Formale Grundlagen der Informatik II
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
16. Juli 2014

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Graphen und FO)
Ein Pfad in einem Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Sequenz $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ von Knoten, so dass

$$x_i E x_{i+1}$$

für alle $i < n$. Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paare von Knoten (x, y) einen Pfad $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ gibt, mit $x = x_0$ und $y = x_n$.
Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, sodass $\mathcal{G} \models \Gamma$ genau dann, wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe G17 (Entscheidbarkeit von Erfüllbarkeit)

(a) Für eine Klasse L von FO-Sätzen gelte die folgende „Endliches-Modell-Eigenschaft“:

Jeder erfüllbare Satz $\phi \in L$ hat ein endliches Modell.

Argumentieren Sie, dass Erfüllbarkeit für Sätze aus L entscheidbar ist.

Hinweis: Man erinnere sich, dass eine Menge entscheidbar ist, falls man die Menge selbst und auch ihr Komplement rekursiv aufzählen kann. Diesen Sachverhalt kann man für $\mathrm{SAT}(L)$ und $L \setminus \mathrm{SAT}(L)$ ausnutzen.

(b) Zeigen Sie, dass Erfüllbarkeit für pränexe $\exists^*\forall^*$-FO-Sätze in einer Symbolmenge ohne Funktionssymbole (nur Relationen und Konstanten) entscheidbar ist.

Hinweis: Man überlege sich, zunächst für Sätze ohne Gleichheit, wie deren Herbrand-Modelle aussehen.

Aufgabe G18 (Intuitionistische Logik)
Zeigen Sie, dass in intuitionistischer Mengenlehre das Auswahlaxiom das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten impliziert (also ist eine intuitionistische Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom eigentlich eine klassische Mengenlehre).
Präziser: das Auswahlaxiom besagt, dass für jede Relation $R \subseteq X \times Y$

$$\forall x \in X\ \exists y \in Y\ xRy \quad \longrightarrow \quad \exists f : X \to Y\ \forall x \in X\ xRf(x)$$

gilt. Man kann zeigen, dass das Auswahlaxiom äquivalent zur Aussage „jede surjektive Funktion hat eine rechte Inverse“ ist. (Sie müssen das nicht zeigen und können es als bekannt annehmen.) Eine rechte Inverse zu $f : X \to Y$ is eine Funktion $g : Y \to X$, sodass für jedes $y \in Y$ gilt $f(g(y)) = y$.
Beweisen Sie:

(a) Wenn g eine rechte Inverse zu f ist, dann ist f surjektiv und g injektiv.

(b) Wenn das Auswahlaxiom vorausgesetzt wird, folgt in intuitionistischer Mengenlehre, dass für jeden Satz ϕ gilt $\phi \vee \neg\phi$.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $X := \{0, 1\}$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, für die gilt $0 \sim 1 \leftrightarrow \phi$. Beachte, dass die Gleichheit auf $\{0, 1\}$ intuitionistisch entscheidbar ist, d.h. es gilt $\forall x, y \in X\ \big(x = y \vee \neg(x = y)\big)$ (Sie müssen das nicht beweisen).

Hausübung

Diese Hausübung ist **online in Moodle** (https://moodle.tu-darmstadt.de/) **bis 20:00 am 25. Juli 2014** abzugeben. Um das zu tun, klicken Sie auf *Be6* im Abschitt *Übungen FGdI2* auf der Moodle-Seite der Veranstaltung.

Aufgabe H16 (Graphen und FO) (10 Punkte)
Wir betrachten ungerichtete Graphen $\mathscr{G} = (V, E)$. Welche der folgenden Aussagen lassen sich durch eine Menge von FO-Formeln ausdrücken? Geben Sie eine entsprechende Formelmenge an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Der Abstand zwischen den Knoten x und y ist gerade (oder unendlich).

(b) $\mathscr{G}$ enthält keinen Kreis.

(c) $\mathscr{G}$ enthält einen Kreis.

(d) Jeder Knoten von $\mathscr{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

(e) Kein Knoten von $\mathscr{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

Aufgabe H17 ((Semi-)Entscheidbarkeit) (14 Punkte)
Für die folgenden Mengen geben Sie jeweils an, ob sie

- entscheidbar,
- semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar,
- nicht semi-entscheidbar

sind. Schreiben Sie dazu eine kurze Begründung für Ihre Wahl.

(a) $\mathrm{SAT(AL)} := \{\phi \in \mathrm{AL} \mid \phi \text{ erfüllbar}\}$

(b) $\{(\phi, \psi) \in \mathrm{AL} \mid \phi \models \psi\}$

(c) $\mathrm{SAT(FO)} := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ erfüllbar}\}$

(d) $\mathrm{VAL(FO)} := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ allgemeingültig}\}$

(e) $\mathrm{UNSAT(FO)} := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ unerfüllbar}\}$

(f) $\mathrm{FINSAT(FO)} := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ hat ein endliches Modell}\}$

(g) $\mathrm{INF(FO)} := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$

Aufgabe H18 (Intuitionistische Logik) (12 Punkte)
Leiten Sie die folgenden Sequenzen im intuitionistischen Sequenzenkalkül SK_i (Folien, S. 170-171) ab.
Bemerkungen: Sowohl 0 als auch $\perp$ sind Symbole für Falschheit. $\neg\varphi$ ist eine Abkürzung für $\varphi \rightarrow \perp$. Die Regel Ax ist nur für Variablen ($\Gamma, p \vdash p$ ist ableitbar) formuliert, Sie können aber frei die darausfolgende Regel für Formeln ($\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ ist ableitbar) verwenden.

(a) $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

(b) $(\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$

Es gilt $\varphi \equiv \psi$ (Formeln φ und ψ sind intuitionistisch logisch äquivalent) genau dann, wenn die Sequenzen $\varphi \vdash \psi$ und $\psi \vdash \varphi$ ableitbar sind. Beweisen Sie damit die folgenden logischen Äquivalenzen.

(c) $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \neg\neg\varphi \wedge \neg\psi$

(d) $\forall x\, \neg\varphi \equiv \neg\exists x\, \varphi$