Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SoSe 2008
04.06.2008

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE,iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Gruppenübung

Lösung zur Aufgabe G25 (Stabilitätsbereich)

(a) Zum Bestimmen der Stabilitätsfunktion wendet man das Verfahren auf das Modellproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1 \quad \text{mit } \lambda \in \mathbf{C} \text{ und } \Re(\lambda) < 0$$

an. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_j, u_j) = \lambda u_j, \\
k_2 &= f\left(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_1\right) = \lambda\left(u_j + \tfrac{h}{2}k_1\right) = \left(\lambda + \tfrac{h\lambda^2}{2}\right) u_j, \\
k_3 &= f\left(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_2\right) = \lambda\left(u_j + \tfrac{h}{2}k_2\right) = \left(\lambda + \tfrac{h\lambda^2}{2} + \tfrac{h^2\lambda^3}{4}\right) u_j, \\
k_4 &= f(t_{j+1}, u_j + hk_3) = \lambda\left(u_j + hk_3\right) = \left(\lambda + h\lambda^2 + \tfrac{h^2\lambda^3}{2} + \tfrac{h^3\lambda^4}{4}\right) u_j.
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}
u_{j+1} &= u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= \left(1 + \frac{h\lambda}{6} + \frac{2h\lambda}{6} + \frac{h^2\lambda^2}{6} + \frac{2h\lambda}{6} + \frac{h^2\lambda^2}{6} + \frac{h^3\lambda^3}{12} + \frac{h\lambda}{6} + \frac{h^2\lambda^2}{6} + \frac{h^3\lambda^3}{12} + \frac{h^4\lambda^4}{24}\right) u_j \\
&= \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{6} + \frac{h^4\lambda^4}{24}\right) u_j,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

(b) Für $q = -10$ gilt

$$|R(q)| = \left|1 - 10 + \frac{100}{2} - \frac{1000}{6} + \frac{10000}{24}\right| = 291 > 1.$$

Daher ist das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung nicht L-stabil.

Lösung zur Aufgabe G26 (Differenzenverfahren)

(a) Mit der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ erhält man die Stützstellen

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2}{3}, \quad t_3 = 1.$$

Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung gilt

$$q(t) = 1 \quad \text{und} \quad g(t) = t(t^2 - 6).$$

Daraus folgt

$$q_1 = q_2 = 1 \quad \text{und} \quad g_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - 6\right) = -\frac{53}{27}, \quad g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} - 6\right) = -\frac{100}{27}.$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung der Näherungen der Funktionswerte an den Stützstellen lautet dann

$$9\begin{pmatrix} 2+\frac{1}{9} & -1 \\ -1 & 2+\frac{1}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{53}{27} \\ -\frac{100}{27}+9 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 19 & -9 \\ -9 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{53}{27} \\ \frac{143}{27} \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Die exakte Lösung des Randwertproblems ist $y(t) = t^3$. Daraus folgt

$$y(t_1) = y(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{27} = u_1 \quad \text{und} \quad y(t_2) = y(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{8}{27} = u_2.$$

Die Näherungslösung stimmt also mit der exakten Lösung überein. Der Grund hierfür ist, daß der Diskretisierungsfehler verschwindet, denn es gilt für $t \in \mathbf{R}$ und $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} &= \frac{(t+h)^3 - 2t^3 + (t-h)^3}{h^2} \\ &= \frac{t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - 2t^3 + t^3 - 3t^2h + 3th^2 - h^3}{h^2} \\ &= 6t = y''(t). \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe G27 (Ritzverfahren)

Bei diesem Problem gilt gemäß der Notation im Skript $q(t) = 1$ und $g(t) = t$. Es ist ausserdem

$$\phi_1(t) = t(1-t) = t - t^2, \phi_2(t) = t^2(1-t) = t^2 - t^3, \phi_1'(t) = 1 - 2t, \phi_2'(t) = 2t - 3t^2.$$

Der Ansatz

$$u_h(t) \ = u_1\phi_1(t) \ + u_2\phi_2(t)$$

führt auf das lineare Gleichungssystem $Au = c$ mit:

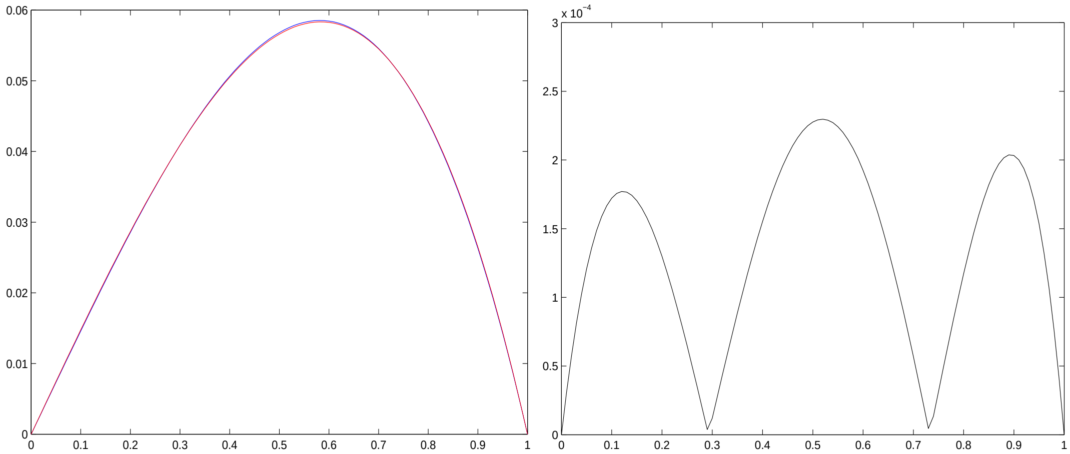
$$a_{ij} \ = \ \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x) + \phi_j(x)\phi_i(x)\,dx\ , \qquad c_i \ = \ \int_0^1 x\phi_i(x)\,dx,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{30} & \frac{11}{60} \\ \frac{11}{60} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 = \frac{69}{473}\,, \quad u_2 = \frac{7}{43}.$$

Als Lösung ergibt sich

$$u_h(t) = t(1-t)\left(\frac{69}{473} + \frac{7}{43}t\right).$$

In der folgenden Skizzen zeigen die rote exakte Lsg. und die blaue Näherung, die sehr nah beieinander liegen und den Verlauf des Fehlers $|y(t) - u_h(t)|$ im Intervall $[0, 1]$:



$u_h(t)$ (blau), $y(t)$ (rot) Fehler $|y(t) - u_h(t)|$

Hausübung

Lösung zur Aufgabe H25 (Stabilitätsbereich)

Zum Nachweis der L-Stabilität muß das Stabilitätsgebiet

$$S = \{z \in \mathbf{C} : |R(z)| < 1\}.$$

bestimmt werden. Dabei ist $R(z)$ die Stabilitätsfunktion, die sich ergibt, wenn man das zu untersuchende Verfahren auf die Testgleichung $y' = \lambda y$ anwendet und die entstehende Gleichung in der Form

$$u_{i+1} = R(h \cdot \lambda) u_i$$

schreibt. Das Verfahren heißt genau dann L-stabil, wenn

$$S \supset \{q \in \mathbf{C} : Re(q) < 0\}.$$

Durch Anwenden von

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 & = & f(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{4}hk_1) \\ k_2 & = & f(x + \frac{3}{4}h, y + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2) \\ \Phi & = & \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{array} \right.$$

auf die Testgleichung $y' = \lambda y$ erhält man

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda(y + \frac{1}{4}hk_1) \\ k_2 &= \lambda\left(y + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2\right). \end{aligned}$$

Auflösen nach k_1 und k_2

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda}{1-\frac{1}{4}\lambda h} y_i \\ k_2 &= \frac{(1+\frac{1}{4}\lambda h)\lambda y_i}{(1-\frac{1}{4}\lambda h)^2} \end{aligned}$$

und Einsetzen in Φ ergibt

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h\Phi \\ &= y_i + \frac{h}{2}(k_1+k_2) \\ &= y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{\lambda}{1-\frac{1}{4}\lambda h} y_i + \frac{(1+\frac{1}{4}\lambda h)\lambda y_i}{(1-\frac{1}{4}\lambda h)^2}\right) \\ &= y_i + \frac{h}{2}\cdot\frac{(1-\frac{1}{4}\lambda h)\lambda + (1+\frac{1}{4}\lambda h)\lambda}{(1-\frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\ &= y_i + \frac{h}{2}\cdot\frac{2\lambda}{(1-\frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\ &= y_i + \frac{h\lambda}{(1-\frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\ &= \frac{(1-\frac{1}{4}\lambda h)^2 + h\lambda}{(1-\frac{1}{4}\lambda h)^2}) y_i \\ &= \frac{(1+\frac{1}{4}\lambda h)^2}{(1-\frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \end{aligned}$$

Damit lautet die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \frac{(1+\frac{1}{4}z)^2}{(1-\frac{1}{4}z)^2}$$

Das Stabilitätsgebiet ist durch alle komplexen Zahlen gegeben, die die Bedingung

$$\left|\frac{(1+\frac{1}{4}z)^2}{(1-\frac{1}{4}z)^2}\right| < 1,$$

bzw.

$$|(z+4)^2| < |(z-4)^2|.$$

bzw.

$$|z+4| < |z-4|.$$

erfüllen. Geometrisch kann man dies in der komplexen Zahlenebene interpretieren als die Menge der Punkte, deren Abstand von der Zahl -4 (Abstand = $|z+4|$) echt kleiner ist der Abstand zum Punkt 4 (Abstand = $|z-4|$). Dies sind aber genau die Punkte, deren Realteil $Re(z) < 0$ ist. Damit ist das Verfahren L-stabil.

Lösung zur Aufgabe H26 (Ritzverfahren)

Gemäß der Notation der Vorlesung ist bei dieser Randwertaufgabe

$$q(t) = 1, \quad g(t) = -t, \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Wie in Aufgabe G30 wird beim Variationsverfahren mit Finiten Elementen ein Gleichungssystem aufgestellt:

$$A\bar{u} = c,$$

mit $A = (\alpha(\Phi_i, \Phi_j))$ und $c_i = (g, \Phi_i)$. Allerdings verwenden wir hier die oben angegebenen linearen Basisfunktionen. Damit berechnen sich die Einträge der Steifigkeitsmatrix A folgendermaßen:

$$\begin{aligned} a_{ii} = \alpha(\phi_i, \phi_i) &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tfrac{1}{h^2} + \tfrac{1}{h^2}(t - t_{i-1})^2 dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \tfrac{1}{h^2} + \tfrac{1}{h^2}(t_{i+1} - t)^2 dt = \tfrac{2}{h} + \tfrac{2}{3}h \\ a_{i,i-1} = \alpha(\phi_i, \phi_{i-1}) &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} -\tfrac{1}{h^2} + \tfrac{1}{h^2}(t_i - t))(t - t_{i-1}) dt = -\tfrac{1}{h} + \tfrac{1}{6}h. \end{aligned}$$

Da A symmetrisch ist, gilt $a_{i,i-1} = a_{i,i+1}$. Aufgrund der Definition der Basisfunkionen überlegt man sich leicht, dass alle Einträge a_{ij} der Matrix Null sein müssen, für $j \notin \{i-1, i, i+1\}$. Die rechte Seite des Gleichungssystems berechnet sich zu:

$$c_i = \int_{t_{j-1}}^{t_j} -\frac{t}{h}(t - t_{i-1}) dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} -\frac{t}{h}(t_{i+1} - t) dt = -ht_i = -ih^2.$$

Das LGS lautet also:

$$\left(\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = -h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$