Mathematik II für Informatik
9. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

keine Übung
Abgabe: 22./23. Juni 2017

Bitte beachten Sie, dass die Übungen am Donnerstag, den 15.06.2017 und Freitag, den 16.06.2017 aufgrund des Feiertags entfallen. Die Hausübungen dieses Blatts geben Sie bitte zusammen mit den Hausübungen von Blatt 8 wie gewohnt in Ihrer Übung am 22. bzw. 23.06.2017 ab.

Hausübung

Aufgabe H1 (partielle Ableitungen) (12 Punkte)
Bitte achten Sie beim Bearbeiten dieser Aufgabe darauf, dass die Rechenwege klar erkennbar sind.

(a) Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 - xz^2 + y^3 + z^2 - 3y$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f und g.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1, \partial_2, \partial_1^2, \partial_2^2, \partial_1\partial_2, \partial_2\partial_1$ der folgenden Funktion

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}.$$

Lösungshinweise:

(a) $\partial_1 f(x,y,z) = 4x - z^2$
$\partial_2 f(x,y,z) = 3y^2 - 3$
$\partial_3 f(x,y,z) = 2z(-x+1)$

$\partial_1 g(x,y) = 3x^2 - 3y^2$
$\partial_2 g(x,y) = -6xy.$

(b) $\partial_1 f = -\frac{1}{2y\sqrt{1-x}}$,
$\partial_2 f = -\frac{\sqrt{1-x}}{y^2}$,
$\partial_1^2 f = -\frac{1}{4y}(1-x)^{-3/2}$,
$\partial_2^2 f = \frac{2\sqrt{1-x}}{y^3}$,
$\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f = \frac{1}{2y^2\sqrt{1-x}}$.

Aufgabe H2 (Jacobi-Matrizen) (12 Punkte)
Bitte achten Sie beim Bearbeiten dieser Aufgabe darauf, dass die Rechenwege klar erkennbar sind.

(a) Berechnen Sie die Jakobi-Matrizen der folgenden Funktionen
 i. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (\ln(1+x^2+z^2), z^2+y^2-x^2, \sin(xz))$
 ii. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (xy, \cosh(xy), e^{x^2})$
 iii. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x\sin(y)\cos(z), x\sin(y)\sin(z), x\cos(y))$

(b) Gegeben seien die Abbildungen

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z):=\begin{pmatrix} y\sin(z)\\ x+y\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ g(u,v):=\begin{pmatrix} u+v\\ v^2\\ uv\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $h:=f\circ g$ auf zwei verschiedene Arten:

i. Mit der Kettenregel.

ii. Berechnen Sie zuerst h und differenzieren Sie anschließend.

Lösungshinweise: Nach Definition 6.4.10 ist die Jacobi-Matrix einer Funktion $f:\mathbb{R}^d\supseteq G\to\mathbb{R}^p$ die $p\times d$-Matrix aller partiellen Ableitungen von f. Es müssen also zunächst alle partiellen Ableitungen bestimmt und anschließend eingesetzt werden.

(a) i.

$$J_f=\begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+z^2} & 0 & \frac{2z}{1+x^2+z^2}\\ -2x & 2y & 2z\\ z\cos(xz) & 0 & x\cos(xz)\end{pmatrix}.$$

ii.

$$J_g=\begin{pmatrix} y & x\\ y\sinh(xy) & x\sinh(xy)\\ 2xe^{x^2} & 0\end{pmatrix}.$$

iii.

$$J_h=\begin{pmatrix} \sin(y)\cos(z) & x\cos(y)\cos(z) & -x\sin(y)\sin(z)\\ \sin(y)\sin(z) & x\cos(y)\sin(z) & x\sin(y)\cos(z)\\ \cos(y) & -x\sin(y) & 0\end{pmatrix}.$$

(b) i. Mit den Differentiationsregeln berechnen sich die Jacobi-Matrizen von f und g zu

$$J_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & \sin(z) & y\cos(z)\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad J_g(u,v)=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2v\\ v & u\end{pmatrix}$$

Für die Jacobi-Matrix von h erhält man damit nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} J_h(u,v)&=J_f(g(u,v))\cdot J_g(u,v)=\begin{pmatrix} 0 & \sin(uv) & v^2\cos(uv)\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2v\\ v & u\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} v^3\cos(uv) & 2v\sin(uv)+uv^2\cos(uv)\\ 1 & 1+2v\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ii. Es gilt

$$h(u,v)=\begin{pmatrix} v^2\sin(uv)\\ u+v+v^2\end{pmatrix}.$$

Mit den Differentiationsregeln folgt auch hier

$$J_h(u,v)=\begin{pmatrix} v^3\cos(uv) & 2v\sin(uv)+uv^2\cos(uv)\\ 1 & 1+2v\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3 (totale Differenzierbarkeit) (12 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren,

(b) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ nicht stetig sind, aber

(c) f total differenzierbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie in Aufgabenteil (b) eine Folge der Form $x_n = \frac{1}{2\pi n}$.

Lösungshinweise:

(a) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist die Existenz klar und wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen (da $f(x,y) = f(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) gilt ohne großes Rechnen

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen in $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h^2\cdot\sin\left(\frac{1}{|h|}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0. \end{aligned}$$

(Der letzte Grenzwert ist 0 wegen $\sin(\frac{1}{|h|}) \leq 1$ für alle $h \neq 0$). Da f symmetrisch ist, folgt auch $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(b) Nun zeigen wir, dass die partiellen Ableitungen nicht stetig in $(0,0)$ sind. Für $x_0 > 0$ gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 2x_0\sin(\frac{1}{x_0}) - \cos(\frac{1}{x_0})$ also insbesondere

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2\pi n},0\right) = \frac{2}{2\pi n}\sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = 0 - 1 = -1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Deshalb folgt $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2\pi n},0) \not\to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und natürlich gilt $(\frac{1}{2\pi n},0) \to (0,0)$. Somit ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht stetig in $(0,0)$. Analog zeigt man, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht stetig in $(0,0)$ ist.

(c) Wir zeigen, dass die Funktion f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist. Dies ist klar, wenn $(x,y) \neq (0,0)$, denn in jedem solchen Punkt sind die partiellen Ableitungen stetig und die Behauptung folgt somit aus Satz 6.5.1. Daher betrachten wir nur den Punkt $(0,0)$. Beachten Sie, dass die Ableitung von f in $(0,0)$ (sofern existent) gleich $(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0 \;\; 0)$ sein müsste (vgl. Satz 6.5.8). Also betrachten wir die Matrix $\Phi = (0 \;\; 0)$ und definieren

$$r(x,y) := f(x,y) - f(0,0) - \Phi \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Also gilt $r(x,y) = f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nun müssen wir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$ zeigen. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} &= \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|. \end{aligned}$$

Somit folgt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$. Definition 6.5.1 entsprechend ist daher f total differenzierbar in $(0,0)$, mit Ableitung $\Phi = (0,0)$