Mathematik II für Informatik
11. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 29./30. Juni 2017
Abgabe: 06./07. Juli 2017

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ober- und Untersumme)
Es sei die Funktion $f(x) = \exp(x)$ und die Zerlegung

$$Z_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\right\}$$

des Intervalls $[0,1]$ gegeben.

(a) Berechnen Sie für Z_n die Untersumme $\underline{s}_f(Z_n)$ und die Obersumme $\overline{s}_f(Z_n)$.

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte der beiden Summen für $n \to \infty$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von (b) den Wert von $\int_0^1 \exp(x)\ \mathrm{d}x$.

Lösungshinweise: Siehe Beispiel 6.7.6 (c).

(a) Für die Untersumme ergibt sich

$$\underline{s}_f(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{j-1}{n}} \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{j-1}{n}} \frac{1}{n} \overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^j \overset{\text{geom. Sum.}}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$
$$= \frac{\mathrm{e} - 1}{n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)}.$$

Die Obersumme wird analog berechnet:

$$\overline{s}_f(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{j}{n}} \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{j-1}{n}} \frac{1}{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = (1 - \mathrm{e}) \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)}.$$

(b) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e} - 1}{n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)} = (\mathrm{e} - 1) \lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \overset{\text{de l'Hospital}}{=} (\mathrm{e} - 1) \lim_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e} - 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \mathrm{e}) \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)} = (1 - \mathrm{e}) \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - \mathrm{e}^x} \overset{\text{de l'Hospital}}{=} (1 - \mathrm{e}) \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = \mathrm{e} - 1.$$

(c) Die Grenzwerte von Ober- und Untersumme für $n \to \infty$ stimmen also überein. Daher gilt (siehe Beispiel 6.7.6):

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1.$$

Aufgabe G2 (Integrationstechniken I)
Berechnen Sie folgende Integrale bzw. Stammfunktionen.

(a)
$$\int 3x^3 - ax + t \, \mathrm{d}x, \qquad a, t, x \in \mathbb{R}$$

(b)
$$\int \ln(t^2) + \sin(3t) - \frac{1}{t + x^2} + \exp(-t) \, \mathrm{d}t, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

(c)
$$\int_0^{2\pi} |\cos(x)| \, \mathrm{d}x$$

(d)
$$\int_0^{\pi} \sin(x) x^2 \, \mathrm{d}x$$

(e)
$$\int_0^2 \frac{x}{(1 + x^2)^k} \, \mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

(f)
$$\int \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} \, \mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Lösungshinweise:

(a) Auf Grund der Linearität des Integrals (Satz 6.7.7), können wir die einzelnen Summanden separat integrieren:
$$\int 3x^3 - ax + t \, \mathrm{d}x = \int 3x^3 \, \mathrm{d}x - \int ax \, \mathrm{d}x + \int t \, \mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2 + tx + c$$

(b) Hier gehen wir analog zu (a) vor. Zu beachten ist, dass nun t die Integrationsvariable ist.
$$\int \ln(t^2) + \sin(3t) - \frac{1}{t + x^2} + \exp(-t) \, \mathrm{d}t = 2t \ln(t) - 2t - \frac{1}{3}\cos(3t) - \ln(t + x^2) - \exp(-t) + c$$

(c) Der Betrag stört beim Integrieren. Wir lösen ihn durch die Aufteilung des Integrationsbereichs (siehe Satz 6.7.7 (e)) an den Nullstellen von $\cos(x)$ auf. Die Bereiche, in denen $\cos(x)$ positiv ist, bleiben unverändert, die Bereiche, in denen $\cos(x)$ negativ ist, ziehen wir ab.
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\cos(x)| \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin(x))\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin(x)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 1 + 2 + 1 = 4\end{aligned}$$

(d) Wir wenden zwei Mal partielle Integration (Satz 6.8.1) an, um den x^2- bzw. x-Term loszuwerden. Die Stammfunktionen zu $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ sind leicht zu erraten.
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(x) x^2 \, \mathrm{d}x &= -\cos(x) x^2\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x) 2x \, \mathrm{d}x = \pi^2 + 2\int_0^{\pi} \cos(x) x \, \mathrm{d}x \\ &= \pi^2 + 2\sin(x) x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \pi^2 + 0 - 2\cos(x)\Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 4.\end{aligned}$$

(e) Wir substituieren (Satz 6.8.4, Bemerkung 6.8.5)

$$u(x) = 1 + x^2$$

und erhalten mit der Nebenrechnung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \implies 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u:$$

$$\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^k}\,\mathrm{d}u.$$

Im Fall $k = 1$ liefert das:

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(|u|)\Big|_1^5 = \frac{1}{2}\ln(5).$$

Für den Fall $k > 1$ erhalten wir:

$$\int_0^2 \frac{x}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^k}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{1-k}u^{1-k}\Big|_1^5 = \frac{1}{2(1-k)}\left(5^{1-k}-1\right).$$

(f) Da

$$(2+\cos(x))' = -\sin(x),$$

können wir die logarithmische Integration verwenden (Beispiel 6.8.6 (c)):

$$\int \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\ln(2+\cos(x)) + c.$$

Aufgabe G3 (Parameterintegrale)
Die Funktion $F : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert als

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^1 (x\ln(xy) - x)\,\mathrm{d}y.$$

Bestimmen Sie die Ableitung $F'(x)$ auf zwei Arten:

(a) mit Hilfe von Satz 6.8.9 und Beispiel 6.8.11,

(b) indem sie zunächst einen expliziten (integralfreien) Ausdruck für $F(x)$ bestimmen und anschließend differenzieren.

Lösungshinweise:

(a) Seien die Funktionen $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = 1$, und sei die Funktion $h : \{x, y \in \mathbb{R}^2 | x > 1, y > 0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x,y) = x\ln(xy) - x$. Alle drei Funktionen sind stetig differenzierbar und das Gleiche gilt für die partielle Ableitung $\frac{\partial h}{\partial x}$.
Nach Satz 6.8.9 und Beispiel 6.8.11 erhalten wir

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\,\mathrm{d}y \quad\implies\quad F'(x) = h\big(x, g(x)\big)g'(x) - h\big(x, f(x)\big)f'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Da g eine konstante Funktion ist, gilt $g'(x) = 0$ und der erste Summand verschwindet. Der zweite Summand ergibt $x\ln(1) - x(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x}$. Die partielle Ableitung $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial x\ln(xy)-x}{\partial x}$ ist $\ln(xy) + \frac{x}{xy}y - 1 = \ln(xy)$, also

$$F'(x) = -\frac{1}{x} + \int_{\frac{1}{x}}^1 \ln(xy)\,\mathrm{d}y.$$

Zur Berechnung dieses Integrals schreiben wir $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ und suchen eine Stammfunktion für diese Funktion (als eine Funktion von y). Weil $\ln x$ eine Konstante (unabhängig von y) ist, ist $y \ln x$ eine Stammfunktion des ersten Summanden. Für den zweiten Summand kennen wir die Stammfunktion $y \ln y - y$. Also haben wir insgesamt

$$\ln(xy) = \frac{\partial(y(\ln(xy)-1))}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\frac{1}{x}}^{1} \ln(xy)\,\mathrm{d}y = y(\ln(xy)-1)\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=1} = \ln x - 1 - \frac{\ln(1)-1}{x} = \ln x - 1 + \frac{1}{x}.$$

Es folgt

$$F'(x) = -\frac{1}{x} + \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = \ln(x) - 1.$$

(b) Wir teilen das Integral auf in

$$F(x) = x\int_{\frac{1}{x}}^{1} \ln(xy)\,\mathrm{d}y - \int_{\frac{1}{x}}^{1} x\,\mathrm{d}y.$$

Da wir den Wert des ersten Integrals schon kennen und das zweite nicht von y abhängt, erhalten wir

$$F(x) = x\ln(x) - x + 1 - (x-1) = x\ln(x) - 2x + 2.$$

Somit folgt

$$F'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 2 = \ln(x) - 1,$$

was dem Wert aus Teil (a) entspricht.

Aufgabe G4 (Skalarprodukt)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben.

(a) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{C}([a,b])$, der Raum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$(f|g) := \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad f, g \in \mathcal{C}([a,b]),$$

auf $\mathcal{C}([a,b])$ ein Skalarprodukt definiert ist.

(c) Begründen sie, warum die Abbildung $\|\cdot\|_2 \colon \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

eine Norm ist.

Lösungshinweise:

(a) Es ist $\mathcal{C}([a,b]) \subset \mathrm{Abb}([a,b],\mathbb{R})$ und mit $1 \in \mathcal{C}([a,b])$, sowie

$$\alpha f + \beta g \in C([a,b]), \qquad f, g \in C([a,b]), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

gelten (UVR1) und (UVR2) aus **Satz 3.2.3**. Damit ist $\mathcal{C}([a,b])$ ein UVR von $\mathrm{Abb}([a,b],\mathbb{R})$ und damit selbst ein Vektorraum.

(b) Es werden die Skalarprodukt-Axiome überprüft.

(SP1) Es folgt

$$(f|f) = \int_a^b f(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$$

mit der Monotonie des Integrals und $f^2(x) \geq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$(f|f) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

Wir nehmen zunächst an, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Dann folgt sofort

$$(f|f) = \int_a^b f(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Wir gehen nun davon aus, dass $(f|f) = 0$ gilt und nehmen an, es gäbe ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$. Wir betrachten nun den Fall, dass $f(x_0) > 0$ (der Fall $f(x_0) < 0$ geht analog). Auf Grund der Stetigkeit von f existiert für $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$. Damit ist jedoch $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ für $x \in [x-\delta, x+\delta]$ und folglich

$$(f|f) = \int_a^b f(x)f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)^2\,\mathrm{d}x \geq 2\delta \cdot \frac{f(x_0)^2}{4} > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur obigen Annahme und es folgt die Behauptung.

(SP2) $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = (g|f)$.

(SP3) Mit der Linearität des Integrals folgt

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot f + \beta \cdot h|g) &= \int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot h(x))g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \alpha \cdot f(x)g(x) + \beta \cdot h(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha \cdot \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b h(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha \cdot (f|g) + \beta \cdot (h|g).\end{aligned}$$

(c) Diese Aussage folgt direkt aus Aufgabenteil (b) und **Satz 3.4.10**. Die Norm wird vom obigen Skalarprodukt induziert, da nach Definition gilt:

$$||f||_2 = \sqrt{(f|f)}.$$

Liebe Studierende,

im Rahmen des Projektes WiGeMath werden zur Zeit verschiedene Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen in Deutschland untersucht. Zu den Kooperationspartnern gehört auch der Fachbereich Mathematik mit seinem Lernzentrum (LZM). Aktuell gibt es hierzu eine online-Befragung.
Der Fachbereich erhofft sich davon fundierte Aussagen zur Qualität des Lernzentrums, die langfristig auch zu einem verbesserten Angebot führen sollen.

Wir möchten Sie herzlich bitten, sich an dieser online-Befragung zu beteiligen. Sie werden dafür ca. 15 Minuten benötigen.
Unter den Teilnehmern werden Amazon-Gutscheine im Wert von 1 x 200 € und 30 x 20 € verlost.

`https://goo.gl/SorwRR`

Vielen Dank für Ihre Unterstützung!

Hausübung

Aufgabe H1 (Integrationstechniken II) (12 Punkte)

Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale. Der Lösungsweg incl. aller Rechenschritte muss klar erkennbar sein!

(a)
$$\int_0^{\pi} \frac{2\sin(x)}{\sqrt{5-3\cos(x)}}\,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x - 6x^2\,\mathrm{d}x$$

(c)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x)\,\mathrm{d}x$$

(d)
$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

Lösungshinweise:

(a) Wir substituieren (Satz 6.8.4, Bemerkung 6.8.5):

$$u(x) = 5-3\cos(x) \implies \mathrm{d}u = 3\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

und erhalten

$$\int_0^{\pi} \frac{2\sin(x)}{\sqrt{5-3\cos(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_2^8 \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\sqrt{u}\Big|_2^8 = \frac{2}{3}\cdot 2(\sqrt{8}-\sqrt{2}) = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

(b) Wir teilen nach Satz 6.7.7 (c) das Integral zunächst auf und wenden partielle Integration (Satz 6.8.1) auf den ersten Summanden an.

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x - 6x^2\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 6x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2x^3\Big|_0^1 = \mathrm{e}-\mathrm{e}+1-2 = -1.$$

(c) Hier orientieren wir uns an Beispiel 6.8.3 (d).

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot(-2)sin(2x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(2x)\,\mathrm{d}x.$$

Nun gilt mit $\sin^2(2x)+\cos^2(2x) = 1$ auch

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(2x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1-\sin^2(2x)\,\mathrm{d}x = 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(2x)\,\mathrm{d}x = 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(2x)\,\mathrm{d}x$$

und damit

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(2x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \implies \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(2x)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

(d) Wir verwenden die logarithmische Integration (Beispiel 6.8.6 (c)). Dazu formen wir zunächst um:

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|\ln(x)|)\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln\left(\left|\ln(\mathrm{e}^2)\right|\right) - \ln(|\ln(\mathrm{e})|) = \ln(2)-\ln(1) = \ln(2).$$

Aufgabe H2 (Uneigentliche Integrale) (12 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir das *uneigentliche* Integral von f auf $[a,\infty)$ als

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

falls der Grenzwert existiert.
Bestimmen Sie (falls möglich) den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale.

(a)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

(c)
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

(d)
$$\int_0^\infty \cos(2x+\pi)\,\mathrm{d}x$$

Lösungshinweise:

(a)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(\ln(|x|)\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln(b)-\ln(1)) = \lim_{b\to\infty}\ln(b) = \infty.$$

Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

(b)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1-0 = 1.$$

(c) Wir bestimmen zunächst die Stammfunktion (mit Konstante $c=0$) von $\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$. Dazu verwenden wir zwei Mal partielle Integration.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \int \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-x}\cos(x) - \int -\mathrm{e}^{-x}(\sin(x))\,\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+\cos(x)) - \int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+\cos(x)).$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+\cos(x))\Big|_0^b\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\mathrm{e}^{-b}(\sin(b)+\cos(b)) + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(0+1)\\ &= -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(2x+\pi)\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos(2x+\pi)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\sin(2x+\pi)\Big|_0^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\sin(2b+\pi) - \frac{1}{2}\sin(\pi)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\sin(2b+\pi) \quad \text{existiert nicht.}\end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Parameterintegrale) (12 Punkte)
Bestimmen Sie die Ableitung $F'(x)$ von

$$F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-y^2} + \frac{x\sin(y)}{3-\cos(y)}\,\mathrm{d}y.$$

Lösungshinweise:
Wir orientieren uns an Aufgabe G3 dieses Übungsblatts und identifizieren zunächst:

$$\begin{aligned} f(x) &= x,\\ g(x) &= 2x,\\ h(x) &= \mathrm{e}^{-y^2} + \frac{x\sin(y)}{3-\cos(y)}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= h\big(x, g(x)\big)g'(x) - h\big(x, f(x)\big)f'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y\\ &= 2\mathrm{e}^{-4x^2} + \frac{2x\sin(2x)}{3-\cos(2x)} - \mathrm{e}^{-x^2} - \frac{x\sin(x)}{3-\cos(x)} + \int_x^{2x} \frac{\sin(y)}{3-\cos(y)}\,\mathrm{d}y\\ &= 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} + \frac{2x\sin(2x)}{3-\cos(2x)} - \frac{x\sin(x)}{3-\cos(x)} + \ln(3-\cos(y))\Big|_x^{2x}\\ &= 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} + \frac{2x\sin(2x)}{3-\cos(2x)} - \frac{x\sin(x)}{3-\cos(x)} + \ln(3-\cos(2x)) - \ln(3-\cos(x))\\ &= \mathrm{e}^{-x^2}\left(2\mathrm{e}^{-3x^2} - 1\right) + \frac{2x\sin(2x)}{3-\cos(2x)} - \frac{x\sin(x)}{3-\cos(x)} + \ln\left(\frac{3-\cos(2x)}{3-\cos(x)}\right). \end{aligned}$$

Hier ist zu bemerken, dass der Weg (b) aus G3 hier ohne Weiteres nicht möglich ist, da zu e^{-y^2} keine Stammfunktion angegeben werden kann.