Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2008
09.04.2008

1. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, iST/ Mathematik III für Inf.Bsc“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme den Rang von A.

(b) Untersuche, ob die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, lösbar sind, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Der Rang von A ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

damit ist $\text{Rang}(A) = 1$.

(b) Nach Vorlesung ist das LGS $Ax = b_i$ genau dann lösbar, wenn $\text{Rang}(A) = 1 = \mathrm{Rang}(A, b_i)$ gilt. Bestimme $\text{Rang}(A, b_1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist Rang$(A, b_1) = 1$ und das LGS $Ax = b_1$ lösbar.
Bestimme Rang(A, b_2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Also ist Rang$(A, b_2) = 2$ und das LGS $Ax = b_2$ nicht lösbar.

Aufgabe G2 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Wende das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche auf (A, b) an. Als Ergebnis erhältst Du Matrizen L und R sowie den Vektor c.

(b) Löse das gestaffelte System $Rx = c$.

(c) Bestimme die Permutationsmatrix der Zerlegung $PA = LR$.

(d) Jede Zeilenvertauschung, also jeder Übergang $(A^{(k)}, b^{(k)}) \mapsto (\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)})$ ist durch Matrixmulitplikation darstellbar. Gib für jede Iteration ($k = 1, \ldots n-1$) die Matrix P_k an, für die gilt: $(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)}) = P_k(A^{(k)}, b^{(k)})$ und verifiziere $P = P_{n-1} \cdots P_1$.

Lösung: zu a)

Zur Bestimmung der LR-Zerlegung führt man den Gauß-Algorithmus durch, dessen Verlauf in der folgenden Tabelle aufgeführt ist (Das Pivotelement ist eingerahmt):

k	$A^{(k)}$	$\tilde{A}^{(k)}$	$b^{(k)}$	$\tilde{b}^{(k)}$	$L^{(k)}$	$\tilde{L}^{(k)}$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ \boxed{2} & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Das Ergebnis ist

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

zu b):
Durch Rückwärtssubstitution erhält man als Lösung des Gleichungssystems $Rx = c$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{2} = 1, \\ x_2 &= \frac{6 - 4 \cdot 1}{2} = 1, \\ x_1 &= \frac{12 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1}{2} = 1. \end{aligned}$$

zu c) und d):
Die zugehörige Permutationsmatrix lautet

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechne zunächst die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen, indem man das Gauß- Eliminationsverfahren auf die Matrix und die rechte Seite anwendet und dann das gestaffelte System $Rx = c$ löst. Löse das System nun mit Hilfe des Gaußalgorithmus

(a) ohne Pivotsuche,

(b) mit Spaltenpivotsuche.

Rechne dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteile die Qualität der Lösungen.

Lösung: Aus der zweiten Zeile folgt $x_2 = 1 - x_1$. Damit folgt aus der ersten Zeile $x_1(1/200 - 1) = -1/2 \Rightarrow x_1 = \frac{100}{199}$. Daher ist

$$x = \left(\frac{100}{199}, \frac{99}{199} \right)$$

die exakte Lösung. Rundet man diese auf zwei Stellen so erhält man die Näherungslösung $(0.5, 0.5)$.

(a) Der Gauß-Algorithmus ohne Pivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{200} & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{200} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -199 & -99 \end{array}\right)$$

Dies ergibt $x_2 = 0.5$ und $x_1 = 0$, also durch Rückwärtssubstitution $x = (0, 0.5)^T$, was sich deutlich sowohl von der exakten als auch von der gerundeten exakten Lösung unterscheidet. Daher ist diese Näherungslösung von schlechter Qualität.

(b) Der Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{200} & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{200} & 1 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{199}{200} \approx 1 & \frac{99}{200} \approx 0.5 \end{array}\right)$$

Die Rückwärtssubstitution ergibt $x = (0.5, 0.5)^T$, was sich zwar leicht von dem exakten Ergebnis unterscheidet aber genau dem gerundeten exakten Ergebnis entspricht. Daher ist diese Näherungslösung von guter Qualität.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Gegeben seien die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme jeweils den Rang von A, B und C.

(b) Wir betrachten die linearen Gleichungssysteme $Ax = a$, $Bx = b$ und $Cx = c$. Ein LGS ist unlösbar oder es hat genau eine Lösung oder es gibt unendlich viele Lösungen.

Welche der drei Fälle sind in obigen Gleichungssystemen jeweils möglich? Welche Dimension hat der Lösungsraum? Gib gegebenenfalls eine rechte Seite an, für die ein bestimmter Fall eintritt. Begründe in den übrigen Fällen, warum er jeweils nicht eintreten kann.

Lösung:

(a) Der Rang einer Matrix ergibt sich aus der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Das lässt sich hier jeweils direkt ablesen:

$$\mathrm{Rang}(A) = 1, \mathrm{Rang}(B) = 3, \mathrm{Rang}(C) = 3$$

(b) Vorbemerkung: Das System $Ax = b$ ist unlösbar, falls $\mathrm{Rang(A, b)} \neq \mathrm{Rang(A)}$, es ist lösbar mit unendlich vielen Lösungen, falls $\mathrm{Rang(A, b)} = \mathrm{Rang(A)} < \mathrm{dim(b)}$ und eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{Rang(A, b)} = \mathrm{Rang(A)} = \mathrm{n} = \mathrm{dim(b)}$, wobei letzteres natürlich nur bei quadratischen Matrizen möglich ist.

zu A: Nach der Vorbemerkung ist das System entweder unlösbar oder besitzt unendlich viele Lösungen. Da $\mathrm{Rang(A, a)} = \mathrm{Rang(A)} = 1$ für beliebige rechte Seiten a gilt, besitzt es also unendlich viele Lösungen.

$$Ax = a \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_4 = a$$

ist zum Beispiel für $x = (a, 0, 17, 0)^T$ erfüllt. Die Dimension des Lösungsraums ist $n - \mathrm{Rang(A)} = 4 - 1 = 3$.

zu B: Nach der Vorbemerkung ist das System entweder unlösbar oder besitzt unendlich viele Lösungen , denn $\mathrm{Rang(B)} = 3 < \mathrm{n} = 4$. Beide Fälle treten auf, denn das System ist für $b = b_1 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ lösbar (eine Lösung ist $x = (0, 0, 0, 0)^T$) und für $b = b_2 = (0, 0, 0, 0, 1)^T$ unlösbar, denn aus der letzten Zeile des LGS ergibt sich dann $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$. (Man sieht auch sofort, dass $\mathrm{Rang(B, b_2)} = 4 > 3$). Ist das System für b lösbar, also $\mathrm{Rang(B, b)} = 3$, so besitzt der Lösungsraum die Dimension $4 - 3 = 1$.

zu C: Nach der Vorbemerkung ist das System eindeutig lösbar, denn $\mathrm{Rang(C)} = 3 = \mathrm{dim(C)} = \mathrm{Rang(C, c)}$, für beliebige c. Die Dimension des Lösungsraums ist also 0.

Aufgabe H2 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wende das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche (Algorithmus 1) auf A und b an. Als Ergebnis erhältst Du eine linke untere Dreiecksmatrix L, eine rechte obere Dreiecksmatrix R und eine rechte Seite c.

(b) Bestimme die Permutationsmatrix P, für die gilt: $PA = LR$.

(c) Berechne eine Lösung des gestaffelten Systems $Rx = c$.

Lösung: zu a)

Zur Bestimmung der LR-Zerlegung führt man das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche (VL: Algorithmus 1) durch:

1. Durchlauf: $(k = 1)$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Bestimme Pivotelement in der 1. Spalte: Zeile $r \geq 1$, so dass $a_{r1}^{(1)}$ vom Betrag her maximales Element der Spalte ist, also:

$a_{11}^{(1)} = 1$, d.h. $r = 1$.

Schritt 2: Da $k = r = 1$ ist keine Vertauschung notwendig.

Schritt 3: Berechne Multiplikatoren und neue Werte für A, b:

$\mathbf{i = 2}: \quad l_{21} = 1, \quad a_{21}^{(2)} = 0, \quad b_2^2 = 3$
$j = 2 : a_{22}^{(2)} = 1$
$j = 3 : a_{23}^{(2)} = 1,$
$j = 4 : a_{24}^{(2)} = -1$
$\mathbf{i = 3}: \quad l_{31} = 0, \quad b_3^2 = 1$
$\mathbf{i = 4}: \quad l_{41} = 1, \quad a_{41}^{(2)} = 0, \quad b_4^2 = -3$
$j = 2 : a_{42}^{(2)} = -1$
$j = 3 : a_{43}^{(2)} = 1,$
$j = 4 : a_{44}^{(2)} = 1$

Damit kann man die neuen Matrizen aufstellen:

$$(A^{(2)}, b^{(2)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Durchlauf: $(k = 2)$

Schritt 1: Bestimme Pivotelement in der 2. Spalte: Zeile $r \geq 2$, so dass $a_{r2}^{(2)}$ vom Betrag her maximales Element der Spalte ist, also:

$a_{22}^{(2)} = 1$, d.h. $r = 2$.

Schritt 2: Da $k = r = 2$ ist keine Vertauschung notwendig.

Schritt 3: Berechne Multiplikatoren und neue Werte für A:

$\mathbf{i = 3}: \quad l_{32} = 1, a_{32}^{(3)} = 0, b_3^3 = -2$
$j = 3 : a_{33}^{(3)} = 1$
$j = 4 : a_{34}^{(3)} = 2$
$\mathbf{i = 4}: \quad l_{42} = -1, \quad a_{42}^{(3)} = 0, b_4^3 = 0$

$j = 3 : a_{43}^{(3)} = 2$
$j = 4 : a_{44}^{(3)} = 0$

Damit kann man die neuen Matrizen aufstellen:

$$(A^{(3)}, b^{(3)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, b^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Durchlauf: $(k = 3)$

Schritt 1: Bestimme Pivotelement in der 3. Spalte: Zeile $r \geq 3$, so dass $a_{r3}^{(3)}$ vom Betrag her maximales Element der Spalte ist, also:
$a_{43}^{(3)} = 2$, d.h. $r = 3$.

Schritt 2: Vertauschung der 3. und 4. Zeile von A, L,b:

$$(\tilde{A}^{(3)}, b^{(3)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3: Berechne Multiplikatoren und neue Werte für A:
$\mathbf{i = 4}: \quad l_{43} = \frac{1}{2}, \quad a_{43}^{(4)} = 0, b_4^{(4)} = -2$
$j = 4 : a_{44}^{(4)} = 2$

Damit kann man die neuen Matrizen aufstellen:

$$(A^{(4)}, b^{(4)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad L^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind wir mit dem Algorithmus fertig und können die LR-Zerlegung der Matrix A angeben:

$$R = A^{(4)}, \quad L = I + L^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

zu b):

Die Permutationsmatrix hat die Form:

$$P = P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $PA = LR$.

zu c):
Lösung von $Rx = c$ lautet $x = (1, 2, 0, -1)$. Dies ist auch die Lösung des Systems $Ax = b$ (siehe Vorlesung).

Aufgabe H3 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechne die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Löse dieses Gleichungssystem dann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

(a) ohne Pivotsuche,

(b) mit Spaltenpivotsuche,

(c) mit vollständiger Pivotsuche.

Rechne dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteile die Qualität der Lösungen.

Lösung: Aus der zweiten Zeile folgt $x_1 = 1 - x_2$. Damit folgt aus der ersten Zeile $x_2 = \frac{100-1}{200-1} = \frac{99}{199}$. Daher ist

$$x = \left(\frac{100}{199}, \frac{99}{199}\right)$$

die exakte Lösung. Rundet man diese auf zwei Stellen so erhält man die Näherungslösung $(0.5, 0.5)$.

(a) Der Gauß-Algorithmus ohne Pivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 200 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 200 & 100 \\ 0 & -199 & -99 \end{array}\right)$$

Die Rückwärtssubstitution ergibt $x = (0, 0.5)^T$, was sich deutlich sowohl von der exakten als auch von der gerundeten exakten Lösung unterscheidet. Daher ist diese Näherungslösung von schlechter Qualität.

(b) Der Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt, den gleichen Verlauf und Ergebnis wie in Teil (a).

(c) Der Gauß-Algorithmus mit vollständiger Pivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 200 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 200 & 1 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 200 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

Die Rückwärtssubstitution ergibt $x = (0.5, 0.5)^T$, was sich zwar leicht von dem exakten Ergebnis unterscheidet aber genau dem gerundeten exakten Ergebnis entspricht. Daher ist diese Näherungslösung von guter Qualität.