Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2005/06

Klausur

Formale Grundlagen der Informatik II

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte (maximal)	12	12	12	12	12	12	60 (+12)
erreichte Punkte							

Note:

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen.

Bearbeiten Sie **mindestens 5 Aufgaben** Ihrer Wahl von den folgenden 6 Aufgaben. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

Aufgabe 1

12 Punkte

Gegeben seien die AL-Formeln

$$\varphi := \neg(p \to (q \wedge \neg r)) \wedge ((q \to r) \to p)$$
$$\psi := (p \vee q) \wedge (r \to p)$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle für φ und alle relevanten Subformeln, ob φ erfüllbar ist und ob φ allgemeingültig ist.

(b) Welche der folgenden Beziehungen gelten:

(i) $\varphi \models \psi$ (ii) $\psi \models \varphi$

(c) Wandeln sie φ in konjuntive Normalform um.

Aufgabe 2 12 Punkte

Sei $S := \{f, g, c, R\}$ die Signatur bestehend aus einem zweistelligen Funktionssymbol f, einem einstelligen Funktionssymbol g, einem Konstantensymbol c, und einem zweistelligen Relationssymbol R.

(a) Geben Sie an, bei welchen der folgenden Wörtern es sich um

- einen Term in $T(S)$;
- eine Formel in $\mathrm{FO}(S)$;
- nichts von beidem

handelt:

(i) $Rxfyc$ (iii) $fgcx$ (v) $\forall x \exists g(gx = x)$
(ii) $gx = y \vee z$ (iv) $Rxfxy = gc$ (vi) $\exists xfxc$

(b) Geben Sie für die folgenden $\mathrm{FO}(S)$-Formeln jeweils ein Modell mit möglichst wenigen Elementen an.

(i) $\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Rfxyy)$
(ii) $\forall x \neg(fxc = x)$
(iii) $\forall x \forall y \forall z(fxy = z \rightarrow Rxz)$

(c) Sei $S = \{E\}$ die Signatur der Graphen mit einer zweistelligen Kantenrelation E. Wir betrachten nur S-Strukturen, die ungerichtete Graphen ohne Schleifen repräsentieren (d. h. E ist symmetrisch und irreflexiv). Drücken Sie die folgenden Aussagen durch $\mathrm{FO}(S)$-Sätze aus:

(i) Der Graph hat genau n Knoten.
(ii) Jeder Knoten ist mit höchstens 2 Knoten durch eine Kante verbunden.

Aufgabe 3 12 Punkte

(a) Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$. Bestimmen Sie für jedes Paar der folgenden Aussagen, ob diese äquivalent sind:

(i) $\varphi \wedge \neg\psi$ ist unerfüllbar.
(ii) $\varphi \rightarrow \psi$ ist erfüllbar.
(iii) $\varphi \models \psi$
(iv) $\neg\varphi \vee \psi \not\models 0$
(v) $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ ist allgemeingültig.

(b) Seien Φ und Ψ Mengen von FO-Formeln und $\mathfrak{J}$ eine Interpretation. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr, unabhängig davon, wie wir Φ, Ψ und $\mathfrak{J}$ wählen? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(i) Wenn Φ unerfüllbar ist, dann gilt $\mathfrak{J} \not\models \Phi$.
(ii) Wenn $\mathfrak{J} \not\models \Phi$, dann ist Φ unerfüllbar.
(iii) Wenn Φ unerfüllbar ist, dann gilt $\Psi \not\models \Phi$.
(iv) Wenn $\Psi \models \Phi$, dann ist $\Psi \cup \Phi$ erfüllbar.

Aufgabe 4 12 Punkte

(a) Beweisen Sie mit Hilfe der AL-Resolutionsmethode, daß

$$(p \vee q) \wedge \neg r \models \neg(r \vee \neg(p \vee q))$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des AL-Sequenzenkalküls, daß

$$\neg(r \vee \neg(p \vee q)) \models (p \vee q) \wedge \neg r$$

Aufgabe 5 12 Punkte

Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und f ein einstelliges Funktionssymbol.
Betrachten Sie die FO-Sätze

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \exists x Rxfx\,,\\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Rfxfy)\,,\\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)\,,\\
\psi &:= \exists x Rxfffx\,.
\end{aligned}$$

(a) Formen Sie die Sätze φ_1, φ_2, φ_3 und $\neg\psi$ in Skolemnormalform um.

(b) Bringen Sie das Ergebnis aus (a) in Klauselform.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Grundinstanzenresolution, daß

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \models \psi\,.$$

Hinweis. Man überlege sich inhaltlich, warum diese Folgerungsbeziehung gilt und welche Grundinstanzen dabei eine Rolle spielen.

Aufgabe 6 12 Punkte

Sei $S = \{E\}$ eine Signatur mit einer zweistelligen Relation E.

(a) Geben Sie einen FO(S)-Satz an, welcher besagt, daß E eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Geben Sie eine Menge von FO(S)-Sätzen an, die ausdrückt, daß E eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen ist.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß es keine Menge von FO(S)-Sätzen gibt, die ausdrückt, daß E eine Äquivalenzrelation mit endlich vielen Äquivalenzklassen ist.