Prof. U. Kohlenbach
Dr. B. van den Berg

UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 30.09.2009

Formale Grundlagen der Informatik II

Bsc Inf, JBA Inf

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	12	12	12	12	12	48+12	
err. Punktzahl							

vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben, die alle mit 12 Punkten bewertet sind. Um die maximale Punktzahl zu erreichen, brauchen Sie insgesamt 48 Punkte. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := p_1 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)$$

(b) Welche der folgenden Argumente sind korrekt und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

> Wenn die Löhne oder die Preise steigen, dann gibt es Inflation. Falls Inflation besteht, muss entweder das Parlament einschreiten oder die Bevölkerung leidet. Falls die Bevölkerung leidet, werden die Parlamentarier unpopulär. Das Parlament schreitet nicht (gegen die Inflation) ein und die Parlamentarier werden nicht unpopulär. Also steigen die Löhne nicht.

> Logik ist schwer oder viele Studenten mögen sie. Falls Mathematik einfach ist, so ist Logik nicht schwer. Wenn also viele Studenten Logik mögen, ist Mathematik nicht leicht.

(c) Betrachten Sie das Modell $\mathcal{M} = (M, P, R, 0, f)$ mit $M = \{0, 1, 2\}$, $P = \{0, 1\}$, $R = \{(0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$ und $f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$.

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussagen in diesem Modell gelten oder nicht.

$$\forall x \exists y R(x, f(y))$$
$$\forall x (P(x) \rightarrow R(0, x))$$
$$\exists y \forall x (R(y, x) \rightarrow f(x) = y \vee P(y))$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül (entweder in der Fassung auf den Folien oder in der Version des Skripts):

$$\vdash \exists x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x, y)$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von aussagenlogischer Resolution, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\{p \leftrightarrow (q \vee \neg r), \quad (r \rightarrow s) \rightarrow \neg p, \quad (\neg p \vee q) \rightarrow s, \quad (r \wedge s) \rightarrow q\}.$$

(c) Beweisen Sie mit Hilfe von Grundinstanzenresolution, dass

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi,$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(x, y)), \\
\varphi_2 &:= \forall x \exists y (R(x, y) \wedge (\neg P(x) \rightarrow P(y)), \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)), \\
\psi &:= \forall x \neg Q(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Geben Sie einen semantischen Beweis der folgenden prädikatlogisch wahren Formel:

$$\varphi := \exists x \exists y \forall u \forall v (P(x) \vee Q(y) \rightarrow P(u) \vee Q(v)).$$

Hinweis: Beobachten Sie, dass φ eine korrekte Pränexierung von

$$\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \rightarrow \forall u P(u) \vee \forall v Q(v)$$

ist.

(b) Bestimmen Sie die Herbrand-Normalform φ^H von φ und geben Sie eine tautologische Herbranddisjunktion von φ an.

(c) Wie (b), aber mit

$$\varphi := \exists x \forall u \exists y \forall v (P(x) \vee Q(y) \rightarrow P(u) \vee Q(v)).$$

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \exists y (R(x,y) \wedge (P(x) \rightarrow Q(y))) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)) \\
\varphi_3 &:= \exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \wedge Q(y) \rightarrow R(y,x))) \\
\varphi_4 &:= \neg \exists x \exists y (R(x,y) \wedge Q(x) \wedge Q(y))
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für mindestens drei der vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Welche der folgenden Ausagen sind richtig und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist entscheidbar.

(b) Das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik ist entscheidbar.

(c) Die Menge der falschen zahlentheoretischen Sätze im Standard-Modell $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar).

(d) Jede Theorie die unendliche Modelle hat, hat auch endliche Modelle.

(e) Wenn eine Theorie keine unendlichen Modelle hat, dann gibt es eine natürliche Zahl n, so dass alle Modelle der Theorie die Mächtigkeit höchstens n haben.

(f) Es gibt eine Theorie, die genau ein Modell hat.

(bis auf Isomorphismus.