Formale Grundlagen der Informatik II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
9. Juli 2014

Gruppenübung

Aufgabe G13

Seien P, Q und S einstellige Relationssymbole, R ein zweistelliges Relationssymbol und Φ die Formelmenge:

(1) $\forall x \forall y\,((Q(x) \wedge R(x,y)) \to S(y))$.

(2) $\forall x \forall y\,((S(x) \wedge R(x,y)) \to \neg Q(y))$.

(3) $\forall x \exists y\,(R(x,y) \wedge Q(y))$.

(a) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

(b) Begründen Sie intuitiv, warum diese Formelmenge nicht erfüllbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie R als die Kantenrelation eines Graphen und P, Q und S als Farben, wobei $P(x)$ bedeutet, dass der Knoten x die Farbe P hat.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

Lösung:

(a) Die erste beide Formeln sind schon in Skolemnormalform. Eine Skolemnormalform für die letzte Formel ist:
(3') $\forall x (R(x, f(x)) \wedge Q(f(x)))$.

(b) Sei x ein Element eines Modells. Die Formel (3') sagt, dass es immer eine Kante von einem Knoten $f^n x$ nach $f^{n+1}x$ gibt und dass alle Knoten von der Gestalt $f^{n+1}x$ die Farbe Q haben. (1) impliziert dann, dass Knoten von der Gestalt $f^{n+2}x$ die Farbe S haben und (2), dass Knoten von der Gestalt $f^{n+3}x$ die Farbe Q nicht haben. Also hat $f^3 x$ sowohl die Farbe Q als auch nicht die Farbe Q. Widerspruch! Also kann es kein Modell geben und ist die Formelmenge (1-3) unerfüllbar.

(c) Wir schreiben erst die Aussagen in Klauselform um:

$$\begin{array}{l}\{\neg Q(x), \neg R(x,y), S(y)\}\\ \{\neg S(x), \neg R(x,y), \neg Q(y)\}\\ \{R(x,f(x))\}, \{Q(f(x))\}\end{array}$$

Mit Grundinstanzen-Resolution leitet man dann ab:

$$\begin{tikzcd}
 & \{\underline{Rfcffc}\} \arrow[dr] & & \{\neg Qfc, \underline{\neg Rfcffc}, Sffc\} \arrow[dl] \\
\{\underline{Qfc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Qfc}, Sffc\} \arrow[dl] & \\
 & \{\underline{Sffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Sffc}, \neg Rffcfffc, \neg Qfffc\} \arrow[dl] \\
\{\underline{Rffcfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Rffcfffc}, \neg Qfffc\} \arrow[dl] & \\
 & \{\underline{\neg Qfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Qfffc}\} \arrow[dl] \\
 & & \square &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe G14
Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(a) $\forall x R(x, f(x)) \vdash \exists x R(f(x), f(f(x)))$.

(b) $\forall x f(x,x) = x \vdash \forall x(P(x) \vee \neg P(f(x,x)))$.

(c) $\exists y \forall x R(x,y) \vdash \forall x \exists y R(x,y)$.

(d) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \text{frei}(\psi)$.

Lösung:

(a)

$$\begin{array}{c} \forall x Rxfx, Rfxffx \vdash Rfxffx, \exists x Rfxffx \\ \hline \forall x Rxfx \vdash Rfxffx, \exists x Rfxffx \\ \hline \forall x Rxfx \vdash \exists x Rfxffx \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c} \hline \forall x fxx = x, fxx = x, Px, Pfxx \vdash Px \\ \hline \forall x fxx = x, fxx = x, Pfxx \vdash Px \\ \hline \forall x fxx = x, Pfxx \vdash Px \\ \hline \forall x fxx = x \vdash Px, \neg Pfxx \\ \hline \forall x fxx = x \vdash Px \vee \neg Pfxx \\ \hline \forall x fxx = x \vdash \forall x(Px \vee \neg Pfxx) \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{c} \forall x Rxy, Rxy \vdash Rxy, \exists y Rxy \\ \hline \forall x Rxy \vdash Rxy, \exists y Rxy \\ \hline \forall x Rxy \vdash \exists y Rxy \\ \hline \exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Rxy \\ \hline \exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy \end{array}$$

(d) Beachte, dass $\psi(c/x) = \psi$ ist, da $x \notin \text{frei}(\psi)$.

$$\begin{array}{c} \dfrac{}{\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vdash \varphi(c/x), \psi} \qquad \dfrac{}{\forall x(\varphi \vee \psi), \psi \vdash \varphi(c/x), \psi} \\ \hline \forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vee \psi \vdash \varphi(c/x), \psi \\ \hline \forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi(c/x), \psi \\ \hline \forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \psi \\ \hline \forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \forall x \psi \\ \hline \forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi \end{array}$$

Aufgabe G15 (Statman, Orevkov, Pudlak, Zhang)
Gegeben sei die folgende Theorie $\mathcal{T}$:
$\mathcal{L}(\mathcal{T})$ enthält Konstanten $0, 1$, Funktionssymbole $+, 2^{(\cdot)}$ und ein einstelliges Predikat $I(\cdot)$.
Betrachte die Konjunktion der Sätze

i) $\forall x, y, z(x + (y + z) = (x + y) + z)$,

ii) $\forall y(y + 0 = y)$,

iii) $2^0 = 1$,

iv) $\forall x(2^x + 2^x = 2^{1+x})$,

v) $I(0)$,

vi) $\forall x(I(x) \to I(1 + x))$.

Diese kann pränexiert werden zu einer Aussage der Form $\varphi :\equiv \forall x_1, \dots, x_n \varphi_0(x_1, \dots, x_n)$, wobei φ_0 keinen Quantor enthält.
Wir benutzen die Notation $2_0 := 0,\ 2_{k+1} := 2^{2_k}$. Zeigen Sie $\models \varphi \to I(2_k)$, indem Sie einen Beweis im Sequenzenkalkül $\varphi \vdash I(2_k)$ angeben, dessen Tiefe *linear in* k ist. Es reicht, diesen informell zu beschreiben. Sie dürfen (und müssen sogar) hierbei die Schnittregel (CUT) benutzen. Betrachten Sie hierfür die Relationen

$$R_0(x) := I(x), \quad R_{n+1}(x) := \forall y \big(R_n(y) \to R_n(2^x + y)\big).$$

und zeigen Sie zuerst mittels Induktion über i dass $\varphi \vdash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \to R_i(1+x))$ einen Beweis linearer Länge in i besitzt.

Lösung: Wir zeigen zuerst den Hinweis. Der Beweis des Induktionsstarts $i = 0$ ist eine Instanz von (Ax). Sei nun ein Beweis entsprechender Komplexität für $\varphi \vdash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \to R_i(1+x))$ gegeben. Da $\varphi \vdash 2^0 = 1$ (Ax), benötigen wir nur noch eine Anwendung von (Sub), um $\varphi \vdash R_{i+1}(0)$ zu schließen, da

$$R_{i+1}(0) = \forall y(R_i(y) \to R_i(2^0 + y)).$$

Zudem gilt $R_{i+1}(x) = \forall y(R_i(y) \to R_i(2^x + y))$, somit kann man mithilfe des Kontraktionslemmas $R_{i+1}(x) \vdash \forall y((R_i(y) \to R_i(2^x + y)) \wedge (R_i(2^x + y) \to R_i(2^x + (2^x + y)))$ schließen, ohne die Länge des Beweises bis auf einer von i unabhängigen Konstante zu verlängern. Mithilfe der Schnittregel (CUT) erhalten wir somit einen Beweis für $R_{i+1}(x) \vdash \forall x(R_i(y) \to R_i(2^{1+x} + y)$, wobei der Antezedent gleich $R_{i+1}(1+x)$ ist. Somit erhalten wir einen Beweis linearer Länge für

$$\varphi \vdash R_i(0), \quad \varphi, R_i(x) \vdash R_i(1+x). \tag{1}$$

Nun folgt erneut mit der Schnittregel (CUT), $\varphi \vdash R_{k-1}(2^0)$, wobei der Antezedent gleich $R_{k-1}(y) \to R_{k-1}(2^0 + y)$ ist. Wenden wir (CUT) erneut an, erhalten wir $\varphi \vdash R_{k-2}(2^{2^0})$. Wenden wir (CUT) insgesamt k-mal an, erhalten wir $R_0(2_k) = I(2_k)$.

Hausübung

Aufgabe H13

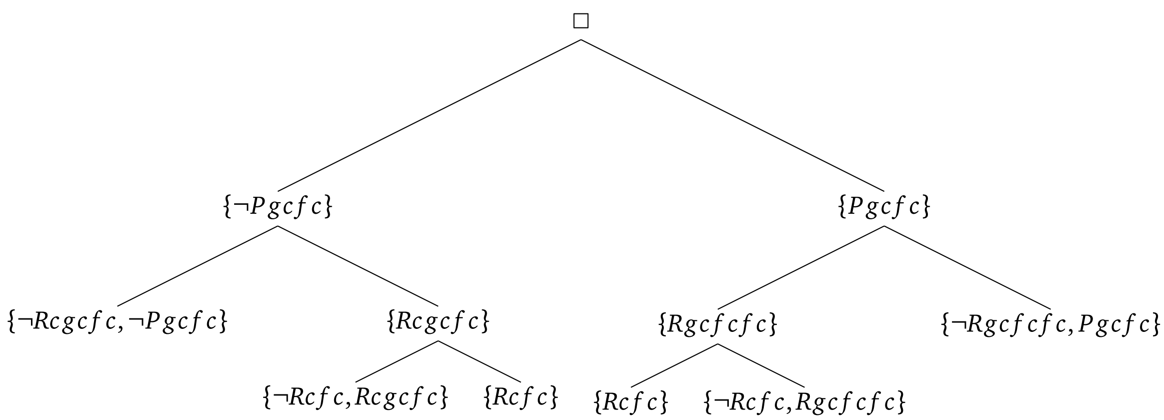
Beweisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

(a) $\forall x \forall y (Rxy \to (Px \wedge \neg Py))$

(b) $\forall x \forall y (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy))$

(c) $\forall x Rxfx$

Lösung: Klauseln: $\{\neg Rxy, Px\}$, $\{\neg Rxy, \neg Py\}$, $\{\neg Rxy, Rxgxy\}$, $\{\neg Rxy, Rgxyy\}$, $\{Rxfx\}$



Aufgabe H14

(a) Leiten Sie die Sequenz $\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \exists x \neg Px \vdash \exists x \forall y Ryx$ her.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy}$$

Beachten Sie, dass sich diese Regel nicht in $\mathscr{SK}^{\neq}$ (auch nicht in $\mathscr{SK}$) herleiten lässt (warum?).

(c) Zeigen Sie, dass wenn T_1 und T_2 zwei Theorien sind, so dass $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, es ein Satz σ gibt, so dass $T_1 \models \sigma$ und $T_2 \models \neg\sigma$.

Lösung:

(a) Sei $\Gamma := \{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \forall y (Rxy \vee Py)\}$ und $\Delta := \{\exists x \forall y Ryx, Ryx\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, Rxy, \neg Py \vdash \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, Py \vdash \Delta, Py}}{\Gamma, Py, \neg Py \vdash \Delta}}{\Gamma, Rxy \vee Py, \neg Py \vdash \Delta}}{\Gamma, \neg Py \vdash \Delta}}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Py \vdash \Delta}}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Py \vdash \exists x \forall y Ryx, \forall y Ryx}}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Py \vdash \exists x \forall y Ryx}}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \exists x \neg Px \vdash \exists x \forall y Ryx}$$

(b) Angenommen, $\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx$ ist allgemeingültig. Um zu zeigen, dass dann auch die Sequenz $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy$ allgemeingültig ist, betrachten wir ein Modell $\mathscr{I} \models \Gamma$. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Formel $\delta \in \Delta \cup \{\forall x Rxfx\}$ mit $\mathscr{I} \models \delta$. Falls $\delta \in \Delta$, so sind wir fertig. Falls $\mathscr{I} \models \forall x Rxfx$, dann gilt auch $\mathscr{I} \models \forall x \exists y Rxy$ und wir sind ebenfalls fertig.

(c) Wenn $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, gibt es, nach dem Kompaktheitssatz, schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq T_1 \cup T_2$ die keine Modelle hat. Sei $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \in T_1\}$, $\Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \in T_2\}$ und $\sigma = \bigwedge \Gamma_1$. Klar ist, dass $T_1 \models \sigma$, also haben wir nur noch zu beweisen, dass $T_2 \models \neg\sigma$.

Nehmen wir an, dass $T_2 \not\models \neg\sigma$, also dass es ein Modell M gibt, so dass $M \models T_2$ und $M \models \sigma$. Dann $M \models \Gamma_2$, weil $\Gamma_2 \subseteq T_2$ und $M \models T_2$, und $M \models \Gamma_1$, weil $M \models \sigma$ und $\sigma = \bigwedge \Gamma_1$. Das widerspricht, dass $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ keine Modelle hat. Also $T_2 \models \neg\sigma$.

Aufgabe H15

Zeigen sie, dass jede Herbrand-Disjunktion des Satzes $\varphi \to I(2_k)$ aus Aufgabe G15 mindestens der Länge 2_k ist.

Lösung: Wir zeigen, dass jede Herbrand-Disjunktion für jedes $n < 2_k$ eine Instanz $I(t) \to I(1+t)$ von $\forall x(I(x) \to I(1+x))$ enthalten muss, wobei $t^{\mathbb{N}} = n$. Angenommen das wäre nicht der Fall, d.h. es gilt einerseits

$$\models \bigwedge_{i=1}^{l} \varphi_0(t_1^i, \ldots, t_n^i) \to I(2_k), \tag{1}$$

aber für ein $n < 2_k$ gibt es kein t mit $t^{\mathbb{N}} = n$ in einer Formel $I(t) \to I(1+t)$. Interpretiere $I^{\mathbb{N}}(k) :\Leftrightarrow k \leq n$ in $\mathbb{N}$, und $0, 1, +, 2^{(\cdot)}$ wie üblich. Dann gilt zwar die Hypothese von (1), aber $I(2_k)$ gilt nicht in diesem Modell.