Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
11. Juli 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den gesamten Inhalt von Kapitel 7 im Skript.
In dieser Woche gibt es keine Hausübungen, dafür aber ein größere Zahl an Gruppenübungen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Störungstheorie für Eigenwertprobleme)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.
b) Schätzen Sie die Eigenwerte der Matrix $C := A + B$ mit dem Störungssatz 7.1.5 der Vorlesung ab.

Aufgabe G2 (Vektoriteration nach von Mises)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Verfahren nach von Mises ist ein einfaches Vektoriterationsverfahren (vgl. Definition 7.2.1) bei dem die Matrix B gleich A gewählt wird.

(a) Führen Sie vier Iterationen nach von Mises mit dem Startvektor $z^{(0)} = (1,1)^T$ durch (d. h. berechnen Sie $z^{(4)}$ und $R(z^{(3)}, A)$). Verwenden Sie zur Normierung die Maximumsnorm.
(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).
(c) Was folgt aus Satz 7.2.2 über die Güte der Approximation?

Aufgabe G3 (Inverse Vektoriteration nach Wielandt)
Es soll der kleinste Eigenwert der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden.

(a) Führen Sie zwei Iterationen nach Wielandt mit $\mu = -8$ und $z^{(0)} = (1,0)^T$ aus (d. h. berechnen Sie $z^{(2)}$ und $R(z^{(1)}, (A-\mu I)^{-1})$ sowie $\mu + \frac{1}{R(z^{(1)},(A-\mu I)^{-1})}$ als Näherung für den kleinsten Eigenwert).

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).

Aufgabe G4 (Shift-Strategie beim QR-Verfahren)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & -4 & 0 \\ 2 & 5.1 & 3 \\ 2 & 4 & 2.1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie den Wert von q aus Satz 7.3.2 an. Ein Eigenwert von A ist durch 1.1 gegeben.

(b) Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie hieraus mit der im Skript beschriebenen Vorgehensweise einen Shift μ.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A - \mu I$ und den Wert von q aus Satz 7.3.2. Ein Eigenwert der Matrix $A - \mu I$ ist durch 1.27 gegeben.

(d) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. Was hat der Shift in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit bewirkt?

Hinweis: Es ist empfehlenswert, die Eigenwerte nicht von Hand, sondern z.B. mit Matlab zu berechnen. Runden Sie alle (Zwischen-)Ergebnisse in dieser Aufgabe auf zwei Dezimalstellen.

Aufgabe G5 (Gershgorin-Kreise und Bauer/Fike)

Gegeben sei die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie die zur Matrix $\tilde{A}$ gehörenden Gershgorin-Kreise.

(b) Stellen Sie die Matrix $\tilde{A}$ als $\tilde{A} = A + \Delta A$ mit geeigneten Matrizen A und ΔA dar und bestimmen Sie eine Näherung für das Spektrum $\sigma(\tilde{A})$ mit Hilfe des Satzes von Bauer/Fike.

(c) Zeichnen Sie die Ergebnisse aus den beiden ersten Aufgabenteilen und vergleichen Sie die Ergebnisse.