Formale Grundlagen der Informatik II
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
17. 06. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Erfüllbarkeit unendlicher Menge)
Seien $p_1, p_2, \ldots$ AL-Variablen und seien die Formeln φ_n induktiv definiert durch

$$\varphi_1 := 1, \quad \varphi_{n+1} := \varphi_n \to (p_n \oplus p_{n+1}).$$

Ist die Formelmenge $\Phi := \{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ erfüllbar? Wenn ja, finden Sie alle Modelle, die Φ erfüllen.

Lösung: Wir suchen alle $\mathfrak{I}$, sodass $\mathfrak{I} \models \varphi_n$ für alle n. Wenn das gilt, bemerkt man, dass $\mathfrak{I} \models \varphi_{n+1} \leftrightarrow (p_n \oplus p_{n+1})$ für alle n. Zunächst nehmen wir an, dass $\mathfrak{I}(p_1) = 0$. Durch Induktion zeigen wir, dass $\mathfrak{I}(p_{2n+1}) = 0$ und $\mathfrak{I}(p_{2n+2}) = 1$ für alle n. Falls $n = 0$, $\mathfrak{I}(p_{2n+1}) = 0$ wegen der Annahme und $\mathfrak{I}(p_{2n+2}) = 1$ wegen $\mathfrak{I} \models \varphi_2 \leftrightarrow (p_1 \oplus p_2)$ (und da φ_2 erfüllt werden muss). Nehmen wir jetzt an, dass die Eigenschaft für ein beliebiges n gilt, insbesondere trifft $\mathfrak{I}(p_{2n+2}) = 1$ zu. Aus $\mathfrak{I} \models \varphi_{2n+3} \leftrightarrow (p_{2n+2} \oplus p_{2n+3})$ folgt, dass $\mathfrak{I}(p_{2n+3}) = 0$. Noch ein weiterer ähnlicher Schritt zeigt, dass $\mathfrak{I}(p_{2n+4}) = 1$. Also jetzt wissen wir, wie $\mathfrak{I}$ aussehen sollte, wenn $\mathfrak{I}(p_1) = 0$ und $\mathfrak{I} \models \varphi_n$ für alle n. Es ist dann einfach, durch Induktion zu zeigen, dass so ein $\mathfrak{I}$ ein Modell von Φ ist. Gleichfalls zeigt man, dass das einzige andere Modell so definiert werden kann: $\mathfrak{I}(p_1) := 1$ und $\mathfrak{I}(p_{n+1}) := 1 - \mathfrak{I}(p_n)$ für alle n.

Aufgabe G8 (Kompaktheitssatz)

(a) Für (möglicherweise unendliche) Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jede Interpretation, die alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Sei $V = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Eine Interpretation $\mathfrak{I}\colon V \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als die unendliche Bit-Sequenz $\mathfrak{I}(p_1)\mathfrak{I}(p_2)\mathfrak{I}(p_3)\ldots$

P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, so dass sowohl P als auch das Komplement $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned} P &= \{\mathfrak{I} \mid \mathfrak{I} \models \Phi\} \\ \overline{P} &= \{\mathfrak{I} \mid \mathfrak{I} \models \Psi\} \end{aligned}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(V)$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ jeweils schon durch eine einzelne AL-Formel spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

Lösung:

(a) Wenn $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ gilt, dann hat die Menge $\Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle, wobei $\neg\Psi := \{\neg\psi \mid \psi \in \Psi\}$. Der Kompaktheitssatz impliziert dann, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle hat. Setzen wir $\Phi_0 := \{\varphi \in \Phi \mid \varphi \in \Gamma_0\}$ und $\Psi_0 := \{\psi \in \Psi \mid \neg\psi \in \Gamma_0\}$, dann heißt das, dass $\Gamma_0 = \Phi_0 \cup \neg\Psi_0$ keine Modelle hat, also $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Da P und $\overline{P}$ disjunkt sind, gilt $\bigwedge \Phi \models \bigvee \neg\Psi$. Nach Aufgabenteil (a) gibt es also endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \neg\Psi_0$. Wir behaupten, dass $P = \{\mathfrak{I} \mid \mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0\}$. $P \subseteq \{\mathfrak{I} \mid \mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0\}$ ist klar nach Definition von P, also zeigen wir die andere Richtung:

$$\mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0 \implies \mathfrak{I} \models \bigvee \neg\Psi_0 \implies \exists\, \psi \in \Psi \,.\, \mathfrak{I} \models \neg\psi \implies \mathfrak{I} \notin \overline{P} \implies \mathfrak{I} \in P.$$

Ein analoges Argument mit vertauschten Rollen von Φ uns Ψ könnte eine Formel $\bigwedge \Psi_0$ liefern, die $\overline{P}$ definiert, aber man bemerkt schon, dass die Formel $\neg \bigwedge \Phi_0$ die Menge $\overline{P}$ genau beschreibt.

Aufgabe G9 (Resolutionsverfahren)

$$\begin{aligned} \text{Seien } \varphi &:= (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q), \\ \psi &:= (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mithilfe des Resolutionsverfahrens, dass

(a) φ erfüllbar ist;

(b) $\varphi \models \psi$ gilt.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^0(K) &= \{\{p, \neg q, \neg r\},\ \{\neg p, q, \neg r\},\ \{\neg p, \neg q\}\} \\ \mathrm{Res}^1(K) &= \mathrm{Res}^0(K) \cup \{\{q, \neg q, \neg r\},\ \{\neg q, \neg r\},\ \{p, \neg p, \neg r\},\ \{\neg p, \neg r\}\} \\ \mathrm{Res}^2(K) &= \mathrm{Res}^1(K) \cup \{\{\neg p, \neg q, \neg r\}\} \\ \mathrm{Res}^3(K) &= \mathrm{Res}^2(K) \end{aligned}$$

(b) $\varphi \wedge \neg\psi \equiv (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$, daher betrachten wir die Klauseln: $\{p, \neg q, \neg r\}$, $\{\neg p, q, \neg r\}$, $\{\neg p, \neg q\}$, $\{p, q\}$, $\{p, \neg q, r\}$, $\{\neg p, q, r\}$.

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p, q, r\} \arrow[d] & & \{\neg p, q, \neg r\} \arrow[dll] & & \{p, \neg q, \neg r\} \arrow[drr] & & \{p, \neg q, r\} \arrow[d] \\
\{\neg p, q\} \arrow[drr] & & \{p, q\} \arrow[d] & & \{\neg p, \neg q\} \arrow[d] & & \{p, \neg q\} \arrow[dll] \\
& & \{q\} \arrow[dr] & & \{\neg q\} \arrow[dl] & & \\
& & & \Box & & &
\end{tikzcd}$$

Da $\Box$ aus den Klauseln ableitbar ist, gilt $\varphi \models \psi$.

Hausübung

Aufgabe H7 (Graphenfärbung) (5 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph (V ist die Menge der Knoten, $E \subseteq V \times V$ die Menge der Kanten). Wir erlauben, dass V und E unendlich sind, aber wir nehmen an, dass sie abzählbar sind.

Eine *k-Färbung* des Graphen G ist per Definition eine Abbildung $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ mit der Eigenschaft, dass für jede Kante $(v, w) \in E$ gilt $f(v) \neq f(w)$. Man sagt, dass G k-färbbar ist, wenn er eine k-Färbung besitzt.

(a) Geben Sie einen Graphen $G' = (V', E')$ an, für den Sie beweisen, dass er nicht 4-färbbar ist.

(b) Geben Sie einen 4-färbbaren Graphen $G'' = (V'', E'')$ an, zusammen mit seiner 4-Färbung. Für volle Punktzahl seien V'' und E'' unendlich und sei G'' nicht 3-färbbar.

(c) Fixiere $k \in \mathbb{N}$ und einen beliebigen Graphen $G = (V, E)$. Geben Sie eine (möglicherweise unendliche) AL-Formelmenge Φ an, abhängig von k und G, für die Sie zeigen, dass sie genau dann erfüllbar ist, wenn G k-färbbar ist.

(d) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ein Graph ist genau dann k-färbbar, wenn jeder seiner endlichen Teilgraphen k-färbbar ist.

Lösung:

(a) $\boxed{\text{1 P.}}$ Sei $V := \{a, b, c, d, e\}$ und $E := V \times V$, d.h. für alle $x, y \in V$ gilt $(x, y) \in E$. Sei eine beliebige $f : V \to \{1, 2, 3, 4\}$. Es gibt dann verschiedene x und y, sodass $f(x) = f(y)$ (zwei verschiedene Knoten von $G = (V, E)$ sind gleich gefärbt).

(b) $\boxed{\text{1 P.}}$ Sei $V := \mathbb{N}$ die menge der Natürlichen Zahlen. Sei E so definiert: $(i, j) \in E$ genau dann, wenn existiert n mit $4n \leq i, j < 4(n+1)$. Diesen Graphen kann man auch als unendlich viele Kopien von einem Quadrat mit seinen zwei Diagonalen beschreiben.

(c) $\boxed{\text{2 P.}}$ Für jeden Knoten u von G stellen wir die Farbe des Knotens durch die Variablen $p_u^1, \ldots, p_u^{k-1}$ vor. Es gibt viel mehr Belegungen für diese Variablen, genauer gesagt 2^{k-1}, als wir brauchen, d.h. nur k. Wir betrachten aber nur die Belegungen, sodass das binäre Wort $\mathfrak{I}(p_u^1) \ldots \mathfrak{I}(p_u^{k-1})$ gleich $1^i 0^{k-1-i}$ für eine $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, wobei $1^i 0^{k-1-i}$ die Farbe $i+1$ darstellt. Die Formel $\psi_u := (p_2 \to p_1) \wedge (p_3 \to p_2) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \to p_{k-2})$ garantiert, dass das Wort $\mathfrak{I}(p_u^1) \ldots \mathfrak{I}(p_u^{k-1})$ das richtige Format hat. Für jede zwei Knoten u und v beschreibt die Formel $\varphi_{u,v} := (p_u^1 \leftrightarrow \neg p_v^1) \vee \ldots \vee (p_u^{k-1} \leftrightarrow \neg p_v^{k-1})$, dass u und v unterschiedlich gefärbt sind. Die Formel $\Phi := \{\psi_u \mid u \in V\} \cup \{\varphi_{u,v} \mid (u, v) \in E\}$ ist eine mögliche Antwort.

Jetzt nehmen wir an, dass eine Belegung $\mathfrak{I}$ die Formel Φ erfüllt, und wir beschreiben eine k-färbende Funktion f. Sei $u \in V$ und sei i, sodass $\mathfrak{I}(p_u^1) \ldots \mathfrak{I}(p_u^{k-1}) = 1^i 0^{k-1-i}$. Wir definieren $f(u) := i+1$. Es ist klar, dass $f : V \to \{1, \ldots, k\}$. Für beliebige u, v nehmen wir an, dass $(u, v) \in E$. Wegen $\varphi_{u,v}$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ den Graphen G färbt, und wir beschreiben eine Belegung, die Φ erfüllt. Sei $u \in V$ und $j \in \{1, \ldots, k\}$. Wenn $j < f(u)$, definieren wir $p_u^j := 1$, sonst $p_u^j := 0$. Die so definierte Belegung erfüllt ψ_u, weil $\mathfrak{I}(p_u^1) \ldots \mathfrak{I}(p_u^{k-1}) = 1^{f(u)-1} 0^{k-f(u)}$, und erfüllt $\varphi_{u,v}$, weil f eine Färbung ist.

(d) $\boxed{\text{1 P.}}$ Offensichtlich wenn ein Graph k-färbbar ist, ist auch jeder seine Teilgraph k-färbbar (durch Einschränkung der färbenden Funktion).

Umgekehrt nehmen wir an, dass alle endlichen Teilgraphen von G k-färbbar sind. Sei Φ_0 eine endliche Teilmenge von Φ. Sei $G_0 = (V_0, E|_{V_0 \times V_0})$ ein endlicher Teilgraph von G, sodass jede Variable, die in Formeln in Φ_0 auftritt, tritt auch in V_0; somit $\Phi_0 \subseteq \{\psi_u \mid u \in V_0\} \cup \{\varphi_{u,v} \mid (u, v) \in E|_{V_0 \times V_0}\}$. Da G_0 k-färbbar ist, ist (per voriger Teilaufgabe) Φ_0 erfüllbar. Wegen dem Kompaktheitssatz ist auch Φ erfüllbar und somit G k-färbbar.

Aufgabe H8 (Resolutionsverfahren) (5 Punkte)

(a) Überprüfen Sie mithilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(p \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge \big(q \to (s \to r)\big) \wedge (r \vee s) \wedge \big((p \wedge r) \to s\big)$$

(b) Weisen Sie mithilfe der Resolutionsmethode die folgende Folgerungsbeziehung nach:

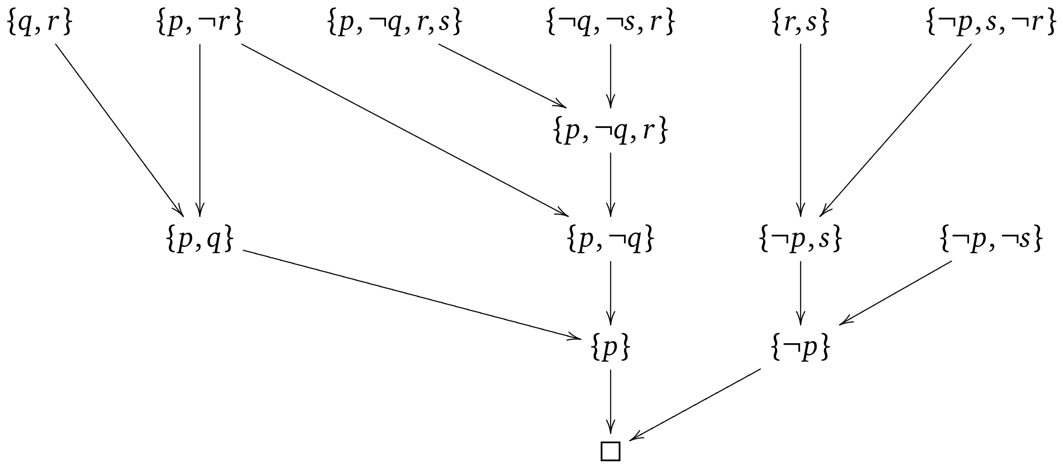
$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \models (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg r \to 0)$$

(c) Bestimmen Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$H_0 = \{p,\ (p \wedge q) \to s,\ (r \wedge t) \to s,\ t \to r,\ t\}$$

Lösung:

(a) $\boxed{\text{2 P.}}$ Klauseln: $\{q,r\},\{p,\neg r\},\{p,\neg q,r,s\},\{\neg q,\neg s,r\},\{r,s\},\{\neg p,s,\neg r\},\{\neg p,\neg s\}$

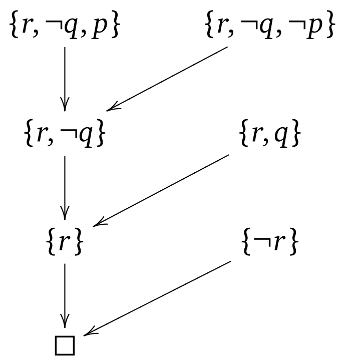


Da $\square$ aus den Klauseln ableitbar ist, ist die Formel unerfüllbar.

(b) $\boxed{\text{1,5 P.}}$ Wir zeigen die Unerfüllbarkeit von $\big((r\vee\neg q\vee p)\wedge(\neg r\vee q\vee p)\big)\wedge\neg\big((\neg r\wedge q\wedge p)\vee(\neg r\wedge\neg q)\vee r\big)$. Die Umwandlung dieser Formel in KNF ergibt die folgenden Klauseln:

$$\{r,\neg q,p\},\ \{\neg r,q,p\},\ \{r,\neg q,\neg p\},\ \{r,q\},\ \{\neg r\}$$

Wir zeigen jetzt die Unerfüllbarkeit durch Ableitung von $\square$:



(c) $\boxed{\text{1,5 P.}}$ Die Hornklauselmenge H_0 enthält keine negativen Hornklauseln, daher gibt es nach Lemma 5.12 (FGdI Skript zur Aussagenlogik) ein minimales Modell $\mathfrak{I}_0$ der Variablen in H_0. Wir verfahren wie im (konstruktiven) Beweis des Lemmas, konstruieren also schrittweise die Mengen X_i:

$$X_0 = \emptyset, \quad X_1 = X_0 \cup \{p,t\}, \quad X_2 = X_1 \cup \{r\}, \quad X_\infty = X_3 = X_2 \cup \{s\}.$$

Das minimale Modell $\mathfrak{I}_0$ ist demnach geben durch

$$\mathfrak{I}_0(p) = \mathfrak{I}_0(t) = \mathfrak{I}_0(r) = \mathfrak{I}_0(s) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}_0(q) = 0.$$

Minitest

Aufgabe M6 (Resolutionsverfahren)
Seien φ und ψ AL-Formeln und $K(\varphi)$ die Klauselmenge zu φ. Betrachte die folgenden Aussagen.

1. φ is unerfüllbar.
2. φ is erfüllbar.
3. φ ist allgemeingültig.
4. φ ist nicht allgemeingültig.
5. $\varphi \models \psi$
6. Eine endliche Menge Φ von AL-Formeln ist unerfüllbar.
7. Eine unendliche Menge Φ von AL-Formeln ist unerfüllbar.

Für jede Aussage oben identifizieren Sie die äquivalente Bedingung unten.

( ) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$
( ) $\square \notin \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$
( ) $\square \notin \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$
( ) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi_0))$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$
( ) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi \wedge \neg\psi))$
( ) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$
( ) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi))$

Lösung:

(3.) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$
(4.) $\square \notin \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$
(2.) $\square \notin \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$
(7.) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi_0))$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$
(5.) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi \wedge \neg\psi))$
(1.) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$
(6.) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi))$

Begründung: Siehe Skript, Abschnitt 5.3.

Aufgabe M7 (Kompaktheitssatz)
Bestimmen Sie die korrekten Implikationen für allgemeine (abzählbare) AL-Formelmenge Φ.

es gibt eine endliche Teilmenge von Φ, die erfüllbar ist	$\square \Longrightarrow$ $\square \Longleftarrow$	Φ ist erfüllbar	$\square \Longrightarrow$ $\square \Longleftarrow$	alle endlichen Teilmengen von Φ sind erfüllbar

Lösung:

es gibt eine endliche Teilmenge von Φ, die erfüllbar ist	$\square \Longrightarrow$ $\boxtimes \Longleftarrow$	Φ ist erfüllbar	$\boxtimes \Longrightarrow$ $\boxtimes \Longleftarrow$	alle endlichen Teilmengen von Φ sind erfüllbar

Begründung: Die linkste Aussage ist immer wahr, denn $\emptyset \subseteq \Phi$ ist eine endliche erfüllbare Teilmenge; das macht die linken Implikationen klar. Die rechten Implikationen gelten per Kompaktheitssatz (Satz 4.1 im Skript).