Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2005
20. April 2005

Klausur zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE“

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punktzahl	8	7	8	10	7	40
erreichte Punktzahl						

Bitte füllen Sie den Kopf zu *Beginn der Klausur* aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen. Falten Sie am *Ende der Klausur* dieses Blatt einmal in der Mitte, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.
Als Hilfsmittel dürfen Sie Bücher, Skripte, Ihre persönlichen Aufzeichnungen und einfache, nicht programmierbare Taschenrechner benutzen.
Bedenken Sie, dass alle Ergebnisse zu begründen sind. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Viel Erfolg!

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t) + t, \quad y(0) = 1,$$

mit der exakten Lösung $y(t) = 2e^t - t - 1$.

(a) Stellen Sie zu diesem Problem die Verfahrensgleichungen für u_{j+1} für das explizite Eulerverfahren und das Verfahren von Heun auf.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens und des Verfahrens von Heun mit der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ je zwei Näherungswerte u_1 und u_2 an die Lösung dieser Anfangswertaufgabe.

(c) Beurteilen Sie die Qualität der erzielten Näherungswerte.

(d) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Heun die Konsistenzordnung 2 besitzt.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Sei

$$f : [0, 1] \to \mathbf{R} : x \mapsto \frac{1}{(1 + x)^2}.$$

(a) Interpolieren Sie f durch ein Interpolationspolynom. Verwenden Sie dabei die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

(b) Geben Sie eine obere Schranke für den Fehler an.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung

$$x^3 + x = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt.

(b) Schreiben Sie die Newton-Iteration auf und zeigen Sie, dass eine Kontraktion vorliegt.

(c) Führen Sie 2 Schritte des lokalen Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1$ aus.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Bei einem Energieanbieter wurde in vier Monaten der Stromabsatz y in [100 KWh/Tag] für einen Stadtteil gemessen. Außerdem wurde in jedem Beobachtungsmonat die Durchschnittstemperatur x in Grad Celsius ermittelt. Daraus ergab sich folgende Messreihe:

i	1	2	3	4
x_i	3.4	6.8	8.0	11.2
y_i	144	134	136	122

(a) Stellen Sie die beobachteten Daten in einem Punktediagramm graphisch dar.

(b) Berechnen Sie die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten dieser zweidimensionalen Messreihe. Ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen x und y gerechtfertigt? Warum?

(c) Wir nehmen nun an, ein linearer Zusammenhang sei begründet. Berechnen Sie die Regressionsgerade zur Vorhersage des Stromabsatzes an Hand der Durchschnittstemperatur und zeichnen Sie sie in das Punktediagramm.

(d) Bestimmen Sie einen Vorhersagewert für den Stromabsatz bei einer Durchschnittstemperatur von 12 Grad Celsius.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & \text{falls } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Welche dieser Funktionen sind Dichtefunktionen?

(b) Wählen Sie eine der Funktionen, die eine Dichtefunktion ist. Bezeichne X die zu der gewählten Funktion gehörige Zufallsvariable. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = \frac{1}{2})$ und $P(X \in [0, \ln(3)])$ sowie den Erwartungswert und die Varianz von X.