Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2005
1. August 2005

Formale Grundlagen der Informatik II

Klausur

Nachname:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ	
Punkte (maximal)	12	12	12	12	12	12	12	72	(+12)
erreichte Punkte									

Note:

(Vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen.)

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Bearbeiten Sie **mindestens 6 Aufgaben** Ihrer Wahl von den folgenden 7 Aufgaben. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

(Aufgabe 1) **12 Punkte**

Betrachten Sie die AL-Formel

$$((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee r)) \wedge ((p \vee \neg q) \rightarrow r)$$

(i) Bestimmen Sie die Wahrheitstafel (systematisch, mit Spalten für die wesentlichen Subformeln).

(ii) Bestimmen Sie eine äquivalente Formel in DNF.

Hinweis: Man kann mit wenigen Disjunktionsgliedern auskommen.

(iii) Bestimmen Sie eine äquivalente Darstellung als Klauselmenge.

(Aufgabe 2) **12 Punkte**

(a) Betrachten Sie die Signatur $S = \{f, c, R\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol, c eine Konstante und R ein zweistelliges Relationssymbol ist.
Beschreiben Sie die folgenden (unendlichen) Mengen syntaktischer Objekte exakt:

(i) die Menge der S-Terme über der Variablenmenge $\{x, y\}$.

(ii) die Menge aller atomaren S-Formeln ohne freie Variablen.

(iii) die Menge aller atomaren S-Formeln φ über der Variable x mit $\mathrm{frei}(\varphi) = \{x\}$.

(b) Geben Sie für die folgenden FO(S)-Formeln über der Variablenmenge $\{x, y, z\}$ jeweils den Quantorenrang $\mathrm{qr}(\varphi)$ und die Menge der freien Variablen $\mathrm{frei}(\varphi)$ an:

(i) $(\forall x Rxy) \wedge (\exists z \forall y Ryfz)$

(ii) $\exists y((\forall x \neg x = y) \rightarrow (\exists z \forall y Rzy))$

(iii) $x = y \vee \forall y(Rxz \rightarrow Rfyz)$

(Aufgabe 3) **12 Punkte**

(a) Geben Sie an, welche der folgenden Bedingungen an eine Formel $\varphi \in$ AL äquivalent sind:

(i) φ ist nicht allgemeingültig

(ii) $\varphi \equiv 0$

(iii) φ ist unerfüllbar

(iv) $\neg\varphi$ ist erfüllbar

(v) $\varphi \rightarrow \neg\varphi$ ist allgemeingültig

(b) Sind die folgenden Behauptungen über beliebige FO-Formeln wahr oder falsch?

(i) Wenn φ allgemeingültig ist, so ist auch $\exists x\varphi$ allgemeingültig.

(ii) Wenn φ erfüllbar ist, so ist $\forall x\varphi$ erfüllbar.

(iii) $\forall x\varphi$ ist allgemeingültig gdw. $\exists x\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(c) Welche der folgenden Formelmengen sind (für jede feste, endliche Signatur S) rekursiv aufzählbar?

(i) $\{\varphi \in \mathrm{FO}_0(S) \;:\; \varphi \text{ allgemeingültig}\}$

(ii) $\{\varphi \in \mathrm{FO}_0(S) \;:\; \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

(iii) $\{\varphi \in \mathrm{FO}_0(S) \;:\; \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(Aufgabe 4) **12 Punkte**

(a) Zeigen Sie mittels AL-Resolution, die Gültigkeit von

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \models p \vee (q \wedge r).$$

(b) Leiten Sie im AL-Sequenzenkalkül die folgende Sequenz ab

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

(Aufgabe 5) **12 Punkte**

Betrachten Sie die Signatur $S = \{R, S\}$, wobei R und S einstellige Relationssymbole sind und die FO(S)-Sätze:

$$\varphi_1 := (\exists x Rx) \vee (\forall x Sx) \qquad\qquad$$
$$\varphi_2 := \forall x \exists y (Rx \to Sy) \qquad\qquad \varphi_4 := \forall x Sx$$
$$\varphi_3 := (\exists x Sx) \to (\forall x Sx)$$

Im folgenden soll gezeigt werden, dass aus der Satzmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ der Satz φ_4 folgt.

(a) Formen Sie die Sätze φ_1, φ_2, φ_3 und $\neg\varphi_4$ erfüllungsäquivalent in Skolemnormalform um.

Hinweis: Achten Sie bei der Skolemisierung darauf, in unterschiedlichen Sätzen unterschiedliche Skolemkonstanten und -funktionen zu verwenden.

(b) Bringen Sie das Ergebnis aus Teil (a) in Klauselform.

(c) Zeigen Sie mit Grundinstanzenresolution, dass aus $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ der Satz φ_4 folgt. Alle verwendeten Grundinstanzen und Resolutionsschritte sind klar kenntlich zu machen.

(Aufgabe 6) **12 Punkte**

(a) Betrachten Sie Strukturen der Form $(\mathbb{N}, <, (P_a)_{a\in\Sigma})$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, wo $<$ die übliche strikte Ordnung ist, und für jedes Element aus $\mathbb{N}$ (zu jedem Zeitpunkt) genau eines der Prädikate P_a, P_b, P_c zutrifft. Formalisieren Sie darüber folgende temporale Eigenschaften:

1. Sobald ein „a“ auftritt, kommt danach nie mehr ein „b“.
2. Nach jedem „c“ kommt irgendwann später ein „a“ und auch ein „b“.

(b) Betrachten Sie $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ als $S = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$-Struktur. Jeder Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}_2(S)$ ordnen wir die zweistellige Relation

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{R}} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \mathcal{R} \models \varphi[a, b]\}$$

zu.

Bestimmen Sie $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{R}}$ für die folgenden Formeln. Markieren Sie dazu die gesuchte Teilmenge als Teilmenge der x-y-Ebene in 3 separaten Diagrammen.

1. $x \cdot x = 1 \wedge x \cdot y < 0$
2. $x + 1 < 0 \vee \exists y (x = y \cdot y \vee x < 1)$
3. $(\exists x\, y + x = 1) \wedge 0 < y$

(Aufgabe 7) **12 Punkte**

(a) Betrachten Sie zur Signatur $S = \{E, L, R\}$ (E zweistelliges, L und R einstellige Relationssymbole) den Satz

$$\varphi = \forall x (\exists y (Exy \wedge Ry) \wedge \exists z (Exz \wedge Lz)),$$

Geben Sie (nach geeigneter Skolemisierung durch zwei einstellige Skolemfunktionen r und l und Hinzufügen einer Konstanten c) ein Herbrandmodell für φ an.
Finden Sie zudem ein endliches Modell von φ.

(b) Zu $S = \{f\}$ (f einstelliges Funktionssymbol) sei

$$\Phi := \{\forall x \neg fx = x, \forall x \neg ffx = x, \forall x \neg fffx = x, \ldots\}$$
$$\varphi := \forall x \forall y (\neg x = y \to \neg fx = fy)$$

Gilt $\Phi \models \varphi$? Begründen Sie Ihre Antwort.