Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14.03.2007

Modulprüfung zur Veranstaltung „Mathematik III für Inf Bsc.“

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punktzahl	5	9	5	5	4	6	34
erreichte Punktzahl							

Eigentum

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze, Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 120 Minuten.
Als Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen jeglicher Art (Bücher, Skripte, Mitschriften usw.) und einfache Taschenrechner, d. h. nicht programmierbare Taschenrechner, die nicht symbolisch rechnen und keine Graphen / Plots anzeigen können, zugelassen.
Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Dieser Aushang wird auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

---

1. Aufgabe (Konfidenzintervalle) (5 Punkte)

Zur Messung ein und desselben Stromes werden 6 baugleiche Amperemeter in Reihe geschaltet. Die Messwerte seien normalverteilt.
Ein Amperemeter dieser Baureihe gilt als *genau*, wenn der Erwartungswert der Messungen im Intervall $[327, 333]$ liegt. Die Messungen der 6 Amperemeter ergaben folgende Werte:

$$324 \text{ mA}, 334 \text{ mA}, 329 \text{ mA}, 331 \text{ mA}, 332 \text{ mA}, 330 \text{ mA}.$$

Bemerkung: Eine Tabelle mit den benötigten Quantilen finden Sie auf dem letzten Blatt der Klausur.

(a) Nehmen Sie an, die Standardabweichung σ_0 sei bekannt. Bestimmen Sie die Länge des Konfidenzintervalls für den Erwartungwert μ zum Konfidenzniveau 0.98 in Abhängigkeit von σ_0. Wie groß darf die Standardabweichung σ_0 eines Amperemeters höchstens sein, damit es mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.98 genau ist?

(b) Nehmen wir nun an, die Standardabweichung sei unbekannt. Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ mit Konfidenzniveau 0.6.

(c) Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob Sie richtig oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antworten.

- Ein Amperemeter mit einer Standardabweichung von 4 mA misst mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.98 genau.
- Ein Amperemeter mit unbekannter Standardabweichung misst mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.6 genau.

2. Aufgabe (Anfangswertproblem) (9 Punkte)

Gegeben seien das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{y}{t} + \frac{1}{t} + 1, \quad t > 0, y(1) = 2,$$

mit der analytischen Lösung $y(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, sowie das folgende einstufige implizite Runge–Kutta–Verfahren $(*)$ mittels des dazugehörigen Butcher–Schemas

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Berechnen Sie zu dem gegebenen Anfangswertproblem die Verfahrensfunktion des gegebenen Runge–Kutta-Verfahrens $(*)$.

b) Berechnen Sie eine Näherung an $y(2)$ mit Schrittweite $\frac{1}{2}$ mit dem gegebenen Runge–Kutta-Verfahren $(*)$.

c) Geben Sie den (globalen) Diskretisierungsfehler des gegebenen Runge–Kutta–Verfahrens $(*)$ in $t = 2$ an.

d) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des gegebenen Runge–Kutta–Verfahrens $(*)$ und überprüfen Sie, ob das Verfahren L–stabil ist.

3. Aufgabe (Schätzer) (5 Punkte)

Um die Präzision einer Waage zu überprüfen, wird n-mal das Gewicht eines Kilogramm-Prototyps gemessen. Die entstehende Messreihe soll als Realisierung von unabhängigen, identisch $N(1, \theta)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekannter Varianz $\theta > 0$ aufgefasst werden.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

b) Ist T_n erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$?

4. Aufgabe (Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren) (5 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es sollen lineare Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^3$ mittels Iterationsverfahren gelöst werden.

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14.03.2007

Modulprüfung zur Veranstaltung „Mathematik III für Inf Bsc.“

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punktzahl	5	9	5	5	4	6	34
erreichte Punktzahl							

Eigentum

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze, Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 120 Minuten.
Als Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen jeglicher Art (Bücher, Skripte, Mitschriften usw.) und einfache Taschenrechner, d. h. nicht programmierbare Taschenrechner, die nicht symbolisch rechnen und keine Graphen / Plots anzeigen können, zugelassen.
Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Dieser Aushang wird auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

---

1. Aufgabe (Konfidenzintervalle) (5 Punkte)

Zur Messung ein und desselben Stromes werden 6 baugleiche Amperemeter in Reihe geschaltet. Die Messwerte seien normalverteilt.
Ein Amperemeter dieser Baureihe gilt als *genau*, wenn der Erwartungswert der Messungen im Intervall $[327, 333]$ liegt. Die Messungen der 6 Amperemeter ergaben folgende Werte:

324 mA, 334 mA, 329 mA, 331 mA, 332 mA, 330 mA.

Bemerkung: Eine Tabelle mit den benötigten Quantilen finden Sie auf dem letzten Blatt der Klausur.

(a) Nehmen Sie an, die Standardabweichung σ_0 sei bekannt. Bestimmen Sie die Länge des Konfidenzintervalls für den Erwartungwert μ zum Konfidenzniveau 0.98 in Abhängigkeit von σ_0. Wie groß darf die Standardabweichung σ_0 eines Amperemeters höchstens sein, damit es mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.98 genau ist?

(b) Nehmen wir nun an, die Standardabweichung sei unbekannt. Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ mit Konfidenzniveau 0.6.

(c) Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob Sie richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

- Ein Amperemeter mit einer Standardabweichung von 4 mA misst mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.98 genau.
- Ein Amperemeter mit unbekannter Standardabweichung misst mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.6 genau.

2. Aufgabe (Anfangswertproblem) (9 Punkte)

Gegeben seien das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{y}{t} + \frac{1}{t} + 1, \quad t > 0, \; y(1) = 2,$$

mit der analytischen Lösung $y(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, sowie das folgende einstufige implizite Runge-Kutta-Verfahren $(*)$ mittels des dazugehörigen Butcher-Schemas

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Berechnen Sie zu dem gegebenen Anfangswertproblem die Verfahrensfunktion des gegebenen Runge–Kutta-Verfahrens $(*)$.

b) Berechnen Sie eine Näherung an $y(2)$ mit Schrittweite $\frac{1}{2}$ mit dem gegebenen Runge–Kutta-Verfahren $(*)$.

c) Geben Sie den (globalen) Diskretisierungsfehler des gegebenen Runge–Kutta-Verfahrens $(*)$ in $t = 2$ an.

d) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des gegebenen Runge–Kutta-Verfahrens $(*)$ und überprüfen Sie, ob das Verfahren L–stabil ist.

3. Aufgabe (Schätzer) (5 Punkte)

Um die Präzision einer Waage zu überprüfen, wird n-mal das Gewicht eines Kilogramm-Prototyps gemessen. Die entstehende Messreihe soll als Realisierung von unabhängigen, identisch $N(1, \theta)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekannter Varianz $\theta > 0$ aufgefasst werden.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

b) Ist T_n erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$?

4. Aufgabe (Jacobi– und Gauß–Seidel–Verfahren) (5 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es sollen lineare Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^3$ mittels Iterationsverfahren gelöst werden.

a) Berechnen Sie die Iterationsmatrix für das Jacobi–Verfahren und beurteilen Sie, ob das Jacobi–Verfahren für alle Startwerte $x^0 \in \mathbb{R}^3$ konvergiert.

b) Berechnen Sie die Iterationsmatrix für das Gauß–Seidel–Verfahren. Beurteilen Sie, ob das Gauß–Seidel–Verfahren für alle Startwerte $x^0 \in \mathbb{R}^3$ konvergiert.

c) Wenn wir davon ausgehen, dass das Gauß–Seidel–Verfahren konvergiert, ist es dann aus numerischer Sicht sinnvoll, dieses Verfahren auf das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^3$ und A wie oben anzuwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

. Aufgabe (Dichte, Verteilungsfunktion) (4 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(|X| \leq 2)$? Vergleichen Sie den ermittelten exakten Wert mit der unteren Schranke, welche die Ungleichung von Tschebyscheff für diese Wahrscheinlichkeit liefert.
Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass $E(X) = 0$ und $Var(X) = 2$.

5. Aufgabe (Quadratur) (6 Punkte)

a) Berechnen Sie mit der summierten Trapezregel eine Annäherung an das Integral $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$, indem Sie das Intervall in zwei gleich große Teilintervalle zerlegen.

b) Bis zu welchem Grad werden Polynome auf dem Intervall $[0, \pi]$ mit der summierten Trapezregel mit zwei gleich großen Teilintervallen auf $[0, \pi]$ exakt integriert? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie für die summierte Trapezregel eine möglichst minimale Anzahl m von Teilintervallen an, so dass der Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(\sin^2(x)) = \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$ höchstens 10^{-3} beträgt.