Mathematik II für Informatik
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Alexander Dietz, Anton Freund
Lucas Schöbel-Kröhn

SoSe 2018
Übung: 28./29. Juni 2018
Abgabe: 5./6. Juli 2018

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Anfangswertproblem zu gegebener Lösung)
Betrachten Sie die durch $y(t) = t \cdot \sin(t) + 1$ gegebene Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an, sodass y das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) = F(t, y(t), y'(t)), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

löst.

Aufgabe G2 (Homogene lineare Differentialgleichungen)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \cos(t) \cdot y(t).$$

Verwenden Sie dazu Trennung der Variablen. Bestimmen Sie die spezielle Lösung für den Anfangswert $y(\pi/2) = e$.

Aufgabe G3 (Lineare Systeme und Differentialgleichungen höherer Ordnung)
Wir betrachten das System

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = y_1(t) \end{cases}$$

von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(a) Schreiben Sie das gegebene Gleichungssystem in Matrixschreibweise.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des gegebenen Systems von Differentialgleichungen.

(c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis, um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''(t) = y(t)$ zu bestimmen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Inhomogene lineare Differentialgleichungen) (12 Punkte)
Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{3}{1+t} \cdot y(t) + 3 \cdot (1+t), \qquad t > -1.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung durch Trennung der Variablen.

(b) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.

(c) Wie lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung?

Aufgabe H2 (Lösen einer Differentialgleichung durch Substitution) (12 Punkte)
Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = \left(\frac{y(t)}{t}\right)^2, \\ y(1) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Betrachten Sie dazu die Substitution $u(t) = \frac{y(t)}{t}$ und argumentieren Sie mit Trennung der Variablen.
Tipp: Es gilt $\int \frac{1}{u(u-1)}\,\mathrm{d}u = \ln(\frac{1-u}{u}) + c$.

Aufgabe H3 (System linearer Differentialgleichungen) (12 Punkte)
Wir betrachten das System

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + y_3(t), \\ y_2'(t) = y_1(t) + y_3(t), \\ y_3'(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(a) Schreiben Sie das gegebene Gleichungssystem in Matrixschreibweise.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des gegebenen Systems von Differentialgleichungen, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix aus Teilaufgabe (a) ermitteln.

(c) Bestimmen Sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\begin{cases} y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 4, \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

erfüllt.