Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. E. Cramer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Juli 2004

Klausur zur Veranstaltung
Mathematik IV für ETiT, WI(ET), iKT(Bsc)
SS 2004

NAME: .... MATRIKELNR.: ....

VORNAME: .... STUDIENGANG: ....

SCHEIN: JA ☐ NEIN ☐

Markieren Sie bitte den Namen Ihres Übungsleiters:

Sonja Knierim, Erik Kropat, kein Übungsleiter.

AUFGABE	1	2	3	4	Σ
ERREICHBAR	10	10	10	10	40
ERREICHT					

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts JETZT und in BLOCKSCHRIFT (GROSSBUCHSTABEN) aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und numerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal in der Mitte und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Sie dürfen Bücher, Skripten, eigene Notizen, Aufgabenblätter, deren Lösungen und einfache Taschenrechner verwenden.

Sie dürfen die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge bearbeiten.

Bedenken Sie, daß alle Ergebnisse zu begründen sind. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. **(10 Punkte)**

Gegeben sei die positiv definite und symmetrische *Tridiagonalmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & e \\ b & 3 & -1 \\ c & d & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Verwenden Sie einen Satz der Vorlesung um zu entscheiden, für welche Wahl der reellen Parameter a, b, c, d, e das SOR-Verfahren für alle $\omega \in (0, 2)$ konvergiert.

b) Es sei nun $a = 1$. Bestimmen Sie mit den in Aufgabenteil a) erhaltenen Werten für b, c, d, e den optimalen Relaxationsparameter ω_L.

c) Führen Sie für die gleiche Parameterwahl wie in Aufgabenteil b) bezüglich des Relaxationsparameters $\omega = \frac{1}{2}$ **einen Schritt** des SOR-Verfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

durch, wobei der Startvektor

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu verwenden ist.

Aufgabe 2. **(10 Punkte)**

Es sei das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{l} y'(x) = f(x, y) = -2\,y(x) \text{ für } x \in [0, 2] \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des expliziten und des impliziten Euler-Verfahrens Näherungswerte für $N = 3$.

b) Geben Sie die exakte Lösung an und skizzieren Sie diese.

c) Entscheiden Sie, welches der beiden Verfahren das qualitative Verhalten der exakten Lösung besser wiedergibt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. **(10 Punkte)**

a) Gegeben seien Datenpunkte $(x_i, y_i), i = 1, ..., n$. Durch diese Punkte soll eine Gerade $g(x) = ax + b$ so gelegt werden, dass sie durch den Ursprung geht ($g(0) = 0$) und die Summe der Fehlerquadrate

$$r = \sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird. Bestimmen Sie die entsprechenden Koeffizienten a und b.

b) In einem Experiment zur Bestimmung eines Widerstands wurden folgende Daten für die Stromstärke und die Spannung ermittelt:

i	1	2	3	4
I_i	0.1	0.15	0.16	0.2
U_i	15	24	30	31

Bestimmen Sie mit Hilfe von a) eine Näherung für den Wert des Widerstands.

Hinweis: Nach dem Ohmschen Gesetz gilt $U = R \cdot I$.

Aufgabe 4. **(10 Punkte)**

Eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^a} & \text{, falls } x > 1 \\ 0 & \text{, falls } x \leq 1 \end{cases}$$

heißt *Pareto-verteilt* (mit Parameter $a > 0$).

a) Ermitteln Sie den Erwartungswert von X. Welche Voraussetzung müssen Sie hierbei bezüglich des Parameters a erheben?

b) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch Pareto-verteilt. Bestimmen Sie für Messreihen mit Messwerten größer als 1 einen Maximum-Likelihood-Schätzwert für den Parameter a.