Mathematik II für Informatik
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Alexander Dietz, Anton Freund
Lucas Schöbel-Kröhn

SoSe 2018

Übung: 12./13. April 2018
Abgabe: 19./20. April 2018

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie für die folgenden vier Aussagen jeweils, ob sie allgemein gültig sind. Geben Sie jeweils einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(d) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Aufgabe G2

(a) Geben Sie zu jeder Kombination der Eigenschaften *konvergent*, *monoton*, *beschränkt* eine reelle Folge an, welche genau diese Kombination an Eigenschaften trägt. Falls eine Kombination nicht möglich sein sollte, begründen Sie, warum dem so ist.

(b) Gibt es konvergente Folgen mit mehreren Häufungspunkten oder divergente Folgen ohne Häufungspunkte?

(c) Gibt es konvergente Folgen ohne Häufungspunkte oder divergente Folgen mit genau einem Häufungspunkt?

(d) Geben Sie eine Folge an, die alle natürlichen Zahlen bis 100 als Häufungspunkte hat. Konvergiert sie?

Aufgabe G3

Wir betrachten den Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, wobei $\|(x,y)^T\|_2 := \sqrt{x^2+y^2}$ die euklidische Norm bezeichne, sowie die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} n^{-1} \\ n^{-2} \end{pmatrix}, \qquad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} n \\ n^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die ersten fünf Folgenglieder.

(b) Welche der Folgen sind konvergent, welche divergent? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

(c) Wir betrachten die gleichen Folgen, aber im Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, wobei $\|(x,y)^T\|_\infty := \max(|x|,|y|)$ die Maximumsnorm bezeichne. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folgen erneut.

Aufgabe G4

Seien $x > 0$ und $a_0 > 0$ reelle Zahlen. Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

(a) Zeigen Sie induktiv, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiv, d.h. $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt: $a_n \geq \sqrt{x}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiv ist und monoton fällt.

(d) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Hausübung

Aufgabe H1 (12 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-3}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie (wenn möglich) den Grenzwert.
Hinweis: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1}.$$

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$b_n = \frac{2}{(x^2)^n + 2}$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$.

(c) Untersuchen Sie die Folge

$$c_n = n^{-2} + \frac{10}{n} + n^{-3n} + \frac{n}{100}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie (wenn möglich) den Grenzwert.

(d) Beweisen Sie den Hinweis aus (a).

Aufgabe H2 (12 Punkte)

Die Folge x_n sei rekursiv definiert durch

$$x_0 = 0 \text{ und } x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechnen Sie x_3.

(b) Sei $n > 2$. Geben Sie eine Formel für x_n an, die lediglich von x_{n-2} abhängt.

(c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $0 < n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$x_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(d) Untersuchen Sie die Folge x_n auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe H3 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n := \left(\begin{pmatrix} \frac{n}{n^2+1} \\ \frac{8n}{2n^2+2} \\ \frac{5}{n^3+n} \end{pmatrix}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

in $V = \mathbb{R}^3$ mit der 1-Norm eine Nullfolge ist.
Gilt diese Aussage ebenfalls bezüglich der 2-Norm?

(b) Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie folgende Grenzwertsätze im $\mathbb{R}^n$:
   i. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|$.
   ii. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
   iii. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a \quad$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.