TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Mathematik IV für Elektrotechnik
Mathematik III für Informatik

Sommersemester 2019

Teil 1: Numerische Mathematik

Inhalt:

1. Interpolation
2. Numerische Integration
3. Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen
4. Lineare Gleichungssysteme
5. Nichtlineare Gleichungssysteme
6. Eigenwertprobleme

Interpolation

Mathematik IV ET/III INF

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Übersicht

Problemstellung und Einführung

Gegeben: Funktionaler Zusammenhang

$$y = f(x), \quad f : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad (a < b \in \mathbb{R})$$

Hierbei bekannt: Werte $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Ziel: Näherung für $f(x)$ bei beliebigem $x \in [a, b]$.

Problemstellung und Einführung

Gegeben: Funktionaler Zusammenhang

$$y = f(x), \quad f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \qquad (a < b \in \mathbb{R})$$

Hierbei bekannt: Werte $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Ziel: Näherung für $f(x)$ bei beliebigem $x \in [a,b]$.

Interpolationsproblem:

Suche eine einfache Ersatzfunktion $\Phi(x)$ mit

$$\Phi(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Wunsch: Der Fehler $|f(x) - \Phi(x)|$ sollte auf $[a,b]$ klein sein.

Beispiele

1. Funktion $f(x)$ aufwändig zu berechnen (z. B. $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $\Gamma(x)$, etc.), nur Werte $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, bekannt.
   Gesucht: Genaue Approximation $\Phi(x)$ für $f(x)$, oder $\Phi'(x)$ für $f'(x)$.

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Funktion $f(x)$ aufwändig zu berechnen (z. B. $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $\Gamma(x)$, etc.), nur Werte $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, bekannt.
   Gesucht: Genaue Approximation $\Phi(x)$ für $f(x)$, oder $\Phi'(x)$ für $f'(x)$.
2. Experiment beschreibt einen unbekannten funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$: zu Eingangsparametern x_i Werte y_i.
   Gesucht: Gutes Modell $\Phi(x)$ für das unbekannte $f(x)$.

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Funktion $f(x)$ aufwändig zu berechnen (z. B. $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $\Gamma(x)$, etc.), nur Werte $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, bekannt.
   Gesucht: Genaue Approximation $\Phi(x)$ für $f(x)$, oder $\Phi'(x)$ für $f'(x)$.
2. Experiment beschreibt einen unbekannten funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$: zu Eingangsparametern x_i Werte y_i.
   Gesucht: Gutes Modell $\Phi(x)$ für das unbekannte $f(x)$.
3. Digitales Audiosignal (CD, MP3-Player, DVD, ...) zum Zeitpunkt t_i, $i = 0, \dots, n$ Amplitude y_i.
   Gesucht: zugehöriges analoges Audiosignal $f(t)$.

Beispiele

1. Funktion $f(x)$ aufwändig zu berechnen (z. B. $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $\Gamma(x)$, etc.), nur Werte $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, bekannt.
   Gesucht: Genaue Approximation $\Phi(x)$ für $f(x)$, oder $\Phi'(x)$ für $f'(x)$.
2. Experiment beschreibt einen unbekannten funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$: zu Eingangsparametern x_i Werte y_i.
   Gesucht: Gutes Modell $\Phi(x)$ für das unbekannte $f(x)$.
3. Digitales Audiosignal (CD, MP3-Player, DVD, ...) zum Zeitpunkt t_i, $i = 0, \dots, n$ Amplitude y_i.
   Gesucht: zugehöriges analoges Audiosignal $f(t)$.
4. Digitales Audiosignal (t_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, zur Abtastrate 44.1 kHz (CD) umgesampelt auf Abtastrate 48 kHz (DAT, DVD-Video).
   Gesucht: $(\tilde{t}_j, f(\tilde{t}_j))$ für die 48 kHz-Abtastzeiten $\tilde{t}_j$.

Beispiele

1. Funktion $f(x)$ aufwändig zu berechnen (z. B. $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $\Gamma(x)$, etc.), nur Werte $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, bekannt.
   Gesucht: Genaue Approximation $\Phi(x)$ für $f(x)$, oder $\Phi'(x)$ für $f'(x)$.
2. Experiment beschreibt einen unbekannten funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$: zu Eingangsparametern x_i Werte y_i.
   Gesucht: Gutes Modell $\Phi(x)$ für das unbekannte $f(x)$.
3. Digitales Audiosignal (CD, MP3-Player, DVD, . . .) zum Zeitpunkt t_i, $i = 0, \dots, n$ Amplitude y_i.
   Gesucht: zugehöriges analoges Audiosignal $f(t)$.
4. Digitales Audiosignal (t_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, zur Abtastrate 44.1 kHz (CD) umgesampelt auf Abtastrate 48 kHz (DAT, DVD-Video).
   Gesucht: $(\tilde{t}_j, f(\tilde{t}_j))$ für die 48 kHz-Abtastzeiten $\tilde{t}_j$.
5. 2D-Beispiel: glatte Fläche $(x, y, z(x, y))$ durch Datenpunkte (x_i, y_i, z_i) (CAD, Computergrafik, Laserscanner, etc.).

Formale Aufgabenstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Gegeben: Ansatzfunktion $\Phi(x; a_0, \ldots, a_n)$, $x \in \mathbb{R}$, mit Parametern $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Interpolationsaufgabe:

Zu gegebenen Paaren

$$(x_i, y_i), \quad i = 0, \ldots, n \quad \text{mit } x_i, y_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j,$$

sollen die Parameter $a_0, \ldots, a_n$ so bestimmt werden, dass die Interpolationsbedingungen

$$\Phi(x_i; a_0, \ldots, a_n) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

gelten. Die Paare (x_i, y_i) werden als Stützpunkte bezeichnet.

Übersicht

Polynominterpolation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ansatzfunktionen: Polynome vom Grad $\leq n$, also

$$p_n(x) = \Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Interpolationsaufgabe

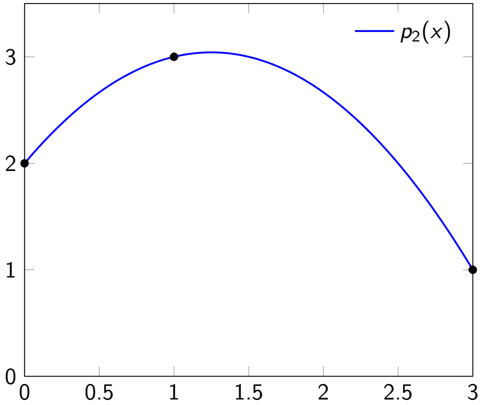
Finde ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \tag{1.1}$$

Beispiel: Interpolationspolynom 2. Grades

x_i	0	1	3
y_i	2	3	1

$n = 2$



Polynominterpolation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ansatzfunktionen: Polynome vom Grad $\leq n$, also

$$p_n(x) = \Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Interpolationsaufgabe

Finde ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \tag{1.2}$$

Naiver Lösungsansatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Naheliegend (aber in der Praxis untauglich):
Interpolationsbedingungen liefern $n+1$ lineare Gleichungen:

$$a_0 + x_i a_1 + x_i^2 a_2 + \cdots + x_i^n a_n = y_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

für die $n+1$ Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. In Matrixform lautet das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Nachteile des Verfahrens

- Auflösen des Gleichungssystems braucht $O(n^3)$ elementare Rechenoperationen $\rightarrow$ teuer (später: $O(n^2)$)
- Koeffizientenmatrix (Vandermonde-Matrix) ist invertierbar, aber für größere n extrem schlecht konditioniert: Rundungsfehler werden dramatisch verstärkt (siehe Kapitel 4).

Nachteile des Verfahrens

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Auflösen des Gleichungssystems braucht $O(n^3)$ elementare Rechenoperationen $\rightarrow$ teuer (später: $O(n^2)$)
- Koeffizientenmatrix (Vandermonde-Matrix) ist invertierbar, aber für größere n extrem schlecht konditioniert: Rundungsfehler werden dramatisch verstärkt (siehe Kapitel 4).

[Für $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$ bezeichnet $O(g(n))$ die Menge aller Funktionen, die asymptotisch nicht schneller wachsen als g. Also:

$$O(g(n)) \coloneqq \{f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[\, : \, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; c > 0, \text{ so dass } f(n) \leq c\, g(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}.$$

$O(n^3)$ bezeichnet damit einen Aufwand der (für große n) maximal wie n^3 wächst, wobei multiplikative Konstanten keine Rolle spielen.]

Übersicht

Interpolationsformel von Lagrange

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lagrangesches Interpolationspolynom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_{k,n}(x) \quad \text{mit} \quad L_{k,n}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{1.4}$$

Lagrange-Polynome $L_{k,n}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, sind so gewählt, dass

$$L_{k,n}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} =: \delta_{ki},$$

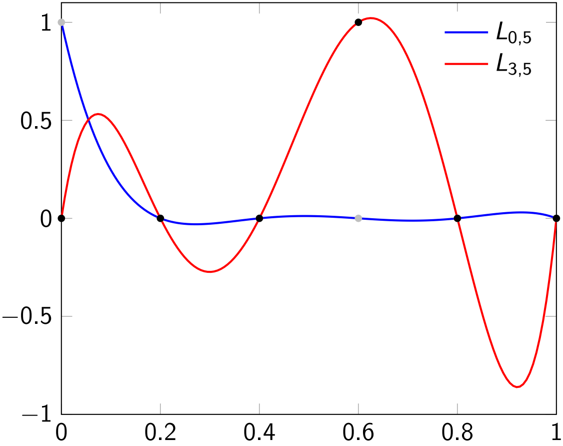
wobei δ_{ki} das Kronecker-Symbol ist.

Probe: $p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_{k,n}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, \delta_{ki} = y_i,\ i = 0, \ldots, n.$ ✓

Bemerkung: p_n hängt linear von y_k ab.

Beispiel Lagrange-Polynome

$L_{0,5}$ und $L_{3,5}$ für äquidistante Stützstellen auf $[0, 1]$ ($n = 5$, $x_i = \frac{i}{5}$):



Interpolationsformel von Lagrange – Beispiel I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$n = 2: \qquad L_{0,2}(x) = \prod_{j=0,\dots,2,\ j\neq 0} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_{1,2}(x) = \prod_{j=0,\dots,2,\ j\neq 1} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_{2,2}(x) = \prod_{j=0,\dots,2,\ j\neq 2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Interpolationsformel von Lagrange – Beispiel I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$n = 2: \qquad L_{0,2}(x) = \prod_{j=0,\ldots,2,\, j\neq 0} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_{1,2}(x) = \prod_{j=0,\ldots,2,\, j\neq 1} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_{2,2}(x) = \prod_{j=0,\ldots,2,\, j\neq 2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Für $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 2)$ ergibt sich:

$$L_{0,2}(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2} \qquad L_{0,2}(0) = 1$$

$$L_{1,2}(x) = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} = \frac{x^2 - 2x}{-1} \qquad L_{1,2}(1) = 1$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2} \qquad L_{2,2}(2) = 1$$

Interpolationsformel von Lagrange – Beispiel I

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= y_0\, L_{0,2}(x) + y_1\, L_{1,2}(x) + y_2\, L_{2,2}(x) \\
&= y_0 \frac{x^2 - 3x + 2}{2} + y_1 \frac{x^2 - 2x}{-1} + y_2 \frac{x^2 - x}{2} \\
&= \left(\tfrac{1}{2} y_0 - y_1 + \tfrac{1}{2} y_2\right) x^2 + \left(-\tfrac{3}{2} y_0 + 2y_1 - \tfrac{1}{2} y_2\right) x + y_0
\end{aligned}
$$

Test:

$$
\begin{aligned}
p_n(0) &= y_0 \\
p_n(1) &= \tfrac{1}{2} y_0 - y_1 + \tfrac{1}{2} y_2 - \tfrac{3}{2} y_0 + 2y_1 - \tfrac{1}{2} y_2 + y_0 = y_1 \\
p_n(2) &= \left(\tfrac{1}{2} y_0 - y_1 + \tfrac{1}{2} y_2\right) 4 + \left(-\tfrac{3}{2} y_0 + 2y_1 - \tfrac{1}{2} y_2\right) 2 + y_0 = y_2.
\end{aligned}
$$

Interpolationsformel von Lagrange – Beispiel II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

x_i	0	1	3
y_i	2	3	1

$$n = 2, \quad L_{k,2}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

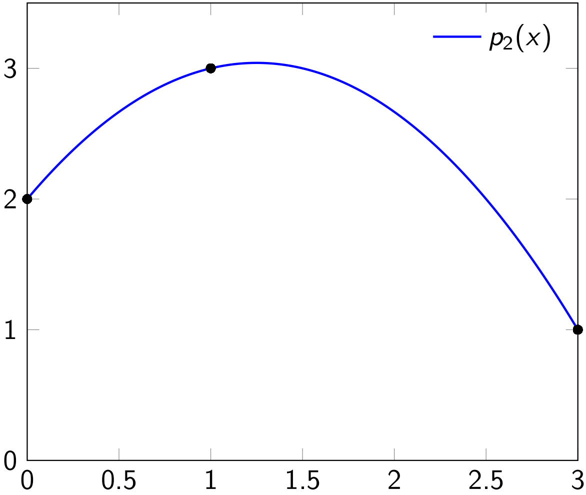
$$L_{0,2}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{3},$$

$$L_{1,2}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = \frac{x(x-3)}{-2},$$

$$L_{2,2}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{x(x-1)}{6},$$

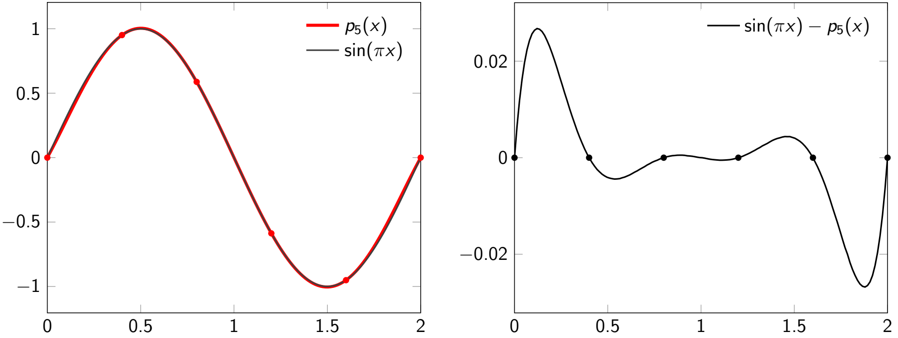
$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k \, L_{k,2}(x) = 2\, L_{0,2}(x) + 3\, L_{1,2}(x) + 1\, L_{2,2}(x) = -\tfrac{2}{3}\, x^2 + \tfrac{5}{3}\, x + 2$$

Interpolationsformel von Lagrange – Beispiel II
Interpolant



Lagrange-Polynom: Beispiel – III

$f(x) = \sin(\pi x)$ auf $[0, 2]$ für $n = 5$ und äquidistante Stützstellen $x_i = \frac{2i}{5}$, $i = 0, \dots, n$:



Rechts: Fehler $\sin(\pi x) - p_5(x)$
(unterschiedliche Maßstäbe)

Interpolationsformel von Lagrange: Korrektheit

Das Lagrange-Polynom p_n erfüllt die Interpolationsbedingungen:

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, L_{k,n}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, \delta_{ki} = y_i.$$

Tatsächlich ist dies die einzige Lösung der Interpolationsaufgabe:

Eindeutigkeit der Polynominterpolation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz 1.1.1

Es gibt genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt, nämlich $p_n(x)$.

Eindeutigkeit der Polynominterpolation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz 1.1.1

Es gibt genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt, nämlich $p_n(x)$.

Beweis.

Das Polynom $p_n(x)$ hat Grad $\leq n$ und erfüllt die Interpolationsbedingungen.

Eindeutigkeit der Polynominterpolation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz 1.1.1

Es gibt genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt, nämlich $p_n(x)$.

Beweis.

Das Polynom $p_n(x)$ hat Grad $\leq n$ und erfüllt die Interpolationsbedingungen.
Gäbe es ein weiteres Polynom $\tilde{p}_n(x)$ mit Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt, so wäre

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x)$$

ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit $n + 1$ verschiedenen Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$.

Eindeutigkeit der Polynominterpolation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz 1.1.1

Es gibt genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt, nämlich $p_n(x)$.

Beweis.

Das Polynom $p_n(x)$ hat Grad $\leq n$ und erfüllt die Interpolationsbedingungen.
Gäbe es ein weiteres Polynom $\tilde{p}_n(x)$ mit Grad $\leq n$, das die Interpolationsbedingungen erfüllt, so wäre

$$p_n(x) - \tilde{p}_n(x)$$

ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit $n + 1$ verschiedenen Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$.
Das einzige Polynom, welches dies erfüllt ist das Nullpolynom (Fundamentalsatz der Algebra). $\square$

Anwendung: Multiplikation großer Zahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ziel: Multipliziere zwei große natürliche Zahlen a, b.

- Schreibe $a = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i =: p(x)$, $\quad b = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i =: q(x)$, z. B. für $x = 2^{16}$.
- Es gilt: $a \cdot b = p(x)q(x) =: \sum_{i=0}^{2n} r_i\, x^i = r(x)$ (Polynom vom Grad $\leq 2n$).
- Ziel: bestimme $r_0, \ldots, r_{2n}$.
- Es gilt: $r_i = \sum_{k=0}^{i} a_i b_{i-k}$ für $i = 0, \ldots, 2n$ ($a_{n+1} = \cdots = a_{2n} = b_{n+1} = \cdots = b_{2n} = 0$).
- Dies braucht $O(n^2)$ Multiplikationen.
- Bessere Idee: werte $r(x) = p(x)q(x)$ für kleine x aus, z. B. für $x = -n, \ldots, 0, n-1$.
- Dann bestimme $r(x)$ durch Interpolation.
- Ausnutzen von On-Chip Arithmetik und rekursive Multiplikationstechniken ergibt Toom-Cook Multiplikation.
- Die Laufzeit kann bis auf $O(n^{1.465})$ reduziert werden.

Lagrange-Polynom: Vor- und Nachteile

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Vorteile:

- Rechenaufwand:
  $O(n)$ für Auswertung von $p_n(x)$,
  $O(n^2)$ für Koeffizientenberechnung (falls benötigt).
- Intuitive, bequeme Darstellung.

Nachteile:

- Hinzunahme von Stützstellen aufwändig.

Übersicht

Newtonsche Interpolationsformel

Ansatz: Newtonsche Darstellung

$$p_n(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \gamma_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

mit Parametern $\gamma_0, \dots, \gamma_n$.

Newtonsche Interpolationsformel

Ansatz: Newtonsche Darstellung

$p_n(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \gamma_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$,

mit Parametern $\gamma_0, \dots, \gamma_n$.

Einsetzen in die Interpolationsbedingungen liefert:

0.

$$p_n(x_0) = \gamma_0 = y_0$$

Newtonsche Interpolationsformel

Ansatz: Newtonsche Darstellung

$$p_n(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \gamma_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

mit Parametern $\gamma_0, \dots, \gamma_n$.

Einsetzen in die Interpolationsbedingungen liefert:

0.
$$p_n(x_0) = \gamma_0 = y_0$$

1.
$$p_n(x_1) = \gamma_0 + \gamma_1(x_1 - x_0) = y_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Newtonsche Interpolationsformel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ansatz: Newtonsche Darstellung

$p_n(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \gamma_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$,

mit Parametern $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$.

Einsetzen in die Interpolationsbedingungen liefert:

0.
$$p_n(x_0) = \gamma_0 = y_0$$

1.
$$p_n(x_1) = \gamma_0 + \gamma_1(x_1 - x_0) = y_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

2.
$$p_n(x_2) = \gamma_0 + \gamma_1(x_2 - x_0) + \gamma_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$
$$\Rightarrow \quad \gamma_2 = \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Newtonsche Interpolationsformel

Bezeichnung: *i-te dividierte Differenz* $f_{[x_0,\dots,x_i]} \coloneqq \gamma_i$ zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_i$, wobei $f_{[x_0]} = \gamma_0 = y_0$.

Newtonsche Interpolationsformel

Bezeichnung: *i-te dividierte Differenz* $f_{[x_0,\dots,x_i]} \coloneqq \gamma_i$ zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_i$, wobei $f_{[x_0]} = \gamma_0 = y_0$.

Allgemeine Berechnung über Rekursion:

$$j = 0, \dots, n : \quad f_{[x_j]} = y_j$$

$$k = 1, \dots, n : \quad j = 0, \dots, n-k : \quad f_{[x_j,\dots,x_{j+k}]} = \frac{f_{[x_{j+1},\dots,x_{j+k}]} - f_{[x_j,\dots,x_{j+k-1}]}}{x_{j+k} - x_j}.$$

Bemerkung: Die Reihenfolge der x_i ist egal.

Berechnung der dividierten Differenzen:

Setze $f_{[x_j]} = y_j$, $j = 0, \dots, n$.
Berechne für $k = 1, \dots, n$ und $j = 0, \dots, n - k$:

$$f_{[x_j,\dots,x_{j+k}]} = \frac{f_{[x_{j+1},\dots,x_{j+k}]} - f_{[x_j,\dots,x_{j+k-1}]}}{x_{j+k} - x_j}.$$

Schema:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & f_{[x_0]} = y_0 & \searrow & & & \\
 & & & f_{[x_0,x_1]} & \searrow & \\
x_1 & f_{[x_1]} = y_1 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & f_{[x_0,x_1,x_2]} \\
 & & & f_{[x_1,x_2]} & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & \\
x_2 & f_{[x_2]} = y_2 & \nearrow & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Bsp: $$f_{[x_0,x_1,x_2]} = \frac{f_{[x_1,x_2]} - f_{[x_0,x_1]}}{x_2 - x_0}.$$

Newtonsches Interpolationspolynom

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Newtonsches Interpolationspolynom

$$p_n(x) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}), \quad \gamma_i = f_{[x_0,\dots,x_i]}$$

mit den dividierten Differenzen $f_{[x_0,\dots,x_i]}$.

Newtonsches Interpolationspolynom
Begründung

Für $n = 0$ ist die Darstellung klar.

Seien $p_{1,\dots,i+1}$ und $p_{0,\dots,i}$ die Interpolanten in $x_1, \dots, x_{i+1}$ bzw. $x_0, \dots, x_i$ vom Grad $\leq i$.

$$\begin{aligned} p_{i+1}(x) &= \frac{(x - x_0)p_{1,\dots,i+1}(x) + (x_{i+1} - x)p_{0,\dots,i}(x)}{x_{i+1} - x_0} \\ &= \frac{f_{[x_1,\dots,x_{i+1}]} - f_{[x_0,\dots,x_i]}}{x_{i+1} - x_0}(x - x_0)\cdots(x - x_i) + \underbrace{\text{Polynom vom Grad } i}_{:= q_i(x)}. \end{aligned}$$

Da der erste Summand in $x_0, \dots, x_i$ verschwindet, gilt

$$y_j = p_{i+1}(x_j) = q_i(x_j) = p_i(x_j), \quad j = 0, \dots, i,$$

wegen der Interpolationsbedingung und daher $q_i(x) = p_i(x)$ wegen der Eindeutigkeit der Polynominterpolation.

Ein Vergleich mit der Definition ergibt die Rekursionsformel.

Berechnung der dividierten Differenzen:

Setze $f_{[x_j]} = y_j$, $j = 0, \dots, n$.
Berechne für $k = 1, \dots, n$ und $j = 0, \dots, n - k$:

$$f_{[x_j,\dots,x_{j+k}]} = \frac{f_{[x_{j+1},\dots,x_{j+k}]} - f_{[x_j,\dots,x_{j+k-1}]}}{x_{j+k} - x_j}.$$

Schema:

$$\begin{array}{c|lcc}
x_0 & f_{[x_0]} = y_0 \searrow & & \\
 & & f_{[x_0,x_1]} \searrow & \\
x_1 & f_{[x_1]} = y_1 \begin{smallmatrix}\nearrow \\ \searrow\end{smallmatrix} & & f_{[x_0,x_1,x_2]} \\
 & & f_{[x_1,x_2]} \begin{smallmatrix}\nearrow \\ \searrow\end{smallmatrix} & \\
x_2 & f_{[x_2]} = y_2 \nearrow & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

Bsp: $$f_{[x_0,x_1,x_2]} = \frac{f_{[x_1,x_2]} - f_{[x_0,x_1]}}{x_2 - x_0}.$$

Newtonsches Interpolationspolynom: Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Stützpunkte: $(3, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $n = 3$:

$$
\begin{array}{l|lllll}
x_0 = 3 & f_{[x_0]} = 1 \searrow & & & & \\
 & & f_{[x_0,x_1]} = \frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2} \searrow & & & \\
x_1 = 1 & f_{[x_1]} = 2 \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & f_{[x_0,x_1,x_2]} = \frac{-2+\frac{1}{2}}{2-3} = \frac{3}{2} \searrow & & \\
 & & f_{[x_1,x_2]} = \frac{0-2}{2-1} = -2 \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & \frac{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{0-3} = 1 & \\
x_2 = 2 & f_{[x_2]} = 0 \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & f_{[x_1,x_2,x_3]} = \frac{-\frac{1}{2}+2}{0-1} = -\frac{3}{2} \nearrow & & \\
 & & f_{[x_2,x_3]} = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2} \nearrow & & & \\
x_3 = 0 & f_{[x_3]} = 1 \nearrow & & & &
\end{array}
$$

Newtonsches Interpolationspolynom: Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Stützpunkte: (3, 1), (1, 2), (2, 0), (0, 1), $n = 3$:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 = 3 & f_{[x_0]} = 1 & & & & & & \\
 & & f_{[x_0,x_1]} = \frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2} & & & & & \\
x_1 = 1 & f_{[x_1]} = 2 & & & f_{[x_0,x_1,x_2]} = \frac{-2+\frac{1}{2}}{2-3} = \frac{3}{2} & & & \\
 & & f_{[x_1,x_2]} = \frac{0-2}{2-1} = -2 & & & & \frac{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{0-3} = 1 & \\
x_2 = 2 & f_{[x_2]} = 0 & & & f_{[x_1,x_2,x_3]} = \frac{-\frac{1}{2}+2}{0-1} = -\frac{3}{2} & & & \\
 & & f_{[x_2,x_3]} = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2} & & & & & \\
x_3 = 0 & f_{[x_3]} = 1 & & & & & &
\end{array}
$$

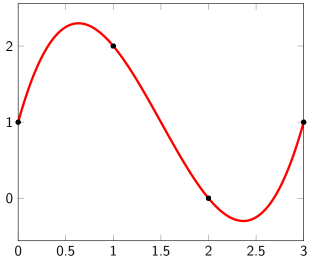
$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$

Newtonsches Interpolationspolynom: Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 1)$$

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \gamma_0 + \gamma_1(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)(x - x_1) + \gamma_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}(x - 3) + \tfrac{3}{2}(x - 3)(x - 1) + (x - 3)(x - 1)(x - 2) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{12}{2}x + \tfrac{9}{2} + x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6 \\
&= x^3 - \tfrac{9}{2}x^2 + \tfrac{9}{2}x + 1
\end{aligned}$$



Vorteile

- Rechenaufwand:
  Berechnung der dividierten Differenzen: $O(n^2)$
  Auswertung von $p_n(x)$: $O(n)$
- Hinzunahme einer neuen Stützstelle erfordert nur die Berechnung von n zusätzlichen dividierten Differenzen.

Übersicht

Fehlerabschätzungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahme:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Frage: Wie gut stimmt das Interpolationspolynom $p_n(x)$ auf $[a, b]$ mit f überein?
$\rightsquigarrow$ betrachte Fehler: $f(x) - p_n(x)$ für $x \in [a, b]$.

Fehlerabschätzungen

Annahme:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Frage: Wie gut stimmt das Interpolationspolynom $p_n(x)$ auf $[a, b]$ mit f überein?
$\rightsquigarrow$ betrachte Fehler: $f(x) - p_n(x)$ für $x \in [a, b]$.

Satz 1.1.3

Sei f $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar, kurz $f \in C^{n+1}([a, b])$.
Seien $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ verschiedene Punkte und sei $p_n(x)$ das eindeutige Interpolationspolynom vom Grad $\leq n$ zu den Stützwerten $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$.
Dann existiert zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi_x \in [a, b]$ mit

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Fehlerabschätzungen

Knotenpolynom:

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Korollar 1.1.4

Unter den Voraussetzungen von Satz1.1.3 gilt

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x\in[a,b]}\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|\omega(x)| \leq \max_{x\in[a,b]}\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Fehlerabschätzung – Beispiel

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, 2\pi]$, $n = 3$

Fehlerabschätzung – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, 2\pi]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{x \in [a,b]} \dfrac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \dfrac{|sin(x)|}{4!} \leq \dfrac{1}{24}.$

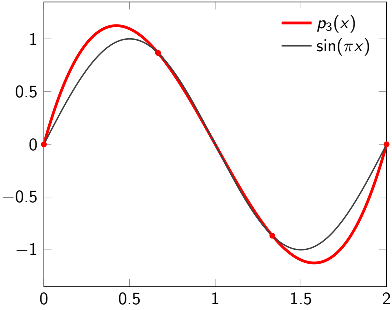
Fehlerabschätzung – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $f(x) = \sin(x)$, $[a,b] = [0, 2\pi]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \dfrac{|sin(x)|}{4!} \leq \dfrac{1}{24}.$
- $\max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \leq \dfrac{1}{24}(2\pi)^4 \approx 64.939394023 \leq 65.$

Fehlerabschätzung – Beispiel

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, 2\pi]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \max\limits_{x \in [a,b]} \dfrac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \dfrac{|sin(x)|}{4!} \leq \dfrac{1}{24}.$
- $\max\limits_{x \in [a,b]} \dfrac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \leq \dfrac{1}{24}(2\pi)^4 \approx 64.939394023 \leq 65.$



Fehlerabschätzung – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, \pi/4]$, $n = 3$

Fehlerabschätzung – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, \pi/4]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \frac{|sin(x)|}{4!} \leq \frac{1}{24}.$

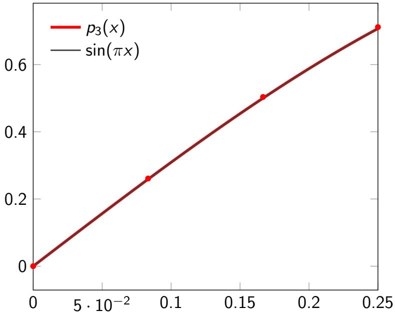
Fehlerabschätzung – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, \pi/4]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \dfrac{|sin(x)|}{4!} \leq \dfrac{1}{24}.$
- $\max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \leq \dfrac{1}{24}(\pi/4)^4 \approx 0.0159.$

Fehlerabschätzung – Beispiel

- $f(x) = \sin(x)$, $[a,b] = [0, \pi/4]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \dfrac{|sin(x)|}{4!} \leq \dfrac{1}{24}$.
- $\max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \leq \dfrac{1}{24}(\pi/4)^4 \approx 0.0159.$



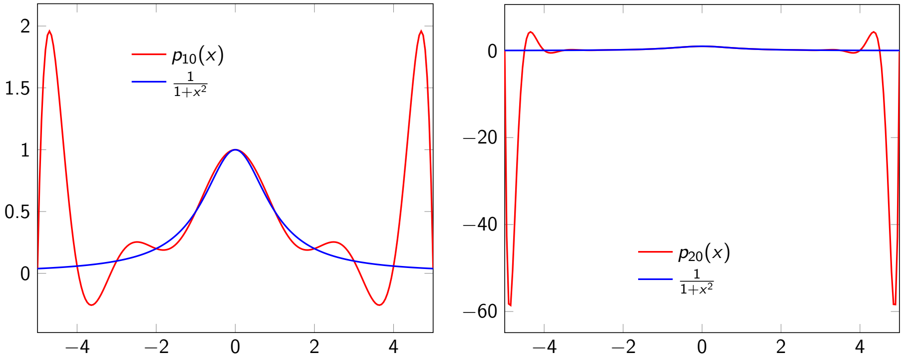
Achtung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Achtung:
Bei äquidistanter Wahl der Stützpunkte, also $x_i = a + i\,h$, $h = (b - a)/n$, ist nicht immer gewährleistet, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x) - p_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Beispiel – Runges Phänomen



Interpolanten p_{10} bzw. p_{20} von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf $[a, b] = [-5, 5]$
bei äquidistanten Stützstellen;
(unterschiedliche Maßstäbe).

Tschebyschev-Abszissen

Ausweg:

Tschebyschev-Abszissen

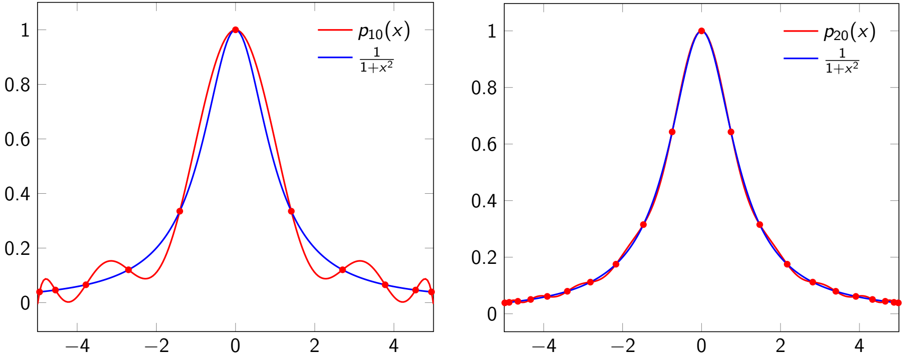
Die Stützstellen

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) + \frac{b+a}{2}, \quad i = 0, \dots, n.$$

liefern den minimalen Wert für $\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)|$, nämlich

$$\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}.$$

Tschebyschev-Abszissen



Interpolanten p_{10} bzw. p_{20} von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf $[a, b] = [-5, 5]$ bei Tschebyschev-Abszissen.

Fehlerabschätzung Tschebyschev-Abszissen – Beispiel

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, 2\pi]$, $n = 3$

Fehlerabschätzung Tschebyschev-Abszissen – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, 2\pi]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \max\limits_{x \in [a,b]} \dfrac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \dfrac{|sin(x)|}{4!} \leq \dfrac{1}{24}.$

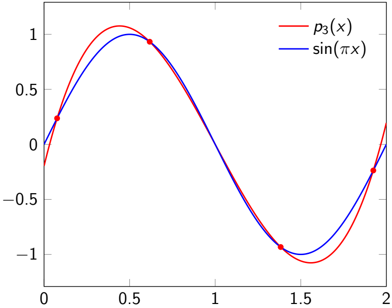
Fehlerabschätzung Tschebyschev-Abszissen – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, 2\pi]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \dfrac{|sin(x)|}{4!} \leq \dfrac{1}{24}.$
- $\max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n} \leq \dfrac{1}{24}\pi^4 2^{-3} \approx 0.5073.$

Fehlerabschätzung Tschebyschev-Abszissen – Beispiel

- $f(x) = \sin(x)$, $[a,b] = [0, 2\pi]$, $n = 3$
- $f^{(4)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(4)}(x)|}{4!} = \dfrac{|sin(x)|}{4!} \leq \dfrac{1}{24}.$
- $\max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n} \leq \dfrac{1}{24}\pi^4 2^{-3} \approx 0.5073.$



Anwendungen der Polynominterpolation

1. Approximation einer Funktion auf einem Intervall:
   Verwende Tschbyschev-Abszissen statt äquidistante Stützstellen.
2. Inverse Interpolation:
   Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bijektiv, also z. B. $f'(x) \neq 0$ auf $[a, b]$. Sind dann (x_i, y_i), $y_i = f(x_i)$, Stützpunkte von f, dann sind (y_i, x_i) wegen $x_i = f^{-1}(y_i)$ Stützpunkte für f^{-1} und eine Approximation von f^{-1} kann durch Interpolation der Stützpunkte (y_i, x_i) gewonnen werden.
3. Numerische Integration: (Kapitel 2)
   Integriere Interpolationspolynom.
4. Numerische Differentiation:
   Mit einem Interpolationspolynom p_n von f ist p_n' eine Approximation von f'.

Erweiterungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Es können trigonometrische Polynome betrachtet werden:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

  Die führt auf die sogenannte Fourieranalysis.
  Beobachtung: Wegen $\cos(kx) + i \sin(kx) = e^{ikx} = (e^{ix})^k$ kann man trigonometrische Polynome im Komplexen schreiben als

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k (e^{ix})^k, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

- Statt die Werte für das Polynom an n Stellen vorzugeben, können auch die Ableitungen an einer bestimmten Stelle x_0 vorgegeben werden. Dies ergibt dann das Taylorpolynom:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Übersicht

Spline-Interpolation – Motivation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beobachtung: Erhöhung der Anzahl der Stützpunkte n ergibt nicht immer bessere Approximation bei Polynominterpolation.

Lösung:

- ▷ Zerlege Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle.
- ▷ Interpoliere auf den Teilintervallen mit Polynomen vom Grad $\leq k$.

Problem: Polynome müssen an den Intervallgrenzen nicht zusammenpassen.

$\Rightarrow$ Spline-Interpolation:
Polynome gehen $(k-1)$-mal stetig differenzierbar ineinander über.

Splinefunktionen

Sei $\Delta = \{x_i \,:\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Aus historischen Gründen nennt man die x_i Knoten.

Definition 1.2.1

Eine Splinefunktion der Ordnung k zur Zerlegung Δ ist eine Funktion $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

- Es gilt $s \in C^{k-1}([a, b])$, s ist also stetig und $(k-1)$-mal stetig differenzierbar.
- s stimmt auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit einem Polynom s_i vom Grad $\leq k$ überein.

Die Menge dieser Splinefunktionen bezeichnen wir mit $S_{\Delta,k}$.

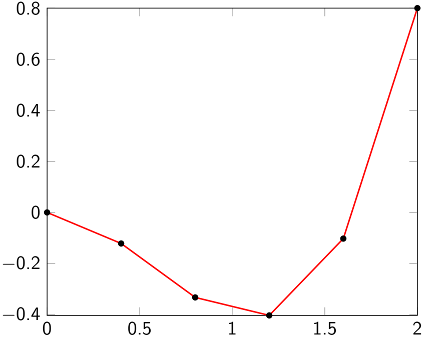
Im Folgenden betrachten wir nur den Fall $k = 1$ (lineare Splines) und $k = 3$ (kubische Splines).

Spline-Interpolation

Zu einer Zerlegung $\Delta = \{x_i \,:\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ und Werten $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ bestimme $s \in S_{\Delta,k}$ mit

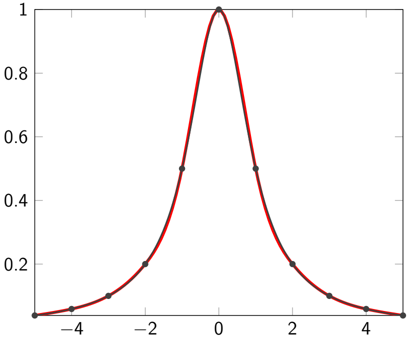
$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Beispiel für einen linearen Spline



- stückweise linear
- stetig an den Knoten

Beispiel für einen kubischen Spline



- stückweise Polynome vom Höchstgrad 3
- zweimal stetig differenzierbar an den Knoten

Übersicht

Interpolation mit linearen Splines

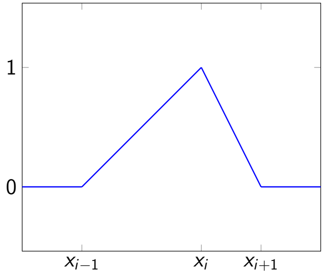
- Linearer Spline $s \in S_{\Delta,1}$ ist stetig.
- s ist Polynom s_i vom Grad ≤ 1 auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$.
- Interpolationsbedingungen ergeben: $s_i(x_i) = y_i$, $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$.
- Dies legt s_i eindeutig fest (Lagrange-Interpolation):

$$s(x) = s_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \quad \forall\, x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Interpolation mit linearen Splines

Definiere „Dachfunktionen“:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{falls } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{falls } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{falls } x > x_{i+1}, \end{cases}$$



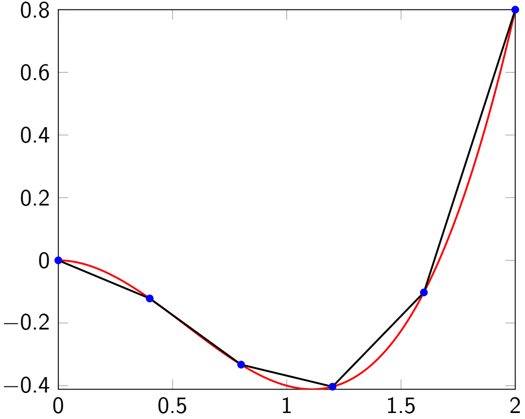
mit beliebigen Hilfsknoten $x_{-1} < a$ und $x_{n+1} > b$.

Ergibt für $s(x)$ auf $[a, b]$ die bequeme Darstellung:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \varphi_i(x), \quad x \in [a, b].$$

Interpolation mit linearen Splines – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



$f(x) = 0.6\,x^3 - x^2$ auf $[0, 2]$

Interpolation mit linearen Splines

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz 1.2.2

Zu einer Zerlegung $\Delta = \{x_i \,:\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ und Werten y_i, $i = 0, \ldots, n$, existiert genau ein interpolierender linearer Spline.

Ferner gilt folgende Fehlerabschätzung:

Satz 1.2.3

Sei $f \in C^2([a, b])$. Dann gilt für jede Zerlegung $\Delta = \{x_i \,;\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ und den zugehörigen interpolierenden linearen Spline $s \in S_{\Delta,1}$ von f

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\, h_{max}^2 \quad \text{mit} \quad h_{max} := \max_{i=0,\ldots,n-1} x_{i+1} - x_i.$$

Interpolation mit linearen Splines

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beweis.

Auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ ist s ein interpolierendes Polynom vom Grad ≤ 1. Daher gilt nach Satz 1.1.3

$$|f(x) - s(x)| = \frac{|f''(\xi_x)|}{2!}(x_{i+1} - x)(x - x_i) \leq \frac{|f''(\xi_x)|}{2!} \frac{h_{max}^2}{4} \quad \forall\, x \in [x_i, x_{i+1}]$$

mit einem (von x abhängigen) $\xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. $\square$

Interpolation mit linearen Splines – Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wieder:

- $f(x) = 0.6\,x^3 - x^2$ auf $[0, 2]$
- $n = 5$: $\Delta = \{0 < 0.4 < 0.8 < 1.2 < 1.6 < 2.0\}$
- $h_{max} = 0.4$

Satz 1.2.3 liefert:

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| &\leq \tfrac{1}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\, h_{max}^2 \\
&= \frac{1}{8} \max_{x\in[0,2]} |(0.6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x - 2)|\, 0.16 \\
&= \frac{1}{8} \cdot 5.2 \cdot 0.16 = 0.104
\end{aligned}$$

Übersicht

Interpolation mit kubischen Splines

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kubische Splines sind zweimal stetig differenzierbar aus kubischen Polynomen zusammengesetzt.
- Interpolation mit kubischen Splines gestattet, gegebene Punkte durch eine Funktion minimaler Krümmung zu interpolieren.

- $s \in S_{\Delta,3}$ kubischer Spline
- s'' ist stetig und stückweise linear, also $s'' \in S_{\Delta,1}$.
- Bestimme s_i durch Integration von s_i''.

Berechnung kubischer Spline-Interpolanten – I

Seien $M_i = s_i''(x_i)$, die sogenannten Momente.

Dann gilt nach dem Ansatz für lineare Splines:

$$s_i''(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} M_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1}.$$

Zweifache Integration ergibt dann den Ansatz

$$s_i(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{(x_{i+1} - x)^3}{x_{i+1} - x_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \right) + c_i (x - x_i) + d_i$$

mit Konstanten $c_i, d_i \in \mathbb{R}$.

Berechnung kubischer Spline-Interpolanten – II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$s_i(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i}M_i + \frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}M_{i+1}\right) + c_i(x-x_i) + d_i$$

Berechnung von c_i und d_i aus den Bedingungen

$$s_i(x_i) = y_i, \quad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Mit $h_i = x_{i+1} - x_i$ liefert dies

$$y_i = s_i(x_i) = \frac{1}{6}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}M_i + d_i \quad \Rightarrow \quad d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6}M_i$$

$$y_{i+1} = s_i(x_{i+1}) = \frac{1}{6}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}M_{i+1} + c_i(x_{i+1}-x_i) + d_i \quad \Rightarrow \quad c_i = \frac{y_{i+1}-d_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}M_{i+1}.$$

Berechnung kubischer Spline-Interpolanten – II

$$s_i(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i}M_i + \frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}M_{i+1}\right) + c_i(x-x_i) + d_i$$

Berechnung von c_i und d_i aus den Bedingungen

$$s_i(x_i) = y_i, \quad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Mit $h_i = x_{i+1} - x_i$ liefert dies

$$y_i = s_i(x_i) = \frac{1}{6}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}M_i + d_i \quad \Rightarrow \quad d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6}M_i$$

$$y_{i+1} = s_i(x_{i+1}) = \frac{1}{6}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i}M_{i+1} + c_i(x_{i+1}-x_i) + d_i \quad \Rightarrow \quad c_i = \frac{y_{i+1}-d_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}M_{i+1}.$$

Ergebnis:

$$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6}M_i, \quad c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i).$$

Berechnung kubischer Spline-Interpolanten – III

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bereits bekannt:

$$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i, \quad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i).$$

Berechnung der fehlenden Werte M_i aus den Bedingungen

$$s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

wobei

$$s_i'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{(x_{i+1} - x)^2}{x_{i+1} - x_i} M_i + \frac{(x - x_i)^2}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \right) + c_i.$$

Berechnung kubischer Spline-Interpolanten – III

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bereits bekannt:

$$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i, \quad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i).$$

Berechnung der fehlenden Werte M_i aus den Bedingungen

$$s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

wobei

$$s_i'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{(x_{i+1} - x)^2}{x_{i+1} - x_i} M_i + \frac{(x - x_i)^2}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \right) + c_i.$$

Ergebnis: $n - 1$ Gleichungen für die Momente M_i:

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Dies sind $n - 1$ Gleichungen für $n + 1$ Unbekannte.

Randbedingungen für kubische Splines

Der Spline-Interpolant wird eindeutig durch zwei zusätzliche Randbedingungen:

a) Natürliche Randbedingungen:
$s''(a) = s''(b) = 0$, also $M_0 = M_n = 0$

b) Hermite-Randbedingungen:
$s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$, also

$$\frac{h_0}{3} M_0 + \frac{h_0}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a),$$

$$\frac{h_{n-1}}{3} M_n + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} = f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}.$$

Für beide Fälle ergibt sich eine eindeutige Lösung für $M_0, \ldots, M_n$.

Randbedingungen für kubische Splines

Man erhält ein strikt diagonaldominantes tridiagonales Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & & & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ & & & & & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Randbedingungen für kubische Splines

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Man erhält ein strikt diagonaldominantes tridiagonales Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & & & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ & & & & & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

a) Natürliche Randbed.: $b_0 = b_n = \lambda_0 = \lambda_n = 0$ und $\mu_0 = \mu_n = 1$.

b) Hermite Randbed.: $\mu_0 = \frac{h_0}{3}$, $\lambda_0 = \frac{h_0}{6}$, $b_0 = \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a)$, $\mu_n = \frac{h_{n-1}}{3}$, $\lambda_n = \frac{h_{n-1}}{6}$, $b_n = f'(b) - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$.

Wegen der strikten Diagonaldominanz ist die Koeffizientenmatrix invertierbar.

Randbedingungen für kubische Splines

Man erhält ein strikt diagonaldominantes tridiagonales Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Natürliche Randbed.: $b_0 = b_n = \lambda_0 = \lambda_n = 0$ und $\mu_0 = \mu_n = 1$.

b) Hermite Randbed.: $\mu_0 = \frac{h_0}{3}$, $\lambda_0 = \frac{h_0}{6}$, $b_0 = \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a)$, $\mu_n = \frac{h_{n-1}}{3}$, $\lambda_n = \frac{h_{n-1}}{6}$, $b_n = f'(b) - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$.

Wegen der strikten Diagonaldominanz ist die Koeffizientenmatrix invertierbar.

Randbedingungen für kubische Splines

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Man erhält ein strikt diagonaldominantes tridiagonales Gleichungssystem der Form

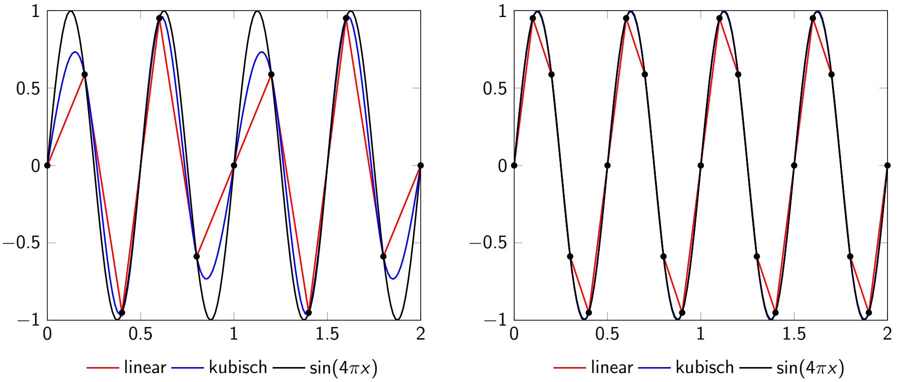
$$\begin{pmatrix} \frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & & & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ & & & & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a) \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ f'(b) - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

a) Natürliche Randbed.: $b_0 = b_n = \lambda_0 = \lambda_n = 0$ und $\mu_0 = \mu_n = 1$.

b) Hermite Randbed.: $\mu_0 = \frac{h_0}{3}$, $\lambda_0 = \frac{h_0}{6}$, $b_0 = \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a)$, $\mu_n = \frac{h_{n-1}}{3}$, $\lambda_n = \frac{h_{n-1}}{6}$, $b_n = f'(b) - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$.

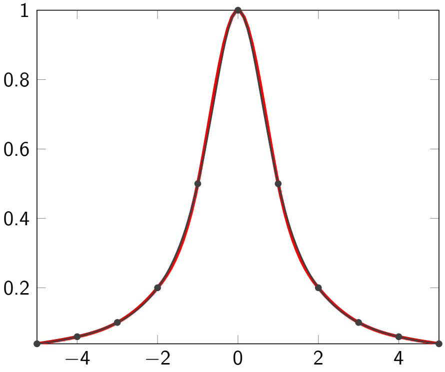
Wegen der strikten Diagonaldominanz ist die Koeffizientenmatrix invertierbar.

Splineinterpolation – Beispiel



Interpolation von $\sin(4\pi x)$ auf $[a, b] = [0, 2]$ für $n = 10$ (links) bzw. $n = 20$ (rechts) mit linearen und kubischen Splines (natürliche Randbedingungen).

Kubische Splineinterpolation – Beispiel



Kubischer Spline-Interpolant von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf $[a, b] = [-5, 5]$ bei äquidistanten Stützstellen, $n = 10$.

Splines – Beispiel II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte:

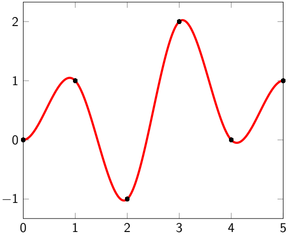
- $[a, b] = [0, 5]$
- $n = 5$ und $\Delta = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5\}$ äquidistant
- $(y_0, \dots, y_5) = (0, 1, -1, 2, 0, 1)$

Dann ist das System mit Hermite Randbedigungen:

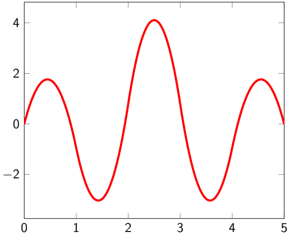
$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - f'(0) \\ -3 \\ 5 \\ -5 \\ 3 \\ f'(5) - 1 \end{pmatrix}.$$

Splines – Beispiel II

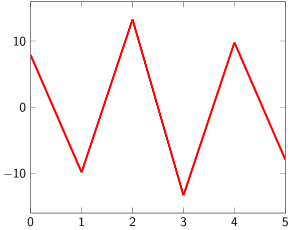
Für $f'(0) = f'(5) = 0$ ergibt sich:
$M = (7.8947, -9.7895, 13.2632, -13.2632, 9.7895, -7.8947)$.



$s(x)$



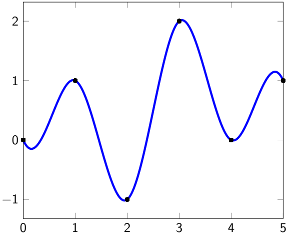
$s'(x)$



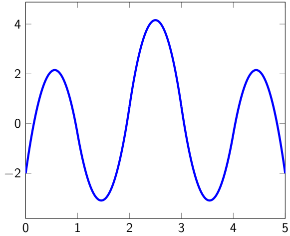
$s''(x)$

Splines – Beispiel II

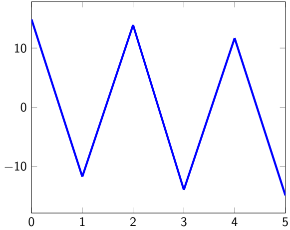
Für $f'(0) = f'(5) = -2$ ergibt sich:
$M = (14.8421, -11.6842, 13.8947, -13.8947, 11.6842, -14.8421)$.



$s(x)$



$s'(x)$



$s''(x)$

Minimaleigenschaften kubischer Splines

Kubische Spline-Interpolanten mit Randbedingung a) oder b) haben unter allen zweimal stetig differenzierbaren minimale Krümmung im folgenden Sinne:

Satz 1.2.5

Gegeben sei eine beliebige Funktion $f \in C^2([a, b])$ und eine Unterteilung Δ von $[a, b]$ mit $y_i = f(x_i)$. Dann gilt für den kubischen Spline-Interpolanten $s \in S_{\Delta,3}$ mit Randbedingungen a) oder b)

$$\int_a^b f''(x)^2 \, dx = \int_a^b s''(x)^2 \, dx + \int_a^b (f''(x) - s''(x))^2 \, dx \geq \int_a^b s''(x)^2 \, dx.$$

Fehlerabschätzung für kubische Spline-Interpolation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definiere: $h_{min} \coloneqq \min_{0 \leq i < n} h_i, \quad h_{max} \coloneqq \max_{0 \leq i < n} h_i$.

Satz 1.2.6

Sei $f \in C^4([a,b])$ mit $f''(a) = f''(b) = 0$. Dann gilt für jede Unterteilung Δ, $y_i = f(x_i)$ und dem kubischen Spline-Interpolanten $s \in S_{\Delta,3}$ zu Randbedingungen a)

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \, h_{max}^4,$$

$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \, h_{max}^{4-k}, \quad k = 1, 2.$$

Fehlerabschätzung für kubische Spline-Interpolation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Für Hermite-Randbedingungen lässt sich der Satz verschärfen:

Satz 1.2.7

Sei $f \in C^4([a, b])$. Dann gilt für jede Unterteilung Δ, $y_i = f(x_i)$ und dem kubischen Spline-Interpolanten $s \in S_{\Delta,3}$ zu Randbedingungen b)

$$\left|f(x) - s(x)\right| \leq \frac{5}{384} \sup_{\xi \in [a,b]} \left|f^{(4)}(\xi)\right| h_{max}^4,$$

$$\left|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)\right| \leq \frac{2h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi \in [a,b]} \left|f^{(4)}(\xi)\right| h_{max}^{4-k}, \quad k = 1, 2.$$