Mathematik II für Informatik
12. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 06./07. Juli 2017
Abgabe: 13./14. Juli 2017

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Integration)
Zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, ungerade Funktion. Dann gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, gerade Funktion. Dann gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie nun für alle $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Lösungshinweise:

(a) Für ungerade Funktionen gilt $f(x) = -f(-x)$ und damit

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Subst. } x=-t}{=} \\ &= \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

(b) Für gerade Funktionen gilt $f(x) = f(-x)$ und damit

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Subst. } x=-t}{=} \\ &= -\int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(c) Ist $n=0$, so ist $\sin(nx)=\sin(0)=0$ und damit wegen der Beschränktheit von $\cos(x)$ auch

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0 \qquad \text{für alle } m\in\mathbb{Z} \text{ und } n=0.$$

Die Funktionen $\cos(mx)$ sind gerade für alle $m\in\mathbb{Z}$ und die Funktionen $\sin(nx)$ sind ungerade für alle $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Das Produkt $\cos(mx)\cdot\sin(nx)$ mit $n\neq 0$ ist somit eine ungerade Funktion. Mit Teil (a) folgt insgesamt:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0 \qquad \text{für alle } m\in\mathbb{Z} \text{ und für alle } n\in\mathbb{Z}.$$

Aufgabe G2 (Fourierreihen)
Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ mit

$$g(x)=\begin{cases}2, & \text{für } |x|\le\pi/2,\\ 1, & \text{für } \pi/2<|x|\le\pi.\end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi,2\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

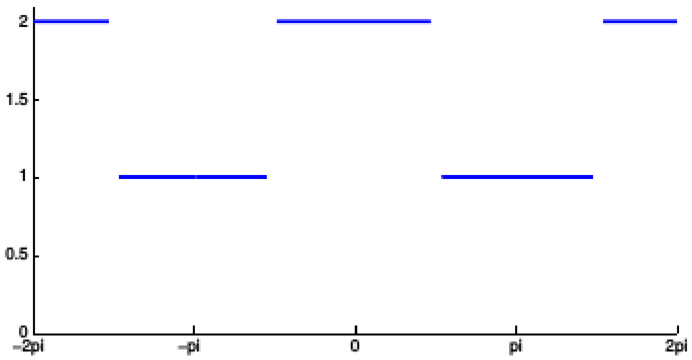
(c) Entscheiden Sie, für welche $x\in\mathbb{R}$ die Fourierreihe von f konvergiert und geben Sie die Funktion an, gegen die die Fourierreihe konvergiert.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierreihe von f den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+3)(4k+1)}$.

Hinweis: Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Lösungshinweise:

(a)



(b) Da f gerade ist (Skizze!), gilt $b_n=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)f(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi n}\sin(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{\pi n}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\
&=\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-0+0-\frac{2}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\begin{cases}\frac{2}{\pi n}, & n=1,5,9,\ldots,\\ 0, & n=2,4,6,\ldots,\\ -\frac{2}{\pi n}, & n=3,7,11,\ldots.\end{cases}
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2+1=3.$$

Damit ist die Fourierreihe von f

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos((2k+1)x).$$

(c) Die Funktion f ist stückweise glatt mit Sprungstellen in $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Also konvergiert die Fourierreihe von f gegen $f(x)$ für alle $x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, und gegen

$$\frac{\lim_{y\to x^+} f(y)+\lim_{y\to x^-} f(y)}{2}=\frac{3}{2}\qquad \text{für } x=\frac{(2k+1)\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Die Fourierreihe von f konvergiert also gegen

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{für } x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2},\\ \frac{3}{2} & \text{für } x=\frac{(2k+1)\pi}{2}.\end{cases}$$

(d) In $x_0=0$ ist f stetig, also gilt nach (b) und mit Hilfe des Hinweises

$$\begin{aligned} 2=f(0)&=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}\right)\\ &=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+3-4k-1}{(4k+1)(4k+3)}=\frac{3}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+3)(4k+1)}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+3)(4k+1)}=\left(2-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

Aufgabe G3 (Differentialgleichungen)

(a) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ so, dass die Funktion $y:(-\beta,\infty)\to\mathbb{R}$ mit

$$y(t)=\alpha\ln(t+\beta)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t)=\mathrm{e}^{t-y(t)-\mathrm{e}^{y(t)}},\quad y(1)=0$$

ist.

(b) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen und überprüfen Sie die Lösungen anschließend.

i.

$$y'(t)=\mathrm{e}^{y(t)},\quad y(0)=0$$

ii.

$$y'(t)=\frac{\sqrt[3]{y(t)^2}}{3t+1},\quad y(0)=27.$$

Lösungshinweise:

(a) Wir bestimmen zunächst die Ableitung von $y(t)$:

$$y'(t) = \frac{\alpha}{t+\beta}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{t+\beta} &= y'(t) = \mathrm{e}^{t-y(t)-\mathrm{e}^{y(t)}} = \mathrm{e}^{t-\alpha\ln(t+\beta)-\mathrm{e}^{\alpha\ln(t+\beta)}} = \mathrm{e}^{t-\alpha\ln(t+\beta)-(t+\beta)^\alpha} \\ &= \mathrm{e}^{t-(t+\beta)^\alpha} \cdot \frac{1}{(t+\beta)^\alpha}.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\alpha = 1$ eine naheliegende Wahl ist. Damit bleibt β so zu bestimmen, dass

$$\frac{1}{t+\beta} = \frac{\mathrm{e}^\beta}{t+\beta}.$$

Mit $\beta = 0$ stimmen beide Seiten überein und die Lösungsfunktion

$$y(t) = \ln(t)$$

erfüllt auch die Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

(b) i. Wir haben

$$y' = \mathrm{e}^y \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^y$$

zu lösen. Mit Hilfe der Trennung der Variablen (Satz 7.2.2) erhalten wir:

$$\int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}t \implies -\mathrm{e}^{-y} = t + c \implies y(t) = -\ln(-t-c) \quad \text{für } 0 \le t < -c.$$

Wir setzen in die Anfangsbedingung ein:

$$0 = y(0) = -\ln(0-c) \implies c = -1.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y(t) = -\ln(1-t) \quad \text{für } 0 \le t < 1.$$

Mit $y'(t) = \frac{1}{1-t}$ kann man die Lösung durch Einsetzen verifizieren.

ii. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(t) = \frac{1}{3t+1}\sqrt[3]{y^2} \quad &\rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{3t+1}\,\mathrm{d}t \\ &\Rightarrow \quad 3y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln(3t+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}, t \ge 0 \\ &\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{9}\ln(3t+1) + \frac{1}{3}c\right)^3, \quad c \in \mathbb{R}, t \ge 0 \\ &\Rightarrow \quad y(t) = \left(\frac{1}{9}\ln(3t+1) + C\right)^3, \quad C \in \mathbb{R}, t \ge 0. \end{aligned}$$

Aus $27 = y(0) = \left(\frac{1}{9}\ln(1) + C\right)^3 = C^3$ folgt, dass $C = 3$ ist. Somit ist die Lösung

$$y(t) = \left(\frac{1}{9}\ln(3t+1) + 3\right)^3.$$

Wir leiten die oben bestimmte Lösung ab und sehen durch Einsetzen in die Differentialgleichung, dass sie die Differentialgleichung löst.

Aufgabe G4 (Lineare Differentialgleichungen)
Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' = \frac{3}{1+t}y + 3(1+t), \qquad t > -1.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
(b) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.
(c) Wie lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung?

Lösungshinweise:

(a) Die zur linearen Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{3}{1+t}y(t) + 3(1+t)$$

gehörige *homogene Differentialgleichung*

$$y'(t) = \frac{3}{1+t}y(t)$$

lässt sich durch *Trennung der Variablen* lösen. Hierzu setzen wir $y(t) \neq 0$ voraus und mit $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ sowie der beliebig gewählten Konstanten $c \in \mathbb{R}$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{1+t}y \implies \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = 3\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \implies \ln|y| = 3\ln(1+t) + c.$$

Also

$$y(t) = \tilde{C} \cdot (1+t)^3$$

mit $\tilde{C} > 0$.
Die Vorzeichenbedingung des Betrags kann in die Konstante geschrieben werden. Außerdem ist offensichtlich $y(t) = 0$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.
Damit erhalten wir für die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h(t) = C(1+t)^3, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Um die inhomogene Differentialgleichung durch *Variation der Konstanten* (Satz 7.2.8) zu lösen, verwenden wir den Ansatz

$$y(x) = C(t) \cdot (1+t)^3$$

und bestimmen eine Darstellung von $C(t)$. Mit

$$y'(t) = C'(t) \cdot (1+t)^3 + 3C(t) \cdot (1+t)^2$$

folgt

$$\begin{aligned} & y'(t) = \frac{3}{1+t}y(t) + 3(1+t) \quad \text{(Aufgabenstellung)} \\ \Leftrightarrow \quad & C'(t) \cdot (1+t)^3 + 3C(t) \cdot (1+t)^2 = \frac{3}{1+t} \cdot C(t) \cdot (1+t)^3 + 3(1+t) \\ \Leftrightarrow \quad & C'(t) = \frac{3}{(1+t)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & C(t) = -\frac{3}{1+t} + K, \qquad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $K = 0$ (es wird nur *eine* partikuläre Lösung benötigt), so erhalten wir mit

$$y_p(t) = -3(1+t)^2$$

eine *partikuläre Lösung* der inhomogenen Differentialgleichung.

(c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{3}{1+t} y(t) + 3(1+t), \qquad t > -1$$

ergibt sich durch Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Mit den Ergebnissen aus den Aufgabenteilen (a) und (b) ist somit

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = -3(1+t)^2 + C \cdot (1+t)^3, \qquad C \in \mathbb{R}$$

die *allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*.

Bemerkung:
Die Konstruktion der allgemeinen Lösung einer linearen Differentialgleichung durch Addition von (allgemeiner) homogener Lösung und (spezieller) partikulärer Lösung erinnert an die Lösungstheorie von (überbestimmten) linearen Gleichungssystemen.
Sei $Ax = b$ ein (überbestimmtes) Gleichungssystem. Ist nun x_h eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS

$$Ax_h = 0$$

und x_p eine beliebige Lösung von $Ax = b$, dann gilt:

$$x = \alpha x_h + x_p, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ist ebenfalls eine Lösung von $Ax = b$, denn

$$A(\alpha x_h + x_p) = \alpha A x_h + A x_p = \alpha \cdot 0 + b = b.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Fourierreihen) (12 Punkte)

Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der 2π-periodischen Fortsetzung von f für $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

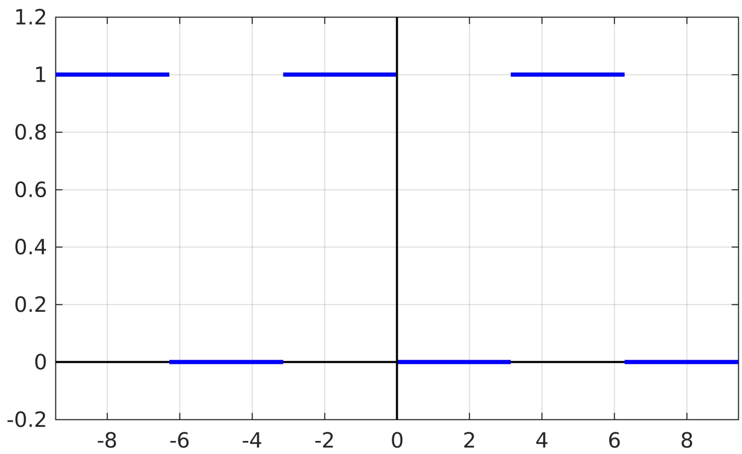
(c) Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe in (b) konvergiert und geben Sie an jeder dieser Stellen den Reihenwert an.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (b) und (c) den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Lösungshinweise:

(a)



(b) Wir berechnen die Koeffizienten der Fourierreihe:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos(nx) = \frac{1}{n\pi} \sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n\pi}(0-0) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi} \cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n)$$
$$= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also lautet die Fourierreihe von f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

(c) Die Funktion ist stückweise glatt. Nach Satz 6.9.12 konvergiert die Fourierreihe auf ganz $\mathbb{R}$ gegen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{für } x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}, & \text{für } x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

(d) Für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Also haben wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe H2 (Trennung der Variablen) (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme.

(a)

$$y'(t) = y(t)^2 t^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$y'(t) = \left(1 + \frac{y(t)}{t}\right)^2 - \frac{y(t)}{t}, \quad y(1) = 1.$$

Hinweis: Nutzen Sie bei (b) die Substitution

$$z(t) = \frac{y(t)}{t}.$$

Ein Blick auf die Ableitung von $\arctan(t)$ könnte ebenfalls hilfreich sein.

Lösungshinweise:

(a) Wir haben

$$y' = y^2 t^2 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2 t^2$$

zu lösen. Mit Hilfe der Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int t^2\,\mathrm{d}t \implies -\frac{1}{y} = \frac{1}{3}t^3 + c \implies y(t) = -\frac{1}{\frac{1}{3}t^3 + c} \qquad \text{für } t^3 \neq -3c.$$

Wir setzen in die Anfangsbedingung ein:

$$\frac{1}{2} = y(0) = -\frac{1}{c} \implies c = -2.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y(t) = \frac{3}{6 - t^3} \qquad \text{für } 0 \le t < \sqrt[3]{6}.$$

(b) Mit dem Hinweis haben wir:

$$y(t) = z(t)t \implies y'(t) = z'(t)t + z(t).$$

Damit lässt sich die Differentialgleichung wie folgt umschreiben:

$$z' \cdot t + z = (1+z)^2 - z \iff z' = \frac{1+z^2}{t}.$$

Mit Trennung der Variablen haben wir

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Ein Blick auf die Ableitung von $\arctan(t)$ (Hinweis) zeigt, dass daraus

$$\arctan(z) = \ln(t) + c, \quad t \geq 1$$

und damit

$$y(t) = tz(t) = t \cdot \tan\left(\ln(t) + c\right)$$

folgt. Einsetzen in die Anfangsbedingung liefert:

$$1 = 1 \cdot \tan(\ln(1) + c) = \tan(c) \implies c = \frac{\pi}{4}.$$

Da $\tan(c)$ π-periodisch ist, sind alle Konstanten der Form $c = \frac{\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ möglich. Die resultierenden Lösungsfunktionen sind aber dieselben und unterscheiden sich lediglich in ihrer Darstellung.
Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$y(t) = t \cdot \tan\left(\ln(t) + \frac{\pi}{4}\right), \quad 1 \leq t < \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}.$$

Aufgabe H3 (Variation der Konstanten) (12 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'(t) = t^3 - 2ty(t).$$

Lösungshinweise:
Wir bestimmen zunächst die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'(t) = -2ty(t)$$

mittels Trennung der Variablen. Mit $y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ und Umstellen haben wir:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -2t\,\mathrm{d}t.$$

Integrieren liefert

$$\ln|y| = -t^2 + c \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \implies \quad |y| = \mathrm{e}^{-t^2+c} = \tilde{c}\mathrm{e}^{-t^2}, \tilde{c} > 0.$$

Mit $\tilde{c} > 0$ kann der Betrag um y aufgelöst werden (siehe G4 (a)). Außerdem ist $y(t) = 0$ offensichtlich eine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Damit erhalten wir:

$$y_h(t) = C\mathrm{e}^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung mittels Variation der Konstanten. Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(t) = C(t)\mathrm{e}^{-t^2}$$

und setzen in die inhomogene Differentialgleichung ein:

$$y_p(t)' = C'(t)\mathrm{e}^{t^2} + C(t)\mathrm{e}^{-t^2} \cdot (-2t) \implies C'(t)\mathrm{e}^{t^2} + C(t)\mathrm{e}^{-t^2} \cdot (-2t) = t^3 - 2tC(t)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Kürzen und Umsortieren liefert:

$$C'(t) = t^3\mathrm{e}^{t^2}.$$

Gesucht ist also *eine* Stammfunktion von $t^3\mathrm{e}^{t^2}$. Wir können daher die Integrationskonstante auf Null setzen.

$$\begin{aligned}\int t^3\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int \underbrace{t\mathrm{e}^{t^2}}_{u'} \cdot \underbrace{t^2}_{v}\,\mathrm{d}t \overset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2}e^{t^2}}_{u} \cdot \underbrace{t^2}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}e^{t^2}}_{u} \cdot \underbrace{2t}_{v'}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{t^2} - \int t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{t^2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\left(t^2-1\right).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir zunächst als partikuläre Lösung

$$y_p(t) = C(t)\mathrm{e}^{-t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\left(t^2-1\right)\mathrm{e}^{-t^2} = \frac{1}{2}\left(t^2-1\right)$$

und dann als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\mathrm{e}^{-t^2} + \frac{1}{2}\left(t^2-1\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$