**Fachbereich Mathematik**
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009 31.03.09

# Formale Grundlagen der Informatik II

Bsc Inf

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Gesamt | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mögl. Punktzahl | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 48+12 | |
| err. Punktzahl | | | | | | | |

vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen

---

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben, die alle mit 12 Punkten bewertet sind. Um die maximale Punktzahl zu erreichen, brauchen Sie insgesamt 48 Punkte. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

### Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Geben Sie zu der folgenden AL-Formel $\psi(p,q,r)$ in den Aussagenvariablen $p, q, r$ logisch äquivalente Formeln in DNF sowie in KNF an:

$$\psi(p,q,r) := p \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

(b) Sei $\psi$ wie in (a). Geben Sie zu $\psi$ äquivalente Darstellungen in Klauselform für folgende Implikationen an

(i) $\psi(p,q,r) \rightarrow r$.

(ii) $r \rightarrow \psi(p,q,r)$.

(c) Sei $\varphi(p,q,r) \equiv \psi(p,q,r) \leftrightarrow r$. Weisen Sie durch Resolution und unter Verwendung der Formeln aus Teil (b) nach, dass gilt:

$$\varphi \models (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r).$$

**Aufgabe 2 (12 Punkte)**

(a) Welche der folgenden Folgerungsbeziehungen gelten für beliebige AL-Formeln $\varphi, \psi$? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(i) $\neg\varphi \vee \psi \models \neg(\varphi \vee \neg\psi)$

(ii) $\neg\varphi \vee \psi \models \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

(iii) $\neg\varphi \models \neg(\varphi \vee \neg\varphi)$

(iv) $\varphi \rightarrow \neg\varphi \models \neg\varphi$

(v) $\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{FO}(S)$ äquivalent zur Folgerungsbeziehung $\Phi \models \Psi$ ?

(Bitte ankreuzen; es sind keine Begründungen verlangt; falsche oder fehlende Kreuze zählen gleichermaßen als Fehler.)

- ☐ für jedes $\psi \in \Psi$ ist $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar.
- ☐ $\Phi \cup \{\neg\psi \colon \psi \in \Psi\}$ is unerfüllbar.
- ☐ für eine geeignete endliche Teilmenge $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gilt $\Phi \models \Psi_0$.
- ☐ für geeignete endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gilt $\Phi_0 \models \Psi_0$.
- ☐ für jedes $\psi \in \Psi$ existiert eine geeignete endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, derart dass $\Phi_0 \models \psi$.

**Aufgabe 3 (12 Punkte)**

Zur Signatur $S = \{E, g, c\}$ mit Konstantensymbol $c$, 2-stelligem Funktionssymbol $g$ und 2-stelligem Relationssymbol $E$ betrachten wir folgende $\mathrm{FO}(S)$-Sätze:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y (Ecgxy \wedge \neg Egxyc), \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (Exgxy \wedge \neg Eygxy), \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y \forall z (Exy \rightarrow (Exz \wedge Eyz)), \\
\varphi_4 &:= Ecc \wedge \forall x \forall y (Exy \rightarrow Ecgxy).
\end{aligned}$$

(a) Welche dieser Sätze sind unerfüllbar? Geben Sie gegebenenfalls entweder eine klare Begründung in Worten oder einen Nachweis durch GI-Resolution an.

(b) Geben Sie für jedes erfüllbare $\varphi_i$ jeweils ein Herbrandmodell an.

(c) Geben Sie für jedes erfüllbare $\varphi_i$ jeweils ein Modell mit der minimalen Anzahl von Elementen an.

**Aufgabe 4 (12 Punkte)**

Sei $S = \{E, P\}$ die Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $E$ und einem 1-stelligen Relationssymbol $P$.

(a) Formalisieren Sie in $\mathrm{FO}(S)$ die Bedingung, dass $E$ eine Äquivalenzrelation ist (reflexiv, symmetrisch und transitiv).

$\varphi_0$ sei der $\mathrm{FO}(S)$-Satz der besagt dass $E$ eine Äquivalenzrelation ist. Zudem betrachten wir die folgenden $\mathrm{FO}(S)$-Sätze:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \exists x \exists y \neg Exy, \\ \varphi_2 &:= \forall x \exists y (Exy \wedge Py), \\ \psi &:= \forall x \exists y (\neg Exy \wedge Py). \end{aligned}$$

(b) (i) Geben zu den Sätzen $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ erfüllbarkeitsäquivalente Sätze in Skolemnormalform an.

(ii) Geben Sie ein Modell von $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$ an und beschreiben Sie anhand Ihres Modells eine Interpretation der Skolemfunktionen und -konstanten, die die entsprechenden Sätze in Skolemnormalform wahr machen.

(c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus (b) (i), um mittels Grundinstanzenresolution nachzuweisen, dass

$$\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \psi.$$

Dabei mache man sich zunächst inhaltlich klar, woran diese Folgerung liegt, um für die Grundinstanzenresolution die richtigen Auswahlen zu treffen. Es lohnt sich, Klauseln und ihre Instantiierungen nur bei Bedarf zu produzieren!

**Aufgabe 5 (12 Punkte)**

(a) Begründen Sie *semantisch* die Allgemeingültigkeit der folgenden FO-Sequenz (für beliebige $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}$):

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi.$$

(b) Leiten Sie obige FO-Sequenz im Sequenzenkalkül ab (hierzu müssen zunächst wie üblich die Implikationspfeile eliminiert werden; die gewünschte Ableitung soll für beliebige $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}$ funktionieren).

(c) Welche der folgenden Regeln wären als Sequenzenregeln korrekt?

$$\frac{\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi \vdash \Delta}{\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi}{\Gamma \vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi)}$$

Begründen Sie Ihre Antworten.