Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

UNIVERSITÄT
DARMSTADT

20.07.2006

Vorlesungsbegleitendes Vordiplom/ Modulprüfung zur Veranstaltung „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE, iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punktzahl	9	13	16	13	12	7	70
erreichte Punktzahl							

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze, Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 120 Minuten.
Als Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen jeglicher Art (Bücher, Skripte, Mitschriften usw.) und einfache Taschenrechner, d. h. nicht programmierbare Taschenrechner, die nicht symbolisch rechnen und keine Graphen / Plots anzeigen können, zugelassen.
Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Dieser Aushang wird auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

Eigentu

---

1. Aufgabe (Interpolation) (9 Punkte)

Sei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{5}{(2+2x)^2}.$$

a) Interpolieren Sie f durch ein Interpolationspolynom. Verwenden Sie dabei die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 1$.

b) Berechnen Sie eine obere Fehlerschranke für den Interpolationsfehler.

2. Aufgabe (Newton-Verfahren) (13 Punkte)

Um den Kehrwert einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ zu bestimmen, ohne eine Division durchzuführen, verwenden einige Computer ein Schema, das auf dem Newton–Verfahren basiert. Hierzu sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x} - a$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens zur Berechnung einer Nullstelle von f so, daß keine Division Verwendung findet.

(b) Berechnen Sie für $a = 3$ und die Startwerte $x^{(0)} = 0.1$ bzw. $x^{(0)} = 1.1$ jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens. Beurteilen Sie die Ergebnisse.

(c) Veranschaulichen Sie das Resultat an einer Skizze. Erläutern Sie für jeden der beiden Startpunkte anhand der Skizze warum das Verfahren konvergiert bzw. nicht konvergiert.

3. Aufgabe (Anfangswertprobleme) (16 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y'(t) = t\,y(t) \quad , \qquad y(0) = 1,$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, und zudem die folgende modifizierte Mittelpunktregel

$$(M) \qquad u_{j+1} = u_j + hf\left(t_j + \tfrac{3}{5}h, \tfrac{2}{5}u_j + \tfrac{3}{5}u_{j+1}\right)$$

zur Lösung von Anfangswertproblemen der Form $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, $y(a) = y_0$.

a) Berechnen Sie jeweils mit dem expliziten Euler-Verfahren und der modifizierten Mittelpunktregel (M) für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ Näherungen an $y(1)$ für $(*)$. Runden Sie dabei die Endergebnisse auf vier Stellen nach dem Komma.

b) Beurteilen Sie die Qualität der erzielten Näherungswerte.

c) Beweisen Sie, dass die modifizierte Mittelpunktregel (M) unter der Voraussetzung, dass f einmal stetig differenzierbar ist, konsistent von der Ordnung 1 ist.

d) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion für die modifizierte Mittelpunktregel (M) und prüfen Sie, ob das Verfahren L–stabil ist.
Hinweis: Sie dürfen die folgende Ungleichung benutzen:

$$\forall a > 0, \forall c > 0, \forall b \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \leq b \leq c \text{ gilt:} \qquad \frac{|a + bz|}{|a - cz|} < 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } \Re(z) < 0.$$

4. Aufgabe (Regressionsgerade) (13 Punkte)

Auf dem Darmstädter Wochenmarkt ist eine Erhebung über die Länge und das Gewicht von Salatgurken durchgeführt worden. Dabei erhielt man folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5	6
Länge (in cm): x_i	30	31	33	37	39	40
Gewicht (in g): y_i	595	610	625	640	655	715

a) Stellen Sie die Messergebnisse in einem Punktediagramm dar.

b) Berechnen Sie die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten dieser zweidimensionalen Messreihe. Ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen der Länge und dem Gewicht gerechtfertigt? Warum?

c) Wir nehmen nun an, ein linearer Zusammenhang sei begründet. Berechnen Sie die Regressionsgerade zur Vorhersage des Gewichts an Hand der Länge einer Gurke und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm.

d) Bestimmen Sie einen Vorhersagewert für das Gewicht einer Gurke bei einer Länge von 35 cm.

5. Aufgabe (Verteilungsfunktionen) (12 Punkte)

Wir betrachten für einen Parameter $\lambda > 0$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine Dichtefunktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x) & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

die zugehörige Verteilungsfunktion ist.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer mit der Dichte f veteilten Zufallsvariablen.
Hinweis: Hier können Sie sich Rechenarbeit sparen, indem Sie bereits berechnete Integrale wiederverwenden.

6. Aufgabe (Maximum-Likelihood-Schätzer) (7 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien stetig verteilt mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei für den Parameter $\theta > 0$ gelte. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.