Formale Grundlagen der Informatik II
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
25. Juni 2014

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Horn-Erfüllbarkeit)
Bestimmen Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$H_0 = \{p,\ (p \wedge q) \rightarrow s,\ (r \wedge t) \rightarrow s,\ t \rightarrow r,\ t\}$$

Lösung: Die Hornklauselmenge H_0 enthält keine negativen Hornklauseln, daher gibt es nach Lemma 5.12 (FGdI Skript zur Aussagenlogik) ein minimales Modell $\mathfrak{I}_0$ der Variablen in H_0. Wir verfahren wie im (konstruktiven) Beweis des Lemmas, konstruieren also schrittweise die Mengen X_i:

$$X_0 = \emptyset, \quad X_1 = X_0 \cup \{p, t\}, \quad X_2 = X_1 \cup \{r\}, \quad X_\infty = X_3 = X_2 \cup \{s\}.$$

Das minimale Modell $\mathfrak{I}_0$ ist demnach geben durch

$$\mathfrak{I}_0(p) = \mathfrak{I}_0(t) = \mathfrak{I}_0(r) = \mathfrak{I}_0(s) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}_0(q) = 0.$$

Aufgabe G8 (Modellierung)
Ein Meteorologe versucht die zeitliche Entwicklung des Wetters an einem bestimmten Ort mit folgender Signatur in FO zu beschreiben:

$$S = \{0, N, <, S, R\}.$$

0	Konstante für Starttag
N	1-stelliges Funktionssymbol für "‘nächster Tag"’
$<$	2-stelliges Relationssymbol für die zeitliche Ordnung der Tage
S, R	1-stellige Relationssymbole für <u>S</u>onne und <u>R</u>egen

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO(S):

1. Auf Regen folgt (irgendwann) Sonnenschein.
2. Jeden zweiten Tag scheint die Sonne.
3. Wenn an einem Tag die Sonne scheint, gibt es innerhalb drei Tagen wieder Regen.

Lösung: Eine mögliche Lösung:

1. $\forall x\ \big(Rx \rightarrow \exists y\ (x < y \wedge Sy)\big)$
2. $\forall x\ (Sx \vee SNx)$
3. $\forall x\ (Sx \rightarrow (RNx \vee RNNx \vee RNNNx))$

Aufgabe G9 (Modellierung)
Betrachte FO-Formeln in der Signatur $\{f\}$, wobei f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist.

(a) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die von einem Modell erfüllt wird genau dann, wenn die Interpretation von f injektiv ist.

(b) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die von einem Modell erfüllt wird genau dann, wenn die Interpretation von f surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat.

Lösung:

(a) $\phi_{\text{inj}} := \forall x \; \forall y \; \big(f(x) = f(y) \to x = y\big)$

(b) $\phi_{\text{surj}} := \forall y \; \exists x \; \big(f(x) = y\big)$

(c) Zum Beispiel $\phi := \phi_{\text{inj}} \wedge \neg\phi_{\text{surj}}$. Diese Formel gilt für keine Funktion $f : A \to A$ auf endlicher Menge A, denn eine Funtion zwischen endlichen Mengen ist injektiv genau dann, wenn sie surjektiv (und somit bijektiv) ist. Andererseits ist die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := 2n$ injektiv und nicht surjektiv, also ist ϕ erfüllbar.

Hausübung

Aufgabe H7 (Minimale Belegungen) (12 Punkte)

(a) Finden Sie alle minimalen Belegungen für die folgenden zwei Formeln. Entscheiden Sie für beide Formeln, ob sie äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln sind. Wenn ja, welche? Begründen Sie alle Antworten.

i. $\big(p \to (q \vee r)\big) \wedge (p \vee s)$

ii. $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

(b) Geben Sie eine Formel mit vier Variablen an, für die Sie zeigen, dass ihre minimale Belegungen genau $(1,1,1,0)$ und $(0,0,1,1)$ sind. Ist diese Formel äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln?

Lösung:

(a) i. $\boxed{4\text{ P.}}$ Sei $\phi := \big(p \to (q \vee r)\big) \wedge (p \vee s)$. Man bemerkt, dass die Belegung $\big(\mathfrak{I}(p) = 0, \mathfrak{I}(q) = 0, \mathfrak{I}(r) = 0, \mathfrak{I}(s) = 1\big)$ ein Modell von ϕ ist, $(0,0,0,0)$ aber nicht. Sei nun $\mathfrak{I}$ ein Modell von ϕ, sodass $\mathfrak{I}(s) = 0$. Es folgt, dass $\mathfrak{I}(p) = 1$ wegen $p \vee s$, woraus $\mathfrak{I}(q) = 1$ oder $\mathfrak{I}(r) = 1$ auch folgt. Da die Belegungen $(1,1,0,0)$ und $(1,0,1,0)$ Modelle von ϕ sind, sind sie, mit $(0,0,0,1)$, die minimalen Modelle von ϕ. Es gibt mehrere minimale Modelle, also ist ϕ nicht äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln.

ii. $\boxed{4\text{ P.}}$ Es gilt $(p \wedge q) \leftrightarrow r \equiv \big((p \wedge q) \to r\big) \wedge \big(r \to (p \wedge q)\big) \equiv \big((p \wedge q) \to r\big) \wedge (r \to p) \wedge (r \to q)$. Also ist $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln. Die Belegung, die jede Variablen falsch macht, ist ein Modell für $(p \wedge q) \leftrightarrow r$. Da es keine kleinere Belegung gibt, ist dies das einzige minimale Modell.

(b) $\boxed{4\text{ P.}}$ Betrachte die Formel $\phi := \big(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4\big) \vee \big(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_4\big)$. Ihre Wahrheitstafel:

p_1	p_2	p_3	p_4	ϕ
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Wir sehen, es gibt keine Modelle für ϕ, die echt kleiner als $(1,1,1,0)$ und $(0,0,1,1)$ wären. Weil wir mehr als ein minimales Modell haben, ist ϕ nicht äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln.

Aufgabe H8 (Modellierung) (12 Punkte)

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in $\mathrm{FO}(S)$ mithilfe der Bezeichnungen aus **Aufgabe G8**.

1. Es regnet an jeden Tag.
2. Regen dauert nie länger als zwei Tage.
3. Innerhalb jeder Periode von vier Tagen scheint die Sonne an mindestens zwei Tagen.
4. Nach jedem Übergang von einem regnerischen zu einem sonnigen Tag wird es mindestens zwei Tage sonnig sein.

Lösung: Mögliche Lösung:

1. $\forall x\, Rx$
2. $\neg\exists x\, (Rx \wedge RNx \wedge RNNx)$
3. $\forall x\, \bigvee_{i<j<4} (SN^i x \wedge SN^j x)$
4. $\forall x\, ((Rx \wedge SNx) \to SNNx)$

Aufgabe H9 (Modellierung) (12 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $S = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$. Zeigen Sie, dass in den folgenden S-Strukuren die Ordnung definierbar ist, d.h. dass es für jede der folgenden S-Strukturen $\mathscr{A}$ eine Formel ohne das $\leq$-Symbol $\phi(x, y)$ gibt, so dass

$$a \leq^{\mathscr{A}} a' \iff \mathscr{A} \models \phi[a, a'].$$

(a) $\mathscr{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \leq^{\mathbb{N}}, 0, 1)$

(b) $\mathscr{P} = (\mathscr{P}X, \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, X)$

(c) $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, \leq^{\mathbb{R}}, 0, 1)$

Lösung:

(a) $\phi(x, y) := \exists z\,(x + z = y)$

(b) $\phi(x, y) := x + y = y$ oder $\phi(x, y) := x \cdot y = x$ oder $\phi(x, y) := \exists z\,(x + z = y)$

(c) $\phi(x, y) := \exists z\,(x + z \cdot z = y)$