Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 05.09.2008

Formale Grundlagen der Informatik II

Bsc Inf, PO 2003 u. 2004, PO 2007

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Tutor: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	12	12	12	12	12	48+12	
err. Punktzahl							

vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen

---

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben, die alle mit 12 Punkten bewertet sind. Um die maximale Punktzahl zu erreichen, brauchen Sie insgesamt 48 Punkte. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) (i) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (p \vee (q \leftrightarrow \neg r)) \rightarrow (p \wedge (\neg q \vee r))$$

(ii) Bestimmen Sie eine zu φ äquivalente Formel in DNF.

(iii) Kann φ äquivalent durch eine AL-Formel ohne Negation wiedergegeben werden? (Begründung!)

(b) Wir betrachten ein Netzwerk mit vier Ports (Ports 1, 2, 3 und 4), die jeweils entweder aktiv (A) oder inaktiv und entweder offen (O) oder geschlossen sind. Wir führen aussagenlogische Variablen p_{iA} ein für "Port i ist aktiv" und p_{iO} für "Port i ist offen". Formalisieren Sie folgende Aussagen in der Aussagenlogik:

(i) Wenn Port 1 offen ist, dann ist Port 2 offen oder Port 3 inaktiv.

(ii) Ports 1 und 2 sind nicht beide aktiv.

(iii) Höchstens zwei Ports sind offen.

(iv) Von je drei Ports ist mindestens einer inaktiv.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Beachten Sie im Folgenden, dass "$\rightarrow$" in der Syntax von AL und FO wie üblich eliminiert werden muss.

(a) Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= (\neg p) \rightarrow (q \wedge \neg r) \\
\varphi_2 &:= (r \wedge p) \rightarrow s \\
\varphi_3 &:= r \vee \neg q \\
\psi &:= p \wedge \neg(q \wedge \neg s)
\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von AL-Resolution, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$.

(b) Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y (Pxy \rightarrow \neg Qy) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (Pxy \rightarrow Pyx) \\
\varphi_3 &:= \exists x Qx \\
\psi &:= \exists x \forall y \neg Pxy
\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Grundinstanzenresolution, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Beachten Sie im Folgenden, dass "$\rightarrow$" in der Syntax von AL und FO wie üblich eliminiert werden muss.

(a) Beweisen Sie *semantisch* die Korrektheit der folgenden Sequenzen:

(i) $p \vee q, \neg[(p \rightarrow r) \rightarrow q] \vdash r$

(ii) $\forall x \forall y (Rxy \vee x = y), \forall x \forall y ((Px \wedge Rxy) \rightarrow Py) \vdash (\forall x Px) \vee (\forall x \neg Px)$

(b) Leiten Sie obenstehende Sequenzen im Sequenzenkalkül ab.

Hinweis zu (ii): Verwenden Sie die Sequenz

$$Rab \vee a = b, \neg(Pa \wedge Rab) \vee Pb \vdash \neg Pa, Pb$$

als Zwischenstation.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \exists x \forall y (Rxy \rightarrow Py) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \\
\varphi_3 &:= \forall x (Px \rightarrow \exists y (Rxy \wedge \neg Py)) \\
\varphi_4 &:= \forall x \exists y Rxy
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für mindestens drei der vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Wir betrachten die Standardstruktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, S, 0)$ mit der üblichen Ordnung $<$ und der Nachfolgerfunktion S auf den natürlichen Zahlen mit Konstante 0.

(a) Zweidimensionale Pixelstrukturen in der Ebene werden mit Koordinaten aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beschrieben: das Pixel in der i-ten Spalte und j-ten Zeile hat Koordinaten $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Zum Beispiel besagt die Formel

$$\varphi(x_1, y_1, x_2, y_2) := Sx_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

dass die Pixelposition (x_2, y_2) der rechte Nachbar von (x_1, y_1) ist.

Eine Menge von Pixelpositionen wird so durch eine 2-stellige (!) Relation über $\mathbb{N}$ beschrieben. Zur Beschreibung von schwarz-weißen Pixelmustern erweitern wir obige Signatur um ein 2-stelliges Relationssymbol B (für die Menge der Pixelkoordinaten, die schwarz sind).

Geben Sie Formeln in $\mathrm{FO}(\{<, S, B, 0\})$ an, die folgendes besagen:

(i) In der ersten Zeile gibt es mindestens drei schwarze Pixel.

(ii) Es gibt keine weißen 2×2-Quadrate.

(iii) Es gibt unendlich viele schwarze Pixel.

(b) $\varphi_0 \in \mathrm{FO}(\{<, S, 0\})$ sei ein Satz, der besagt, dass $<$ eine lineare Ordnung mit erstem Element 0, ohne letztes Element und mit Nachfolgerfunktion S ist; beachten Sie, dass $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, S, 0) \models \varphi_0$. G sei ein zusätzliches 1-stelliges Relationssymbol.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\varphi_0 \wedge G0 \wedge \forall x(Gx \rightarrow GSx) \not\models \forall x Gx.$$

Hinweis: Geben Sie zum Beispiel explizit eine Struktur an, die diese Folgerungsbeziehung widerlegt.

(ii) Zeigen Sie, dass es *keinen* Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\{<, S, 0\})$ gibt mit $\mathcal{N} \models \varphi$ und

$$\varphi \wedge G0 \wedge \forall x(Gx \rightarrow GSx) \models \forall x Gx.$$

Hinweis: Kompaktheit/Nichtstandardmodelle.