Modulprüfung

Mathematik IV für Elektrotechnik
Mathematik III für Informatik
Numerik und Stochastik für M. Edu

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

21. September 2011

Name: ______________________ Matrikelnummer: ␣␣␣␣␣␣␣

Vorname: ______________________ Studiengang: ______________

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punktzahl	6	6	6	8	4	30
erreichte Punktzahl						

Bitte **alle Blätter** mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Ende der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze, Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.

Die Klausurdauer beträgt 90 Minuten.

Als Hilfsmittel sind vier eigenhandschriftliche DIN-A4-Seiten und Taschenrechner zugelassen. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.

Es werden ca. 4 Wochen Korrekturzeit benötigt. Über den Aushang der Ergebnisse und den Termin der Klausureinsicht informieren wir Sie auf der Fachbereichs-Webseite zur Veranstaltung "Mathematik IV f. ET" im Sommersemester 2011.

Aufgabe 1 (Anfangswertaufgabe)

Gegeben sei folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \hline & 1 \end{array} \tag{$*$}$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen impliziten Runge-Kutta-Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um eine Näherung u_{j+1} an $y(t_{i+1})$ von $u_j \approx y(t_j)$ aus zu berechnen?

b) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion für $(*)$ und prüfen Sie, ob das Verfahren L-stabil ist.

c) Es sei weiter das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t y(t), \quad y(1) = 2 \tag{$**$}$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + \log(2)}$ gegeben. Berechnen Sie unter Verwendung des durch das Butcher-Tableau $(*)$ gegebenen Runge-Kutta-Verfahrens für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ eine Näherung an $y(2)$ für $(**)$. Runden Sie dabei die Endergebnisse auf vier Stellen nach dem Komma.

d) Beurteilen Sie die Genauigkeit Ihrer Approximation aus Teil c).

Aufgabe 2 (Quadratur)

Es soll eine Näherung für das Integral

$$I(f) := \int_0^1 f(t)\,dt \qquad \text{mit} \qquad f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

bestimmt werden.

a) Berechnen Sie unter Verwendung der summierten Simpson-Regel eine Näherung $S_N^{(2)}(f)$ für $I(f)$, indem Sie das Intervall $[0,1]$ in zwei gleichgroße Teilintervalle aufteilen. Runden Sie dabei die Endergebnisse auf vier Stellen nach dem Komma.

b) Bestimmen Sie für die summierte Simpson-Regel eine möglichst kleine Anzahl m von Teilintervallen, sodass für den Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(f)$ die Abschätzung $\left|R_N^{(2)}(f)\right| \leq 10^{-3}$ gilt. **Verwenden Sie dazu die Ihnen aus der Vorlesung bekannte Abschätzung für den Quadraturfehler.**

   Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgende Ableitungen verwenden

$$f'(t) = -\,t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad f''(t) = (t^2-1)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad f'''(t) = (-t^3+3t)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f^{(4)}(t) = (t^4-6t^2+3)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad f^{(5)}(t) = (-t^5+10t^3-15t)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad f^{(6)}(t) = (t^6-15t^4+45t^2-15)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

c) Verwenden Sie die angehängte Tabelle mit den Werten der Standard-Normalverteilung um den **exakten** Fehler in Aufgabenteil a) zu berechnen.

Aufgabe 3 (Schätzer)

a) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{3}{x\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{9}{2}(\theta - \ln x)^2} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   mit einem Parameter $\theta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $Y_1 = \ln X_1$ normalverteilt ist. Ferner bestimmen Sie $E_\theta(Y_1)$.

c) Nehmen Sie an $E_\theta(Y_1) = \theta$. Zeigen Sie, dass

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k$$

   ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

Aufgabe 4 (Verteilung)

Der Kern eines Transformators besteht aus 25 Blechen mit je einer Isolierschicht (einseitig). Die Dicken der Bleche und der Isolierschichten seien durch Zufallsvariablen X_j bzw. Y_j, $j = 1, \dots, 25$ beschrieben. Die Zufallsvariablen $X_1, \dots X_{25}, Y_1, \dots, Y_{25}$ seien unabhängig normalverteilt. Die Standardabweichung der Bleche betrage 0.04 mm, die Standardabweichung der Isolierschichten 0.03 mm.

a) Es sei bekannt, dass die Erwartungswerte 0.8 mm bzw. 0.2 mm sind.

   a1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Blech zusammen mit einer Isolierschicht dicker als 1.04 mm ist?

   a2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kern dicker als die Spulenöffnung von 25.5 mm ist?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Summe zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist.

b) Der Erwartungswert für die Dicke der Bleche sei nun unbekannt. Es soll die Mindestzahl von durchzuführenden Stichproben ermittelt werden, sodass die Differenz zwischen Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.98 kleiner als 0.01 mm ist.

Rechnen Sie im Folgenden mit 4 Nachkommastellen.

b1) Bestimmen Sie eine obere Schranke für diese Anzahl durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung.

b2) Bestimmen Sie die gesuchte Anzahl exakt.

Aufgabe 5 (Multiple Choice)

Pro Frage darf **eine Antwort** angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt.

a) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten -1, 3 und 5. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Die Vektoriteration nach von Mises liefert eine Annäherung an den Eigenwert -1 von A
- ☐ Die inverse Vektoriteration von Wielandt mit $\mu = -3$ liefert eine Näherung an den Eigenwert -1
- ☐ Die inverse Vektoriteration von Wielandt mit $\mu = -3$ liefert eine Näherung an den Eigenwert 3

b) Sei s ein kubischer Spline mit vier Knoten und p ein Interpolationspolynom vom Grad 3 zu den gleichen vier Knoten auf dem Intervall $[a, b]$.

- ☐ Dann stimmen in den Knoten die Funktionen s und p, sowie s' und p' überein
- ☐ Dann stimmen s und p auf $[a, b]$ überein.
- ☐ Dann gilt, dass s und p in den vier Knoten übereinstimmen; s und p stimmen aber nicht notwendigerweise überall auf $[a, b]$ überein. Außerdem stimmen s' und p' im Allgemeinen nicht überein.

c) Ein Interpolationspolynom $p_{n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n+1$, das die Interpolationsbedingung $p_{n+1}(x_i) = y_i,\ i = 0, \dots, n$ für die Stützpunkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2,\ i = 0, \dots, n,\ x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, erfüllt,

- ☐ existiert immer und ist immer eindeutig.
- ☐ existiert immer, ist aber nicht immer eindeutig.
- ☐ existiert nicht immer.

d) Wenn man ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer Zufallsvariable X unter Normalverteilungsannahme bei einem Stichprobenumfang von n bestimmen möchte und sowohl das arithmetische Mittel, die Stichprobenvarianz als auch die Varianz von X bekannt sind, wie soll man am besten das Konfidenzintervall bestimmen?

- ☐ Mit Hilfe der Stichprobenvarianz und des Quantils der Normalverteilung
- ☐ Mit Hilfe der Stichprobenvarianz und des Quantils der t_{n-1}-Verteilung
- ☐ Mit Hilfe der Varianz und des Quantils der Normalverteilung