Ableitungen

$F' = \frac{df}{dx}$ ← nach x $\quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(e^x)' = e^x \quad (e^{-x})' = -e^{-x} \quad (e^{v(x)})' = v'(x) \cdot e^{v(x)}$

$(x^x)' = (e^{\ln(x) \cdot x})' \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$(\sin(x))' = \cos(x) \quad (\cos(x))' = -\sin(x)$

$(\sin(v(x)))' = v'(x) \cdot \cos(x)$

$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

$(\arcsin(x))' = (\sin(x)^{-1})' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ⇒ Kettenregel

$(e^{\ln(x) \cdot x})' = 1 + \ln(x) \cdot e^{\ln(x) \cdot x} \quad (x \cdot \ln(x))' =$

Faktorregel: $(k \cdot u(x))' = k \cdot u'(x)$

Kettenregel: $(v(u(x)))' = v'(u(x)) \cdot u'(x)$

Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Summenregel: $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$

Quotientenr.: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathcal{J}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = F'(x_1, x_2, x_3)$

Stammfunktionen

$F = (f(x) = x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

- **Partielle Integration** $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

$\int_a^b e^x = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a \qquad \int \frac{1}{x} = \ln(x) + c$

- $\int_a^b c \cdot x = c \int_a^b x$ mit $c \in \mathbb{R}$

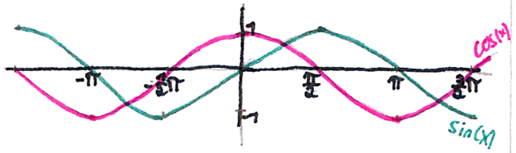
Maximum von Fkt

$\max f(x) \quad$ I. $f'(x) = 0 \rightarrow x_{max} = \ldots$

II. $f''(x) < 0 \quad x_{max} ✓$

Taylorentwicklung

$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$



PQ

$x^2 + px + q = 0 \qquad (ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0)$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Hornerschema

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ - & x_0 \cdot b_{n-1} & x_0 \cdot b_{n-2} & \cdots & x_0 b_0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & 0 \end{array}$$

Matrizen-Rechenregeln

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ & invertierbar

$A + B = B + A \qquad \alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$

$(A+B) \cdot C = AC + BC \qquad (A^{-1})^{-1} = A \qquad (A+B)^T = A^T + B^T$

$A^{-1}(A^{-1})^T = (AA^T)^{-1} \rightarrow (AB)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} \qquad (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

Wurzel-Gesetze

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

mit m, n positiv oder ungerade $\quad \frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}} \qquad \frac{x\sqrt{a}}{a} = \frac{x}{\sqrt{a}}$

Potenz-Gesetze

$a^0 = 1 \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r} \qquad a^{r+s} = a^r \cdot a^s \qquad a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad a, b \in \mathbb{R}$

e-Funktion & Logarithmus ln

$e^{\ln(x)} = x \qquad e^{-\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(\sqrt[2]{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) = \ln(a^{\frac{1}{2}})$

Binomische-Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Summenumformungen

$\sum_{i=1}^{n} a \cdot x_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i + c = c \cdot n + \sum_i x_i$

Vektor-, Matrix-Norm $\|\cdot\|$

$\|x\| = 0$ nur für $x = 0 \qquad \|A\| = 0$ nur für $A = 0$

$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \qquad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} \quad \lambda = EW$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ Spaltensummen

$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \qquad \|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ Zeilensummen

$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ **Konditionszahl** bezügl. Matrixn.

Eigenwerte EW

$\det(A - \lambda I) = 0$

Eigenvektor EV

$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$

Determinante

- Sarrus-regel

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Statistik

Arithmetische Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ $\quad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)$

Median n gerade: $x_{(\frac{n}{2})} = \tilde{x}$ $\quad$ n ungerade: $x_{(\frac{n+1}{2})} = \tilde{x}$ (von geordneter Messreihe)

Streuungsmaße

Empirische Varianz (= Stichprobenvar) $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

Empirische Streuung $s = \sqrt{s^2}$

Empirische Kovarianz $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$

Empirische Korrelationskoeffizient $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ $\quad -1 \le r_{xy} \le 1$

Regressionsgerade $y = \hat{a}x+\hat{b}$ $\quad \hat{b} = \bar{y}-\hat{a}\bar{x}$ $\quad \hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$

$r_i = y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}$

Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit

Ω: Ergebnismenge, seiner Elemente ω. $\quad A \subset \Omega$: Ereignis.

$A^c = \Omega \setminus A$: komplementär Ereignis $\quad$ A tritt ein, wen $\omega \in A$

$A \cap B = \emptyset$: Ereignisse sind unvereinbar

Elementarereignis: $\{\omega\} \subset \Omega$ die 1-Elementige Menge $\#A = 1$

$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$: Wahrscheinlichkeitsmaß

Axiome:

a) $P(A) \ge 0$ für $A \in \mathcal{A}$ $\quad$ b) $P(\Omega) = 1$ $\quad$ c) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$P(\emptyset) = 0$ $\quad 0 \le P(A) \le 1$ $\quad P(A^c) = 1-P(A)$ $\quad A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $\quad P(A\cap B) = P(A^c \cup B^c) = P(A)\cdot P(B)$

Bedingte Wahrsch. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (Voraussetzung) $\quad$ vollständige Wahrsch. $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)$

Bayes Formel $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\cdot P(B|A_k)}$

Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad$ für $I \subset \mathbb{R}$ ist die Urbildmenge $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$

Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X: $F(x) = P(X \le x)$ $x \in \mathbb{R}$

$F(-\infty) = 0$ $\quad F(\infty) = 1$ $\quad F(x+) = F(x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$P(X=a) = F(a)-F(a-)$ $\quad P(a < X \le b) = F(b)-F(a)$ $\quad P(X>a) = 1-F(a)$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$: X heißt stetig verteilt mit Dichte f

diskrete Verteilungen

- Geometrische Verteilung $0<p<1$ X mit Wertebereich $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$
  $P(X=i) = (1-p)^{i-1}p$ $\quad i = 1,2,\ldots$
- Binominalverteilung $n \in \mathbb{N}$ $0<p<1$ X mit Wertebereich $\mathbb{N}_0 = \{0,1,\ldots\}$
  $P(X=i) = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$ $\quad i = 0,1,\ldots,n$ $\quad B(n,p)$
- Poisonverteilung $\lambda > 0$ X mit Wertebereich $\mathbb{N} \cup \{0\}$
  $P(X=i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$ $\quad i = 0,1,2\ldots$

stetige Verteilung

- Rechteckverteilung $a<b$ mit Dichte
  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$
- Exponentialverteilung $\lambda > 0$
  $f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \ge 0 \end{cases}$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$
- Normalverteilung $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ $\quad N(\mu,\sigma^2)$
  $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\quad F_{\mu,\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

→ Aus Tabelle ablesen

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$ $\quad \Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ $\quad x \ge 0$

- Standardnormalverteilt $N(0,1)$

Erwartungswert und Varianz (μ & σ^2)

- X diskret verteilt $\quad E(X) = \sum_i x_i P(X=x_i)$
- X stetig verteilt $\quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

$Var(X) = E((X-E(X))^2)$ $\quad$ Standardabweichung $\sqrt{Var(X)} = \sigma$

$E(aX+b) = aE(X)+b$ $\quad E(h_1(X)+h_2(X)) = E(h_1(X))+E(h_2(X))$

$Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2$ $\quad Var(aX+b) = a^2Var(X)$

$N(\mu,\sigma^2) \to E(X) = \mu$ $Var(X) = \sigma^2$ $\quad Ex(\lambda) \to E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad B(n,p) \to E(X) = np$ $Var(X) = np(1-p)$

Tschebyschevsche Ungleichung

$P(|X-E(X)| \ge c) \le \frac{Var}{c^2}$ $\quad c > 0$

Schätzverfahren und Konfidenzintervalle (KI)

Parameter Θ soll näherungsweise geschätzt werden

Schätzer T_n heißt erwartungstreu, wenn $E_\Theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) = \tau(\Theta)$

z.B. $T_n = \frac{1}{n}\cdot\sum(x_i-1)^2$ $\quad$ da $E_\Theta(T_n(X_1\ldots X_n)) = E(X_1)$ $\quad E_\Theta(\frac{1}{n}(\sum X_i)) = \frac{1}{n}(\sum E_\Theta(X_i)) = \frac{1}{n}n\mu$ $\quad N(\mu,\Theta)$

Maximum-Likelihood-Schätzer

$L(\Theta; x_1,\ldots,x_n) = f_\Theta(x_1)\cdot f_\Theta(x_2)\cdot\ldots\cdot f_\Theta(x_n)$

I. $\prod_{i=1}^{n} f_\Theta(x_i)$ aufstellen $\quad$ II. $(L)'$ nach $\Theta = 0$ d.h. Θ_{max} $\quad$ III. $(L)''$ nach $\Theta < 0$ prüfen

$F_\Theta(x) = F_{(\mu,\sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ Verteilungsfunktion der Standardnormalvert.

$\bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad S_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - n(\bar{X})^2$ $\quad$ Konfidenzniveau $= 1-\alpha$

- K.I. für μ bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$
  $I(X_1,\ldots,X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_{(n)} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$ $\quad \Theta = \{(\mu,\sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}\}$, $\tau(\Theta) = \mu$
  $P_\Theta\left(\bar{X}_{(n)} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_{(n)} + u_{1-\alpha/2}\ldots\right) = 1-\alpha$ $\quad Y_n := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2/n}}$ ist $N(0,1)$ verteilt
- K.I. für μ bei unbekannter Varianz σ^2
  $I(X_1,\ldots,X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_n^2}{n}},\ \bar{X}_{(n)} + t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}\right]$
  P_Θ analog oben $\quad Y_n := \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S_n^2/n}}$ ist t_{n-1} verteilt
- K.I. für σ^2 bei bekannten Erwartungswert $\mu = \mu_0$
  $I(X_1\ldots X_n) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n,\alpha/2}}\right]$ $\quad \Theta = \{(\mu_0,\sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$, $\tau(\Theta) = \sigma^2$
  $P_\Theta\left(\chi^2_{n,\alpha/2} \le \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 \le \chi^2_{n,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$
- K.I. für σ^2 bei unbekannten Erwartungswert μ
  $I(X_1\ldots X_n) = \left[\frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}},\ \frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$ $\quad \Theta = \{(\mu,\sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$, $\tau(\Theta) = \sigma^2$
  $P_\Theta\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} \le \frac{n-1}{\sigma^2}S_{(n)}^2 \le \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

Test bei Normalverteilungsannahme

Gauß-Test

1. $X_1\ldots X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu,\sigma_0^2)$-verteilt σ_0^2 bekannt
2. a) $H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ b) $H_0: \mu \le \mu_0$ $\quad$ c) $H_0: \mu \ge \mu_0$
3. $T(X_1,\ldots,X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{X}_{(n)}-\mu_0)$: $N(0,1)$ verteilt falls $\mu = \mu_0$ gilt
4. Ablehnen falls a) $|T| > u_{1-\alpha/2}$ $\quad$ b) $T > u_{1-\alpha}$ $\quad$ c) $T < u_\alpha$

t-Test

1. $X_1\ldots X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu,\sigma^2)$ verteilt, σ^2 unbekannt
2. a) $H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ b) $H_0: \mu \le \mu_0$ $\quad$ c) $H_0: \mu \ge \mu_0$
3. $T(X_1\ldots X_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_{(n)}-\mu_0}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$: t_{n-1} verteilt falls $\mu = \mu_0$ gilt
4. Ablehnen falls a) $|T| > t_{n-1,1-\alpha/2}$ $\quad$ b) $T > t_{n-1,1-\alpha}$ $\quad$ c) $T < t_{n-1,\alpha}$

χ^2-Streuungstest

1. $X_1\ldots X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu,\sigma^2)$ verteilt μ unbekannt
2. a) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad$ b) $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\quad$ c) $H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$
3. $T(X_1\ldots X_n) = \frac{n-1}{\sigma_0^2}S_{(n)}^2$: χ^2_{n-1} verteilt falls $\sigma^2 = \sigma_0^2$ gilt
4. Ablehnen falls a) $T < \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ oder $T > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ $\quad$ b) $T > \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ $\quad$ c) $T < \chi^2_{n-1,\alpha}$

- Was trifft beim Würfeln unter der Laplace-Annahme für die Ereignisse $A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,4\}$ $C = \{4,5,6\}$ zu?
  ⊲ A & B sowie B & C sind unabhängig $\quad$ A & C sind jedoch abhängig
- $X_1\ldots X_n$ seien unabhängig, identisch $N(0,\Theta)$ verteilte Zufallsvariablen $\Theta > 0$. Dann gilt für $T_n(X_1\ldots X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$
  ⊲ $\frac{1}{n-1}T_n$ ist erwartungstreu für $\tau(\Theta) = \Theta$
- $X_1\ldots X_n$ seien unabhängig, identisch $N(\mu,\sigma^2)$ verteilt. Dann gilt für $Y = X_1+\ldots+X_n$
  ⊲ $P(Y \ge n\mu) = \frac{1}{2}$ und $P(Y \ge n\mu+\sqrt{n}\sigma) = P(X_1 \le \mu-\sigma)$
- $X_1\ldots X_n$ seien unabhängig, identisch $N(0,\sigma^2)$ verteilte Zufallsvariablen mit $\sigma > 1$. Dann gilt
  ⊲ $\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2+\ldots+X_n^2)$ ist χ^2_n verteilt
- $X_1\ldots X_{100}$ seien unabhängig, identisch $N(\Theta,25)$ verteilt, $\Theta \in \mathbb{R}$. Für $\tau(\Theta) = \Theta$ gibt es ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha = 0{,}95$ mit einer Länge von : $1{,}96$

Numerische Behandlung von AWP gewöhnlicher DGL

$y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [a,b] \qquad y(a) = y_0 \quad t_0 = a$

zerlegen in Teilintervalle $t_j = a + jh \quad j = 0,1 \dots N \quad h = \frac{b-a}{N}$

$y_{j+1} = y_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} y' dt = y_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt \qquad u_j \approx y(t_j) \quad u_0 = y_0$

Fehler $e_j = y(t_j) - u_j \qquad$ "$N = \frac{b-a}{h}$"

Explizite Euler (Konsistenz-Ordnung 1)

$u_0 := y_0 \qquad u_{j+1} = u_j + h f(t_j, u_j) \qquad j = 0, \dots N-1$

Implizit Euler (K-Ordnung 1)

$u_0 := y_0 \qquad u_{j+1} = u_j + h f(t_{j+1}, u_{j+1})$

Integral durch Trapez Aproximiert: $u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1}))$

Heun, 1 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

$u_0 := y_0 \qquad u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \qquad j = 0, \dots N-1$

$k_1 = f(t_j, u_j) \qquad k_2 = f(t_{j+1}, u_j + h k_1)$

Mod. Euler, 2 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

$u_0 = y_0 \quad u_{j+1} = u_j + h k_2 \qquad k_2 = f(t_j + h/2, u_j + (h/2) k_1) \quad k_1 = f(t_j, u_j)$

RK4 Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung

$u_0 = y_0 \quad u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad j = 0 \dots N-1$

$k_1 = f(t_j, u_j) \quad k_2 = f(t_j + h/2, u_j + (h/2) k_1)$

$k_3 = f(t_j + h/2, u_j + (h/2) k_2) \quad k_4 = f(t_{j+1}, u_j + h k_3)$

Konvergenz & Konsistenz

$u_0 = y_0 \quad u_{j+1} = u_j + h \phi(t_j, h; u_j, u_{j+1})$ ⇒ Allgemeine Form

$\tau(t,h) = \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t) - h\phi(t, h; y(t), y(t+h))) \quad h > 0 \quad t \in [a, b-h]$

$= 1/h \times$ Defekt bei Einsetzen der Lösung in das Verfahren

Konsistent von der Ordnung p, falls es Konstante $C > 0$ und $\bar{h} > 0$ gibt mit: $\|\tau(t,h)\| \le C h^p \quad \forall\, 0 < h \le \bar{h} \quad \forall t \in [a, b-h]$

Stabil, falls eine Konstante $K > 0$ existiert mit

$\|\phi(t,h;u,v) - \phi(t,h;\tilde{u},\tilde{v})\| \le K(\|u - \tilde{u}\| + \|v - \tilde{v}\|) \quad \forall t \in [a,b], u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}^n$

Konvergent von Ordnung p, falls mit Konstante $M > 0$, $H > 0$ gilt

$\|e_j\| = \|y(t_j) - u_j\| \le M h^p$ für $j = 0, \dots, N \quad \forall\, h = \frac{b-a}{N} \le H$

Explizite RK (Verallgemeinerung von RK4) r-stufiges Runge Kutta

$k_i = f\left(t + \gamma_i h, u + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) \quad i = 1, \dots, r \qquad \phi(t,h;u) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i k_i \quad (6.8)$

Butcher Schema:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\gamma_1 & 0 & & & & \\
\gamma_2 & a_{21} & 0 & & & \\
\gamma_3 & a_{31} & a_{32} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
\gamma_r & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r,r-1} & 0 \\
\hline
 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{r-1} & \beta_r
\end{array}$$

untere Dreiecks Matrix

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$ Explizit Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$ Heun

Modifizierte Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Implizite RK

$k_i = f(t + \gamma_i h, u + h \sum_{j=1}^{r} a_{ij} k_j) \quad i = 1 \dots r \qquad \phi(t,h;u) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i k_i$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Konsistenzzuordnung (6.8) Explizite RK

Ordnung = p

① $\gamma_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \quad i = 1, \dots, r$ ② $p = 1 \to \sum_{i=1}^{r} \beta_i = 1$ ③ $p = 2 \quad \sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i = 1/2$

④ $p = 3 \quad \sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i^2 = 1/3 \quad \& \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \beta_i a_{ij} \gamma_j = 1/6$

⑤ $p = 4 \quad \sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i^3 = 1/4 \quad \& \sum_{i,j=1}^{r} \beta_i \gamma_i a_{ij} \gamma_j = 1/8 \quad \& \sum_{i,j=1}^{r} \beta_i a_{ij} \gamma_j^2 = 1/12 \quad \& \sum_{i,j,k=1}^{r} \beta_i a_{ij} a_{jk} \gamma_k = \frac{1}{24}$

AWP steife DGL

$y'(t) = A y(t) + b \quad t \in [a,b] \quad y(a) = y_0 \quad A \in \mathbb{R}^{n,n} \quad b \in \mathbb{R}^n$

Bsp: $y' = Ay \quad y(0) = y_0 := \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \end{pmatrix}$

EW ⇒ $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1000 \qquad$ EV ⇒ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$y(t) = c_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} e^{-1000t}$

Exp. Euler $\quad u_1 = (1 + hA) u_0 \to u_{j+1} = (1 + hA) u_j = c_1 (1 + h\lambda_1)^j \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 (1 + h\lambda_2)^j \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Imp. Euler $\quad u_{j+1} = u_j + A u_{j+1} \Rightarrow u_{j+1} = B u_j$

*Umformung $u_{j+1} - A u_{j+1} = u_j \quad u_{j+1}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - A\right) = u_j \quad u_{j+1} = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - A\right)^{-1} u_j$

Stabilitätsfunktion & Stabilitätsgebiet

Modellgleichung: $y' = \lambda y \quad y(0) = 1 \quad \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda) < 0$

- absolut stabil A-Stabil $|R(q)| \le 1$ bzw. $|u_{j+1}| \le |u_j| \quad \forall j \ge 0, \mathrm{Re}(q) < 0$
- L-Stabil $|R(q)| < 1 \quad \lim_{j \to \infty} u_j = 0 \quad \mathrm{Re}(q) < 0 \Leftrightarrow S \supset \{q \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(q) < 0\}$
- Einschrittverfahren-Anwendung auf Modellproblem $u_{j+1} = R(q) u_j \quad q = \lambda h$
- Stabilitätsfunktion $= R(q)$
- Stabilitätsgebiet $S = \{q \in \mathbb{C} : |R(q)| < 1\}$

z.B.

Exp. Euler: $u_{j+1} = u_j + h\lambda u_j = (1 + \lambda h) = (1 + q) u_j \quad R(q) = 1 + q \quad S = \{q \in \mathbb{C} : |1 + q| < 1\}$ nicht A-Stabil

Imp. Euler: $u_{j+1} = u_j + h\lambda u_{j+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} u_j \quad R(q) = \frac{1}{1-q} \quad q \ne 1 \quad S = \{q \in \mathbb{C} : 1 < |1 - q|\} \supset \{q \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(q) < 0\}$ A & L-stabil

Imp. Trapez: $R(q) = \frac{1 + q/2}{1 - q/2} \quad q \ne 2 \quad S = \{q \in \mathbb{C} : |1 + q/2| < |1 - q/2|\} = \{q \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(q) < 0\}$

Eigenwert und Eigenvektor berechnung (EW & EV)

- Ist λ EW von A, so ist λ EW von A^T und $\bar{\lambda}$ EW von $A^H := \bar{A}^T$
- Für jede nichtsingläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ hat die zu A ähnliche Matrix $B := T^{-1} A T$ dasselbe charakteristische Polynom & dieselben EW wie A. Ist $\vec{x}$ EV von A so ist $y : T^{-1} x$ EV von B
- Ist A hermitisch, also $A^H = A$ mit $A^H := \bar{A}^T$, dann hat A lauter reelle EW. Ist A unitär, also $A^H = A^{-1}$, so gilt $|\lambda| = 1$ für jeden EW λ.

Gershgorin Kreise

$K_i := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - a_{ii}| \le \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}|\}, \quad i = 1..n$

Bauer/Fike

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ sei diagonalisierbar

$\min |\mu - \lambda_i| \le \mathrm{cond}_2(T) \|A\|_2 \quad : \forall \mu \in \sigma[A + \Delta A]$

- Wenn A hermitesch ($A = A^H$) $\mathrm{cond}_2(T) = 1$

Vektoriteration

$z^{(k+1)} = \frac{1}{\|B z^{(k)}\|} B z^{(k)} \quad k = 0, 1 \dots \qquad R(z^{(k)}, B) = \frac{(z^{(k)})^H B z^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$:= Rayleigh-Quotient

- nach von Mises $B = A$ (approximiert größten EW)
  - Startvektor $z^{(0)}$ gegeben
- von Wieland (Inverse Vektoriteration) (approximiert kleinsten EW)

$B = (A - \mu I)^{-1} \qquad$ - Startvektor $z^{(0)}$ und μ gegeben

$z^{(k+1)} = \frac{\hat{z}^{(k+1)}}{\|\hat{z}^{(k+1)}\|} \qquad \hat{z}^{(k+1)} = [A - \mu I]^{-1} z^{(k)}$ Wenn A hermitesch $R(z^{(k)}, (A - \mu I)^{-1}) = \frac{(z^{(k)})^H \hat{z}^{(k+1)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$

QR-Verfahren

Lagrangesche Polynominterpolation

Grad

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_{k,n}(x) \qquad L_{k,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \delta_{ki} = y_i \qquad L_{k,n}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} =: \delta_{ki}$ Kronecker Symbol

Bsp:

i	0	1	2
x_i	a	b	c
y_i	d	e	f

$n=2$

$L_{0,2} = \frac{x-b}{a-b}\cdot\frac{x-c}{a-c} \qquad L_{1,2} = \frac{x-a}{b-a}\cdot\frac{x-c}{b-c}$

$L_{2,2} = \frac{x-a}{c-a}\cdot\frac{x-b}{c-b} \qquad P_2(x) = d\cdot L_{0,2} + e\cdot L_{1,2} + f\cdot L_{2,2}$

Newtonsche Polynominterpolation

$$P_n(x) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1}) \qquad \gamma_i = \underbrace{f[x_0,\ldots,x_i]}_{i\text{-te dividierte Differenz}}$$

$$f[x_j,\ldots,x_{j+k}] = \frac{f[x_{j+1},\ldots,x_{j+k}] - f[x_j,\ldots,x_{j+k-1}]}{x_k - x_j}$$

Schema:

$$\begin{array}{c|l}
x_0 & f[x_0]=y_0 \ (\gamma_0) \\
x_1 & f[x_1]=y_1 \\
\vdots & \vdots \\
x_n & f[x_n]=y_n
\end{array} \quad f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \ (\gamma_1) \quad \ldots \quad f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \ldots \ (\gamma_n)$$

★ Inverse Interpol.

Fehlerabschätzung

Restglied der Interpolation

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n+1} \underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}_{=:\ \omega(x)\ \text{Knotenpolynom}}$$

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-P_n(x)| \le \ldots \le \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \underbrace{(b-a)^{n+1}}_{\max_{x\in[a,b]}|\omega(x)|} \Rightarrow \text{Korollar}$$

wenn Stützpunkte äquidistant ($x_i = a+ih$, $h = (b-a)/n$):

Tschebyscheffabszisse ($\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)|$ wird minimal)

$$\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot 2^{-n}$$

Spline Interpolation $s \in S_{\Delta,l}$

Zerlegung $\Delta = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ Werte $y_i \in \mathbb{R}$ $i=0,\ldots,n$

Interpolationsbed. $s(x_i) = y_i$, $i=0,\ldots,n$

Lineare Splines

- stetig & auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ ein Polynom s_i vom Grad ≤ 1
- Interpolationsbed. $s_i(x_i) = y_i$ $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$

$S(x) = S_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} y_i + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} y_{i+1} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow S(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i P_i(x),\ x\in[a,b]$

$$P_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{falls } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{falls } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{falls } x > x_{i+1} \end{cases}$$

Fehlerabschätzung: $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| \le \frac{1}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| h_{max}^2 \qquad h_{max} = \max(x_{i+1} - x_i)$

kubische Splines

- s'' stetig & stückweise linear $s'' \in S_{\Delta,1}$, $s \in S_{\Delta,3}$

$$S_i(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i} M_i + \frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i} M_{i+1}\right) + c_i(x-x_i) + d_i$$

Randbedingungen (Rb):

Natürliche: $s''(a) = s''(b) = 0$, also $M_0 = M_n = 0$

Hermite: $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$

$\frac{h_0}{3}M_0 + \frac{h_0}{6}M_1 = \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a), \quad \frac{h_{n-1}}{3}M_n + \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} = f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$

- strikte Diagonaldominantes tridiagonales Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & \\ & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} \\ & & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad h_i = x_{i+1} - x_i$$

Natürliche Rb.: $b_0 = b_n = \lambda_0 = \lambda_n = 0 \quad \mu_0 = \mu_n = 1$

$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i, \quad c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$

Fehlerabschätzung kubischer Splines

$h_{max} = \max h_i \quad h_{min} = \min h_i$

Natürliche Rb ($f''(a) = f''(b) = 0$)

$|f(x) - s(x)| \le \frac{h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4 \ ; \ |f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \le \frac{2h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^{4-k} \quad k=1,2$

Hermite Rb.

$|f(x) - s(x)| \le \frac{5}{384} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4 \ ; \ |f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \le \frac{2h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^{4-k} \quad k=1,2$

Lineare Gleichungssysteme $Ax = b$

- Das LGS hat genau eine Lösung wenn gilt: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A,b)$ mit $\text{Rang}(B) = \text{Max}(r)$ der linearunabhängigen Zeilen/Spaltenvektoren $B \in \mathbb{R}^{m}$
- Das LGS hat eine eindeutige Lösung gdw. A invertierbar ist. $\det(A) \neq 0$ $\Rightarrow x = A^{-1}b \rightarrow Ax = b$:= eindeutige Lösung

Gaußsche-Eliminationsverfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) = (A,b)$$

- Initialisierung $(A^1, b^1) = (A, b)$
- Pivotsuche - größte Wert in der Spalte $= r$ (Pivoelement) $a_{11} \neq 0$
  - tausche so dass r an oberster Stelle
- Elimination - Subtrahiere geeignete vielfache $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ · Zeile r
  $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$
- Iteration wende obige Schritte für untermatrix an

$R := A^{(n)}$, $c := b^{(n)}$, $L := I + L^{(n)}$, $P = P^{n}\cdot\ldots\cdot P^{1}$ P^i = Permutation auf Einheitsmatrix

Vollständige Pivosuche

- größter Wert in der Matrix $= r$ (Pivoelement) Spalten & Zeilen vertauschung.
  $k \le r \le n$, $k \le s \le n$ mit $|a_{rs}^{(k)}| = \max_{k\le i,j\le n} |a_{ij}^{(k)}|$ $(A^{(k+1)}, b^{(k+1)}) = L_k P_k (A^{(k)} Q_k, b^{(k)})$
  $Q = Q_1 \ldots Q_{n-1}$: Spaltenpermutat. $x = Qy$

$Ax = b \Leftrightarrow PAQy = Pb, x = Qy \Leftrightarrow PAQy = Pb \wedge x = Qy \Leftrightarrow L\underbrace{Ry}_{=z} = Pb$, $x = Qy$

Keine Pivosuche Notwendig:

- $A = A^T$ symmetrisch positiv definit: $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- A ist strikt diagonaldominant $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1,\ldots,n$
- A ist eine M-Matrix $a_{ii} > 0$, $i = 1,\ldots,n$ $a_{ij} \le 0$, $i \neq j$ $D^{-1}(A-D)$ hat EV vom Betrag < 1 ($D = \text{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$)

Cholesky-Verfahren

$A = (\ldots)$ $\det(a_{11}) > 0$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} > 0 \ldots$

- Test, dass positiv definit & Symmetrisch det. der Untermatrizen > 0

$LL^T = A \qquad l_{jj} > 0 \qquad (\tilde{L}\tilde{R} = A$ eindeutige Dreieckszerlegung$)$

$Ly = b \qquad L^T x = y$

Für $j = 1\ldots n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \qquad l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

Für $i = j+1,\ldots,n$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\cdot l_{jk}}{l_{jj}} \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}}$$

- Abwandlung zum testen ob positiv definit
  Für $j = 1,\ldots,n$ $a = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2$ Falls $a \le 0 \Rightarrow$ nicht positiv definit $l_{jj} = \sqrt{a}$

Fehlerabschätzung & Rundungsfehler

(Störeinfluss von Matrix & rechte Seite) $\text{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

$Ax = b \qquad (A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \le \left(\frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)\|\Delta A\|/\|A\|}\right)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

bestimmt Sensitivität bezüglich Störung von Matrix und rechter Seite

$\Delta A = 0 \qquad A(\tilde{x} - x) = \Delta b \qquad \frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \le \text{cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

$\Delta b = 0 \qquad (A + \Delta A)\tilde{x} = b \qquad \frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}$

- $F\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig dif. und F habe mind. 1 reelle Nullstelle
  Wenn F' auf $\mathbb{R}$ nichtsingulär ist, dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren, für alle reellen Startwerte
- Sei $F: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig dif. und F habe mind. 1 reelle Nullstelle. Dann konvergiert das globale Newton-Verfahren von einem Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ mit Schrittweite $\sigma_k = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$
  globale & lokale Newton stimmen für den Startwert überein
- $F: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig dif. und F habe mind. 2 reelle Nullstellen. Wenn F' in den Nullstellen nicht singulär ist. Dann gibt es zu jeder Nullstelle ein Intervall, so dass das lokale Newton-Verfahren für alle Startwerte aus diesem Intervall mind. superlinear konvergiert.

Inverse Interpolation mit Newton ★

$$\begin{array}{c|c}
y_0 & x_0 \\
y_1 & x_1 \\
\vdots & \\
y_n & x_n
\end{array} \quad \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{y_1 - y_0} \quad f[y_0,\ldots,y_n] = \frac{f[y_{i+1},\ldots,y_{i+k}] - f[y_i,\ldots,y_{k-1}]}{y_n - y_0}$$

Nichtlineare Gleichungssysteme

$F(x) = 0 \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Newton-Verfahren

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar

Lokale Newton

- Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$
  Für $k = 0,1,\ldots$
  - Wenn $F(x^{(k)}) = 0$ STOP → Ergebnis $x^{(k)}$
  - Berechne Schritt $s^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ $F'(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)})$
  - Setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$

Konvergenz meist nur für Punkte welche nahe am 0 Punkt liegen

Globale Newton

- Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$
  Für $k = 0,1,\ldots$
  - Wenn $F(x^{(k)}) = 0$ STOP → Ergebnis $x^{(k)}$
  - Berechne Schritt $s^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ $F'(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)})$
  - Bestimme σ nach Armijo $\|F(x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)})\|_2^2 \le \|F(x^{(k)})\|_2^2 \cdot (1 - 2\delta\sigma_k)$
    $\sigma \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ ($\delta = 10^{-3}$ gut wahl)

k	$x^{(k)}$	$-F(x^{(k)})$	$F'(x^{(k)})$	$s^{(k)}$	$x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)}$	$\|F(x^{(k+1)})\|_2^2$	$\le$	$(1 - 2\cdot\delta\sigma_k)\cdot\|F(x^{(k)})\|_2^2$	σ_k	x^{k+1}

$s^{(k)} = -\frac{F(x^k)}{F'(x^k)} \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)}$ Wenn σ immer 1 → lokale Newton $l = k$ abwählen σ immer 1 bleibt.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindimensionales

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$

Numerische Integration

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

$I_n(f) = \int_a^b P_n(x)\,dx$

Newton-Cotes-Quadratur

Geschlossene ($x = a + sh$)

$x_i = a + ih \quad i = 0,\ldots,n \quad h = \frac{b-a}{n} \qquad I_n(f) = h \cdot \sum_{i=0}^{n} a_{i,n} f(x_i)$

n	$a_{i,n}$	Name	Fehler
1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	Trapez	$(f^{(2)}(\xi)/12)\cdot h^3$
2	$\frac{1}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$	Simpson	$(f^{(4)}(\xi)/90)\cdot h^5$
3	$\frac{3}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{3}{8}$	3/8 Regel	$(3f^{(4)}(\xi)/80)\cdot h^5$
4	$\frac{14}{45}$ $\frac{64}{45}$ $\frac{24}{45}$ $\frac{64}{45}$ $\frac{14}{45}$	Milne-Regel	$(8f^{(6)}(\xi)/945)\cdot h^7$

$\sum_{i=0}^{n} h a_{i,n} = b - a$

Exaktheit der Quadratur

$J(f) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i f(x_i)$ exakt vom Grad n, wenn alle Polynome von mindestens Grad n exakt integriert werden, d.h. $J(f) = I(f)$

Fehler: $E_n(f) := I(f) - I_n(f)$ mit $I(f)$ = exakte Lösung

Korollar $|f(x) - p_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Offene

$x_i = a + ih \quad i = 0,\ldots,n+1 \quad h = \frac{b-a}{n+2}$

n	$a_{i,n}$	
0	2	Rechteck Regel
1	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$	
2	$\frac{8}{3}$ $-\frac{4}{3}$ $\frac{8}{3}$	

anzahl Teilintervalle

$N = m\cdot n \qquad H = \frac{b-a}{m} \qquad h = \frac{H}{n}$

$x_i = a + ih \quad i = 0,\ldots,N$

$y_j = a + jH \quad j = 0,\ldots,m$

$I(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,dx$

Summierte

geschlossene Newton Cotes

$S_N^{(n)}(f) = h\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n} a_{i,n} f(x_{jn+i}) \qquad R_N^{(n)}(f) = I(f) - S_N^{(n)}(f) \Rightarrow$ Fehler

$$R_N^{(n)}(f) = \begin{cases} C(n) f^{(n+2)}(\xi)(b-a)h^{n+2} & \text{gerade } n \\ C(n) f^{(n+1)}(\xi)(b-a)h^{n} & \text{ungeraden} \end{cases} \qquad f \in C^{n+2}([a,b])$$

S. Trapez (geschlossen $n=1$)

$S_N^{(n)}(f) \ \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{m-1}(f(x_j) + f(x_{j+1})) \quad x_j = a + jh \quad R_N^{(n)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$ (Fehler)

S. Simpson (geschlossen $n=2$)

$S_N^{(n)}(f) = \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{m-1}(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})) \quad x_j = a + jh \quad R_N^{(n)}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$ (Fehler)

S. Rechteck-Regel (offen, $n = 0$, $2m = N$, $h = \frac{b-a}{N}$)

$\tilde{S}_N^{(0)}(f) = 2h\cdot\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) \quad x_j = a + jh \quad R_N^{(n)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$ (Fehler)

Trapezregel exaktheit bis Grad 1

$S_2^{(n)}(x^2) \neq \int_0^{\pi} x^2\,dx \Rightarrow \frac{\pi}{4}(0^2 + 2(\frac{\pi}{2})^2 + \pi^2) = \frac{3}{8}\pi^3 \neq \frac{1}{3}\pi^3 = [\frac{1}{3}x^3]_0^{\pi} = \int_0^{\pi} x^2\,dx$