

Mathematik IV f. Elektrotechnik

Mathematik III f. Informatik

7. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
30. Mai 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 4 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Cholesky Verfahren)

Bestimmen Sie die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, -1, 4)^T$.

Aufgabe G2 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechnen Sie zunächst die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen, indem man das Gauß- Eliminationsverfahren auf die Matrix und die rechte Seite anwendet und dann das gestaffelte System $Rx = c$ löst. Lösen Sie das System nun mit Hilfe des Gaußalgorithmus

- (a) ohne Pivotsuche,
- (b) mit Spaltenpivotsuche.

Rechnen Sie dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteilen Sie die Qualität der Lösungen.

Aufgabe G3 (Störung der Matrix)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Delta A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ und das gestörte Gleichungssystem $(A + \Delta A)\tilde{x} = b$.

- (a) Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler in Abhängigkeit von α bezüglich der Spalten- und der Zeilensummennorm an.
- (b) Für welche α garantieren die Schranken einen relativen Fehler von höchstens $\frac{1}{2}$?
- (c) Berechnen Sie den exakten relativen Fehler für die maximalen Werte von α aus Teil (a)

Hausübung

Aufgabe H1 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem dann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

- (a) ohne Pivotsuche,
- (b) mit Spaltenpivotsuche,
- (c) mit vollständiger Pivotsuche.

Rechnen Sie dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteilen Sie die Qualität der Lösungen.

Aufgabe H2 (Pivotsuche)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -100 & 10 & 1 & 1000 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

Bei welchen dieser Matrizen kann auf die Pivotsuche verzichtet werden?

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Cholesky-Zerlegung)

- (a) Implementieren Sie ein Programm, das für eine symmetrische $n \times n$ -Matrix A die Cholesky-Zerlegung durchführt und die untere Dreiecksmatrix L ausgibt. Das Programm soll an geeigneter Stelle überprüfen, ob die Matrix positiv definit ist und gegebenenfalls eine Fehlermeldung ausgeben.

Testen Sie Ihr Programm an den Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Implementieren Sie nun ein Programm, das ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung von A löst.

Testen Sie Ihr Programm am Gleichungssystem $A_1x = b$ mit $b = (0, -1, 4)^T$. (vgl. Aufgabe G1)