Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22.09.2010

Modulprüfung
„Mathematik IV für Elektrotechnik / Mathematik III für Informatik / Numerik und Stochastik für M. Edu “

Name: .... | Matrikelnummer: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punktzahl	8	6	5	4	7	30
erreichte Punktzahl						

Bitte alle Blätter mit Namen und Matrikelnummer versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in das Aufgabenblatt einlegen. Sie werden mit diesem zusammen abgegeben. Bei der Bearbeitung der Aufgaben müssen alle verwendeten Sätze, Verfahren und Formeln, die erforderlichen Voraussetzungen, die Rechenwege und sämtliche Zwischenergebnisse angegeben werden.
Die Klausurdauer beträgt 90 Minuten.
Als Hilfsmittel sind vier eigenhandschriftliche DIN-A4 Seiten und einfache Taschenrechner zugelassen. Der Raum darf erst nach Klausurende verlassen werden.
Es werden ca. 3 Wochen Korrekturzeit benötigt. Die Ergebnisse werden ausgehängt. Informationen zum Aushang werden auf der Website zur Veranstaltung bekannt gegeben.

1. Aufgabe (Anfangswertproblem) (8 Punkte)

Gegeben sei das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen impliziten Runge-Kutta Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um von $t_i, u_i \approx y(t_i)$ ausgehend u_{i+1} zu berechnen?

b) Wie lautet die Stabilitätsfunktion des Verfahrens?

c) Zeigen Sie, dass das Verfahren L-stabil ist.

3) Gegeben sei nun das Anfangswertproblem

$$y'(t) = ty(t)\ , \quad y(1) = 2.$$

Berechne mit dem oben beschriebenen Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite $h = 1/2$ eine Näherung für $y(2)$.

2. Aufgabe (Newton-Verfahren) (6 Punkte)

Im Folgenden soll die Anwendung des Newtonverfahrens zur Nullstellenbestimmung auf die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$$

untersucht werden.

(a) Beurteilen Sie a priori, ob folgende Startpunkte geeignet sind, damit das lokale Newtonverfahren gegen die Nullstelle 3 konvergiert:

(1) $x^0 = 2.5,$ (2) $x^0 = 0.5$ und (3) $x^0 = \sqrt{3}.$

Begründen Sie Ihre Antwort anhand einer Skizze!

(b) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startpunkt $x^0 = 2.5$ durch. Runden Sie dabei auf 4 Stellen nach dem Komma. Beurteilen Sie ihr Ergebnis.

(c) Wie kann das Newton-Verfahren modifiziert werden, um Konvergenz auch für schlechte Startpunkte sicherzustellen?

(d) Führt diese Modifikation für alle Startpunkte aus Aufgabe (a) zur Konvergenz? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Aufgabe (Schätzer) (5 Punkte)

Für $\theta \in \mathbb{R}$ sei die Dichte einer Zufallsvariablen X gegeben durch

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{3}{x\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot \exp^{-\frac{9}{2}(\theta - \ln x)^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f_θ. Bestimmen Sie einen Maximum–Likelihood–Schätzer für θ.

(b) Zeigen Sie, dass der Maximum–Likelihood–Schätzer erwartungstreu ist für θ.
Hinweis: $E_\theta(\ln X) = \theta$.

4. Aufgabe (Multiple Choice) (4 Punkte)

Pro Frage darf eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es Null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

(a) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

- ☐ $Var(X_1 + \ldots + X_n) = nVar(X_1)$.
- ☐ $Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)$.
- ☐ $Var(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n^2}(Var(X_1) + \ldots + Var(X_n))$.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu_i$ und $Var(X_i) = \sigma_i^2$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist das arithmetische Mittel $\bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ für große n näherungsweise $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$–verteilt mit

- ☐ $\mu = n(\mu_1 + \ldots + \mu_n)$ und $\sigma^2 = \frac{1}{n}(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)$.
- ☐ $\mu = n(\mu_1 + \ldots + \mu_n)$ und $\sigma^2 = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)$.
- ☐ $\mu = \frac{1}{n}(\mu_1 + \ldots + \mu_n)$ und $\sigma^2 = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)$

(c) Ein Interpolationspolynom $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingung $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$ für die Stützpunkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, ..., n$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, erfüllt,

- ☐ existiert immer und ist immer eindeutig.
- ☐ existiert nicht immer und ist auch nicht immer eindeutig.
- ☐ existiert immer, ist aber nicht immer eindeutig.

(d) Eine Integrationsformel $J(f) = \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_i)$ zur numerischen Approximation eines Integrals heisst exakt vom Grad n, falls sie

- ☐ alle Polynome vom Grad n exakt integriert.
- ☐ alle Polynome vom Grad $n + 1$ exakt integriert.
- ☐ alle Polynome bis mindestens vom Grad n exakt integriert.

5. Aufgabe (Konfidenzintervalle) (7 Punkte)

Eine in einer Brauerei zur Abfüllung von Flaschen eingesetzte Maschine ist auf den Normwert 0.33 l eingestellt. Bei der Messung der Biermengen in 6 abgefüllten Flaschen ergaben sich die folgenden Werte (in Liter):

$$0.329 \quad 0.339 \quad 0.331 \quad 0.324 \quad 0.328 \quad 0.332$$

(a) Unter der Annahme, dass die Messwerte eine Realisierung von unabhängigen identisch $\mathcal{N}(0.33, \sigma^2)$–verteilten Zufallsvariablen sind, berechnen Sie ein Konfidenzintervall für σ^2 zum Konfidenzniveau 0.95.

(b) Unter der Annahme, dass σ^2 in dem in a) berechneten Konfidenzintervall liegt, bestimmen Sie eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass in eine bestimmte Flasche höchstens 0.32 l Bier abgefüllt werden.

(c) Für eine zweite, neu angeschaffte Maschine wurde mit Hilfe von 10 Messwerten ($s^2_{(10)}$ =0.0025) das Konfidenzintervall

$$[32.55, 32.65]$$

für den Erwartungswert μ berechnet. Bestimmen Sie $\bar{x}_{(10)}$ und das Konfidenzniveau $1 - \alpha$.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung des Konfidenzniveaus den entsprechenden Wert aus den Quantiltabellen, der dem von Ihnen berechneten am nächsten ist.