Wiederholung

Insertion sort
Beispiel für Korrektheitsbeweis und Laufzeitanalyse

Best case: linear $O(n)$
Worst case: quadratisch $O(n^2)$

O, Ω, Θ, o

Rekursion - Divide and Conquer

Prinzip: Zerlege das Problem in Unterprobleme
Löse diese
- direkt
- oder durch weitere Zerlegung

Setze die Lösungen zusammen.

Beispiel: merge sort
Sortiere $A[1 \dots n]$
Zerlege in zwei Teilfolgen
Sortiere diese
Und setze zusammen

Merge:

Merge (A, p, q, r)

Eingabe $\begin{cases} p \leq q < r \\ A[p \dots q] \quad \text{sortiert} \\ A[q+1 \dots r] \quad \text{sortiert} \end{cases}$

<u>Ausgabe</u> $A[p \dots r]$ sortiert

Merge-Sort (A, p, r)

<u>Eingabe</u> $A[1, \dots, n]$
$p \leq r$

<u>Ausgabe</u> A : $A[p, \dots, r]$ sortiert

$p = 3 \quad r = 6$

$$q = \left\lfloor \frac{p+r}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4$$

$A[3, 4] \quad A[5, 6]$

$p = 3, \quad r = 7$

$$q = \left\lfloor \frac{p+r}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor = 5$$

$A[3, 4, 5] \quad A[6, 7]$

Merge

Korrektheitsbeweis

Schleifeninvariante

Am Anfang der for-Schleife in Zeile 12–17 enthält

$A[p, \dots, k-1]$ sortiert, enthält die $k-p$ kleinsten Elemente aus L und R.

$L[i]$, $R[j]$ sind die kleinsten bis jetzt nicht kopierten Elemente in L und R.

Für $k = r+1$ folgt:

$A[p, \dots, r]$ sortiert und enthält die $r-p+1$ kleinsten Elemente aus L und R. Das sind aber alle Elemente aus L und $R \neq \infty$. Daraus folgt die Korrektheit.

Induktion

Anfang $k = p$, $i = 1$, $j = 1$

$L[1]$ kleinstes El. in L ✓
weil L sortiert ist

$R[1]$ ..... R R ✓

$k = p$, $A[p, k-1]$ leere Folge
$k - p = 0$ leere Auss. ✓

<u>Schritt</u> $k \to k+1$ Schleifendurchl. von $k \to k+1$

Wir wissen auch, dass alle eingeordneten Elemente höchstens so groß wie $L[i]$ bzw $R[j]$ sind. Das liegt daran, dass L und R sortierte Folgen sind. Wenn $L[i] \leq R[j]$ ist wird $L[i]$ als $A[k]$ eingeordnet und i um 1 erhöht. Also ist die Invariante erfüllt. Andernfalls analog.

<u>Terminierung</u>

Bei Terminierung ist $k = r+1$. Dann ist die Beh. erfüllt

$$A[p, \dots, r] \text{ sortiert.}$$

Wie lange braucht Merge?

<u>Beh</u> Zeit $O(n)$ ✓

Merge Sort ?