Klausur „Formale Grundlagen der Informatik 2“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SS 2014
29.08.2014

Nachname: .....

Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Drittversuch? Bitte gegebenenfalls ankreuzen ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	12	12	12	12	12	60	
erreichte Punktzahl							

Bitte lesen Sie folgendes sorgfältig durch.

- Klausurdauer: **90 Min.**
- Die Klausur besteht aus **12 Seiten** (5 Aufgaben). Bitte überprüfen Sie sie auf Vollständigkeit.
- Zur Bearbeitung der Klausur dürfen Sie **alle schriftlichen Unterlagen** verwenden.
- Sie dürfen zusätzliche Blätter als Schmierpapier verwenden, aber schreiben Sie die Lösungen **direkt auf die Klausur**. Falls Sie mehr Platz für die Lösungen brauchen, als gegeben ist, lassen Sie die zusätzlichen Blätter von den Aufsichten an die Klausur **tackern**.
- Versehen Sie **alle** zu bewertenden Blätter mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründung Wert gelegt.
- Bei Täuschungsversuchen wird die Klausur mit 5,0 bewertet.

1. Aufgabe (Multiple-Choice) (12 Punkte)

Bei jeder der anschließenden **12 Teilfragen** ist **genau eine** Antwort richtig. Die richtige Antwort wird mit 1 Punkt und eine falsche mit 0 Punkten bewertet.

Eine Begründung wird in dieser Aufgabe **nicht** verlangt.

(a) Für jede erfüllbare Formel φ ist auch die Formel $\exists x \varphi$ erfüllbar. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Die Menge $\{\varphi \in \mathrm{FO}_0 : \mathcal{N} \models \varphi\}$ ist überabzählbar, wobei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Es gibt eine Erweiterung der Peano Arithmetik um abzählbar unendlich viele $\mathcal{N}$-wahre Axiome. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Wenn eine Formel φ beliebig große endliche Modelle hat, dann hat φ auch beliebig große unendliche Modelle. ☐ wahr ☐ falsch

(e) Wenn eine Formelmenge Φ höchstens abzählbare Modelle hat, dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass jedes Modell von Φ maximal n Elemente hat. ☐ wahr ☐ falsch

(f) Die Formel $\neg\neg\neg\neg P \to \neg\neg P$ ist intuitionistisch beweisbar. ☐ wahr ☐ falsch

(g) Die Formel $(\bot \to \varphi) \to (P \vee \neg P)$ ist intuitionistisch beweisbar. ☐ wahr ☐ falsch

(h) Es gibt vollständige Systeme der Aussagenlogik mit nur einem Junktor. ☐ wahr ☐ falsch

(i) $\neg \bigwedge_{i=1}^{17} p_i \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{17} \neg p_i$ ist eine Tautologie. ☐ wahr ☐ falsch

(j) $\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x) \equiv \forall x \forall y (\varphi(x) \to \psi(y))$. ☐ wahr ☐ falsch

(k) $\models \exists y \forall x (\varphi(x) \to \psi(y)) \leftrightarrow \forall x \exists y (\varphi(x) \to \psi(y))$. ☐ wahr ☐ falsch

(l) Die Erfüllbarkeit in der Aussagenlogik ist semi-entscheidbar. ☐ wahr ☐ falsch

Name:	Matrikelnummer:

2. Aufgabe

(12 Punkte)

Gegeben seien die aussagenlogischen Formeln

$$\varphi := ((q \to r) \to p) \wedge \neg(p \to (\neg r \wedge q))$$
$$\psi := (r \to p) \vee (p \wedge q)$$

(a) Überprüfen Sie φ auf Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $\varphi \models \psi$

(ii) $\psi \models \varphi$

(c) Wandeln Sie φ in disjunktive Normalform um.

3. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Begründen oder widerlegen Sie die logische Gültigkeit von

(i) $\forall x\,(P(x,c) \vee P(c,x) \vee x = c) \rightarrow \exists x P(x,x)$,

(ii) $\exists x \forall y (P(x) \rightarrow P(y)) \rightarrow \exists x P(x)$,

(iii) $\exists x P(x) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow Q(c)) \rightarrow \exists x Q(x)$.

(b) Geben Sie **zwei** äquivalente Pränexierungen der Formel $\forall x(\forall y P(x,y) \rightarrow \forall y R(f(x),y))$ an.

(c) Geben Sie die Herbrand-Normalform der Formel $\forall u \exists v \forall w \forall x \exists y \forall z (P(x, f(u,u)) \rightarrow Q(f(z,y)))$ an.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $\varphi = \forall y \exists x \neg(S(y,x) \leftrightarrow \neg S(x,x))$.

(a) Zeigen Sie durch einen informellen semantischen Beweis die logische Gültigkeit von φ.

(b) Formen Sie $\neg\varphi$ durch Anwendung von Pränexationsschritten und Skolemisierung in eine erfüllbarkeitsäquivalente universelle Klauselform um.

(c) Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der universellen Klauselform aus (b) durch Grundinstanzenresolution.

5. Aufgabe

(12 Punkte)

Für beliebiges festes $k \in \mathbb{N}$ sei die folgende Theorie $\mathcal{T}$ gegeben: Die Signatur enthalte eine Konstante 0, ein 1-stelliges Funktionssymbol S und ein zweistelliges Relationssymbol $<$. Wir benutzen zudem die Abkürzung $t \leq s := t < s \vee t = s$. Betrachte die Sätze

i. $\forall x, y, z(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$

ii. $\forall x, y(\neg x \leq y \rightarrow y < x)$

iii. $\forall y \neg \exists x(y < x \wedge x < Sy)$

iv. $\forall x(0 \leq x \wedge x < Sx)$

v. $f(0) = \underbrace{S \ldots S}_{k \in \mathbb{N} \text{ viele}} 0.$

Die Konjunktion dieser Sätze lässt sich pränexieren zu einer Formel $\varphi = \forall x_1, \ldots x_n \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$, wobei φ_0 quantorfrei ist.

(a) Bilden Sie die Herbrand-Normalform $\exists \psi^H = \exists n \psi_0^H(n)$ von $\psi := \exists n \forall m(f(n) \leq f(m))$.

(b) Finden Sie Herbrand-Terme $t_1, \ldots t_l$, sodass

$$\varphi \models \bigvee_{i=1}^{l} \psi_0(t_i).$$

Begründen Sie ihre Antwort!