = 1 \qquad a_4 = \frac{1}{12} - \frac{a_1}{6}$

$5\cdot 4\, a_5 + 3a_2 = 0 \qquad a_5 = -\frac{3}{20} a_2 = -\frac{3}{40}$

$n = 2k$ gerade

$$(2k+2)(2k+1)\, a_{2k+2} + 2k\, a_{2k-1} = \frac{1}{k!}$$

$$a_{2k+2} = \frac{1}{(2k+2)(2k+1)k!} - \frac{2k\, a_{2k-1}}{(2k+2)(2k+1)}$$

$n = 2k+1$ ungerade:

$$(2k+3)(2k+2)\, a_{2k+3} + (2k+1)\, a_{2k} = 0$$

$$a_{2k+3} = -\frac{(2k+1)\, a_{2k}}{(2k+3)(2k+2)}$$

Aufgabe 5

a) $y''' + y'' + 9y' + 9y = 0$

Die Charakteristische Gleichung $\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 9 = 0$
$= (\lambda^2 + 9)(\lambda + 1)$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = 3i$
$\lambda_3 = -3i$

Somit erhält man als reelles Fundamentalsystem
e^{-x}, $\cos 3x$, $\sin 3x$ und alle reellen Lösungen durch

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x \quad , c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

b) $y'' - y' - 2y = 4x^2 - 18x e^{-x}$

e^{-x} ist ein Resonanzfall, x^2 nicht.

Ansatz vom Typ der rechten Seite

$y_s = ax^2 + bx + c + x(dx+e)e^{-x}$

Wir behandeln beide Anteile getrennt:

$y_{s1} = ax^2 + bx + c$
$y_{s1}' = 2ax + b$
$y_{s1}'' = 2a$

$y_{s1}'' - y_{s1}' - 2y_{s1} = 2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c = 4x^2$

Koeffizientenvergleich: x^2: $-2a = 4$, $a = -2$
x: $-2a - 2b = 0$, $b = -a = 2$
1: $2a - b - 2c = 0 = -4 - 2 - 2c$, $c = -3$

$y_{s1} = -2x^2 + 2x - 3$

$y_{s2} = x(dx+e)e^{-x} = (dx^2 + ex)e^{-x}$
$y_{s2}' = (2dx + e - dx^2 - ex)e^{-x} = (-dx^2 + (2d-e)x + e)e^{-x}$
$y_{s2}'' = (-2dx + 2d - e + dx^2 - (2d-e)x - e)e^{-x} = (dx^2 + (-4d+e)x + 2(d-e))e^{-x}$

$y_{s2}'' - y_{s2}' - 2y_{s2} = [2dx^2 - 2dx^2 + (-4d + \cancel{e} - 2d + \cancel{e} - \cancel{2e})x + 2d - 2e - e)e^{-x} = -18xe^{-x}$

x: $-6d = -18$, $d = 3$
$2d - 3e = 0$ $\quad e = \frac{2}{3}d = 2$ $\qquad y_{s2} = (3x^2 + 2x)e^{-x}$

reelle Gesamtlösung (spezielle Lösung ist $y_{s1} + y_{s2}$):

$$y(x) = -2x^2 + 2x - 3 + (3x^2 + 2x)e^{-x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 5 (Fortsetzung)

c) $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(1) = 2,\ y'(1) = 0$

(Homogene) allgemeine Lösung

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \qquad , y_h' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$

$x = 1 \qquad c_1 e^2 + c_2 e^{-1} = 2$

$2c_1 e^2 - c_2 e^{-1} = 0 \qquad c_2 = 2c_1 e^3$

$c_1 e^2 + 2c_1 e^2 = 2$

$3c_1 e^2 = 2$

$c_1 = \frac{2}{3} e^{-2} \qquad , c_2 = \frac{4}{3} e$

Aufgabe 6

a) $2yy' - xy^2 - x = 0$

Die Substitution $u(x) = y^2(x)$ führt zu $u'(x) = 2y(x)y'(x)$, also

$$u' - xu - x = 0$$

Diese hat als homogene Lösung

$$\frac{u'}{u} = +x \qquad \text{oder } u = 0$$

$$\ln|u| = \frac{x^2}{2} + c_0$$

$$u = c\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

Mathe IV

Variation der Konstanten (oder die Formel aus dem Skript)

liefert $u_1(x) = c(x)e^{x^2/2}$

$$c'(x)\,e^{x^2/2} = x$$

$$c(x) = \int x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$u_1(x) = c(x)\,e^{x^2/2} = -1 + c\,e^{+x^2/2} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \sqrt{-1 + c\,e^{x^2/2}}$$

b) $y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$, $y_1 = x$, $y' = 1$, $y'' = 0$

liefert $0 - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = 0$ $\qquad y_1 = x$ ist also Lösung

Ansatz: $y_2(x) = u(x)x$ liefert

$$y_2'(x) = u'x + u$$

$$y_2''(x) = u''x + 2u'$$

$$xu'' + 2u' - \frac{2x}{x^2+1}(u'x + \cancel{u}) + \frac{2u\cancel{x}}{\cancel{x^2+1}} = 0 \quad \text{liefert}$$

$$xu'' + 2u'\left(\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}\right) = 0$$

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{2}{(x^2+1)x} \qquad u' = 0 \text{ ist auch Lösung}$$

$$\ln|u'| = -2 \cdot \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right| + c_0 \qquad \text{vgl. Blatt 2 oben}$$

$$u' = c_2 e^{-\ln\frac{x^2}{1+x^2}} = c_2\frac{1+x^2}{x^2} = c_2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \qquad (x \neq 0)$$

$$u = c_2\int\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)dx = c_2\left(\frac{-1}{x} + x\right) + c_1$$

$y(x) = x\,u(x) = c_1 x + c_2(x^2 - 1)$ ist die allgemeine Lösung

(diese gilt auch für $x = 0$, das vorübergehend auszuschließen war.)

Aufgabe 7

a) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Eigenwerte von A: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 9 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2+3i$ $\qquad \begin{pmatrix} 2-(2+3i) & 3 \\ -3 & 2-(2+3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3i & 3 \\ -3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad -3i\, c_{11} + 3 c_{12} = 0$

$c_{11} = 1$ liefert $c_{12} = i$

$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Da λ_2 zu λ_1 konjugiert und A reell ist, muß $\vec{c}_2$ zu $\vec{c}_1$ konjugiert sein, d.h. $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

(Alternativ: $\lambda = 2-3i$: $\begin{pmatrix} 3i & 3 \\ -3 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$3i\, c_{21} + 3 c_{22} = 0$, $c_{21} = 1$ liefert $c_{22} = -i$, also $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$)

Allgemeine komplexe Lösung

$$\vec{y}_k = c_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{2x+3ix} + c_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2x-3ix}$$

$$= c_1^* \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos 3x + i \sin 3x)\, e^{2x}}_{\begin{pmatrix} \cos 3x \\ -\sin 3x \end{pmatrix} e^{2x} + i \begin{pmatrix} \sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix} e^{2x}} + c_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos 3x - i \sin 3x)$$

$c_1^*, c_2^* \in \mathbb{C}$

Real- und Imaginärteil davon sind die reellen Lösungen (der zweite Summand ist zum ersten konjugiert komplex und liefert nichts neues)

Allgemeine reelle Lösung:

$$\vec{y}_r(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 3x \\ -\sin 3x \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix} e^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 7 (Fortsetzung)

7.e) $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} e^{-x}$

Es liegt keine Resonanz vor. Ein Ansatz vom Typ der rechten Seite: $\vec{y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{-x}$

liefert (nach Kürzen durch e^{-x}):

$$-\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Inhomogenes lin. Gl.Syst. . Gauß-Verfahren liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -12 & -16 & 28 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \end{array}$$

$7c = -7$, $c = -1$

$-12b - 16(-1) = 28$

$-12b = 12$, $b = -1$

$-2a + 0\cdot(-1) - (-1) = 3$

$-2a = 2$, $a = -1$

$\vec{y}_s = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$ ist eine spezielle Lösung des gegebenen Systems linearer Differentialgleichungen.

Aufgabe 8

$$f(x) = \begin{cases} c(x-x^3) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a/b)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & x<0 \\ c\int_0^x (x-x^3)\,dx = c\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right) & 0 \le x \le 1 \\ c\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{c}{4} = 1 & x>1 \end{cases}$$

also gilt $\underline{\underline{c=4}}$ und

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 2x^2-x^4 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = 4\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx = 4\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}(5-3) = \frac{8}{15}$$

d)

$$V(X) = 4\int_0^1 \left(x-\frac{8}{15}\right)^2 (x-x^3)\,dx \quad \cdots \left(= \frac{11}{225}\right)$$

e)

$$P(X \le \tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}) = 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

$$P\left(\tfrac{1}{4} \le X \le \tfrac{3}{4}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil } f \text{ bzw. } F \\ \text{stetig ist}}}{=} F(\tfrac{3}{4}) - F(\tfrac{1}{4}) = 2\,\frac{9}{16} - \frac{81}{256} - 2\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{256}\right)$$

$$= \underbrace{2\,\frac{8}{16}}_{1} - \underbrace{\frac{80}{256}}_{\frac{5}{16}} = \frac{\cancel{176}}{256} = \frac{\cancel{44}}{64} = \frac{11}{16}$$

Aufgabe 9 :

a) a_1 : $P_n(0)\ \left(1-\frac{p}{100}\right)^n$: kein Motor defekt

a_2 : $P_n(1) = n\frac{p}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^{n-1}$ genau ein Motor defekt

a_3 : $P_n(k\geq 2) = 1-\left(1-\frac{p}{100}\right)^n - n\frac{p}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^{n-1}$

mindestens 2 Motoren defekt

$$= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{100}\right)^k\left(1-\frac{p}{100}\right)^{n-k}$$

a_4 : $p = 10(\%)$, $n=4$, $\bar{p} = 0{,}1$, $\bar{q} = 0{,}9$

$$P_4(k\leq 2) = \bar{q}^4 + \binom{4}{1}\bar{p}\,\bar{q}^3 + \binom{4}{2}\bar{p}^2\bar{q}^2$$

$$= 0{,}9^4 + 4\cdot 0{,}1\,(0{,}9)^3 + 6\cdot 0{,}01\cdot 0{,}81$$

$(0{,}9)^4 = (0{,}81)^2 = (0{,}8+0{,}01)^2 = 0{,}64 + 0{,}016 + 0{,}0001 = 0{,}6561$

$0{,}1\cdot(0{,}9)^3 = 0{,}729\cdot 0{,}1 = 0{,}0729$ $\qquad 0{,}0729\cdot 4 = 0{,}2916$

$0{,}01\cdot 0{,}81 = 0{,}0081$ $\qquad 0{,}0081\cdot 6 = 0{,}0486$

$\qquad\qquad 0{,}9963$

also gilt

$$P_4(k\leq 2) = 0{,}9963$$

Alternativ

$$P_4(k\leq 2) = 1 - P_4(k\geq 3)$$

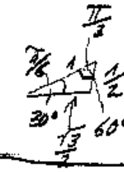
$$= 1-\left[\binom{4}{3}\,0{,}9\,(0{,}1)^3 + \binom{4}{4}(0{,}1)^4\right]$$

$$= 1 - \underbrace{4\cdot 0{,}0009}_{0{,}0036} - 0{,}0001 = 0{,}9963$$

Aufgabe 9 (Fortsetzung)

b) $$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6\right)$$

bei 6 Teilintervallen.



x_k	2π	$2\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$	$2\pi+\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$	$2\pi+\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$	$2\pi+\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$	$2\pi+\frac{5\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$	3π
$\sin x_k$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{\sin x_k}{x_k}$	0	$\frac{3}{13\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{14\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}$	$\frac{3}{34\pi}$	0

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \approx \frac{\pi}{6\cdot 3}\left(0 + \frac{12}{13\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{7\pi} + \frac{8}{5\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{12}{17\pi} + 0\right)$$

$$\approx \frac{1}{18}\left(\frac{45}{56}\sqrt{3} + \frac{12}{13} + \frac{8}{5} + \frac{12}{17}\right)$$

Für den Fehler F gilt

$$F = \frac{(b-a)\,h^4}{180}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{(IV)}\Big|_{t=\vartheta} \qquad 2\pi < \vartheta < 3\pi$$

also $$|F| \leq \frac{\pi}{180}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\cdot 0{,}15$$

zur Abschätzung der Größenordnung von $|F|$:

$$|F| \geq \frac{3}{180}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^4\cdot 0{,}15 = \frac{1}{60}\cdot\frac{0{,}15}{16} = \frac{15}{6000}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{400\cdot 16} = \frac{1}{6400} > \frac{1}{10000}$$

$$|F| \leq \frac{10}{3\cdot 180}\cdot\left(\frac{10}{18}\right)^4\cdot 0{,}15 = \frac{1}{2\cdot 180\cdot 18^4}\,10^4 < \frac{1}{2\cdot 180\cdot 90000}\,10^4 = \frac{1}{3240} < \frac{1}{1000}$$

$18^2 = 324 > 300$

[Werte mit Mathematica (auf 8 Stellen)
für Näherung: 0,25641032
für Integral: 0,25661022]

$3 \leq \pi \approx \frac{10}{3}$ $\qquad |F|$

$\frac{3}{180}\cdot\frac{1}{16}\cdot 0{,}15$ $\qquad \frac{0{,}45}{2960} \leq |F| \leq \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{10^4}{3^4\cdot 64}\cdot 0{,}15 = \frac{10000\cdot 0{,}15}{18^5\cdot 3} = \frac{0{,}05\cdot 10.000}{\ldots}$

1800
1160
2960

$\vee|$
$\frac{1}{10000}$

$18^2 = 324$

$\leq \frac{500}{300\cdot 300\cdot 18}$

$\leq \frac{5}{56\cdot 300} \leq \frac{1}{3000}$

$\leq \frac{1}{\ldots}$

Aufgabe 10

a) $g(x) = \frac{x + e^{x/\pi}}{50} + \frac{x^2 \sin x}{90}$

$I = [-\pi, \pi]$

$g(x) \in I$ für $x \in I$? Wegen der Monotonieeigenschaften von x, x^2, e^x und $|\sin(x)| \le 1$ gilt

$|g(x)| \le \frac{\pi + e}{50} + \frac{\pi^2}{90} \le \frac{4+3}{50} + \frac{10}{90} \le \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0{,}4 \in \pi$,

also $g(x) \in I$ für alle $x \in I$

Lipschitz-Konstante über Ableitung, da $g(x)$ stetig differenzierbar ist:

$g'(x) = \frac{1 + \frac{1}{\pi} e^{x/\pi}}{50} + \frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{90}$

$x \in I: \quad \underbrace{|g'(x)| \le \frac{1}{50} + \frac{e}{\pi \cdot 50}}_{\le 0{,}04} + \frac{2\pi + \pi^2}{90} \underset{\substack{e<\pi \\ 2\pi \le 6{,}5 \\ \pi^2 \le 10}}{\le} \frac{2}{50} + \underbrace{\frac{6{,}5+10}{90}}_{\le \frac{1}{5}}$

$\le 0{,}04 + 0{,}2 \le 0{,}25 = \frac{1}{4}$

Es gilt also $|g'(x)| \le \frac{1}{4}$ für alle $x \in I$

und daher liefert

$g(x_1) - g(x_2) = g'(\xi) \cdot (x_1 - x_2)$ $\quad \xi$ zwischen x_1 und x_2

$|g(x_1) - g(x_2)| \le \frac{1}{4} |x_1 - x_2|$

Es kann also $L = \frac{1}{4}$ als Lipschitzkonstante gewählt werden.

Nach Satz 9.1 des Skripts Mathematik $\underline{IV}$ konvergiert das das Iterationsverfahren $x_{n+1} = g(x_n)$, für jedes $x_0 \in \underline{I}$ gegen den einzigen in I existierenden Fixpunkt $\bar{x}$ mit $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

b) Es ist wegen $g(\bar{x}) = \bar{x}$ $\quad |x_n - \bar{x}| = |g(x_{n-1}) - g(\bar{x})| \le L\,|x_{n-1} - \bar{x}|$

$|x_n - \bar{x}| \le L\,|x_{n-1} - \bar{x}| \le L^n |x_0 - \bar{x}| \le L^n \cdot 2\pi \le 8 \cdot L^n$

also $|x_7 - \bar{x}| \le \frac{2 \cdot 4}{4^7} = \frac{2}{4^6} = \frac{2}{2^{12}} = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048} < \frac{1}{2000}$