Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

05.03.2008

Modulprüfung

„Mathematik III für Bsc. Inf / Mathematik IV für IST (PO 07), Bsc. ETiT, CE (PO 07)"

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punktzahl	9	6	3	6	6	30
erreichte Punktzahl						

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze, Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 90 Minuten.
Als Hilfsmittel sind vier eigenhandschriftliche DIN-A4 Seiten und einfache Taschenrechner zugelassen. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Informationen zum Aushang werden auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

1. Aufgabe (Anfangswertproblem) (9 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y'(t) = t^3 y(t) \quad , \qquad y(1) = e^{\frac{1}{4}},$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^4}{4}}$, und zudem die folgende modifizierte Mittelpunktregel

$$(M) \qquad u_{j+1} = u_j + hf(t_j + \tfrac{6}{11}h, \tfrac{5}{11}u_j + \tfrac{6}{11}u_{j+1})$$

zur Lösung von Anfangswertproblemen der Form $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, $y(a) = y_0$.

a) Berechnen Sie jeweils mit dem expliziten Euler-Verfahren und der modifizierten Mittelpunktregel (M) für die Schrittweite $h = \frac{1}{10}$ Näherungen an $y(1.3)$ für $(*)$. Runden Sie dabei die Endergebnisse auf vier Stellen nach dem Komma.

b) Beurteilen Sie die Qualität der erzielten Näherungswerte.

c) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion für die modifizierte Mittelpunktregel (M) und prüfen Sie, ob das Verfahren L–stabil ist.
Hinweis: Zur Abschätzung des Stabilitätskriteriums ist es hilfreich, mit Real– und Imaginärteil zu rechnen.

2. Aufgabe (Quadratur) (6 Punkte)

a) Berechnen Sie mit der summierten Trapezregel eine Annäherung an das Integral

$$\int_0^1 e^t \cos t \, dt \,,$$

indem Sie das Integrationsintervall in drei gleich große Teilintervalle zerlegen.

b) Leiten Sie mittels Fehlerabschätzung für die summierte Trapezregel eine möglichst minimale Anzahl m von Teilintervallen her, so dass der Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(e^t \cos t) = \int_0^1 e^t \cos t \, dt$ höchstens 10^{-3} beträgt.

Runden Sie bei Ihren Berechnungen auf fünf Stellen nach dem Komma.

3. Aufgabe (Multiple Choice: Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme) (3 Punkte)

Bei diesen Multiple Choice Aufgaben darf pro Frage höchstens eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es Null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

Wir betrachten lineare Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann

- ○ konvergieren sowohl das Jacobi– als auch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ konvergieren weder das Jacobi– noch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ○ konvergiert das Jacobi–Verfahren, aber das Gauss–Seidel–Verfahren nicht.
- ○ konvergiert das Gauss–Seidel–Verfahren, aber das Jacobi–Verfahren nicht.

(b) Es seien folgende Iterationsmatrizen M_J für das Jacobi– bzw. M_{GS} für das Gauss–Seidel–Verfahren

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann

- ◯ kann man ohne Kenntnis der Matrix A keine Aussage über die Konvergenz des Jacobi– bzw. des Gauss–Seidel–Verfahrens machen.
- ◯ konvergieren sowohl das Jacobi– als auch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ◯ konvergieren weder das Jacobi– noch das Gauss–Seidel–Verfahren.
- ◯ konvergiert das Jacobi–Verfahren, aber das Gauss–Seidel–Verfahren nicht.
- ◯ konvergiert das Gauss–Seidel–Verfahren, aber das Jacobi–Verfahren nicht.

(c) Die Komponenten $x_i^{(k+1)}$, $i = 1, ..., n$, der $(k+1)$-ten Iterierten beim Lösen der Iterationsvorschrift $Bx^{(k+1)} = (B - A)x^{(k)} + b$ können unabhängig voneinander berechnet werden

- ◯ sowohl beim Jacobi– als auch beim Gauss–Seidel–Verfahren.
- ◯ weder beim Jacobi– noch beim Gauss–Seidel–Verfahren.
- ◯ beim Jacobi–Verfahren aber nicht beim Gauss–Seidel–Verfahren.
- ◯ beim Gauss–Seidel–Verfahren aber nicht beim Jacobi–Verfahren.

4. Aufgabe (Konfidenzintervalle) (6 Punkte)

Es werden Kondensatoren produziert, deren Kapazität als normalverteilt angenommen wird. Ein Kondensator genügt den Qualitätsanforderungen, wenn seine Kapazität (in nF) im Intervall [32,34] liegt. Im Rahmen der Qualitätskontrolle entnimmt ein Hersteller von Kondensatoren aus der laufenden Produktion eine Stichprobe und misst folgende Kapazitäten: [Einheit: nF]

31.5 33.5 32.5 33 34.5

Bemerkung: Eine Tabelle mit den benötigten Quantilen finden Sie auf dem letzten Blatt der Klausur.

(a) Nehmen Sie an, die Standardabweichung sei unbekannt. Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ mit Konfidenzniveau 0.8.

(b) Nehmen Sie nun an, die Standardabweichung σ_0 sei bekannt. Bestimmen Sie das Konfidenzintervalls für den Erwartungwert μ zum Konfidenzniveau 0.95 in Abhängigkeit von σ_0.
Wie groß darf die Standardabweichung σ_0 der Kapazität eines Kondensators höchstens sein, damit dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 den Qualitätsanforderungen genügt?

(c) Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen, ob Sie richtig oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antworten.

1) Ein Kondensator, dessen Kapazität eine Standardabweichung von 1.5 nF besitzt, besteht mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 die Qualitätskontrolle.
2) Ein Kondensator, für dessen Kapazität die Standardabweichung unbekannt ist, besteht mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.8 die Qualitätskontrolle.

5. Aufgabe (Verteilung) (6 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases},$$

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\frac{1}{2} < X < 1)$.

(b) Zeigen Sie, dass $E(X) = \frac{3}{4}$ gilt.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Tschebyschevschen Ungleichung eine Unterschranke für die Wahrscheinlichkeit $P(\frac{1}{2} < X < 1)$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis $Var(X) = \frac{3}{80}$ verwenden.