Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Hannes Meinlschmidt
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2013
7. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Tschebyschevsche Ungleichung, Normalverteilung)
Der Durchmesser neu produzierter Autokolben werde durch eine normalverteilte Zufallsvariable X sachgerecht beschrieben. Aus Erfahrung kennt man die Varianz von X, nämlich $\mathrm{Var}(X) = 0.04$ (mm^2), der Erwartungswert ist jedoch unbekannt. Es soll die Mindestanzahl $N \in \mathbb{N}$ von durchzuführenden unabhängigen Messungen ermittelt werden, so dass die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% kleiner als 0.1 (mm) ist.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\bar{X}_{(n)}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass skalare Vielfache, sowie Summen von normalverteilten Zufallsvariablen selbst wieder normalverteilt sind.

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke $\tilde{N}$ für N durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung.

(c) Bestimmen Sie die gesuchte Anzahl N exakt.
Benutzen Sie dazu die Statistischen Tabellen aus dem Moodle. Beachten Sie dabei, dass sich die dort angegebenen Werte auf eine standardnormalverteilte Zufallsvariable (kurz: $\sim N(0,1)$, also $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$) beziehen. Sie müssen also an geeigneter Stelle die betrachtete Variable "standardisieren", d.h. auf eine standardnormalverteilte Zufallsvariable transformieren bzw. zurückführen.

Aufgabe G2 (Schätzverfahren)
Die Zufallsvariablen $X, X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch $R(\theta - 1, \theta + 1)$-verteilt, wobei der Parameter $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt sei.

(a) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel $T_n(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}_{(n)}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = E_\theta(X)$ ist.

(b) Berechnen Sie die Varianz des Schätzers T_n.
Hinweis: Für $Y \sim R(a,b)$ gilt $\mathrm{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

(c) Seien nun beliebig viele Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ gegeben (alle immer noch unabhängig und identisch $R(\theta - 1, \theta + 1)$-verteilt). Ist die Schätzerfolge $T_1, T_2, \ldots$ konsistent für $\tau(\theta) = E_\theta(X)$?

Aufgabe G3 (Verteilung, Zentraler Grenzwertsatz)
Für eine Klausur sind 700 Studenten angemeldet. Erfahrungsgemäß melden sich jedoch bis zum Klausurtermin einige davon wieder ab bzw. erscheinen nicht. Um Papier zu sparen soll dies beim Druck der Klausuren berücksichtigt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student nicht zur Prüfung erscheint sei 30%. Diese Wahrscheinlichkeit sei für alle Studenten gleich und das Erscheinen (oder Nichterscheinen) verschiedener Studenten sei als unabhängig angenommen.

(a) Die Zufallsvariable X_i für den Studenten i beschreibe, ob der Student erscheint oder eben nicht ($X_i = 1$ bedeutet, dass er zur Klausur erscheint ist, $X_i = 0$, dass er nicht erscheint). Wie ist X_i verteilt? Geben Sie die Verteilungsfunktion, sowie den Erwartungswert und die Varianz von X_i an.

(b) Die Zufallsvariable X beschreibe die tatsächliche Teilnehmerzahl. Wie ist diese Zufallsvariable verteilt? Bestimmen Sie $P(500 \leq X \leq 501)$.
Achtung! Die Zwischenergebnisse sind riesig - Sie müssen keinen Zahlwert angeben.

(c) Verwenden Sie den Zentralen Grenzwertsatz und bestimmen Sie eine Näherung für die kleinste Anzahl an Klausuren, die gedruckt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99.95% jeder anwesende Student am Prüfungstag eine Klausur erhält.

Hausübung

Aufgabe H1 (Rechteckverteilung, Erwartungswert, Varianz)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und X eine $R(a, b)$-verteilte Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie $E(X)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Sei $p \in (0, 1)$. Geben Sie das p-Quantil x_p der $R(a, b)$-Verteilung an.

Aufgabe H2 (Stichprobenvarianz, χ^2-Verteilung, Quantile)
Eine Maschine zur Abfüllung von Bier soll auf ihre Genauigkeit überprüft werden. Dazu wird eine Stichprobe von 10 Flaschen entnommen und die jeweilige Füllmenge überprüft. Diese Füllmengen werden durch unabhängige identisch $N(0.33, 0.25)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{10}$ beschrieben. Welcher Wert für die Stichprobenvarianz $S^2_{(10)}$ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht überschritten?

Aufgabe H3 (Normalverteilung, Quantile)
Gegeben seien Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3, wobei jeweils $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ gelte. Die Parameter können Sie folgender Tabelle entnehmen:

i	1	2	3
μ_i	0	0	1.5
σ_i^2	1	4	1

(a) Bestimmen Sie für alle drei Zuvallsvariablen die Wahrscheinlichkeit $P(X_i \leq -1)$.

(b) Bestimmen Sie für alle drei Zuvallsvariablen das 0.999-Quantil.