Formale Grundlagen der Informatik II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2015**
Prof. Dr. Martin Otto **24. Juni 2015**
Julian Bitterlich, Felix Canavoi, Kord Eickmeyer, Daniel Günzel

Aufgabe G1 (Pränexe Normalform)
Seien f, g Funktionssymbole und R, S Relationssymbole mit jeweils der passenden Stelligkeit. Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine äquivalente Formel in pränexer Normalform an:

(a) $(\forall x Rx) \vee (\exists x \neg Rx)$

(b) $(\forall x Rxgz) \rightarrow \forall y(Sfy \vee y = z)$

Aufgabe G2 (Modellierung)
Ein Meteorologe versucht die zeitliche Entwicklung des Wetters an einem bestimmten Ort mit folgender Signatur in FO zu beschreiben:

$$S = \{0, N, <, P_S, P_R\}.$$

0	Konstante für den Starttag
N	1-stelliges Funktionssymbol für den nächsten Tag
$<$	2-stelliges Relationssymbol für die zeitliche Ordnung der Tage
P_S, P_R	1-stellige Relationssymbole für Sonne und Regen

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO(S):

(a) Auf Regen folgt (irgendwann) Sonnenschein.

(b) Jeden zweiten Tag scheint die Sonne.

(c) Wenn an einem Tag die Sonne scheint, gibt es innerhalb von drei Tagen wieder Regen.

Hinweis: Beachten Sie, dass diese Beschreibungen nicht eindeutig sind.

Aufgabe G3 (Wörter und Sprachen)
Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit Hilfe der Prädikatenlogik definieren. Wie im Skript, S. 3, definieren wir zu einem nichtleeren Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^+$ eine *Wortstruktur*

$$\mathcal{W}(w) = \left(\{1, \dots, n\}, <^{\mathcal{W}}, P_a^{\mathcal{W}}, P_b^{\mathcal{W}}\right)$$

wobei

$$P_a^{\mathcal{W}} := \{\, i \in \{1, \dots, n\} : a_i = a \,\} \quad \text{und} \quad P_b^{\mathcal{W}} := \{\, i \in \{1, \dots, n\} : a_i = b \,\}.$$

(Wir schließen das leere Wort aus, da es keine leeren Strukturen gibt.) Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(<, P_a, P_b)$ definiert dann die Sprache $L(\varphi) := \left\{ w \in \Sigma^+ \;\middle|\; \mathcal{W}(w) \models \varphi \right\}$.

(a) Welche Sprachen definieren die folgenden Formeln?
   i. $\forall x \forall y (x < y \rightarrow ((P_a x \rightarrow P_a y) \wedge (P_b y \rightarrow P_b x)))$
   ii. $\forall x \forall y ((x < y \wedge P_a x \wedge P_a y) \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y \wedge P_b z))$

(b) Geben Sie zu den folgenden Sprachen Formeln an, welche sie definieren.
   i. $L((a + b)^* bb (a + b)^*)$
   ii. $L((ab)^+)$

Aufgabe G4 (Mächtigkeiten)
Betrachten Sie FO-Formeln zur Signatur $\{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist.

(a) Geben Sie eine FO-Formel an, die besagt, dass die Trägermenge genau n Elemente enthält.

(b) Geben Sie jeweils eine FO-Formel an, die genau dann von einer Struktur erfüllt wird, wenn die Interpretation von f
   i. injektiv ist.
   ii. surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine FO-Formel an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat.

Aufgabe G5 (Spielsemantik)
Sei $\preccurlyeq$ ein zweistelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preccurlyeq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \land x_3 \preccurlyeq x_2) \land \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \land x_4 \preccurlyeq x_2) \rightarrow x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big).$$

Sei $\mathcal{A} = (A, \preccurlyeq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und
$\preccurlyeq^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)\}$.
Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.
Hinweis:

(a) Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.

(b) Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.

(c) Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.