Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18.03.2009

Modulprüfung zur Veranstaltung
„Mathematik III für Bsc. Inf / Mathematik IV für Bsc. IST (PO 07), CE (PO 07), Bsc. ETiT, Bsc. Mechatr., Numerik und Stochastik für M. Ed,“

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punktzahl	3	4	4	5	6	5	3	30
erreichte Punktzahl								

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben (außer bei Multiple-Choice Aufgaben) müssen alle verwendeten Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 90 Minuten.
Als Hilfsmittel sind vier eigenhandschriftliche DIN-A4 Seiten und einfache Taschenrechner zugelassen.
Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Informationen zum Aushang werden auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

1. Aufgabe (Kondition und Fehler) (3 Punkte)

Gesucht sei die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_{\|.\|_\infty}(A)$.

(b) Die Lösung x werde approximiert durch die Lösung $\tilde{x}$ von $A\tilde{x} = \tilde{b}$ mit

$$\|\tilde{b} - b\|_\infty = \|\Delta b\|_\infty \leq 0.001.$$

Schätzen Sie den relativen Fehler der Approximation $\tilde{x}$ in der Norm $\|.\|_\infty$ ab!

2. Aufgabe (Inverse Interpolation) (4 Punkte)

Von einer Funktion $y = f(x)$ seien die folgenden Funktionswerte gegeben:

x	1	2	5
y	1	2	a

(a) Für welche Werte a kann eine Umkehrfunktion existieren?

(b) Geben Sie für den Fall $a = 4$ mittels inverser Interpolation eine Näherung x^* der Nullstelle von f an.

3. Aufgabe (Exaktheit der Quadratur) (4 Punkte)

Gegeben sei die Quadraturformel

$$J(f) = \tfrac{b-a}{10}\left(f(a) + 4f(a + \tfrac{b-a}{3}) + 4f(b - \tfrac{b-a}{3}) + f(b)\right).$$

Prüfen Sie nach, bis zu welchem Grad k die Formel zur Berechnung des Integrals $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ exakt ist, d.h., $I(f) = J(f)$ für alle Polynome vom Grad kleinergleich k.

4. Aufgabe (Maximum-Likelihood-Schätzer) (5 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien positiv, unabhängig und identisch verteilt wie X. Für einen Parameter $\theta > 0$ sei die Dichte der Zufallsvariablen X gegeben durch

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

5. Aufgabe (Verteilung) (6 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases},$$

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\frac{1}{2} < X < 1)$.

(b) Zeigen Sie, dass $E(X) = 0.8$ gilt.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Tschebyschevschen Ungleichung eine Unterschranke für die Wahrscheinlichkeit $P(0.6 < X < 1)$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis $Var(X) = \frac{2}{75}$ verwenden.

6. Aufgabe (Anfangswertproblem) (5 Punkte)

Gegeben sei das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen Runge-Kutta Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um von $t_i, u_i \approx y(t_i)$ ausgehend u_{i+1} zu berechnen?

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t + 3y(t) \,, \quad y(1) = 2.$$

Berechnen Sie mit dem oben beschriebenen Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite $h = 1/2$ eine Näherung für $y(2)$.

Bitte wenden: Multiple Choice Aufgabe auf der Rückseite!

7. Aufgabe (Multiple Choice: Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme) (3 Punkte)

Bei den Multiple Choice Aufgaben darf pro Frage höchstens eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es Null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

Multiple Choice: Gruppe A:
(Dieses Blatt darf nur vor Ihnen offen herumliegen, wenn Sie daran arbeiten!)

Wir betrachten lineare Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann

- ○ konvergieren sowohl das Jacobi– als auch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ konvergieren weder das Jacobi– noch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ konvergiert das Jacobi–Verfahren, aber das Gauss–Seidel–Verfahren nicht.
- ○ konvergiert das Gauss–Seidel–Verfahren, aber das Jacobi–Verfahren nicht.

(b) Es seien folgende Iterationsmatrizen M_J für das Jacobi– bzw. M_{GS} für das Gauss–Seidel–Verfahren

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann

- ○ konvergiert das Jacobi–Verfahren, aber das Gauss–Seidel–Verfahren nicht.
- ○ kann man ohne Kenntnis der Matrix A keine Aussage über die Konvergenz des Jacobi– bzw. des Gauss–Seidel–Verfahrens machen.
- ○ konvergieren weder das Jacobi– noch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ konvergiert das Gauss–Seidel–Verfahren, aber das Jacobi–Verfahren nicht.
- ○ konvergieren sowohl das Jacobi– als auch das Gauss–Seidel–Verfahren.

(c) Die Komponenten $x_i^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, n$, der $(k+1)$-ten Iterierten beim Lösen der Iterationsvorschrift $Bx^{(k+1)} = (B - A)x^{(k)} + b$ können unabhängig voneinander berechnet werden

- ○ weder beim Jacobi– noch beim Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ beim Gauss–Seidel–Verfahren aber nicht beim Jacobi–Verfahren.
- ○ sowohl beim Jacobi– als auch beim Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ beim Jacobi–Verfahren aber nicht beim Gauss–Seidel–Verfahren.