

[illegible]

Allgemeines

- Halten Sie Ihren Studenausweis und einen Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.
- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus.
- Prüfen Sie, ob die Klausur 12 Aufgaben enthält.
- Kennzeichnen Sie alle Blätter mit Name und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Leerblätter werden von der Aufsicht gestellt. Verwenden Sie kein eigenes Papier.
- Geben Sie die verwendeten Formeln, Sachverhalte und Zwischenergebnisse an.

Bewertung

- Unleserlichkeit führt zu Punktabzug.
- Diese Klausur wird nur gewertet, falls die Semesterleistung ordnungsgemäß erbracht wurde.

Dauer der Klausur und zugelassene Hilfsmittel

- Ihnen stehen 120 Minuten zum Bearbeiten der Aufgaben zur Verfügung.
- Einzige zugelassene Hilfsmittel sind ein nicht programmierbarer Taschenrechner ohne Formelspeicher und ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN-A4 Blatt (keine Kopien etc.).
- Bitte geben Sie andere elektronische Geräte (Handys, PDAs, Laptops, programmierbare Taschenrechner) der Klausuraufsicht zur Verwahrung.
- Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist, können zusätzlich ein zweisprachiges Wörterbuch verwenden.
- Die Klausuraufsicht überprüft die Hilfsmittel.

Prüfungstyp

- Sie sind in einem Diplomstudiengang und haben sich in keinem Prüfungssekretariat zur Prüfung angemeldet
⇒ Dies ist eine vorlesungsbegleitende Prüfung für Sie, die Sie in einer Diplomprüfung einbringen können.
- Sie sind in einem Bachelor/Master-Studiengang und haben sich bei TUCaN angemeldet
⇒ Dies ist eine Fachprüfung für Sie.
- Sie sind in einem Bachelor/Master-Studiengang und haben sich nicht bei TUCaN angemeldet
⇒ STOP: Sie dürfen an dieser Prüfung nicht teilnehmen!

a) Vervollständigen Sie die folgende Definition:

$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0$ _____ und _____

b) Vervollständigen Sie den folgenden Text zu Rot-Schwarz-Bäumen.

- Die Wurzel ist _____.
- Jedes Blatt (NIL) ist _____.
- Ist ein Knoten _____, so sind seine beiden Kinder _____.
- Für jeden Knoten x gilt: Alle Pfade von x zu einem Blatt enthalten die gleiche Zahl _____ Knoten.
- Die Höhe h eines Rot-Schwarz-Baumes mit n Knoten kann durch _____ nach oben abgeschätzt werden.

c) Nennen Sie zwei NP-vollständige Probleme.

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus zur Evaluierung eines Polynoms

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Der Algorithmus erhält als Input einen Koeffizientenvektor $a = (a_0, \dots, a_n)$ und eine Zahl x . Der Algorithmus gibt den Wert des Polynoms P an der Stelle x zurück.

HORNER(a, x)

```
1  y=0
2  i=n
3  while i ≥ 0
4    y= ai + x · y
5    i = i − 1
6  return y
```

- a) Beweisen Sie die Korrektheit von HORNER. Benutzen Sie dafür folgende Schleifeninvariante:
Am Anfang jeder Iteration der while-Schleife hat y den Wert

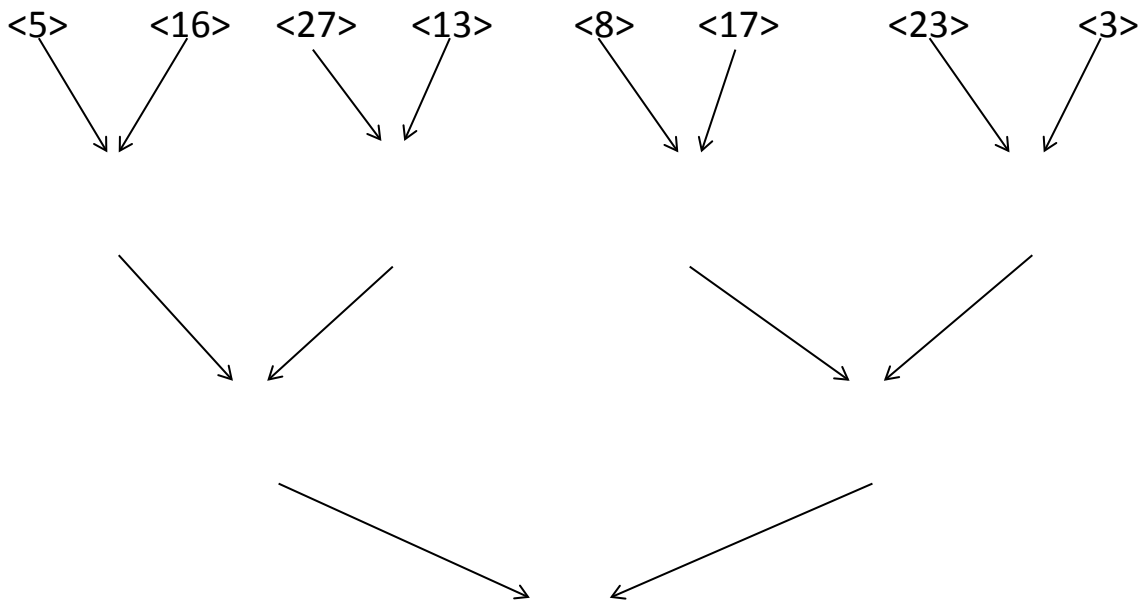
$$y = \sum_{k=0}^{n-(i+1)} a_{k+i+1} x^k.$$

- b) Was ist die Laufzeit des Algorithmus (# arithmetische Operationen (Additionen + Multiplikationen)) in Abhängigkeit von n ? (Groß-O-Notation). Begründen Sie Ihre Antwort.

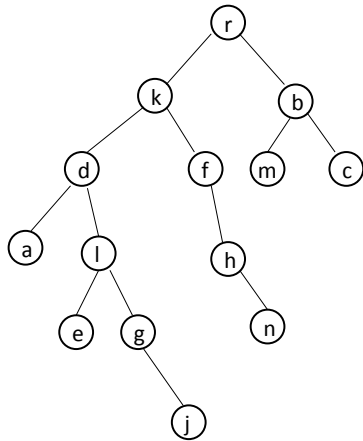
Lösen Sie folgende Rekurrenzgleichung mit Hilfe des Mastertheorems.

$$T(n) = 2T(2n/3) + n \log n$$

Demonstrieren Sie die Arbeitsweise von Merge-Sort anhand des Arrays $A = \langle 5, 16, 27, 13, 8, 17, 23, 3 \rangle$ unter Verwendung der Zeichnung. Tragen Sie unter die Pfeile jeweils das Array ein, das durch Anwendung von Merge entsteht.

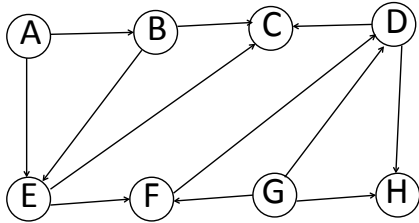


Betrachten Sie den untenstehenden binären Baum T mit Wurzel r .



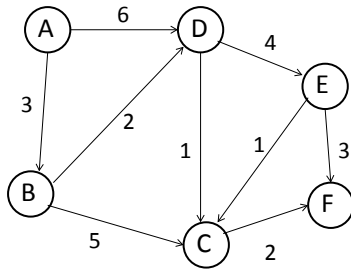
- Geben Sie die Höhe des Baums sowie die des Knotens f an.
- Geben Sie das linke Kind des Knotens r sowie das rechte Kind des Knotens l an.
- Geben Sie den Grad der Knoten f und j an.
- Wie heißt das Elter der Knoten g bzw. h ?
- Geben Sie alle Blätter an, die im Teilbaum mit Wurzel d enthalten sind.
- Geben Sie das Geschwister des Knotens m an.
- Wie viele Knoten müssen zum Baum hinzugefügt werden, damit ein vollständiger binärer Baum entsteht (die Höhe bleibt gleich)?

Führen Sie auf untenstehendem Graphen eine Tiefensuche durch. Beginnen Sie beim Knoten A und betrachten Sie die Knoten in alphabetischer Reihenfolge. Schreiben Sie über jeden Knoten die jeweilige discovery und finishing time. Benutzen Sie Ihr Ergebnis, um eine topologische Sortierung des Graphen anzugeben.



Benutzen Sie Dijkstra's Algorithmus, um im untenstehenden Graphen die kürzesten Pfade von A zu den übrigen Knoten zu ermitteln.

Der Algorithmus durchläuft nacheinander sämtliche Knoten des Graphen und fügt diese nach Bearbeitung zur Menge S hinzu. Ein Schritt entspricht dabei der Bearbeitung eines Knotens und der Aktualisierung der Menge S . Tragen Sie nach jedem Schritt für jeden Knoten den aktuellen Abstand d , seinen Vorgänger π und den aktuellen Zustand der Menge S in untenstehende Tabelle ein.

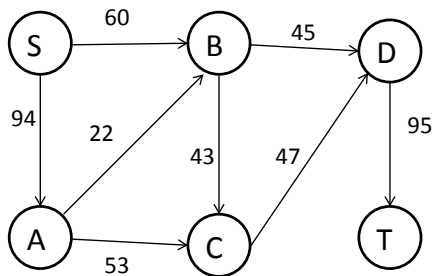


$d(A)$	$d(B)$	$d(C)$	$d(D)$	$d(E)$	$d(F)$	$\pi(A)$	$\pi(B)$	$\pi(C)$	$\pi(D)$	$\pi(E)$	$\pi(F)$	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	nil	nil	nil	nil	nil	nil	\emptyset

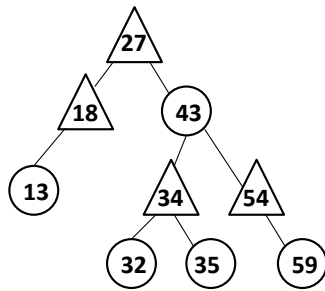
Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson den maximalen Fluss in folgendem Flussnetzwerk mit Quelle S und Senke T. Der Algorithmus fügt in jedem Schritt einen ergänzenden Pfad zum aktuellen Flussnetzwerk hinzu. Dies wird so lange wiederholt, bis es keinen ergänzenden Pfad mehr gibt.

Geben Sie nach jedem Schritt den gerade hinzugefügten ergänzenden Pfad, seine Kapazität und den aktuellen Gesamtfluss an. Skizzieren Sie außerdem das entstehende Restnetzwerk. Fügen Sie dabei stets den ergänzenden Pfad mit maximaler Kapazität hinzu.

Beweisen Sie die Maximalität des gefundenen Flusses, indem Sie einen minimalen Cut in das in der Aufgabenstellung angegebene Netzwerk einzeichnen.



Gegeben sei der folgende Rot-Schwarz-Baum.



roter Knoten



schwarzer Knoten

Führen Sie die Operation `Rb-Insert(30)` durch. Skizzieren Sie den unmittelbar nach dem Einfügen entstehenden Baum und den durch `Rb-Insert-Fixup` entstehenden Rot-Schwarz-Baum (inklusive aller Zwischenschritte). Geben Sie dabei an, welche der in der Vorlesung behandelten Fälle von `RB-Insert-Fixup` aufgerufen werden.

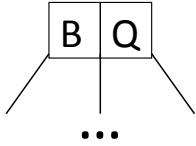
Stellen Sie dabei rote und schwarze Knoten wie in der obigen Abbildung gezeigt dar.

Führen Sie auf untenstehendem B-Baum mit Minimalgrad $t = 2$ die Operation $\text{Insert}(J)$ durch.

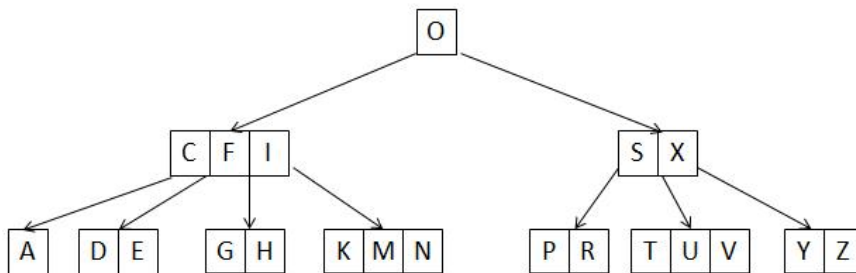
Skizzieren Sie den entstehenden B-Baum nach dem Einfügevorgang. Dabei können Sie einen Teilbaum mit Wurzel

B	Q
---	---

, der sich nicht verändert hat, wie folgt darstellen.



Geben Sie an, ob und gegebenenfalls welche Knoten beim Einfügen gesplittet werden müssen.



Betrachten Sie eine Hashtabelle der Länge $m = 5$. Die Hashtabelle soll offene Adressierung und lineares Sondieren verwenden. Benutzen Sie als Hashfunktion

$$h(k, i) = (\lfloor 5 \cdot (0.61 \cdot k \bmod 1) \rfloor + 3 \cdot i) \bmod 5.$$

Tragen Sie die Schlüssel 15, 9 und 19 in dieser Reihenfolge in untenstehende Hashtabelle ein. Geben Sie jeweils an, für welchen Wert von i das Eintragen erfolgreich ist.

0	<input type="text"/>
1	<input type="text"/>
2	<input type="text"/>
3	<input type="text"/>
4	<input type="text"/>

Berechnen Sie die inverse diskrete Fouriertransformation des Vektors $y = (1, 2, 3, 4)$.