Fachbereich Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27.09.2000

Klausur zur Diplomvorprüfung Mathematik B für ET

Name: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnummer: ____________ Fachrichtung: ____________

Semester: ____________

Wiederholer: ◯ (falls ja, bitte ankreuzen)

AUFGABE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Note
Punkte	16	8	11	12	14	10	14	8	15	12	120	
err. Punkte												

Hinweise

- Füllen Sie das Deckblatt bitte **leserlich** und **vollständig** aus.
- Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren, am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt legen und mit diesem zusammen persönlich abgeben.
- Es darf ein einfacher Taschenrechner verwendet werden.
- Alle anderen elektronischen Hilfsmittel (z.B. Laptop, Handy,...) sind nicht zugelassen.
- Skript, Übungsblätter, Lösungen zu den Übungen, Bücher dürfen verwendet werden.
- Die **genaue** Begründung der Lösung wird bewertet. Es müssen die verwendeten Verfahren und Rechengänge angegeben werden.

LZM
187

AUFGABE 1 (16 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ mit $D(f) = \mathbf{C} \setminus \{1+i, 1\}$ und

$$f(z) = \frac{3+2i-3z}{(z-1-i)(z-1)}$$

a) Entwickeln Sie f in einer Laurent-Reihe um $z_0 = i$, die für $z = \frac{1}{2}$ konvergiert.

b) Entwickeln Sie f in einer Laurent-Reihe um $z_0 = i$, die für $z = 2$ konvergiert.

c) Entwickeln Sie f in einer Laurent-Reihe um $z_0 = i$, die für $z = \frac{3}{2}i$ konvergiert.

Lösung: Bevor wir mit der tatsächlichen Aufgabe anfangen, zerlegen wir den Bruch $\frac{3+2i-3z}{(z-1-i)(z-1)}$ in zwei Summanden:

$$\frac{3+2i-3z}{(z-1-i)(z-1)} = \frac{A}{z-1-i} + \frac{B}{z-1} = \frac{(A+B)z-(A+B)-iB}{(z-1-i)(z-i)},$$

also $B = -2$ und $A = -1$. $\boxed{2}$

a) Wir behandeln die beiden Summanden getrennt:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{z-1-i} &= \frac{-1}{z-i}\,\frac{1}{\frac{z-1-i}{z-i}} \\ &= \frac{-1}{z-i}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z-i}} \\ &= \frac{-1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-i)^n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-i)^n}, \qquad \boxed{2} \end{aligned}$$

falls $|z-i| > 1$. Dies ist für $z = \frac{1}{2}$ erfüllt. $\boxed{1}$

$$\frac{-2}{z-1} = \frac{2}{1-(z-i)-i} = \frac{2}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{(z-i)}{1-i}} = \frac{2}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n, \qquad \boxed{2}$$

falls $|z-i| < |1-i| = \sqrt{2}$. Dies ist für $z = \frac{1}{2}$ erfüllt. $\boxed{1}$

Wir erhalten somit insgesamt die Laurent-Reihe

$$\frac{2}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-i)^n},$$

die auf dem Kreisring $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z-i| < \sqrt{2}\}$ definiert ist.

b) Wegen $|2-i| > 1$ können wir den ersten Summanden aus Teilaufgabe a) übernehmen. $\boxed{1}$

Es gilt

$$\frac{-2}{z-1} = \frac{-2}{z-i+i-1} = \frac{-2}{z-i}\frac{1}{1-\frac{1-i}{z-i}} = \frac{-2}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{z-i}\right)^n, \qquad \boxed{2}$$

falls $|z-i| > |1-i| = \sqrt{2}$. Dies ist für $z=2$ erfüllt. $\boxed{1}$

Also erhalten wir die Laurent-Reihe

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-i)^n} - \frac{2}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1-2(1-i)^{n-1}}{(z-i)^n},$$

die auf dem (unbeschränkten) Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| > \sqrt{2}\}$ definiert ist.

c) Hier gilt

$$\frac{-1}{z-1-i} = \frac{1}{1-(z-i)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-i)^n, \qquad \boxed{2}$$

falls $|z-i| < 1$. Dies ist für $z = \frac{3}{2}i$ erfüllt. $\boxed{1}$

Zusammen mit a) erhalten wir die Laurent-Reihe $\boxed{1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-i)^n + \frac{2}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n,$$

die auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\}$ definiert ist.

$\sum_1 = 16$

AUFGABE 2 (8 Punkte)

Gegeben sei die Kurve $K = K_1 \cup K_2$ mit

$$\begin{aligned} K_1 &= \{z(t) = i-1+e^{it}, t \in [0,2\pi]\} \\ K_2 &= \{z(t) = i-t, t \in [0,1]\} \end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie die Kurve K.

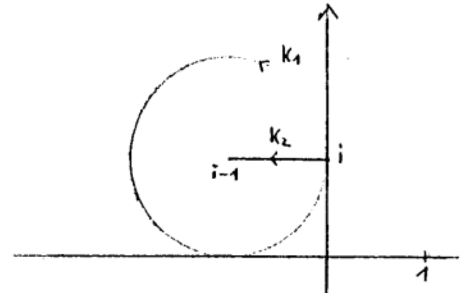
b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K \frac{1}{1+(z-i)^2}dz$$

LZM
186

Lösung:

a) $\boxed{2}$



b) Da der Integrand $f(z) = \frac{1}{1+(z-i)^2}$ eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 2i\}$ holomorphe Funktion darstellt und 0 bzw. $2i$ nicht im Inneren von K_1 liegen, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz $\boxed{2}$

$$\begin{aligned} \int_K f(z)dz &= \int_{K_2} f(z)dz & \boxed{1} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\cdot(-1)dt & \boxed{1} \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= -[\arctan t]|_0^1 & \boxed{1} \\ &= -\frac{\pi}{4}+0 \\ &= -\frac{\pi}{4} & \boxed{1} \end{aligned}$$

$\sum_2 = 8$

AUFGABE 3 (11 Punkte)

Das Integral

$$\int_K \frac{e^{4z}dz}{(z+3)(z-3)(z-i)^2}$$

mit

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |2z-3| = 4\}$$

soll mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden.

Lösung: Der Integrand $f(z) = \frac{e^{4z}}{(z+3)(z-3)(z-i)^2}$ hat einen Pol erster Ordnung bei 3 und bei -3, sowie einen Pol zweiter Ordnung bei i. $\boxed{3}$

Bei der Kurve K handelt es sich um den Kreis mit Mittelpunkt $\frac{3}{2}$ und Radius 2. Wir testen unsere drei Singularitäten:

$$\begin{aligned} |2\cdot 3-3| &= 3 < 4 \\ |2\cdot(-3)-3| &= 9 > 4 \end{aligned}$$

$$|2i-3| \;=\; \sqrt{13} < 4$$

Also liegen die Singularitäten 3 und i im Inneren dieser Kurve und nach dem Residuensatz gilt: $\boxed{3}$

$$\int_K f(z)dz = 2\pi i[Res_{z=3}f(z) + Res_{z=i}f(z)] \qquad \boxed{1}$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} Res_{z=3}f(z) &= (z-3)f(z)|_{z=3} = \frac{e^{12}}{6(3-i)^2} = \frac{e^{12}}{6(8-6i)} \qquad \boxed{2} \\ Res_{z=i}f(z) &= [(z-i)^2 f(z)]'|_{z=i} = \frac{4e^{4z}(z+3)(z-3) - e^{4z}2z}{(z+3)^2(z-3)^2}|_{z=i} = \frac{-40e^{4i} - 2ie^{4i}}{100} \qquad \boxed{2} \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit

$$\int_K f(z)dz = 2\pi i \left[\frac{e^{12}}{6(8-6i)} + \frac{-20e^{4i} - ie^{4i}}{50} \right].$$

$\sum_3 = 11$

AUFGABE 4 (12 Punkte)

Gegeben seien zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} (*) \qquad (x^3y'')' + (x^2y')' - (4xy)' &= -4[1+\ln(x)] \\ (**) \qquad x^3y''' + 4x^2y'' - 2xy' - 4y &= -4[1+\ln(x)] \end{aligned}$$

a) Ist $y = \ln(x)$ in beiden Fällen Lösung der Differentialgleichung?

b) Bestimmen Sie Fundamentalsysteme für die zugehörigen homogenen Differentialgleichungen.

c) Wie lauten die allgemeinen Lösungen?

Lösung: Wieder beginnen wir mit einer Vorüberlegung: Wegen

$$\begin{aligned} (x^3y'')' + (x^2y')' - (4xy)' &= 3x^2y'' + x^3y''' + 2xy' + x^2y'' - 4y - 4xy' \\ &= x^3y''' + 4x^2y'' - 2xy' - 4y \end{aligned}$$

handelt es sich bei $(*)$ und $(**)$ um zwei Darstellungen ein und derselben Differentialgleichung und wir benutzen hier nur die Darstellung $(**)$. $\boxed{2}$
Natürlich können beide Fälle, wie in der Aufgabenstellung suggeriert, getrennt betrachtet werden; bei $(*)$ ist es dann ratsam erst einmal auf beiden Seiten der Gleichung zu integrieren.

LZM

a) Mit $y = \ln(x)$ folgt $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$ und $y''' = \frac{2}{x^3}$. Eingesetzt in $(**)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x^3\frac{2}{x^3} + 4x^2(-\frac{1}{x^2}) - 2x\frac{1}{x} - 4\ln(x) &= 2 - 4 - 2 - 4\ln(x) \\ &= -4[1+\ln(x)] \end{aligned}$$

Mit $y = \ln(x)$ haben wir tatsächlich eine spezielle Lösung. $\boxed{2}$

b) Es handelt sich um eine Eulersche Differentialgleichung, und wir wählen den Ansatz $y_H = x^\lambda$ für den homogenen Teil. Dann gilt $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} y_H &= x^\lambda \\ y_H' &= \lambda x^{\lambda-1} \\ y_H'' &= \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \\ y_H''' &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 4\lambda(\lambda-1) - 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0 \qquad \boxed{2}$$

Durch Raten erhalten wir die Nullstelle $\lambda_0 = -1$. Polynomdivision durch $\lambda + 1$ führt zu dem Polynom $\lambda^2 - 4$. Also gibt es noch die Nullstellen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem x^2, x^{-2}, x^{-1}. $\boxed{3}$

c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist nach a) und b)

$$y(x) = c_1x^{-1} + c_2x^2 + c_3x^{-2} + \ln(x) \qquad \boxed{2}.$$

$\sum_4 = 12$

AUFGABE 5 (14 Punkte)

Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 4y_2 + 3x \\ y_2' &= 2y_1 - 3y_2 + x - 1 \end{aligned}$$

soll gelöst werden.
HINWEIS: Bei der Suche nach einer speziellen Lösung hilft der Ansatz

$$y_S(x) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das Differentialgleichungssystem in Matrizenschreibweise sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x \\ x-1 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Wir bestimmen zunächst Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Das charakteristische Polynom lautet $\boxed{1}$

$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = \lambda^2 + 2\lambda + 5, \qquad \boxed{2}$$

und hat die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i. \qquad \boxed{1}$$

Also haben wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2i - 1$, $\lambda_2 = -2i - 1$. Wir bestimmen den Eigenvektor v_1 zu λ_1, der Eigenvektor v_2 zu λ_2 ist dann gerade $\overline{v_1}$.
Das Gleichungssystem $\boxed{1}$

$$\begin{array}{cc|c} 2-2i & -4 & 0 \\ 2 & -2-2i & 0 \end{array}$$

hat z.B. die Lösung $\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$ (Normierung sparen wir uns), also $\boxed{2}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Wir haben also das komplexe Fundamentalsystem $v_1 e^{(2i-1)x}, v_2 e^{(-2i-1)x}$. $\boxed{1}$
Reellifizieren liefert nun das reelle Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \cos 2x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \sin 2x \\ \varphi_2(x) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \sin 2x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \cos 2x \qquad \boxed{2} \end{aligned}$$

Nun kümmern wir uns um eine spezielle Lösung und nutzen dazu den Hinweis: $y_1(x) = a + bx, y_2(x) = c + dx$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} b &= (b - 4d + 3)x + a - 4c \\ d &= (2b - 3d + 1)x + 2a - 3c - 1 \end{aligned}$$

Aus $b - 4d + 3 = 2b - 3d + 1 = 0$ folgt $b = d = 1$, dann $a = 1$ und $c = 0$, d.h., $y_1 = x + 1, y_2 = x$.
Die Lösungsgesamtheit ist nun $\boxed{2}$

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbf{R}. \qquad \boxed{1}$$

$\sum_5 = 14$

AUFGABE 6 **(10 Punkte)** Für die Differentialgleichung

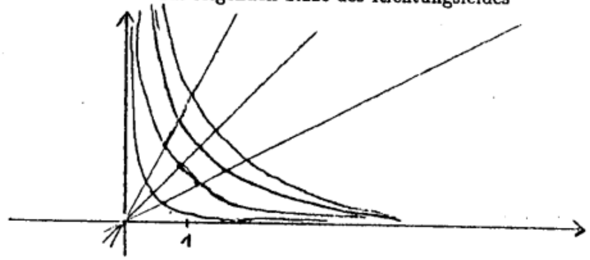
$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right) y' = 0$$

skizziere man das Richtungsfeld im ersten Quadranten (also $x, y > 0$).
HINWEIS: Bewertet wird eine saubere Freihandskizze und die Skizze erläuternde Kommentare und Rechnungen.

Lösung: Wir bringen zunächst die Differentialgleichung in eine einfachere Gestalt:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}}{\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}} \\ &= -\frac{\frac{x}{x^2} + \frac{y}{x^2}}{\frac{y}{y^2} + \frac{x}{y^2}} \\ &= -\frac{y^2}{x^2} \qquad \boxed{3} \end{aligned}$$

Wir skizzieren die Steigungen von Lösungen, an den Stellen $y = \lambda x$ mit $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ $\boxed{4}$
und kommen damit zur folgenden Sizze des Richtungsfeldes $\boxed{3}$



$\sum_6 = 10$

AUFGABE 7 **(14 Punkte)** Eine Zufallsvariable X wird *dreiecksverteilt* genannt, falls folgende Funktion ihre Dichtefunktion ist:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

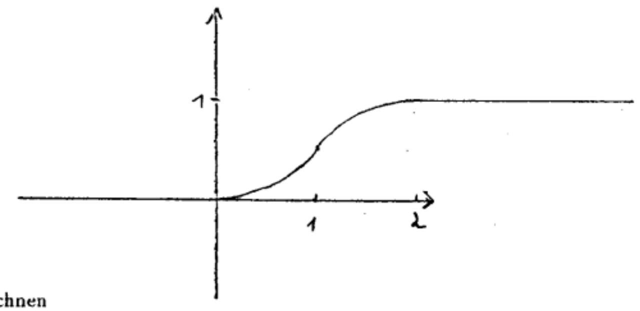
b) Bestimmen Sie Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $V(X)$ von X.

c) Bestimmen Sie Dichtefunktion, Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen $2X + 3$.

LZM
184

Lösung:

a) $\boxed{2}$



b) Wir rechnen

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2x - x^2 dx = 1 \qquad \boxed{2} \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 2x^2 - x^3 dx = \frac{7}{6} \qquad \boxed{2} \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6} \qquad \boxed{1} \end{aligned}$$

Den Erwartungswert kann man auch direkt an der Dichtefunktion ablesen (diese is symmetrisch bzgl. der Achse $x = 1$ und hier hat die Dichte auch ihr Maximum).

c) Sei $Y = 2X + 3$ und g die passende Dichtefunktion. Sei F die Verteilungsfunktion von X, G die von Y. Dann gilt

$$G(x) = P(Y \le x) = P(2X + 3 \le x) = P(X \le \frac{x-3}{2}) = F(\frac{x-3}{2})$$

und damit

$$g(x) = G'(x) = [F(\frac{x-3}{2})]' = f(\frac{x-3}{2}) \cdot \frac{1}{2}.$$

Das bedeutet

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{4} & 3 \le x \le 5 \\ \frac{7-x}{4} & 5 \le x \le 7 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \boxed{5}$$

Erwartungswert und Varianz sind nach Aufgabenteil b)

$$E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 5, V(2X+3) = 2^2 V(X) = \frac{4}{6} \qquad \boxed{2}$$

$\sum_7 = 14$

AUFGABE 8 (8 Punkte)

Ein Angestellter wirft an jedem Arbeitstag kurz vor Dienstschluss eine Münze: Erscheint Zahl, dann geht er pünktlich nach Hause, erscheint Kopf, dann macht er genau eine Überstunde. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der Angestellte an den 225 Arbeitstagen eines Jahres insgesamt 120 oder mehr Überstunden macht.

Lösung: Sei X_i die Zufallsvariable, die das Ereignis, "am i-ten Arbeitstag wird eine Überstunde gemacht", bescheibt. Dann ist X_i binomialverteilt mit $n = 1$ und $p = \frac{1}{2}$. $\boxed{2}$
Damit haben wir den Erwartungswert $E(X_i) = \frac{1}{2}$ und die Varianz $V(X_i) = \frac{1}{4}$. $\boxed{1}$
Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{225}$ sind offensichtlich alle voneinander unabhängig. Damit ist nach dem zentralen Grenzwertsatz die Zufallsvariable $\sum_{i=1}^{225} X_i$ näherungsweise normalverteilt $\boxed{2}$
mit Erwartungswert $225 \cdot \frac{1}{2} = 112.5$ und Varianz $225 \cdot \frac{1}{4} = 56.25$. Damit gilt $\boxed{1}$

$$P(\sum_{i=1}^{225} X_i \ge 120) = 1 - P(\sum_{i=1}^{225} X_i < 120) = 1 - \Phi(\frac{120 - 112.5}{\sqrt{56.25}}) =$$

$1-\Phi(1) = 0.159$ $\boxed{2}$

$\sum_8 = 8$

AUFGABE 9 (15 Punkte)

Dem Hersteller eines Waschmittels wird von einer Verbraucherorganisation vorgeworfen, $3kg$-Packungen in den Handel zu bringen, deren Inhalt wesentlich unter dem Nenngewicht liegt. Die Verbraucherorganisation kauft 21 Packungen und stellt jeweils deren Nettogewicht g_i [kg], $1 \le i \le 21$, fest. Dabei ergab sich

$$\sum_{i=1}^{21} g_i = 59.01[kg], \sum_{i=1}^{21} (g_i - \bar{g})^2 = 0.8[kg^2].$$

a) Es wird angenommen, dass die Messdaten Realisierungen von unabhängigen, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{21}$ sind, wobei μ und σ^2 unbekannt seien. Zu welchem Ergebnis führt der Test der Hypothese $\mu < 3[kg]$ gegen die Alternative $\mu \ge 3$ bei der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$?

b) Welchen Test für die Fragestellung in a) hätte die Verbraucherorganisation verwendet, falls sie die Herstellerangabe $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.04[kg^2]$ verwendet hätte? Führen Sie diesen Test bei der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ durch.

c) Überprüfen Sie die Angabe $\sigma_0^2 = 0.04[kg^2]$, indem Sie unter Verwendung der Messdaten aus a) die Hypothese $\sigma^2 = \sigma_0^2$ gegen die Alternative $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$ bei der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ testen.

Lösung:

a) Es sind μ und σ unbekannt, also handelt es sich um einen t-Test. Aus den Messdaten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{21}\sum_{i=1}^{21} g_i = \frac{59.01}{21} = 2.81[kg] \quad \boxed{1} \\ s^2 &= \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{21}(g_i - \bar{g})^2 = \frac{0.8}{20} = 0.04[kg^2] \quad \boxed{1} \end{aligned}$$

Prüfgröße: $v = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = -\frac{0.19}{0.2}\sqrt{21} \approx -4.3534$ $\boxed{2}$

HYPOTHESE: $\mu < 3$ ALTERNATIVE: $\mu \geq 3$

Die Hypothese wird verworfen, falls gilt $v > t_{1-\alpha;n-1}$. $\boxed{1}$

Wir haben $t_{0.95;20} = 1.7247$. Damit ist wegen $-4.3534 < 1.7247$ nichts gegen die Hypothese einzuwenden. $\boxed{1}$

b) Nun sei $\sigma = 0.04$ bekannt, also haben wir einen Test mit Hilfe der Normalverteilung.

Prüfgröße: $v = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -\frac{0.19}{0.2}\sqrt{21} \approx -4.3534$. $\boxed{2}$

Die Hypothese wird verworfen, falls gilt $v > u_{1-\alpha}$. $\boxed{1}$

Wir haben $u_{0.95} = 1.645$. Damit ist wegen $-4.3534 < 1.645$ nichts gegen die Hypothese einzuwenden. $\boxed{1}$

c) HYPOTHESE: $\sigma = 0.2$ ALTERNATIVE: $\sigma \neq 0.2$

Die Zufallsvariable $T = \frac{n-1}{\sigma_0^2}S^2$ ist χ^2-verteilt vom Freiheitsgrad $n-1$. Die Hypothese wird verworfen, falls $\frac{n-1}{\sigma_0^2}s^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ oder $\frac{n-1}{\sigma_0^2}s^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$ (vgl. Aufgabe H18 Mathe IV). $\boxed{2}$

Wegen $\chi^2_{0.025;20} = 9.591$, $\chi^2_{0.975;20} = 34.170$ und $\frac{n-1}{\sigma_0^2}s^2 = n-1 = 20$ ist dies nicht der Fall. $\boxed{2}$

Folglich ist gegen die Hypothese nichts einzuwenden. $\boxed{1}$

$\sum_9 = 15$

AUFGABE 10 (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{21}t^7$$

im Intervall $[-1, 1]$ genau eine Nullstelle x hat.

b) Geben Sie ein Iterationsverfahren an, das zu jedem Startwert $x_0 \in [-1, 1]$ gegen diese Nullstelle konvergiert.

c) Nach wievielen Schritten n ist für den Startwert $x_0 = 0$ die Genauigkeit $|x_n - \bar{x}| < 10^{-5}$ sicher erreicht?

Lösung:

a) Es ist $f'(t) = -\frac{1}{3}t^6 - \frac{1}{2} < 0$ für alle $t \in [-1, 1]$. Also is f auf diesem Intervall streng monoton fallend. Damit kann es höchstens eine Nullstelle geben. $\boxed{2}$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{21} > 0 \\ f(1) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{21} < 0 \end{aligned}$$

Damit muss es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle geben. $\boxed{2}$

b) Es gilt $f(t) = 0$ genau dann, wenn $g(t) = t$ mit

$$g(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{21}t^7.$$

Wir zeigen, dass g die Voraussetzungen von Satz 9.1 des Mathe-IV-Skripts erfüllt: g ist differenzierbar und

$$|g'(t)| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t^6| \leq \frac{1}{2} < 1$$

für $t \in [-1, 1]$. Damit können wir die Lipschitzkonstante $L = \frac{1}{2}$ wählen. Desweiteren ist $\boxed{2}$

$$|g(t)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{21} = \frac{37}{42} < 1$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Damit ist $g(t) \in [-1, 1]$ für alle $t \in [-1, 1]$. $\boxed{2}$

Alle Voraussetzungen sind also nachgewiesen. Das in Satz 9.1 beschriebene Iterationsverfahren für die Funktion $g(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{21}t^7$ kann also benutzt werden. Man kann sich an dieser Stelle auch auf Satz 9.1 berufen, um zu zeigen, dass es genau eine Nullstelle in dem angegebenen Intervall gibt und dafür die vier Punkte aus Aufgabenteil a) kassieren. Für die Wahl der Funktion g gibt es natürlich viele Alternativen, z.B. $g(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{21}t^7$.

$\frac{2}{3}$

c) Wir berechnen den ersten Schritt: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$. Gefordert ist $|x_n - \bar{x}| < 10^{-5}$; also

falsch!

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3} < 10^{-5} \quad \boxed{2},$$

also $n - 1 > 15.025$ bzw. $n \geq 17$. Damit ist die geforderte Genauigkeit nach 17 Iterationsschritten erreicht. $\boxed{2}$

$\sum_{10} = 12$