11/180 – 184

180

Fachbereich Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15.03.2000

Klausur zur Diplomvorprüfung Mathematik B für ET

Lösung liegt nicht vor

Bitte in Druckschrift ausfüllen:

Name:....................................

Vorname:..................................

Fachrichtung: ....

Matr.-Nr.:.................................

Wiederholer: ◯ (wenn ja, bitte ankreuzen)

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren, am Schluß der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen und mit diesem zusammen persönlich abgeben. Lösungen sind zu begründen, es müssen die verwendeten Verfahren und Rechengänge angegeben werden. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Die Blätter sind einseitig zu beschreiben und anschließend mit der Rückseite nach oben abzulegen.

Es sind nur einfache Taschenrechner zugelassen!
(Einfacher Taschenrechner: nciht programmierbar, nur elemantere Funktionen, einfache Anzeige).

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	Note
max. Punkte	10	10	8	12	10	10	10	10	10	10	100	
erreichte Punkte												

181

Aufgabe 1: (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das uneigentliche reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+4}\,dx$$

mit Hilfe eines geeigneten komplexen Integrals.

b) Welchen Wert hat das Integral

$$\int_{K_1(0)} \frac{e^z}{(z-\frac{1}{2})^3}\,dz?$$

($K_1(0)$ bezeichne den Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1).

Aufgabe 2: (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Laurentreihe mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ für die Funktion

$$f(z) = z\cos\frac{1}{z} \quad ,$$

so daß die Reihe für alle $z \neq 0$ konvergiert.
Welchen Wert hat das Residuum

$$\operatorname{Res}_{z=0}\left(z\cos\frac{1}{z}\right) \quad ?$$

b) Entwickeln Sie die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

um den Punkt $z_0 = 0$ in eine Laurentreihe, welche im Bereich $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ konvergiert.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Geben Sie diejenige gebrochenlineare Abbildung f an, welche die Punkte $i, 0, -i$ der abgeschlossenen Ebene $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in dieser Reihenfolge auf die Punkte $0, -1, \infty$ abbildet. Zeigen Sie: Ist $k_0 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die reelle Achse, so ist $f(k_0)$ der Einheitskreis.

182

Aufgabe 4: (12 Punkte)

a) Die auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$ gegebenen Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2\pi, \\ f_2(x) &= e^{2x}, \\ f_3(x) &= (\sinh x)^2, \\ f_4(x) &= \sinh(2x) \end{aligned}$$

sind Lösungen der Differentialgleichung

$$xy^{IV} - y''' - 4xy'' + 4y' = 0.$$

(Dies sei als bekannt vorausgesetzt).
Untersuchen Sie, ob f_1, f_2, f_3, f_4 auf I linear unabhängig sind.

b) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y = \frac{8}{\cosh(2x)} \quad ?$$

Hinweis: Verwenden Sie die Variation der Konstanten.

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Für die Differentialgleichung

$$y'' - y = xe^x + e^{2x}$$

bestimme man die allgemeine Lösung, sowie die des Anfangswertproblems

$$y(0) = \frac{1}{3} \quad ; \; y'(0) = -\frac{7}{12}$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y'' + xy = e^{x-1} \quad ; \; y(1) = 1; \quad y'(1) = 2$$

durch Potenzreihenansatz mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
Wie lautet die Rekursionsformel für die Koeffizienten der Potenzreihe?
Berechnen Sie die ersten fünf dieser Koeffizienten.

183

Aufgabe 7: (10 Punkte)

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Wie lautet die allgemeine Lösung?

b) Welche Lösung besitzt das Anfangswertproblem

$$y(1) = \begin{pmatrix} e^2 \sin 1 \\ e^2 \cos 1 - 2e \\ e^2 \cos 1 - 3e \end{pmatrix} \quad ?$$

Aufgabe 8: (10 Punkte)

Ein Betrieb stellt Kugeln einer bestimmten Größe her und liefert diese an eine Firma. Durch Stichproben will man feststellen, ob eine umfangreiche Lieferung mehr als 10 % Ausschuß enthält.
Hierzu entnimmt man zwanzig mal nacheinander eine zufällig ausgewählte Kugel, prüft sie und legt sie zurück. Die Lieferung wird reklamiert, wenn mehr als zwei geprüfte Kugeln Ausschuß sind, andernfalls wird sie angenommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Lieferung angenommen wird, wenn sie genau 10 %Ausschuß enthält?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lieferung angenommen wird, obwohl sie 20% Ausschuß enthält?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lieferung reklamiert wird, obwohl sie nur 5 %Ausschuß enthält?

Aufgabe 9: (10 Punkte)

In einer Konservenfabrik werden Ananasscheiben in Dosen gefüllt.

a) Bisher hatte man angenommen, daß eine Ananasscheibe im Mittel 30 g wiegt und sicherheitshalber 16 Ananasscheiben in eine Dose mit Soll-Fruchteinwaage 450 g verpackt. Unter der Annahme, daß die Gewichte der Ananasscheiben voneinander unabhängig und (μ, σ^2)- normalverteilt sind mit $\mu = 30g, \sigma = 5g$, berechne man die Wahrscheinlichkeit, daß eine Dose weniger als 450 g Fruchteinwaage enthält.

b) Man hat für eine Stichprobe von $n = 100$ Ananasscheiben das arithmetische Mittel des Gewichts $\bar{x} = 31.4g$ ermittelt. Unter der Annahme einer Normalverteilung mit $\sigma = 5g$ teste man bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % die Hypothese.

Aufgabe 10: **(10 Punkte)**

Die Gleichung

$$ln\, x + x - 2 = 0$$

soll mit dem Newtonverfahren gelöst werden.
Das Iterationsintervall sei $I = [1, 2]$ und der Startwert sei $x_0 = 1,5$.

a) Wie lautet die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad , n = 0, 1, 2, \ldots \quad ?$$

b) Welcher Zahlenwert ergibt sich für die erste Iterierte x_1 ?
(Man verwende $ln 1.5 = 0.406$ und rechne mit 3 Stellen nach dem Komma).

c) Beweisen Sie die Konvergenz des Newtonverfahrens für beliebiges $x_0 \in [1, 2]$.