Aussagenlogik und Prädikatenlogik 2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Anton Freund, Jonathan Weinberger

SoSe 2018
Übung: 02.05.2018
Abgabe: 16.05.2018

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Resolutionsverfahren)
Für jede aussagenlogische Formel φ sei K_φ eine Klauselmenge mit $\varphi \equiv \bigwedge K_\varphi$. Laut Vorlesung gilt die Äquivalenz

$$\varphi \text{ ist unerfüllbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box \in \mathrm{Res}^*(K_\varphi).$$

Charakterisieren Sie die folgenden Aussagen durch ähnliche Äquivalenzen:

(a) φ ist erfüllbar,

(b) φ ist allgemeingültig,

(c) $\varphi \models \psi$,

(d) Φ_0 ist unerfüllbar, wobei Φ_0 eine endliche Menge von aussagenlogischen Formeln ist.

Lösung:

(a) Indem man beide Seiten der Äquivalenz negiert erhält man

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box \notin \mathrm{Res}^*(K_\varphi).$$

(b) Die Formel φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist. Daher gilt

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box \in \mathrm{Res}^*(K_{\neg\varphi}).$$

(c) Es gilt $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\varphi \to \psi$ allgemeingültig ist. Somit hat man

$$\varphi \models \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box \in \mathrm{Res}^*(K_{\neg(\varphi\to\psi)}).$$

Alternativ kann man argumentieren, dass $\varphi \models \psi$ genau dann gilt, wenn $\neg(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi \equiv \bigwedge(K_\varphi \cup K_{\neg\psi})$ unerfüllbar ist. Somit gilt auch

$$\varphi \models \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box \in \mathrm{Res}^*(K_\varphi \cup K_{\neg\psi}).$$

(d) Die endliche Formelmenge Φ_0 ist unerfüllbar genau dann, wenn die Konjunktion $\bigwedge \Phi_0$ unerfüllbar ist. Somit gilt

$$\Phi_0 \text{ ist unerfüllbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box \in \mathrm{Res}^*(K_{\bigwedge \Phi_0}).$$

Wegen $\bigwedge \Phi_0 \equiv \bigwedge_{\varphi\in\Phi_0} \bigwedge K_\varphi \equiv \bigwedge(\bigcup_{\varphi\in\Phi_0} K_\varphi)$ gilt auch

$$\Phi_0 \text{ ist unerfüllbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box \in \mathrm{Res}^*(\bigcup_{\varphi\in\Phi_0} K_\varphi).$$

Aufgabe G2 (Kompaktheit)
Unter Kompaktheit verstehen wir die folgende Aussage: Ist jede endliche Teilmenge einer Formelmenge Φ erfüllbar, so ist auch Φ als Ganzes erfüllbar.

(a) Zeigen Sie, dass Kompaktheit äquivalent ist zu der folgenden Aussage: Gilt $\Phi \models \psi$ so gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$.

(b) Zeigen Sie, dass die Existenz eines vollständigen und korrekten Beweiskalküls den Kompaktheitssatz impliziert.

Lösung:

(a) Wie man die Aussage in (a) aus dem Kompaktheitssatz herleitet, wurde bereits in der Vorlesung gezeigt: Man nehme $\Phi \models \psi$ an. Dann ist $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz ist eine endliche Teilmenge $\Psi_0 \subseteq \Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar. Man setze $\Phi_0 := \Psi_0 \setminus \{\neg\psi\} \subseteq \Phi$. Wegen $\Psi_0 \subseteq \Phi_0 \cup \{\neg\psi\}$ ist auch $\Phi_0 \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar. Also gilt $\Phi_0 \models \psi$. Umgekehrt zeigen wir, wie man den Kompaktheitssatz aus der Aussage in (a) herleitet: Man nehme an, dass Φ nicht erfüllbar ist. Dann gilt $\Phi \models 0$. Nach Annahme gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models 0$. Also kann Φ_0 nicht erfüllbar sein.

(b) Um den Kompaktheitssatz zu zeigen, können wir die Aussage in (a) nachweisen: Angenommen es gilt $\Phi \models \psi$. Dann ist dies in unserem vollständigen Beweiskalkül beweisbar, also $\Phi \vdash \psi$. Beweise sind endliche Bäume und können daher nur endlich viele Annahmen aus Φ enthalten. Daher gilt $\Phi_0 \vdash \psi$ für eine endliche Menge $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Mit der Korrektheit des Beweiskalküls folgt $\Phi_0 \models \psi$, wie gewünscht.

Aufgabe G3 (Kompaktheit und Bit-Sequenzen)
Eine Interpretation $\mathscr{I} : \mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots\} \to \mathbb{B}$ kann als unendliche Bit-Sequenz $\mathscr{I}(p_1)\mathscr{I}(p_2)\mathscr{I}(p_3)\dots$ aufgefasst werden. Sei P eine Menge solcher Sequenzen und sei $\overline{P}$ das Komplement von P. Wir nehmen an, dass sowohl P als auch $\overline{P}$ durch (unendliche) Mengen aussagenlogischer Formeln spezifiziert werden können, dass für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$ also

$$\begin{aligned} P &= \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \models \Phi\}, \\ \overline{P} &= \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \models \Psi\} \end{aligned}$$

gilt. Zeigen Sie, dass P und $\overline{P}$ dann sogar schon durch endliche Formelmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ spezifiziert werden können. Folgern Sie, dass man nur endlich viele Bits aus $\mathscr{I}$ betrachten muss, um zu entscheiden, ob $\mathscr{I} \in P$ gilt.

Lösung: Die Vereinigung $\Phi \cup \Psi$ kann keine Modelle haben, da solche Modelle sowohl zu P als auch zu $\overline{P}$ gehören würden. Der Kompaktheitssatz sagt nun, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi \cup \Psi$ keine Modelle hat. Da jede Formel in Γ zu Φ oder zu Ψ gehört, können wir $\Gamma = \Phi_0 \cup \Psi_0$ mit $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ schreiben. Um

$$P = \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \models \Phi_0\}$$

zu zeigen nehmen wir zunächst $\mathscr{I} \models \Phi_0$ an. Da $\Phi_0 \cup \Psi_0$ unerfüllbar ist, gilt $\mathscr{I} \not\models \Psi_0$ und erst recht $\mathscr{I} \not\models \Psi$. Somit hat man $\mathscr{I} \notin \overline{P}$ und daher $\mathscr{I} \in P$. Gilt umgekehrt $\mathscr{I} \in P$, so hat man $\mathscr{I} \models \Phi$ und erst recht $\mathscr{I} \models \Phi_0$. Genauso zeigt man

$$\overline{P} = \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \models \Psi_0\}.$$

Um nun $\mathscr{I} \in P$ zu entscheiden, müssen wir nur die Werte $\mathscr{I}(p_i)$ für die endlich vielen Aussagenvariablen in Φ_0 betrachten.

Hausübung

Aufgabe H1 (Formale Herleitungen) (12 Punkte)
In der Vorlesung wurde der folgende Beweiskalkül von Shoenfield betrachtet:

$$\begin{array}{lllll} \text{Axiome:} & \neg\varphi \vee \varphi & & & \\ \text{Regeln:} & \dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi} & \dfrac{\varphi \vee \varphi}{\varphi} & \dfrac{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}{(\varphi \vee \psi) \vee \chi} & \dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \neg\varphi \vee \chi}{\psi \vee \chi} \end{array}$$

Wir schreiben $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, falls es einen Beweisbaum gibt, dessen Blätter Axiome oder Aussagen in $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sind und dessen Wurzel ψ ist. Beweisen Sie durch die Angabe eines entsprechenden Beweisbaums:

(a) $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$

(b) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (hierbei ist $\varphi \to \psi$ eine Abkürzung für $\neg\varphi \vee \psi$)

(c) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vdash \psi$

(d) $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$

Lösung:

(a) [3 Punkte]

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \neg\varphi \vee \varphi}{\psi \vee \varphi}$$

(b) [3 Punkte]

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \neg\varphi \vee \psi}{\psi \vee \psi}}{\psi}$$

(c) [3 Punkte]

$$\cfrac{\cfrac{\varphi \vee \psi \qquad \cfrac{\neg\varphi}{\neg\varphi \vee \psi}}{\psi \vee \psi}}{\psi}$$

(d) [3 Punkte] In der Herleitung aus (c) ersetzt man φ durch $\neg\varphi$ und ψ durch φ. An den Blättern stehen dann das Axiom $\neg\varphi \vee \varphi$ und die Annahme $\neg\neg\varphi$.

Aufgabe H2 (Hornklauseln) (12 Punkte)

Wir betrachten die Menge $H = \{\{\neg p, \neg t, s\}, \{r\}, \{\neg q, \neg r, s\}, \{\neg t, p\}, \{t\}, \{\neg r, \neg t, \neg s\}\}$ von Hornklauseln.

(a) Bestimmen Sie die minimale erfüllende Interpretation der nicht-negativen Klauseln aus H. Entscheiden Sie, ob H erfüllbar ist.

(b) Geben Sie einen Ableitungsbaum im Resolutionskalkül an, welcher $\Box$ aus der Klauselmenge H herleitet.

(c) Bei der Einheitsresolution darf die Resolvente zweier Klauseln nur gebildet werden, wenn eine der Klauseln aus einem einzelnen Literal besteht. Zeigen Sie: Die Einheitsresolution ist im Allgemeinen nicht vollständig, für Hornklauseln aber schon.

Lösung:

(a) [4 Punkte] Beginnend mit der leeren Menge bestimmt man schrittweise die Variablen, welche in jedem Modell der nicht-negativen Klauseln aus H erfüllt sein müssen. Das ergibt

$$\begin{aligned}
\mathscr{X}_0 &= \emptyset, \\
\mathscr{X}_1 &= \{r, t\}, \\
\mathscr{X}_2 &= \{r, p, t\}, \\
\mathscr{X}_3 &= \{r, p, t, s\}, \\
\mathscr{X}_4 &= \mathscr{X}_3 = \mathscr{H}_\infty.
\end{aligned}$$

Die negative Klausel $\{\neg r, \neg t, \neg s\}$ ist unter der minimalen Interpretation falsch. Dies bedeutet, dass die Klauselmenge H unerfüllbar ist. Alternativ kann man die Unerfüllbarkeit mit dem Hornformel-Algorithmus aus der Vorlesung nachweisen: Dieser resultiert in der Berechnung

$$\begin{array}{rl}
[\text{Start mit } H] & \{\{\neg p, \neg t, s\}, \{r\}, \{\neg q, \neg r, s\}, \{\neg t, p\}, \{t\}, \{\neg r, \neg t, \neg s\}\} \\
{[\mathfrak{I}(r) = 1]} \rightsquigarrow & \{\{\neg p, \neg t, s\}, \{\neg q, s\}, \{\neg t, p\}, \{t\}, \{\neg t, \neg s\}\} \\
{[\mathfrak{I}(t) = 1]} \rightsquigarrow & \{\{\neg p, s\}, \{\neg q, s\}, \{p\}, \{\neg s\}\} \\
{[\mathfrak{I}(p) = 1]} \rightsquigarrow & \{\{s\}, \{\neg q, s\}, \{\neg s\}\} \\
{[\mathfrak{I}(s) = 1]} \rightsquigarrow & \{\Box\}.
\end{array}$$

Da in der letzten Formelmenge die leere Klausel $\Box$ enthalten ist, kann man wiederum folgern, dass H unerfüllbar ist. Im vorliegenden Fall kann man auch die minimale erfüllende Interpretation der positiven Klauseln ablesen. Im Allgemeinen ist es aber möglich, dass der Hornformel-Algorithmus die leere Klausel $\Box$ findet, bevor die minimale Interpretation der positiven Klauseln vollständig bestimmt ist.

(b) [4 Punkte] Eine mögliche Lösung ist

$$
\begin{tikzcd}
\{\neg t, p\} \arrow[dr] & \{t\} \arrow[d] & & \\
\{\neg p, \neg t, s\} \arrow[d] & \{p\} \arrow[dl] & \{\neg r, \neg t, \neg s\} \arrow[d] & \{r\} \arrow[dl] \\
\{\neg t, s\} \arrow[dr] & \{t\} \arrow[d] & \{\neg t, \neg s\} \arrow[d] & \{t\} \arrow[dl] \\
 & \{s\} \arrow[dr] & \{\neg s\} \arrow[d] & \\
 & & \square &
\end{tikzcd}
$$

(c) [4 Punkte] Die Klauselmenge $\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$ ist unerfüllbar. Es ist aber keine Einheitsresolution möglich, da keine Klausel aus einem einzelnen Literal besteht. Dies zeigt, dass die Einheitsresolution im Allgemeinen nicht vollständig ist. Um zu zeigen, dass die Einheitsresolution für Hornklauseln vollständig ist, argumentieren wir per Induktion über die Anzahl der Formeln in einer unerfüllbaren Menge H von Hornklauseln: Wenn die leere Klausel $\square$ bereits in H enthalten ist, dann sind wir sofort fertig. Anderenfalls muss H eine positive Klausel $\{p\}$ enthalten (sonst wäre H durch $p_i \mapsto 0$ erfüllbar). Nun bilden wir die Klauselmenge

$$H' = \{C \backslash \{\neg p\} \mid C \in H, C \neq \{p\}\}.$$

Dann ist H' immer noch eine Menge von Hornklauseln und immer noch unerfüllbar (eine erfüllende Interpretation von H' ließe sich durch $\mathscr{I}(p) := 1$ in eine erfüllende Interpretation von H umwandeln). Wegen der Bedingung $C \neq \{p\}$ enhält H' eine Klausel weniger als H. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\square$ also per Einheitsresolution aus H' herleitbar. Die Blätter des entsprechenden Herleitungsbaums sind mit Klauseln $C \backslash \{\neg p\} \in H'$ beschriftet. Um einen Herleitungsbaum mit Blättern aus H zu erhalten, leitet man $C \backslash \{\neg p\}$ per Einheitsresolution aus $C \in H$ und $\{p\} \in H$ her.

Aufgabe H3 (Kompaktheit und Färbbarkeit von Graphen) (12 Punkte)

Wir fixieren einen unendlichen Graphen (V, E): Dieser besteht aus einer (abzählbar) unendlichen Menge V von "Punkten" und aus einer Menge $E \subseteq \{\{x,y\} \mid x,y \in V, x \neq y\}$ von "Kanten" (die Punkte x und y sind "verbunden", wenn $\{x,y\} \in E$ gilt). Der Graph (V,E) heißt k-färbbar, wenn es eine Funktion $f : V \to \{1,\dots,k\}$ gibt, sodass für alle $x, y \in V$ gilt: Ist $\{x,y\} \in E$ so hat man $f(x) \neq f(y)$. Um die Situation in der Aussagenlogik zu beschreiben, führen wir Aussagenvariablen p_{xi} für $x \in V$ und $i = 1,\dots,k$ ein. Intuitiv besagt p_{xi}, dass der Punkt x die i-te Farbe zugewiesen bekommt.

(a) Man gebe eine Formelmenge Φ mit der folgenden Eigenschaft an: Es gilt $\mathfrak{I} \models \Phi$ genau dann, wenn es für jedes $x \in V$ genau ein $i \in \{1,\dots,k\}$ mit $\mathfrak{I}(p_{xi}) = 1$ gibt.

(b) Man gebe eine Formelmenge Ψ an, welche genau dann erfüllbar ist, wenn (V,E) ein k-färbbarer Graph ist.

(c) Man verwende Kompaktheit, um die folgende Aussage zu beweisen: Wenn $(V_0, \{(x,y) \in E \mid x,y \in V_0\})$ für eine beliebige endliche Teilmenge $V_0 \subseteq V$ ein k-färbbarer Graph ist, dann ist der ganze Graph (V,E) ebenfalls k-färbbar.

Lösung:

(a) [4 Punkte] Die Formeln

$$\varphi_x = \bigvee_{i=1,\dots,k} p_{xi},$$
$$\psi_x = \bigwedge_{i=1,\dots,k-1} \bigwedge_{j=i+1,\dots,k} \neg(p_{xi} \wedge p_{xj})$$

drücken aus, dass mindestens bzw. höchstens eine der Variablen $p_{x1},\dots,p_{xk}$ den Wert Eins zugewiesen bekommt. Die gesuchte Formelmenge ist also

$$\Phi = \{\varphi_x \wedge \psi_x \mid x \in V\}.$$

(b) [4 Punkte] Gemäß Teilaufgabe (a) haben wir eine Bijektion zwischen den Funktionen $f : V \to \{1,\dots,k\}$ und den Interpretationen, welche Φ erfüllen. Wir müssen nun noch die Interpretationen charakterisieren, die einer zulässigen Färbung entsprechen. Die Formel $\rho_{xy} = \bigwedge_{i=1,\dots,k} \neg(p_{xi} \wedge p_{yi})$ drückt aus, dass die Punkte x und y nicht dieselbe Farbe zugewiesen bekommen. Die gesuchte Formelmenge ist also

$$\Psi = \Phi \cup \{\rho_{xy} \mid x,y \in V, \{x,y\} \in E\}.$$

(c) [4 Punkte] Um zu zeigen, dass (V, E) ein k-färbbarer Graph ist, weisen wir nach, dass die Formelmenge Ψ erfüllbar ist. Wegen Kompaktheit genügt es, die Erfüllbarkeit einer allgemeinen endlichen Menge $\Psi_0 \subseteq \Psi$ zu zeigen. Sei V_0 die Menge der Punkte $x \in V$, sodass eine Variable p_{xi} in Ψ_0 vorkommt. Dann ist

$$\Psi_0 \subseteq \{\varphi_x \wedge \psi_x \mid x \in V_0\} \cup \{\rho_{xy} \mid x, y \in V_0, \{x, y\} \in E\}.$$

Die Formelmenge auf der rechten Seite ist erfüllbar, weil $(V_0, \{(x, y) \in E \mid x, y \in V_0\})$ nach Annahme ein k-färbbarer Graph ist. Dann ist auch Ψ_0 erfüllbar, wie gewünscht.