Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.09.2008

Modulprüfung zur Veranstaltung „Mathematik III für Bsc. Inf / Mathematik IV für IST (PO 07), Bsc. ETiT, CE (PO 07)/ Numerik und Stochastik für M. Edu“

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punktzahl	6	9	3	6	6	30
erreichte Punktzahl						

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 90 Minuten.
Als Hilfsmittel sind vier eigenhandschriftliche DIN-A4 Seiten und einfache Taschenrechner zugelassen.
Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Informationen zum Aushang werden auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

1. Aufgabe (Interpolation) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1] \mapsto [-1,1],\ f(x) = \cos(\pi x).$$

(a) Berechnen Sie zu f und den Stützstellen $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ das eindeutige Newtonsche Interpolationspolynom auf dem Intervall $[0,1]$.

(b) Berechnen Sie eine obere Schranke für den Interpolationsfehler.

(c) Um welchen Faktor verbessert sich diese Schranke, wenn die zusätzlichen Stützstellen $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ zur Berechnung des eindeutigen Newtonschen Interpolationspolynoms hinzugenommen werden?

2. Aufgabe (Anfansgwertproblem) (9 Punkte)

Gegeben sei das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen Runge-Kutta Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um von t_i, u_i ausgehend u_{i+1} zu berechnen?

b) Wie lautet die Stabilitätsfunktion des Verfahrens?

c) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y(t)\ , \quad y(1) = 1$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{2(t-1)}$. Berechnen Sie mit dem oben beschriebenen Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite $h = 1/2$ eine Näherung an $y(2)$ und beurteilen Sie die Güte der Näherung!

d) Sei $f(t, y(t))$ zwei mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $k_1 = k_1(t, y(t), h)$:

$$(*) \qquad k_1 = f(t, y(t)) + f_t(t, y(t))\tfrac{h}{2} + f_y(t, y(t))\tfrac{h}{2} f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2)\ .$$

Zeigen Sie mittels Taylorentwicklung und unter Benutzung von $(*)$, dass das oben beschriebene Runge-Kutta Verfahren konsistent von der Ordnung 2 ist!

3. Aufgabe (Multiple Choice: Newton-Verfahren) (3 Punkte)

Bei diesen Multiple Choice Aufgaben darf pro Frage nur eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es Null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

(a) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und F habe mindestens eine reelle Nullstelle.

- ○ Dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.
- ○ Wenn F' auf $\mathbb{R}$ nichtsingulär ist, dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.
- ○ Wenn F' in den Nullstellen von F nichtsingulär ist, dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und F habe mindestens eine reelle Nullstelle. Das Globalisierte Newton-Verfahren konvergiere von einem Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ mit Schrittweite $\sigma_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

- ○ Dann können das globalisierte und das lokale Newton-Verfahren für diesen Startwert unter Umständen gegen unterschiedliche Nullstellen konvergieren.
- ○ Dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für diesen Startwert unter Umständen schneller als das lokale Newton-Verfahren.
- ○ Dann stimmen das globalisierte und das lokale Newton-Verfahren für diesen Startwert überein.

(c) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und F habe mindestens zwei reelle Nullstellen. Wenn F' in den Nullstellen nichtsingulär ist,

- ◯ dann gibt es zu jeder Nullstelle ein Intervall, so dass das lokale Newton-Verfahren für alle Startwerte aus diesem Intervall mindestens superlinear konvergiert.
- ◯ dann gibt es ein Intervall, das alle Nullstellen enthält, so dass das lokale Newton-Verfahren für alle Startwerte aus diesem Intervall konvergiert.
- ◯ dann kann es beliebig nahe an den Nullstellen Startwerte geben, so dass das lokale Newton-Verfahren nicht konvergiert.

4. Aufgabe (Regressionsgerade) (6 Punkte)

In Darmstadt ist eine Erhebung über die Größe und das Gewicht von erwachsenen Fußballspielern durchgeführt worden. Dabei erhielt man folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5	6
Größe (in cm): x_i	177	168	184	162	180	193
Gewicht (in kg): y_i	72	58	79	58	70	83

a) Stellen Sie die Messergebnisse in einem Punktediagramm dar.

b) Berechnen Sie die empirischen Streuungen, die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten dieser zweidimensionalen Messreihe. Ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Größe und Gewicht hier gerechtfertigt? Warum?

c) Wir nehmen nun an, ein linearer Zusammenhang sei begründet. Berechnen Sie die Regressionsgerade zur Vorhersage des Gewichts an Hand der Größe eines Fußballspielers und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm.

d) Bestimmen Sie einen Vorhersagewert für das Gewicht eines Fußballspielers bei einer Größe von 175 cm.

e) Ein weiterer erwachsener Fußballspieler ist 154 cm groß und wiegt 84 kg. Betrachten Sie nun die um dieses Wertepaar erweiterte Messreihe. Beurteilen Sie anhand geeigneter statistischer Maßzahlen, ob ein linearer Zusammenhang zwischen Größe und Gewicht von Fußballspielern gerechtfertigt ist.

Runden Sie Ihre Ergebnisse dabei auf vier Stellen nach dem Komma.

5. Aufgabe (Laplace-Würfel) (6 Punkte)

Sei X_i die Zufallsgröße *Augenzahl beim einfachen Würfeln mit einem Laplace-Würfel.*

a) Berechnen Sie $E(X_i)$ und $Var(X_i)$.

b) Sei Z_n die Zufallsgröße *mittlere Augensumme bei n-fachem Würfeln.* Berechnen Sie $E(Z_n)$ und $Var(Z_n)$.

c) Geben Sie eine obere Schranke für $P(Z_{1000} \leq 3.4)$ an.

d) Für $n \geq 1000$ ist Z_n näherungsweise normalverteilt. Schätzen Sie damit $P(Z_{1000} \leq 3.4)$.