Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2008
14.05.2008

6. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x) \quad := \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 - x_2 - \frac{1}{10} \cdot (1 + x_1^4)^{\frac{1}{4}} \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 - e^{-x_1^2} \cdot \cos x_2 \end{pmatrix}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

a) Gib das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Iterierten $x^{(k+1)}$, $(k = 0, 1, ...)$ an, welches bei der Anwendung des Newton-Verfahrens auf das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ entsteht.

b) Berechne zum Startvektor $x^{(0)} = (0, 0)^T$ die Näherung $x^{(1)}$.

Lösung: Das Newton-Verfahren lautet für $k = 0, 1, ...$:

$$\begin{aligned} F'(x^{(k)}) \cdot s^{(k)} &= -F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + s^{(k)} \end{aligned}$$

Die Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix) von F ergibt sich für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zu:

$$F'(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 - 0.1 \cdot x_1^3 \cdot (1 + x_1^4)^{-\frac{3}{4}} & -1 \\ -1 + 2 \cdot x_1 \cdot e^{-x_1^2} \cdot \cos x_2 & 4 + e^{-x_1^2} \cdot \sin x_2 \end{pmatrix}$$

a) Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der $x^{(k+1)}$ für $k = 0, 1, ...$ lautet somit:

$$\begin{pmatrix} 2 - 0.1 \cdot x_1^{(k)3} \cdot (1 + x_1^{(k)4})^{-\frac{3}{4}} & -1 \\ -1 + 2 \cdot x_1^{(k)} \cdot e^{-x_1^{(k)2}} \cdot \cos x_2^{(k)} & 4 + e^{-x_1^{(k)2}} \cdot \sin x_2^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(k)} \\ s_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 0.1 \cdot (1 + x_1^{(k)4})^{\frac{1}{4}} \\ x_1^{(k)} - 4 \cdot x_2^{(k)} + e^{-x_1^{(k)2}} \cdot \cos x_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1^{(k)} \\ s_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

b) Für $k = 0$ erhalten wir mit $x^{(0)} = (0,0)^T$:

$$F(x^{(0)}) = (-0.1, -1.0)^T$$

$$F'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$s^{(0)} = (0.2, 0.3)^T$$
$$x^{(1)} = (0.2, 0.3)^T$$

Aufgabe G17 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

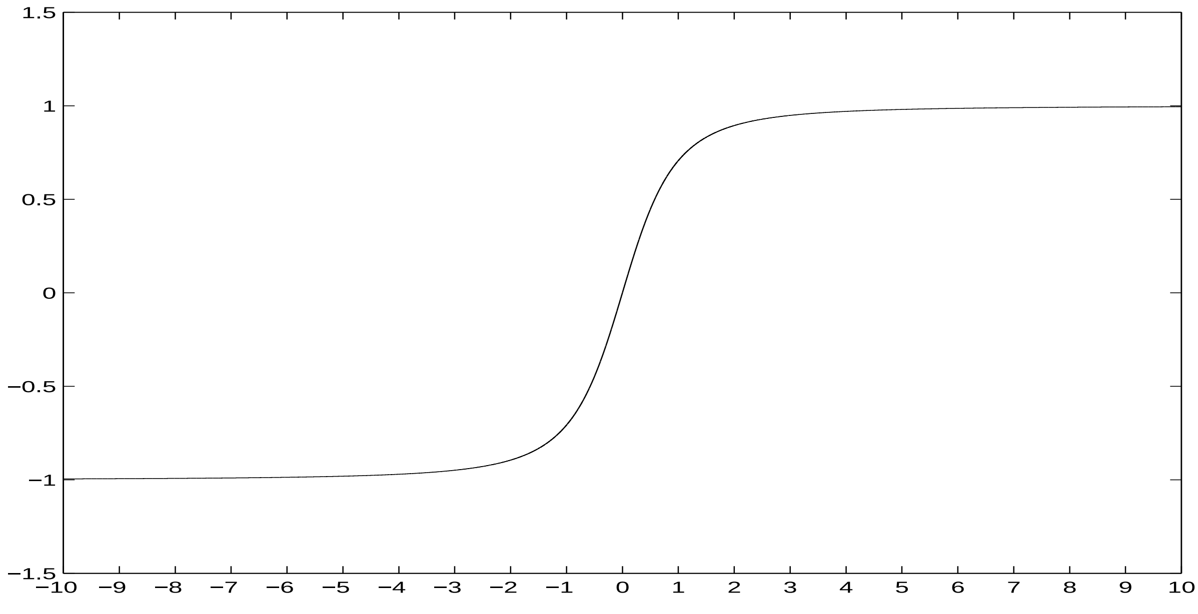
(a) Skizziere den Graphen der Funktion im Intervall $[-10, 10]$.

(b) Bestimme die Iterationsvorschrift zur Berechnung einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren.

(c) Zeige, dass das (lokale) Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x| > 1$ nicht konvergiert. Was passiert für $|x| = 1$?

Lösung:

(a)



(b) Die Newtongleichung lautet

$$F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -F(x^k) \Rightarrow x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)}.$$

Hier ist

$$F'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Also lautet die Iterationsvorschrift

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k}{\sqrt{(x^k)^2+1}}((x^k)^2+1)^{\frac{3}{2}} = x^k - x^k((x^k)^2+1) = -(x^k)^3.$$

(c) Für $|x^k| > 1$ gilt $|x^{k+1}| = (x^k)^3 > |x^k|$. Damit sieht man, dass die Folge der (x^k) für alle Startwerte mit $x^0 > 1$ divergiert.
Ist $|x^0| = 1$, so gilt mit der obigen Iterationsvorschrift für $x^0 = 1$, dass $x^k = (-1)^k$, und für $x^0 = -1$, dass $x^k = (-1)^{k+1}$. Beide Folgen (x^k) sind also alternierend mit Werten -1 und 1.

Aufgabe G18 (Quadratur)

a) Berechne mit der summierten Trapezregel eine Annäherung an das Integral $\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$, indem Du das Intervall in zwei gleich große Teilintervalle zerlegst.

b) Bis zu welchem Grad werden Polynome auf dem Intervall $[0, \pi]$ mit der summierten Trapezregel mit zwei gleich großen Teilintervallen auf $[0, \pi]$ exakt integriert? Begründe Deine Antwort.

c) Gib für die summierte Trapezregel eine möglichst minimale Anzahl m von Teilintervallen an, so dass der Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(\sin^2(x)) = \int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ höchstens 10^{-3} beträgt.

Lösung:

a) Es gilt

$$S_2^{(1)}(\sin^2(x)) = \frac{\pi}{4}(\sin^2(0) + \sin^2(\frac{\pi}{2}) + \sin^2(\frac{\pi}{2}) + \sin^2(\pi)) = \frac{\pi}{4}2\sin^2(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \approx 1.571.$$

b) Polynome bis zum Grad 1 werden exakt integriert, weil die Trapezregel exakt bis zum Grad 1 ist.
Polynome vom Grad 2 werden nicht mehr exakt integriert; denn es gilt

$$S_2^{(1)}(x^2) = \frac{\pi}{4}(0^2 + 2(\frac{\pi}{2})^2 + \pi^2) = \frac{3}{8}\pi^3 \neq \frac{1}{3}\pi^3 = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^\pi = \int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x.$$

c) Für den Fehler bei der summierten Trapezregel gilt nach dem Skript mit den Notationen aus dem Skript die Formel

$$R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2,$$

für ein $\xi \in [a, b]$.
Setze $f(x) = \sin^2(x)$, dann gilt

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x),$$
$$f''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) - 4\sin^2(x) = 2 - 4\sin^2(x).$$

Damit folgt wegen $\min_{\xi\in[0,\pi]} \sin^2(\xi) = 0$ und $\max_{\xi\in[0,\pi]} \sin^2(\xi) = 1$ gerade

$$\max_{\xi\in[0,\pi]} |f''(\xi)| = 2.$$

Als Abschätzung für den Quadraturfehler erhalten wir damit (für ein $\xi \in [0, \pi]$)

$$\left|R_N^{(1)}(\sin^2(x))\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{12}(\pi - 0)h^2\right| \leq \frac{1}{6}\pi h^2.$$

Wegen $\frac{1}{6}\pi h^2 \leq 10^{-3}$ folgt $h^2 \leq \frac{6}{\pi}10^{-3} \approx 1.91 \cdot 10^{-3}$ und daher $h \leq 0.0437$.
Damit folgt wegen $\frac{\pi}{m} = h \leq 0.0437$

$$m \geq \frac{\pi}{0.0437} \approx 71.89.$$

Für die gewünschte Genauigkeit wählen wir also $m = 72$.

Hausübung

Aufgabe H16 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizziere den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führe 4 Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Trage die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

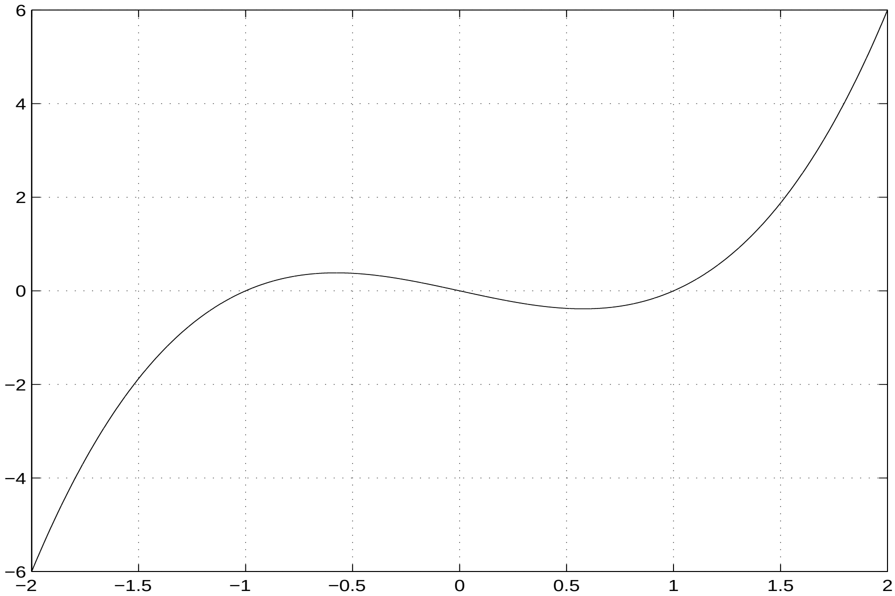
c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden ?

d) Bestimme ein maximales Intervall um $x_N = 0$, so daß jeder Startpunkt $x^{(0)}$ aus diesem Intervall gegen $x_N = 0$ konvergiert.

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle zu finden.

Lösung:

a)



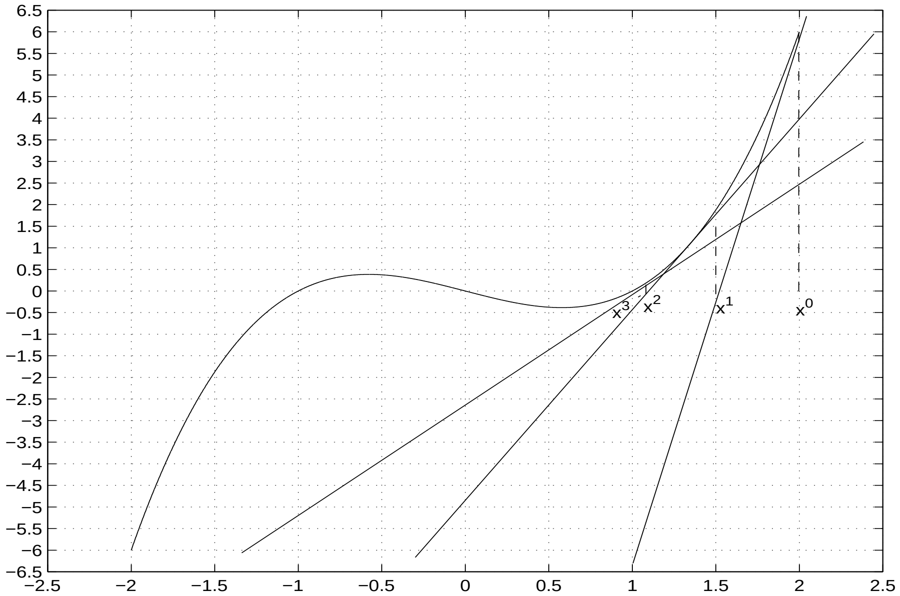
b) Die Iterationsvorschrift des eindimensionalen Newton–Verfahrens ist gegeben durch

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2 - 1} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Iterationsfolge ist damit

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$
0	2.0000	6.0000	11
1	1.4545	1.6226	5.3467
2	1.1510	0.3738	2.9744
3	1.0253	0.0525	2.1537
4	1.0009	0.0018	2.0054

Wie man sieht, konvergiert das Verfahren gegen die Nullstelle $x = 1$. Graphisch stellt sich die Iteration so dar:



c) Der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ ist ungeeignet. Es ergibt sich folgende Iterationsfolge:

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$
0	0.51000	-0.3773	-0.21970
1	-1.2076	-0.5534	3.3749
2	-1.0436	-0.0930	2.2673
3	-1.0026	-0.0052	2.0156

Graphisch bedeutet dies, daß die Tangente in $x^{(0)} = 0.51$ die x-Achse unterhalb -1 schneidet. Anhand des Graphen ist aber leicht einzusehen, daß eine Iterationsfolge, die einmal unterhalb -1 (bzw. oberhalb 1) angelangt ist, diesen Bereich nicht mehr verläßt. Das Newton-Verfahren konvergiert hier also nicht gegen $x = 0$, sondern gegen die Nullstelle $x = -1$ (bzw. gegen $x = 1$).

d) Das Problem besteht darin, daß die durch $x^{(0)}$ erzeugte Iterationsfolge niemals den Bereich $x \leq -1$ bzw. $x \geq 1$ erreichen darf, da sie dann gegen -1 bzw. 1 konvergiert.

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, muß das Intervall der möglichen Startpunkte symmetrisch um die 0 liegen und die Iterationsfolge darf dieses Intervall nicht verlassen. Um solch ein Intervall zu finden, suchen wir zunächst Startpunkte x, die als nächsten Iterationspunkt $-x$ liefern. Diese erhalten wir aus der Gleichung

$$x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = -x.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Für $x^{(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ wird die Iteration in eine Endlosschleife eintreten. Aber für

$$x^{(0)} \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

konvergiert die Folge gegen $x_N = 0$. Dies kann man sich an der Skizze der Funktion klarmachen. Um dies auch analytisch einzusehen, betrachtet man die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2 - 1}$$

als Funktion von x, also

$$g(x) := x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1}.$$

Diese ist stetig und monoton auf dem Intervall $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, da

$$g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Es ist hierbei

$$g'(x) = \frac{6x^4 - 6x^2}{(3x^2 - 1)^2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 \leq x^2,$$

was innerhalb des Intervalls $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ erfüllt ist. Da stetige Funktionen Intervalle auf Intervalle abbilden und wegen der Monotonie von $g(x)$, folgt damit:

$$g(x) \in (g(-\frac{1}{\sqrt{5}}), g(\frac{1}{\sqrt{5}})) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \quad \forall x \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Somit verlässt man mit dem Newtonverfahren für keinen Startpunkt $x^0 \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ dieses Intervall.

e) Ganz und gar ungeeignet sind die beiden Extremalpunkte $x_T = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x_H = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, da dort die Tangenten waagrecht sind und die x-Achse niemals schneiden. Algebraisch bedeutet dies $f'(x) = 0$ im Nenner !

Ebenfalls ungeeignete Startpunkt sind $x^{(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ aus Aufgabenteil d) da diese in ein Endlosschleife führen.

Aufgabe H17 (Programmieraufgabe: Lokales Newton-Verfahren)

(a) Schreibe ein Programm in einer Programmiersprache Deiner Wahl, welches das lokale Newton-Verfahren aus der Vorlesung implementiert. Das Verfahren terminiere, falls $\|F(x^{(k)})\| \leq tol$ oder $k \geq k_{\text{max}}$. Es sollte folgende Eingabeparameter haben: Die Funktion $F(x)$ und deren Ableitung, den Startpunkt x^0 und die Anzahl von Iterationen k_{max}, die maximal durchgeführt werden sollen, sowie die Toleranz tol.
Ausgegeben werden sollte der letzte Iterationspunkt x^k, die Anzahl der benötigten Iterationen k und der aktuelle Funktionswert $F(x^k)$ bzw. ein Hinweis auf Erfolg oder Misserfolg des Verfahrens.

(b) Teste Dein Verfahren an den folgenden Funktionen:
- $F1(x) = x^3 - x$, für Startpunkte: $x^0 \in \{2, 0.5, -0.5, 0.4\}$.
- $F2(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$, für Startpunkte $x^0 \in \{1, 3, -1\}$.
- $F3(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$, für Startpunkte $x^0 \in \{2, -1, 0, 0.00001, 10\}$.
- $F4(x) = \sin(12 \cdot x)$, für Startpunkte $x^0 \in \{0.1, 0.09, 3.14\}$.

(c) Teste Dein Programm ausserdem für weitere sinnvolle Startwerte Deiner Wahl und versuche das Verhalten Deines Programms für die obigen Funktionen zu erklären.

Lösung: Die Programme können von der Website heruntergeladen werden. In den Dateien F1.m, F2.m, F3.m und F4.m sind jeweils die Funktionen und deren Ableitungen definiert. LokalesNewton.m enthält einen Code für das lokale Newton-Verfahren. Mit runF1.m, ..., runF4.m kann man nun das lokale Newton-Verfahren für die verschiedenen Funktionen in Matlab oder Octave testen. Dabei kann man den Startwert, Toleranz und Anzahl der Iterationen beim Aufruf von LokalesNewton(Startwert,Funktion,Toleranz, Anzahl Iterationen) in runFj.m, j=1,2,3,4, ändern.

Aufgabe H18 (Quadraturfehler)

Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beweise selbst, dass für den Quadraturfehler der Trapezregel folgende Fehlerabschätzung gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx - I_1(f)\right| \leq \tfrac{5}{12}h^3 \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|.$$

Die Formel für den exakten Fehler darf hierbei nicht benutzt werden.
Hinweis: Man kann z.B. eine Taylorentwicklung für die Funktion $g(h) := \int_a^{a+h} f(x)dx$ in $h = 0$ aufstellen.

Lösung: Die Trapezregel lautet

$$I_1(f) = \tfrac{h}{2}(f(a) + f(b)) = \tfrac{h}{2}(f(a) + f(a+h)).$$

Taylorentwicklung für $f(a+h)$ nach h in $h = 0$ ergibt mit einem $\zeta_1 \in [0,1]$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(a+\zeta_1 h).$$

Wir setzen $g(h) := \int_a^{a+h} f(x)dx$. Taylorentwicklung für $g(h)$ in $h = 0$ ergibt mit einem $\zeta_2 \in [0,1]$

$$\begin{aligned} g(h) &= g(0) + hg'(0) + \tfrac{1}{2}h^2 g''(0) + \tfrac{1}{6}h^3 g'''(\zeta_2 h) \\ &= 0 + hf(a) + \tfrac{1}{2}h^2 f'(a) + \tfrac{1}{6}h^3 f''(a+\zeta_2 h), \end{aligned}$$

wobei sich die Ableitungen von g mittels des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung angeben lassen. Damit ergibt sich für den Quadraturfehler

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)dx - I_1(f)\right| &= \left|g(h) - \tfrac{h}{2}(f(a) + f(a+h))\right| \\ &= \big|hf(a) + \tfrac{1}{2}h^2 f'(a) + \tfrac{1}{6}h^3 f''(a+\zeta_2 h) \\ &\quad -\tfrac{h}{2}f(a) - \tfrac{h}{2}(f(a) + hf'(a) + \tfrac{1}{2}f''(a+\zeta_1 h))\big| \\ &= \left|\tfrac{1}{6}h^3 f''(a+\zeta_2 h) - \tfrac{1}{4}h^3 f''(a+\zeta_1 h)\right| \\ &\leq \tfrac{1}{6}h^3 |f''(a+\zeta_2 h)| + \tfrac{1}{4}h^3 |f''(a+\zeta_1 h)| \\ &\leq \tfrac{5}{12}h^3 \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|. \end{aligned}$$

Dies ist die gewünschte Abschätzung.