

# Mathematik IV f. Elektrotechnik

# Mathematik III f. Informatik

## 1. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Martin Kiehl  
Davorin Lešnik, Ph.D.  
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012  
18. April 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 8 bis einschließlich Abschnitt 8.3 im Skript.

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1 (Verteilungsfunktion, Maßzahlen)

In einer Automobilfabrik wurden bei 20 Fahrzeugen eines Typs folgende Höchstgeschwindigkeiten gemessen:

141, 142, 143, 144, 144, 144, 145, 145, 146, 147, 147, 148, 150, 150, 151, 151, 152, 138, 140, 141

(a) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe.

(b) Zeichnen Sie ein Histogramm mit Klasseneinteilung

$$(\nu - 1, \nu + 1], \quad \nu = 138, 140, 142, 144, 146, 148, 150, 152.$$

(c) Berechnen Sie den Median, das arithmetische Mittel, das p-Quantil für  $p = 0.25$  und  $p = 0.75$ .

(d) Berechnen Sie die empirische Varianz und die empirische Streuung für die **verkleinerte Stichprobe**, bestehend aus den ersten 7 Messwerten.

(e) Angenommen bei der Übertragung der Messdaten ist ein Fehler passiert und es wurde bei einer der Messungen statt 145 km/h 345 km/h übertragen. Welche Auswirkung hat das auf die in Aufgabe (c) und (d) berechneten Maßzahlen?

#### Aufgabe G2 (Zweidimensionale Messreihen)

Im Vorfeld der Fußball-Weltmeisterschaft der Frauen brachte ein Fachmagazin im vergangenen Jahr ein Sonderheft mit den Steckbriefen der Spielerinnen heraus. Diese enthalten neben Informationen zu Alter, Position und Vereinszugehörigkeit auch Angaben zu Größe und Gewicht. Bei der Erhebung der Daten erhielt man folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5	6
Größe (in cm): $x_i$	174	170	172	167	170	175
Gewicht (in kg): $y_i$	69	64	68	57	63	71

- a) Stellen Sie die Messergebnisse in einem Punktediagramm dar.
- b) Ein Teil der Steckbriefe ist nicht ganz vollständig. Bei manchen fehlt die Angabe zum Körpergewicht. Um trotzdem einen Wert im Heft angeben zu können, möchten die Redakteure durch lineare Regression einen plausiblen Wert für das Gewicht aus der Körpergröße ermitteln.

Berechnen Sie die empirischen Streuungen, die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten dieser zweidimensionalen Messreihe. Ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Größe und Gewicht hier gerechtfertigt? Warum?

- c) Wir nehmen nun an, ein linearer Zusammenhang sei begründet. Berechnen Sie die Regressionsgerade zur Vorhersage des Gewichts an Hand der Größe einer Fußballspielerin und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm.
- d) Bestimmen Sie einen Vorhersagewert für das Gewicht einer Fußballspielerin bei einer Größe von 168 cm.
- e) Eine weitere Fußballspielerin ist 155 cm groß und wiegt 84 kg. Betrachten Sie nun die um dieses Wertepaar erweiterte Messreihe. Beurteilen Sie anhand geeigneter statistischer Maßzahlen, ob ein linearer Zusammenhang zwischen Größe und Gewicht von Fußballspielerinnen gerechtfertigt ist.

Runden Sie Ihre Ergebnisse dabei auf vier Stellen nach dem Komma.

### Aufgabe G3 (Kombinatorik)

Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, vier davon heißen Buben. Nach dem Mischen der Karten erhalten die drei Spieler (Alex, Bodo und Carl) jeweils zehn Karten. Die verbleibenden zwei Karten bilden den sogenannten Skat. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

- A: Mindestens ein Bube befindet sich im Skat.
- B: Carl hat genau einen Buben.
- C: Ein Spieler hat genau drei Buben.
- D: Jeder Spieler besitzt mindestens einen Buben.

## Hausübung

### Aufgabe H1 (Verteilungsfunktion, Histogramm)

Am Frankfurter Flughafen wurde im Februar täglich um 8:00 Uhr die Windgeschwindigkeit gemessen. Die Messungen ergaben:

20.1	18.4	8.0	8.0	8.6	8.6	9.2	9.7	9.7	9.7	9.7	10.9	11.5	11.5	11.5
12	12	12	12.6	13.2	13.8	14.3	14.9	14.9	14.9	14.9	16.6	16.6	6.9	7.4

- (a) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion der angegebenen Messreihe und zeichnen Sie ein Histogramm mit folgender Klasseneinteilung:  $(5.0, 7.0]$ ,  $(7.0, 9.0]$ ,  $(9.0, 11.0]$ ,  $\dots$   $(19.0, 21.0]$
- (b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Median und die empirische Varianz.

### Aufgabe H2 (Zweidimensionale Messreihen)

Eine Strecke wurde an 15 verschiedenen Tagen und zu unterschiedlichen Tageszeiten mit dem gleichen Fahrzeug abgefahren. Dabei wurde jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit  $v_i$  (in km/h) und die Verkehrsdichte  $d_i$  (in Anzahl Fahrzeuge pro km) ermittelt. Dies ergab die folgenden Daten:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$v_i$	29	40	42	47	50	56	57	60	60	62	63	67	69	74	82
$d_i$	40	37	34	30	25	19	23	21	13	16	21	13	16	11	7

- (a) Stellen Sie die beobachteten Daten zunächst in einem Punktediagramm graphisch dar und berechnen Sie dann den empirischen Korrelationskoeffizienten.
- (b) Die Ergebnisse von Teil (a) legen nahe, dass der Zusammenhang zwischen Durchschnittsgeschwindigkeit  $v$  und Verkehrsdichte  $d$  durch eine Gerade beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Regressionsgerade

$$d = \hat{a}v + \hat{b}$$

zur Messreihe  $(v_i, d_i)$ ,  $i = 1, \dots, 15$  und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm ein.

- (c) Da die Durchschnittsgeschwindigkeit leichter zu ermitteln ist als die Verkehrsdichte, sollen mit Hilfe der in Teil (b) berechneten Regressionsgerade Schätzwerte für die Verkehrsdichte bestimmt werden. Geben Sie den Schätzwert für die Verkehrsdichte bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 55 km/h an.

### Aufgabe H3 (Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit)

Eine Firma möchte ihren Kunden den Zugriff auf ihre persönlichen Daten über das Internet ermöglichen. Für den Zugang müssen die Kundennummer und eine PIN eingegeben werden. Nachdem die PIN dreimal hintereinander falsch eingegeben wurde, wird der Zugang gesperrt und der Kunde informiert.

- (a) Angenommen einem Hacker sei die Kundennummer bekannt und er probiert nun zufällig gewählte PINs aus. (Jede PIN wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt.) Wieviele Stellen muss die PIN mindestens haben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Hackerangriff unbemerkt bleibt, höchstens  $10^{-6}$  ist?
- (b) Wieviele Stellen wären nötig, wenn anstelle der PIN ein Passwort verwendet würde? Dabei soll das Passwort aus Buchstaben (ohne Umlaute) und Ziffern bestehen, wobei Groß- und Kleinschreibung nicht beachtet wird.

### Aufgabe H4 (Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit)

Sepp, Hinz und Kunz schauen zusammen ein Fussball-WM-Spiel. Für den Fall, dass das Bier nicht reichen sollte, haben sie das folgende Verfahren verabredet um denjenigen zu ermitteln, der Nachschub besorgen muss:

Zunächst werfen Hinz und Kunz eine Münze. Zeigt diese Zahl, scheidet Hinz aus bei Kopf Kunz. Dann werfen Sepp und der Nichtausgeschiedene eine Münze. Ist das Ergebnis Zahl, dann muss Sepp das Bier holen ansonsten der Nichtausgeschiedene.

- (a) Wählen Sie eine Bezeichnung für die Ergebnisse des im Verfahren durchgeführten Zufallsexperiments und geben Sie die Ergebnismenge an.
- (b) Geben Sie dann die Ereignisse

$A_1$  : Sepp muss Bier holen.

$A_2$  : Hinz muss Bier holen.

$A_3$  : Kunz muss Bier holen.

mit Hilfe der in (a) gewählten Bezeichnung an. Welche dieser Ereignisse sind Elementarereignisse?

- (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(A_1)$ ,  $P(A_2)$  und  $P(A_3)$ . Ist das Verfahren gerecht?