Formale Grundlagen der Informatik II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
9. Juli 2014

Gruppenübung

Aufgabe G13
Seien P, Q und S einstellige Relationssymbole, R ein zweistelliges Relationssymbol und Φ die Formelmenge:

(1) $\forall x \forall y\,((Q(x) \wedge R(x,y)) \rightarrow S(y))$.

(2) $\forall x \forall y\,((S(x) \wedge R(x,y)) \rightarrow \neg Q(y))$.

(3) $\forall x \exists y\,(R(x,y) \wedge Q(y))$.

(a) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

(b) Begründen Sie intuitiv, warum diese Formelmenge nicht erfüllbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie R als die Kantenrelation eines Graphen und P, Q und S als Farben, wobei $P(x)$ bedeutet, dass der Knoten x die Farbe P hat.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

Aufgabe G14
Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(a) $\forall x R(x, f(x)) \vdash \exists x R(f(x), f(f(x)))$.

(b) $\forall x f(x,x) = x \vdash \forall x (P(x) \vee \neg P(f(x,x)))$.

(c) $\exists y \forall x R(x,y) \vdash \forall x \exists y R(x,y)$.

(d) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$.

Aufgabe G15 (Statman, Orevkov, Pudlak, Zhang)
Gegeben sei die folgende Theorie $\mathscr{T}$:
$\mathscr{L}(\mathscr{T})$ enthält Konstanten $0, 1$, Funktionssymbole $+, 2^{(\cdot)}$ und ein einstelliges Prädikat $I(\cdot)$.
Betrachte die Konjunktion der Sätze

i) $\forall x, y, z(x + (y + z) = (x + y) + z)$,

ii) $\forall y(y + 0 = y)$,

iii) $2^0 = 1$,

iv) $\forall x(2^x + 2^x = 2^{1+x})$,

v) $I(0)$,

vi) $\forall x(I(x) \rightarrow I(1 + x))$.

Diese kann pränexiert werden zu einer Aussage der Form $\varphi :\equiv \forall x_1, \ldots, x_n \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$, wobei φ_0 keinen Quantor enthält.
Wir benutzen die Notation $2_0 := 0,\ 2_{k+1} := 2^{2_k}$. Zeigen Sie $\models \varphi \rightarrow I(2_k)$, indem Sie einen Beweis im Sequenzenkalkül $\varphi \vdash I(2_k)$ angeben, dessen Tiefe *linear in* k ist. Es reicht, diesen informell zu beschreiben. Sie dürfen (und müssen sogar) hierbei die Schnittregel (CUT) benutzen. Betrachten Sie hierfür die Relationen

$$R_0(x) := I(x), \quad R_{n+1}(x) := \forall y\big(R_n(y) \rightarrow R_n(2^x + y)\big).$$

und zeigen Sie zuerst mittels Induktion über i dass $\varphi \vdash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \rightarrow R_i(1 + x))$ einen Beweis linearer Länge in i besitzt.

Hausübung

Aufgabe H13

Beweisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

(a) $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py))$

(b) $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy))$

(c) $\forall x Rxfx$

Aufgabe H14

(a) Leiten Sie die Sequenz $\forall x \forall y(Rxy \vee Py), \exists x \neg Px \vdash \exists x \forall y Ryx$ her.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy}$$

Beachten Sie, dass sich diese Regel nicht in $\mathcal{SK}^{\neq}$ (auch nicht in $\mathcal{SK}$) herleiten lässt (warum?).

(c) Zeigen Sie, dass wenn T_1 und T_2 zwei Theorien sind, so dass $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, es ein Satz σ gibt, so dass $T_1 \models \sigma$ und $T_2 \models \neg\sigma$.

Aufgabe H15

Zeigen sie, dass jede Herbrand-Disjunktion des Satzes $\varphi \rightarrow I(2_k)$ aus Aufgabe G15 mindestens der Länge 2_k ist.