Fouriertheorie

Visual Computing
Winter Semester 2018-2019

Prof. Dr. A. Kuijper

Mathematical and Applied Visual Computing (MAVC)
Graphisch-Interaktive Systeme (GRIS)
Fraunhofer IGD
Fraunhoferstrasse 5
D - 64283 Darmstadt

E-Mail: office@gris.tu-darmstadt.de
http://www.gris.tu-darmstadt.de
https://www.mavc.tu-darmstadt.de

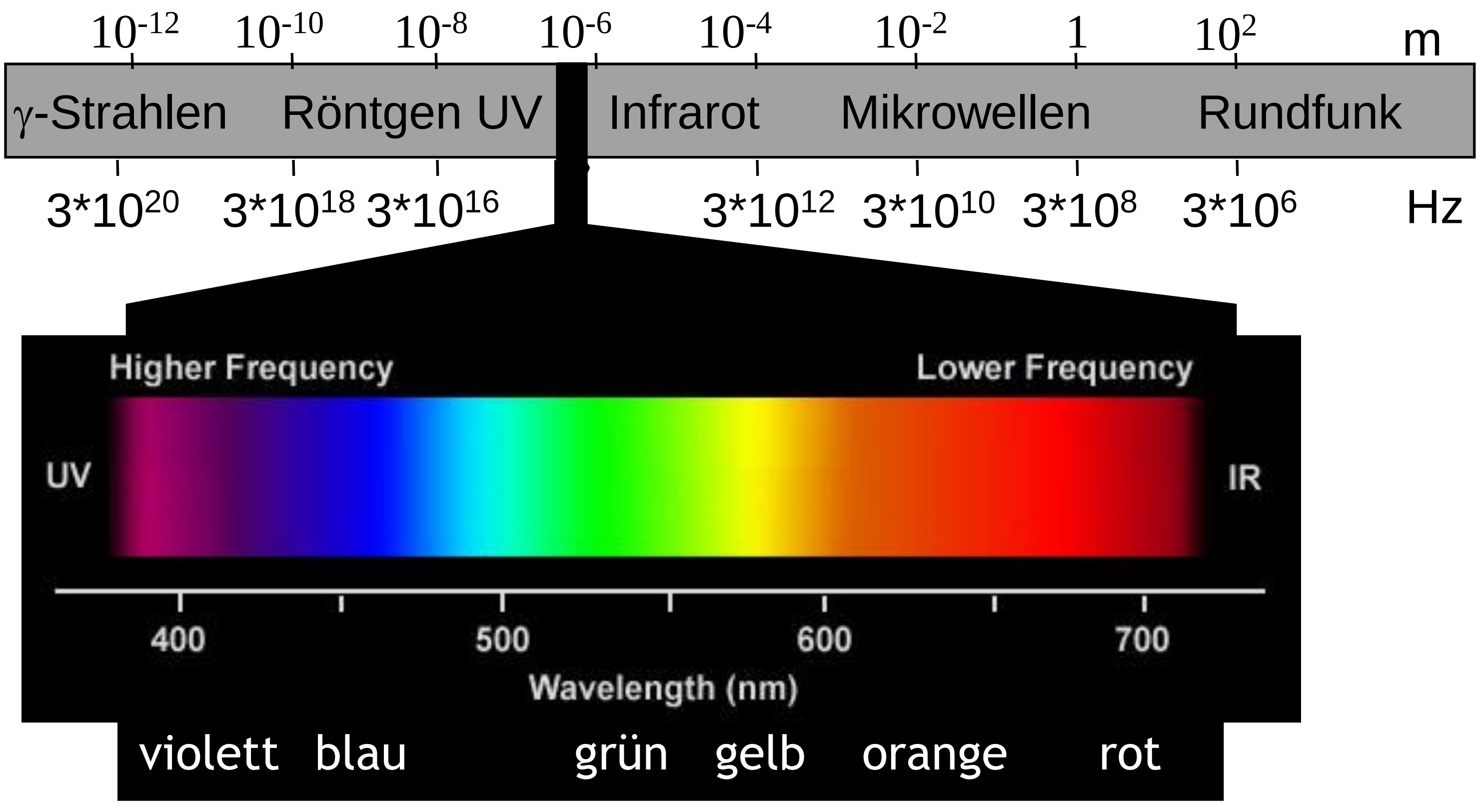
Semesterplan

	Einführung + Visual Computing
	Wahrnehmung
	Objekterkennung und Bayes
	Fourier Theorie
	Bilder
	Bildverarbeitung
	Grafikpipeline & Eingabemodalitäten & VR+AR
	Transformationen & 2D/3D Ausgabe
	3D-Visualisierung
	X3D – 3D in HTML
	Informationsvisualisierung
	Farbe
	User Interfaces + Multimedia Retrieval
	Klausur

Übersicht

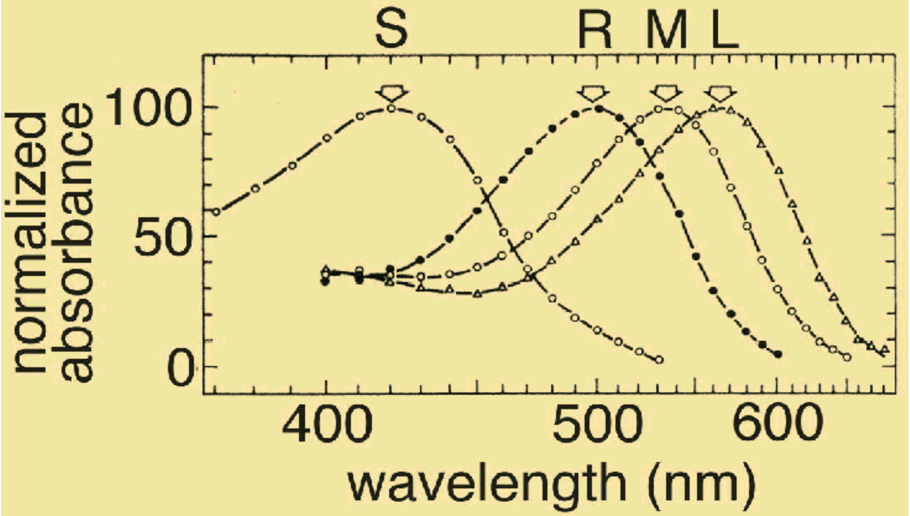
- **Motivation**
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

Frequenz <-> Wellenlänge

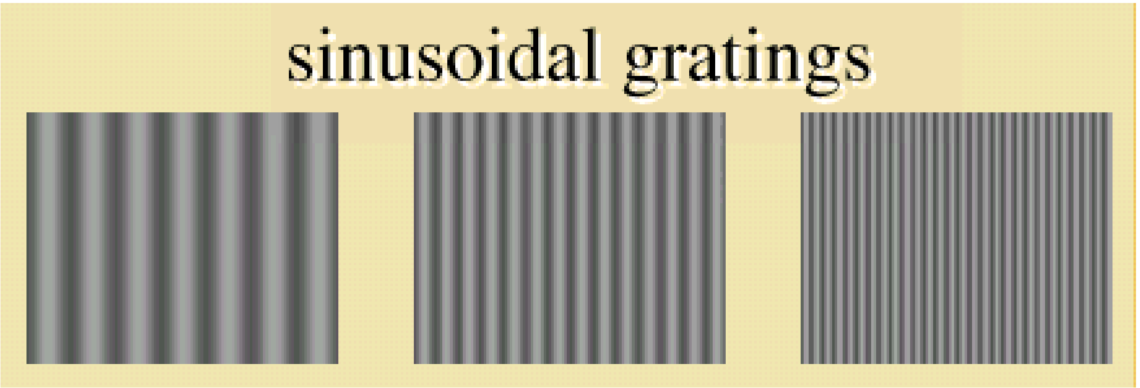


Kontrastempfindlichkeit

- Auflösung des menschlichen Auges im ***Frequenzraum***

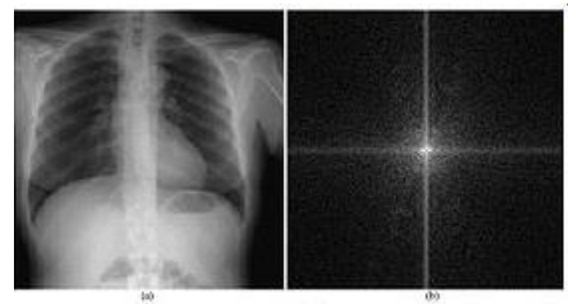


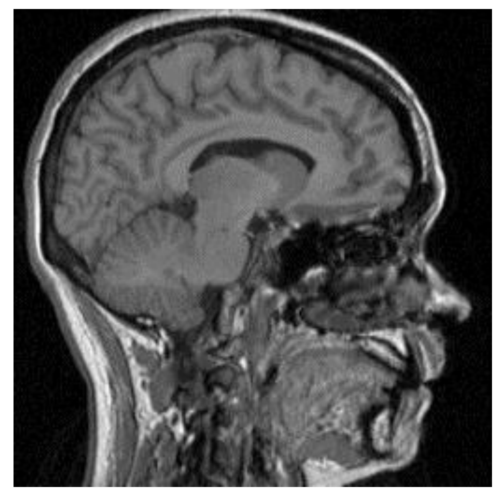
- Messung mit sinusförmigen Mustern veränderlicher Intensität



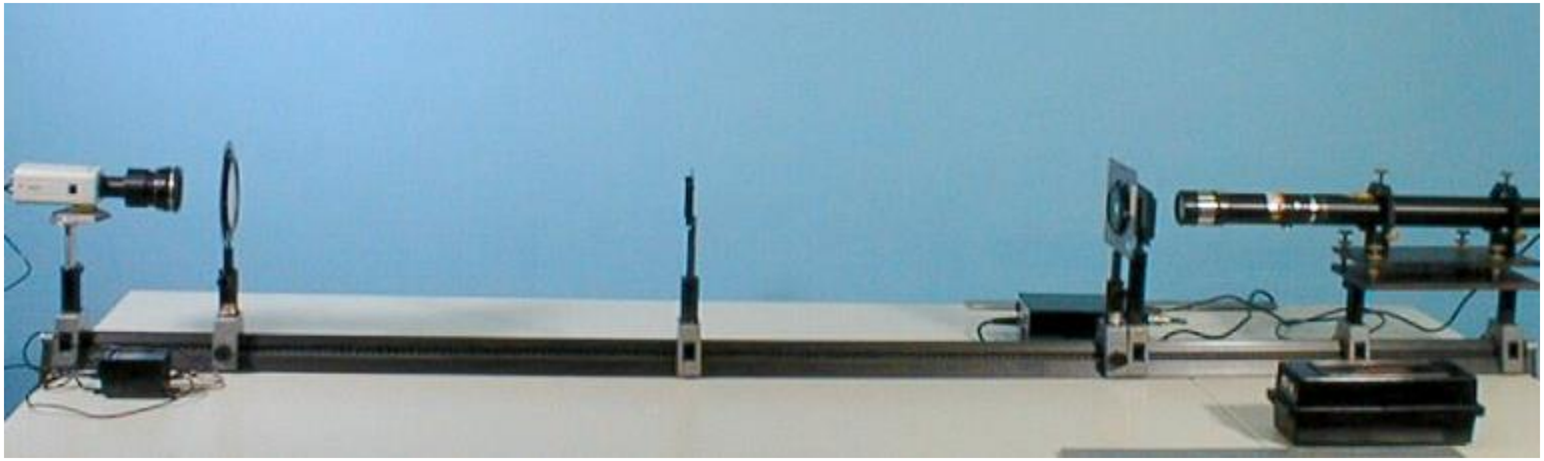
MRI

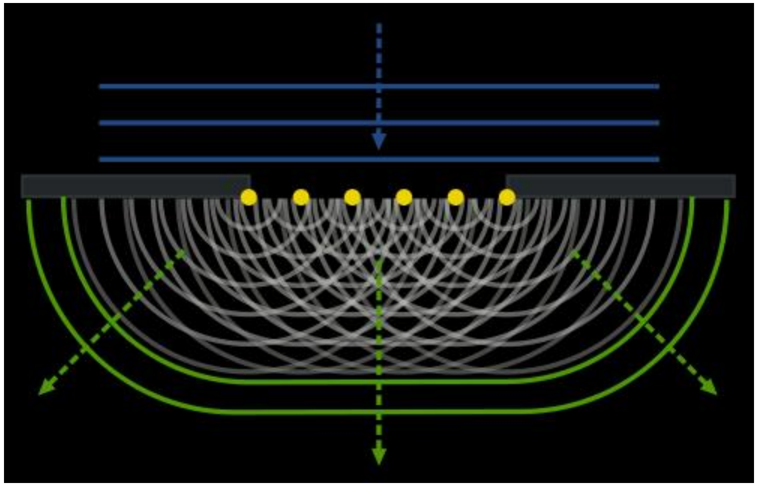
- MR scanner → ***Frequenzmuster***

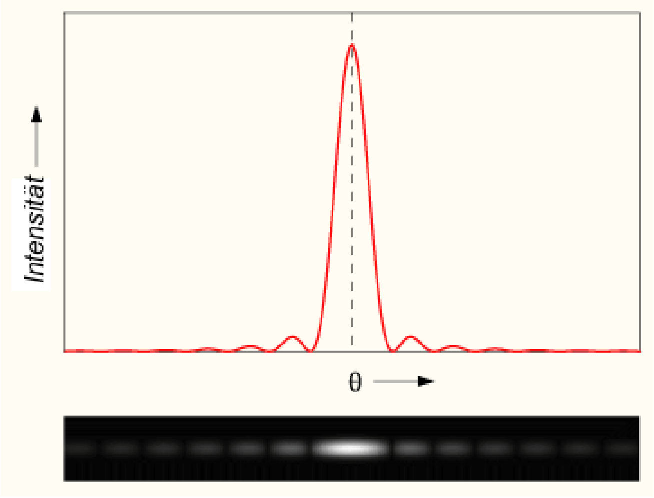




Beugung am einfachen Spalt

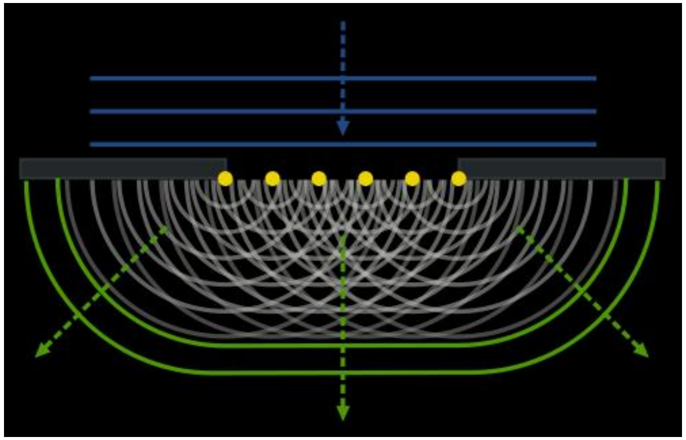






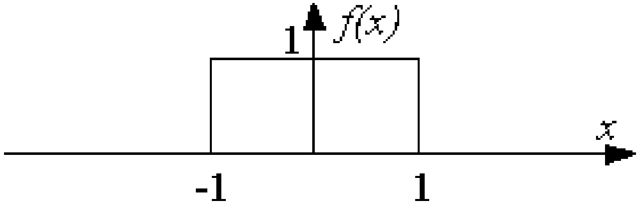
Spalt und Rechteckfunktion

- Spalt der Breite a
  - Licht tritt im Bereich des Spalts komplett auf die andere Seite: 1
  - Licht wird außerhalb des Spalts komplett geblockt: 0



- Mathematisch (für a=2 symmetrisch um den Ursprung):
  - Rechteckfunktion

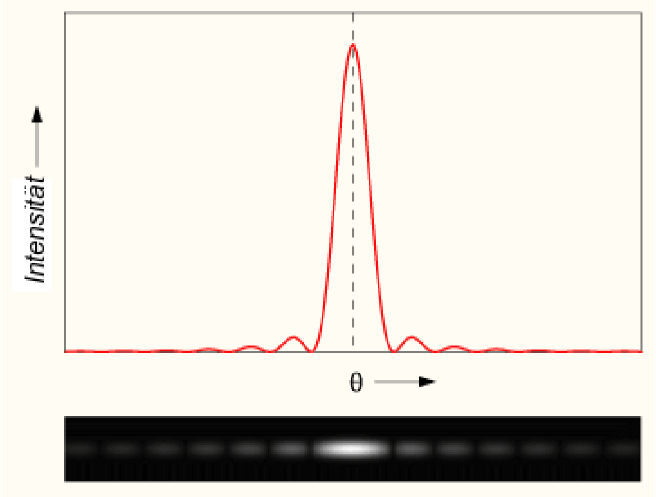
$$rect(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$



Intensität und Amplitude

- Messung hinter dem Spalt:
  - Zeitlich gemittelte Intensität I
- Charakteristische Intensitäts-verteilung der Form

$$I(x) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

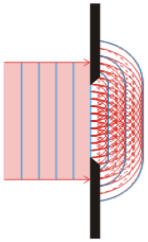


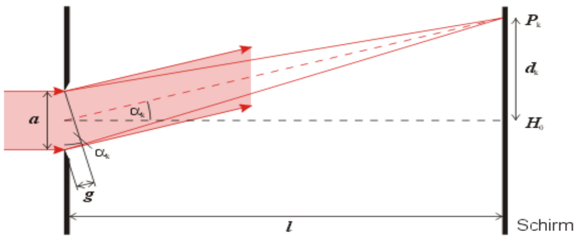
- sinc-Funktion

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

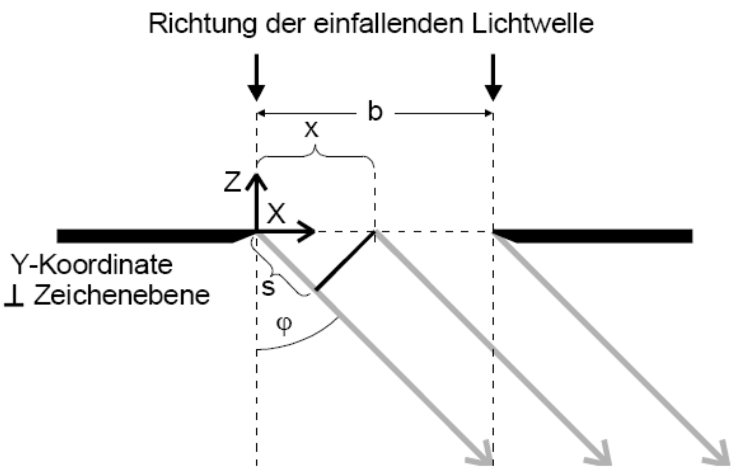
- Energie E und Amplitude B:

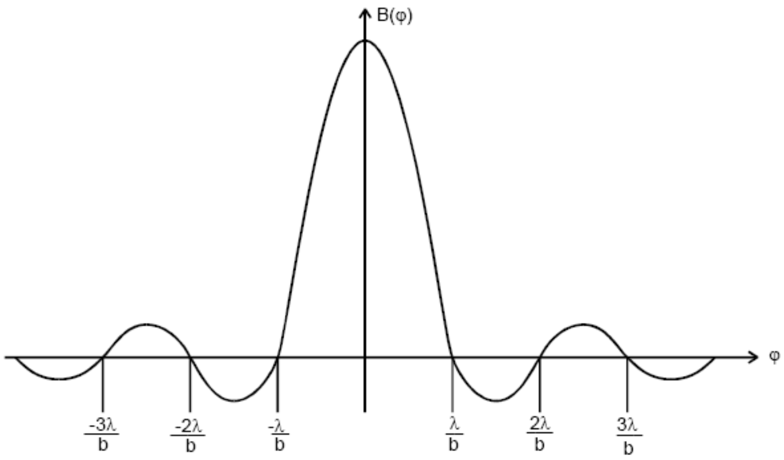
$$I \propto E^2 \propto B^2$$





Amplitude und Gestalt

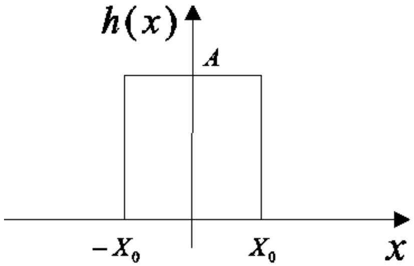




- http://de.wikipedia.org/wiki/Beugung_(Physik)
- http://de.wikipedia.org/wiki/Optischer_Spalt
- http://www.abi-physik.de/buch/wellen/beugung-am-einfachspalt/
- Zusammenhang zwischen Gestalt des beugenden Objekts und Amplitudenfunktion

➔ Fourier-Transformation ➔

Unser erstes Fourier-Transformationspaar

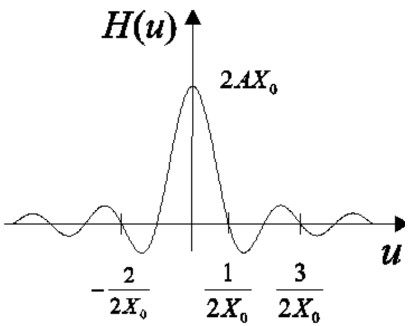


Rechteck-Funktion

FT

$$h(x) = \begin{cases} A, & |x| < X_0 \\ A/2, & |x| = X_0 \\ 0, & |x| > X_0 \end{cases}$$

$$H(u) = 2AX_0 \frac{\sin(2\pi X_0 u)}{2\pi X_0 u}$$



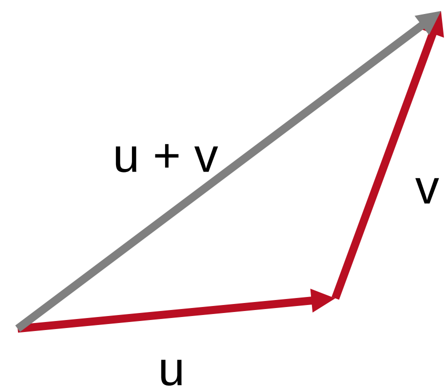
sinc-Funktion

Übersicht

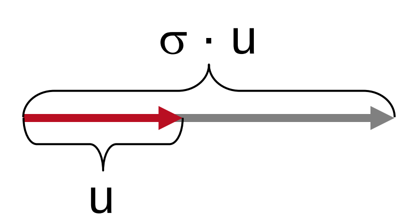
- Motivation
- **Mathematische Grundlagen**
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

Vektorraum

- Algebraische Struktur über einem Zahlenbereich
- Mögliche Operationen auf der Struktur
  - Addition der Elemente
  - Multiplikation der Elemente mit einem Skalar
  - Bilden Elemente des Vektorraums aufeinander ab

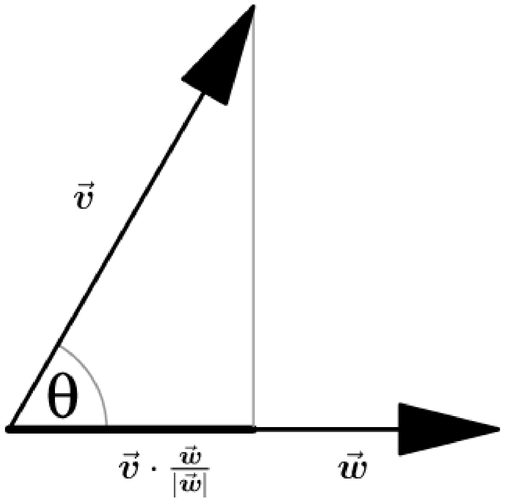


- Elemente des Raums: Vektoren



Beispiel: Euklidischer Vektorraum

- Vektorraum über den reellen Zahlen
- Vektoren repräsentieren Verschiebungen
- Es lassen sich Längen und Winkel messen
  - Rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem
- Es ist ein Skalarprodukt definiert



$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \in \boldsymbol{R}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\angle(\vec{v}, \vec{w}))$$

- Euklidische Ebene ($\boldsymbol{R}^2$)
  - Alle Punkte lassen sich durch Ortsvektoren darstellen

Basis eines Vektorraums

- Jeder Satz von linear unabhängigen Vektoren eines Vektorraums kann als Basis für diesen Vektorraum verwendet werden.
- Linear unabhängig: $\left|\left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle\right| < \left\|\vec{v}\right\| \cdot \left\|\vec{w}\right\|$
- Beispiel $\boldsymbol{R}^2$:

$$Basisvektoren: \vec{e}_1 = (1 \quad 0)^T \ und \ \vec{e}_2 = (0 \quad 1)^T$$

$$stehen\ orthogonal\ aufeinander: \left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\rangle = 0$$

$$und\ sind\ damit\ linear\ unabhängig.$$

$$Alle\ \vec{v} \in \boldsymbol{R}^2\ lassen\ sich\ als\ Linearkombination\ der$$

$$Basisvektoren\ darstellen$$

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

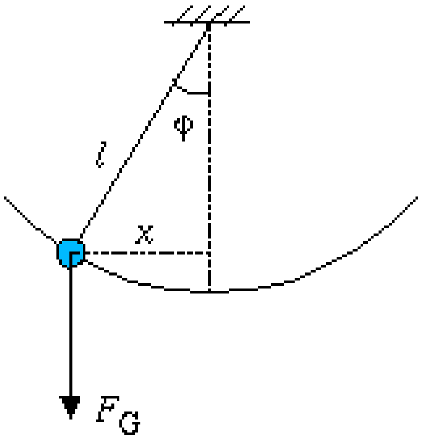
Immer kartesische Koordinaten verwenden?

- Fadenpendel
  - Kartesische Koordinaten

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

  - Fadenlänge ist $l=const.$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} l(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$



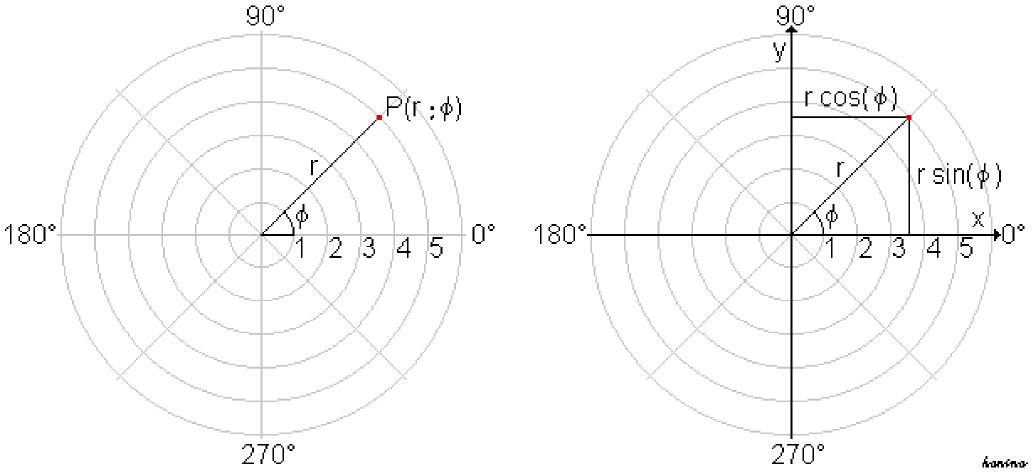
Polarkoordinaten

- Punkte in der Ebene werden beschrieben durch
  - Ihren Abstand r vom Ursprung
  - Den Winkel ϕ zwischen Richtungsvektor und x-Achse

➔ Krummlinige Koordinatentransformation

$$x(r,\varphi) = r \cdot \cos(\varphi),$$
$$y(r,\varphi) = r \cdot \sin(\varphi).$$

- Zwei alternative Beschreibungen



Andere Räume...

- Die Elemente sind jetzt Funktionen ➔ Funktionenräume
- Der Raum ist nicht mehr endlich-dimensional ➔ unendlich-dimensionale Räume

- Frage: Lassen sich allgemeine Basisfunktionen finden, um (beliebige) Funktionen bezüglich dieser Basen darzustellen?

  ➔ Fourier-Theorie

- Neue Perspektive für ein u.U. schwer zu lösendes Problem

Übersicht

- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- **Fourier-Reihe**
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

[Komplexe Zahlen]

- Zwei Komponenten: Real- und Imaginärteil

$$z = a + ib, \quad i = \sqrt{-1}$$

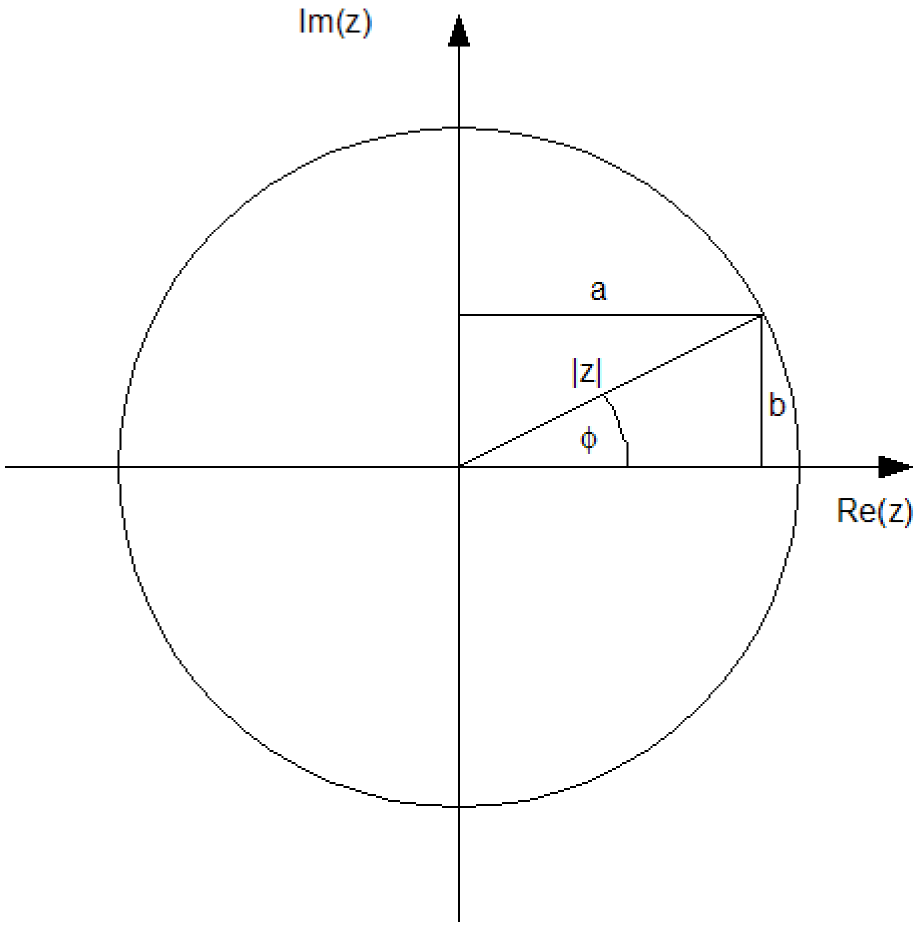
$$z = |z| \cdot e^{i\phi}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Euler-Identität (|z|=1!)

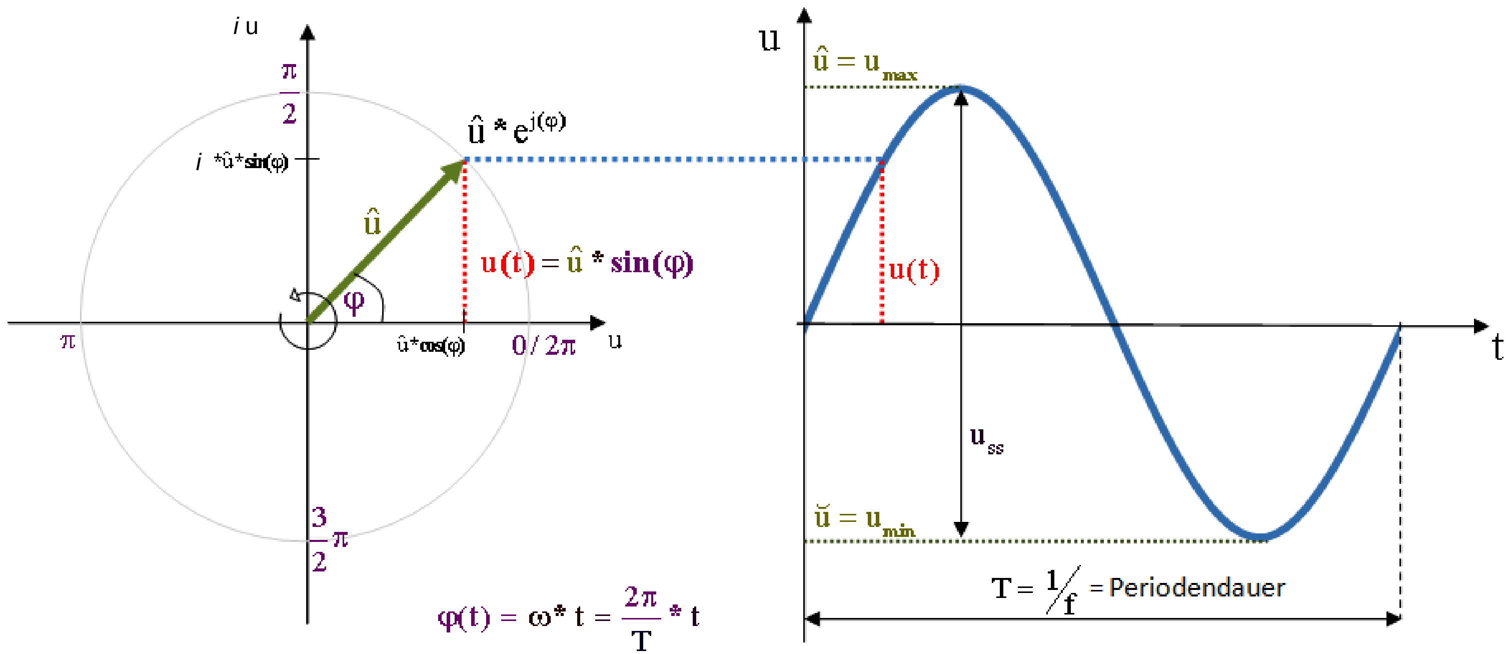
$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

$$a = \cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

$$b = \sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$



Periodische Funktion



- Sinusförmige Schwingung:

$$f(t) = u_{\max} \cdot e^{i\varphi(t)}$$

u_{max}: Amplitude, $\varphi(t)$: Phase

Darstellung einer periodischen Funktion

Jede Funktion, die die ***Dirichlet*-Bedingungen** erfüllt:

1. Die Anzahl der Unstetigkeiten innerhalb einer Periode ist endlich
2. Die Anzahl der Maxima und Minima innerhalb einer Periode ist endlich
3. Die Funktion ist in jeder Periode integrierbar (d.h., die Fläche unter dem Betrag der Funktion ist in jeder Periode endlich)

lässt sich als **Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen** darstellen.

2π-periodische Funktion

- Ist $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 2π, die die Bedingungen 1 - 3 erfüllt, so gilt

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- Mit cos(0)=1 und sin(0)=0 vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))}$$

➔ Fourier-Reihe ➔

- a_n und b_n heißen *Fourier-Koeffizienten*

Skalarprodukt

- Sei H der Raum aller periodischen reellen Funktion mit der Periodenlänge 2π, die die Bedingungen 1 - 3 erfüllen
- Dann wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt$$

ein Skalarprodukt auf H definiert.

➔ Vergleiche mit Vektorraum:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \in \boldsymbol{R}$$

Orthogonale Basis

- Die Funktionen

$$u_n(t) = \cos(nt)$$
$$v_n(t) = \sin(nt)$$

  bilden orthogonale Funktionenfolgen in H.

- Orthogonalität für Vektoren:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = 0$$

Orthogonalität für Basisfunktionen

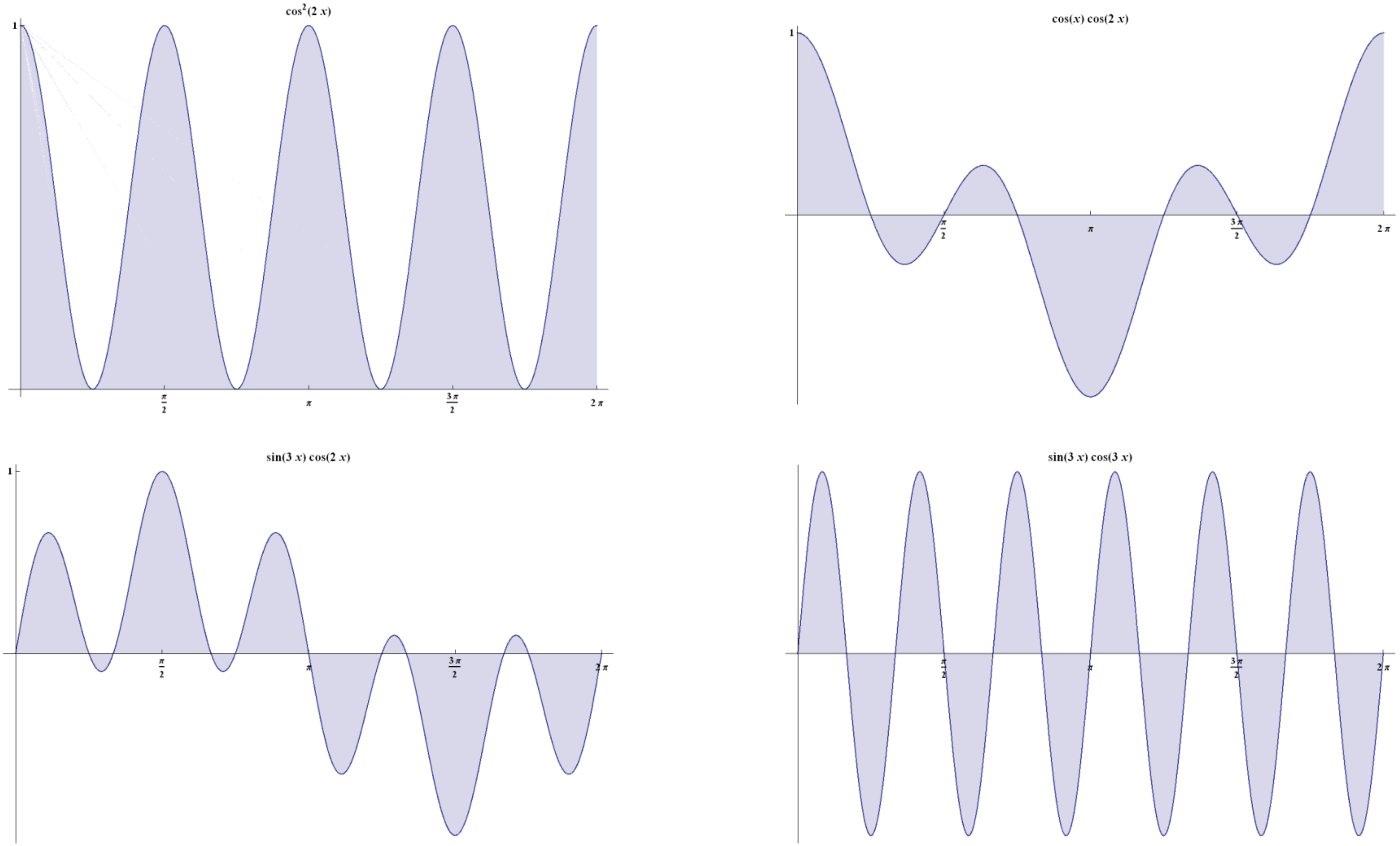
- Es gilt:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n = 0 \\ \pi & m = n > 0 \end{cases}$$

$$\langle v_n, v_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 0 & m = n = 0 \\ \pi & m = n > 0 \end{cases}$$

$$\langle u_n, v_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)\,dt = 0$$

Beispiele

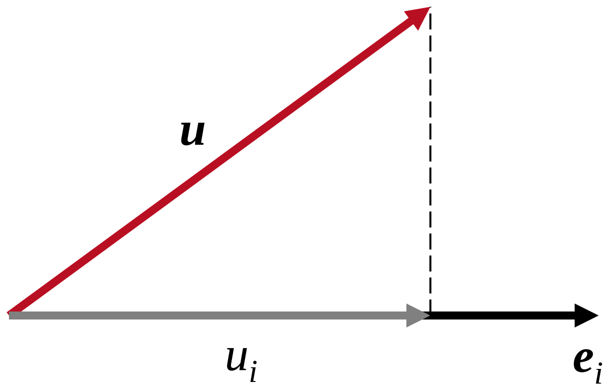


Vektorkomponenten

- Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis

  ➔ Projektion auf die Basisvektoren mit Hilfe des Skalarprodukts

$$\langle \vec{u}, \vec{e}_i \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}_i\| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{e}_i)) = u_i$$



Berechnung der Koeffizienten a_i und b_i

- Damit erhalten wir

$$\langle f, u_0 \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, u_0 \right\rangle = \langle a_0 u_0, u_0 \rangle = a_0 2\pi$$

- und daraus

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Berechnung der Koeffizienten a_i und b_i

- Analog berechnen wir für m > 0

$$\langle f, u_m \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, u_m \right\rangle = \langle a_m u_m, u_m \rangle = a_m \pi$$

- und daraus

$$\boxed{a_m = \frac{1}{\pi} \langle f, u_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx}$$

Berechnung der Koeffizienten a_i und b_i

- Analoge Rechnungen gelten für v_m, $m = 0,1,2,\dots$

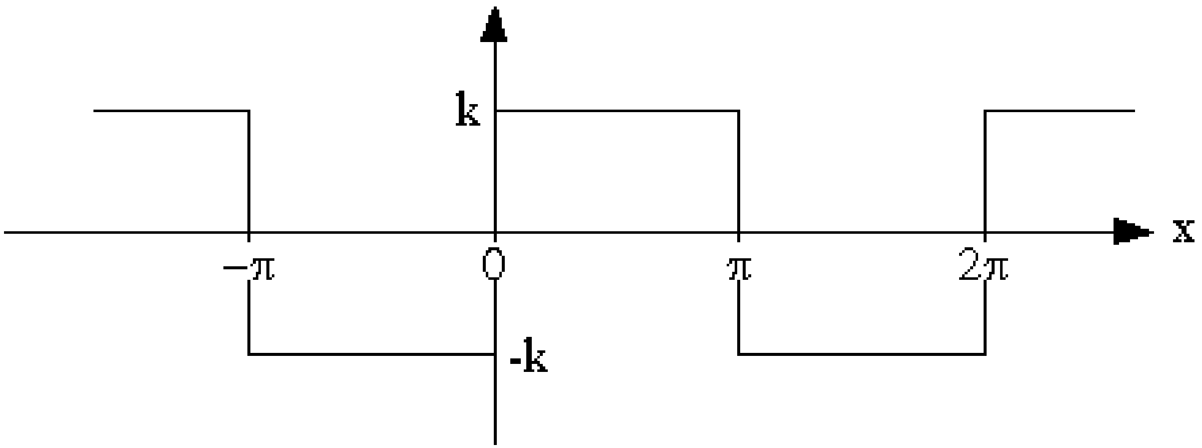
$$\langle f, v_m \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, v_m \right\rangle = \langle b_m v_m, v_m \rangle = b_m \pi$$

- und daraus

$$\boxed{b_m = \frac{1}{\pi} \langle f, v_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx}$$

Rechteck-Schwingung

- Bestimmung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Rechteckfunktion.



$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{wenn} \quad -\pi < x < 0 \\ k & \text{wenn} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

Rechteck-Schwingung

$$a_0 = 0$$

trivial

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} k\cos(nx)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin(nx)}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0} + k\frac{\sin(nx)}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right] = 0$$

weil für x = ..., -π, 0, π,... stets gilt:

$\sin nx = 0$

Rechteck-Schwingung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} k\sin(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left. k\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \left. k\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{0}^{\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{k}{n\pi}\left(\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos 0\right)$$

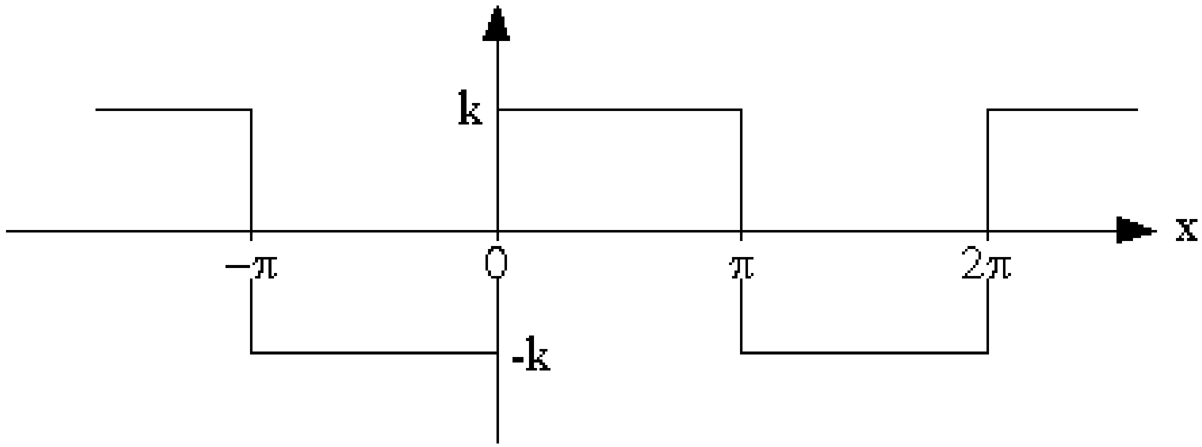
$$= \frac{2k}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \frac{4k}{n\pi}$$

(für *n* ungerade)

Rechteck-Schwingung

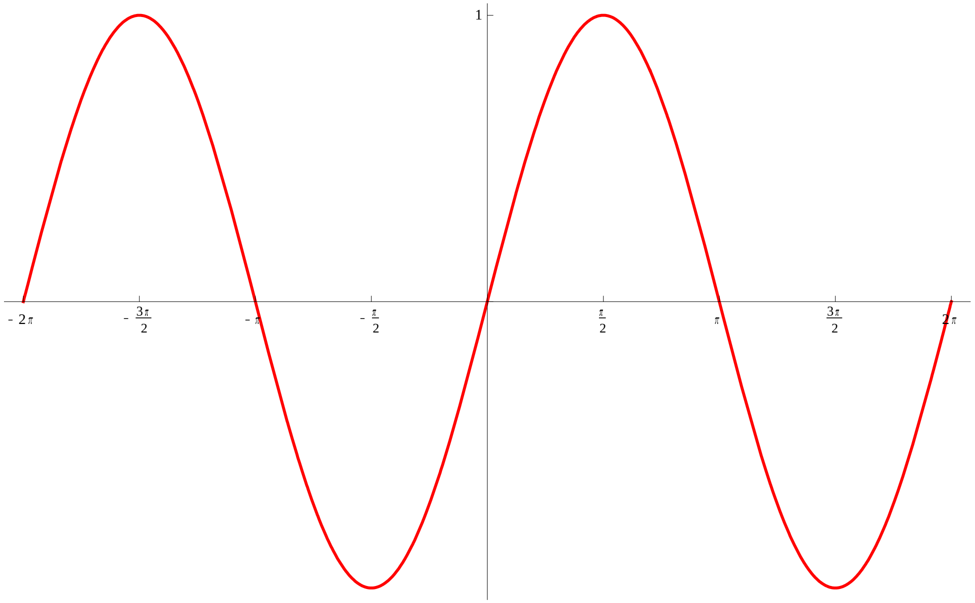
- Darstellung als Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots\right)$$



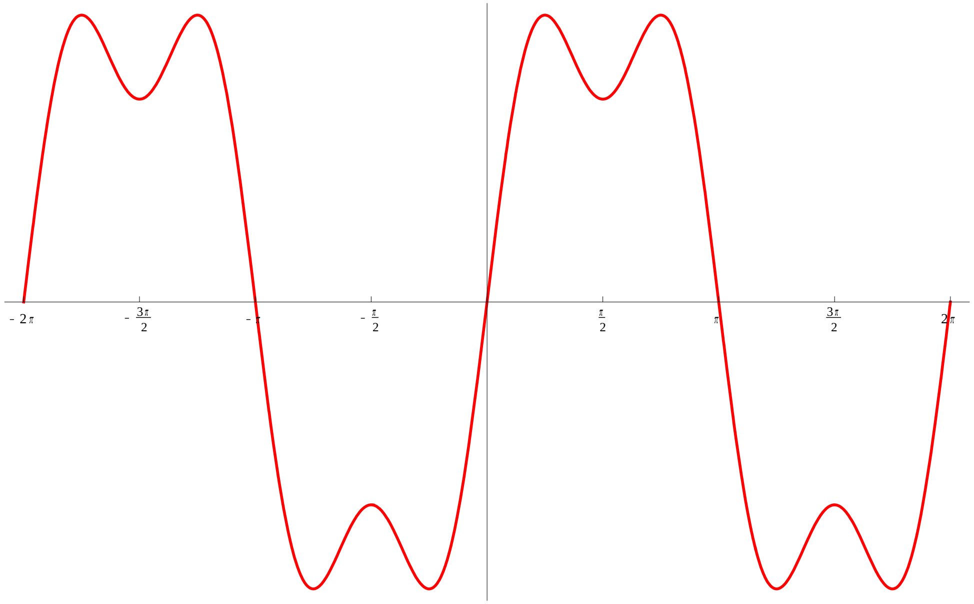
Rechteck-Schwingung

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sin x$$



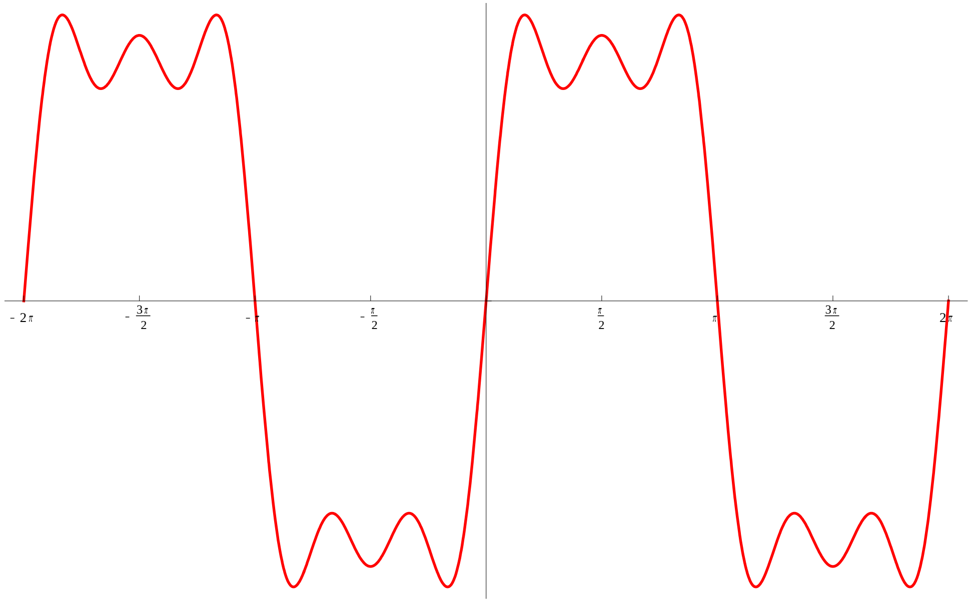
Rechteck-Schwingung

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)$$



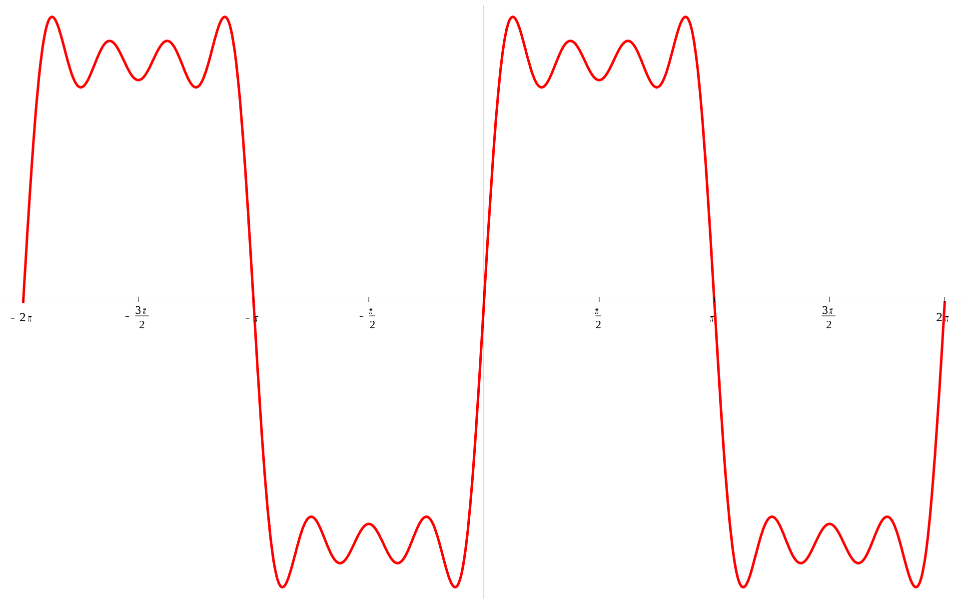
Rechteck-Schwingung

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right)$$



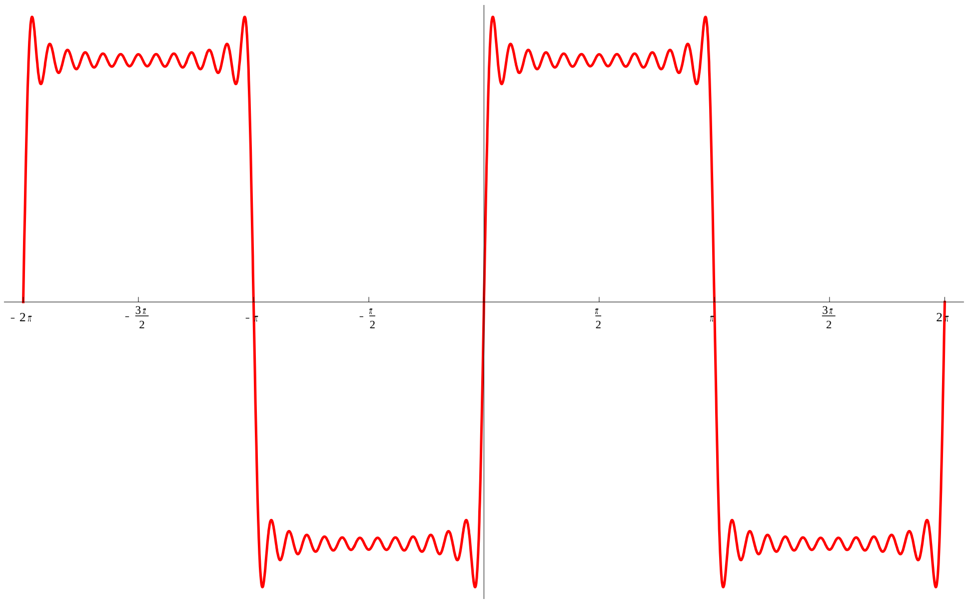
Rechteck-Schwingung

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x\right)$$



Rechteck-Schwingung

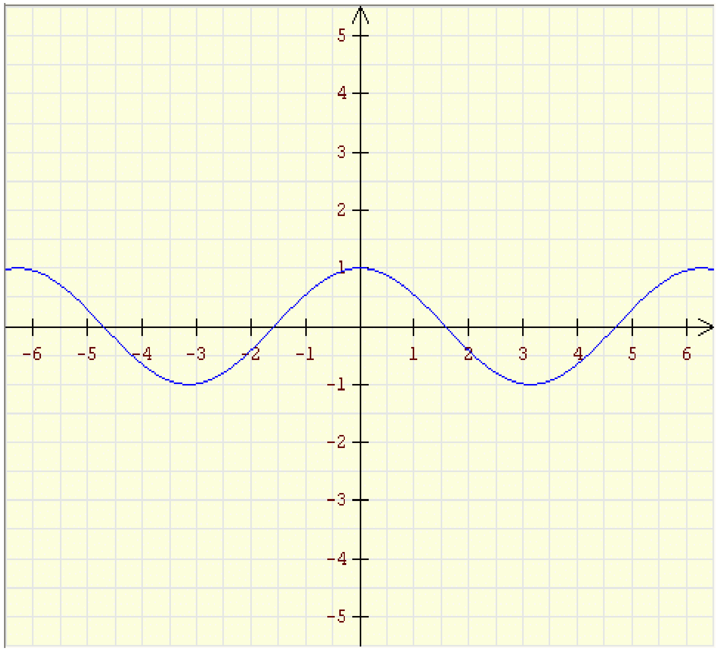
$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \cdots + \frac{1}{25}\sin(25x) \right)$$



Gerade/ungerade Funktionen

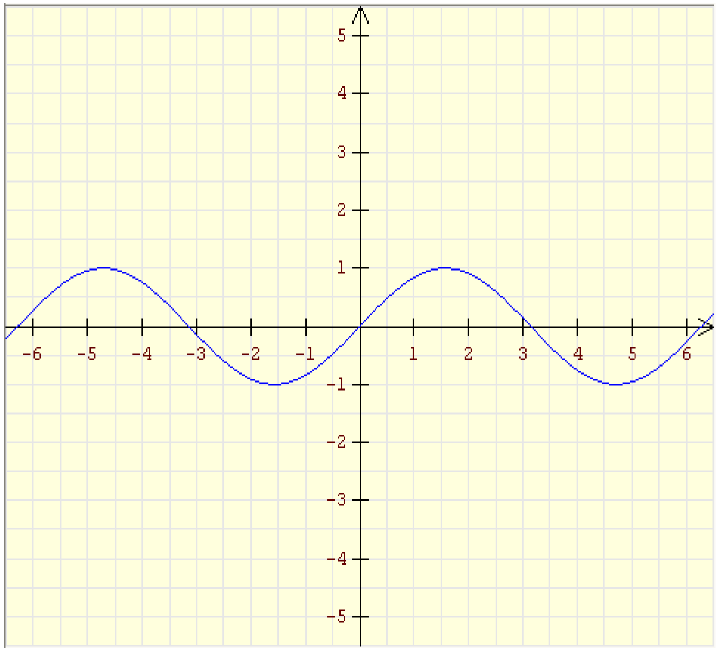
- Gerade Funktion

$$f(-t) = f(t)$$

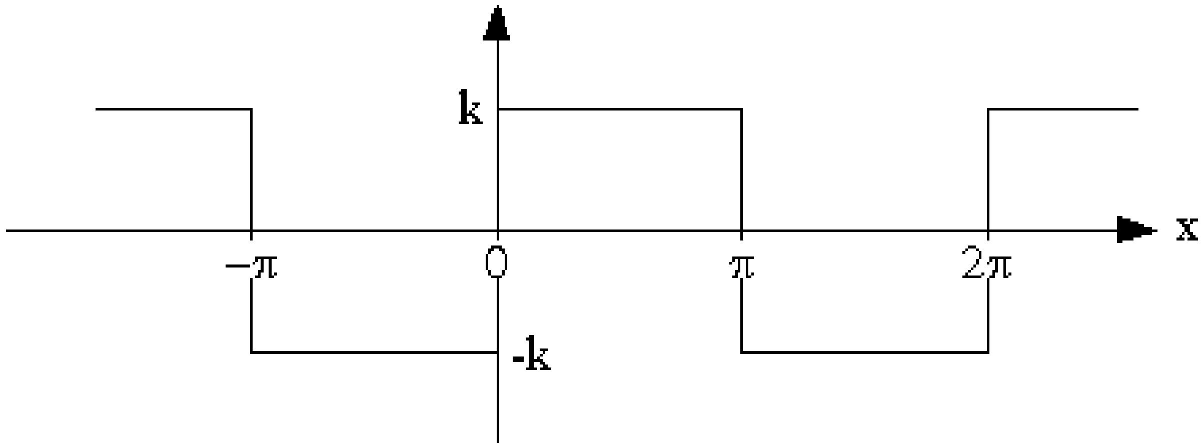


- Ungerade Funktion

$$f(-t) = -f(t)$$



Rechteck-Schwingung



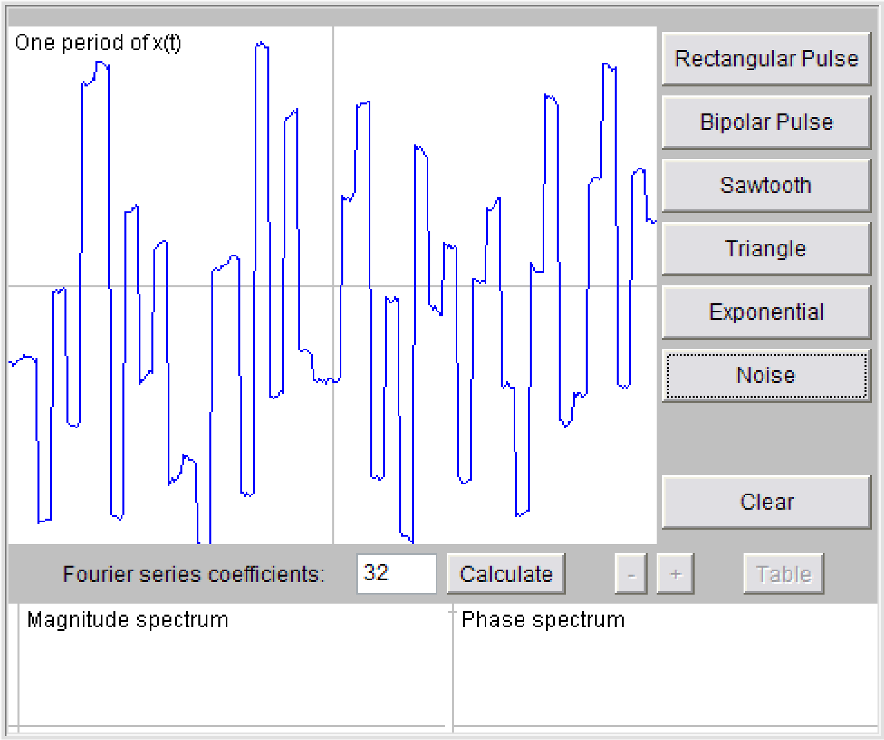
➔Diese Rechteckschwingung ist eine <u>ungerade</u> Funktion.

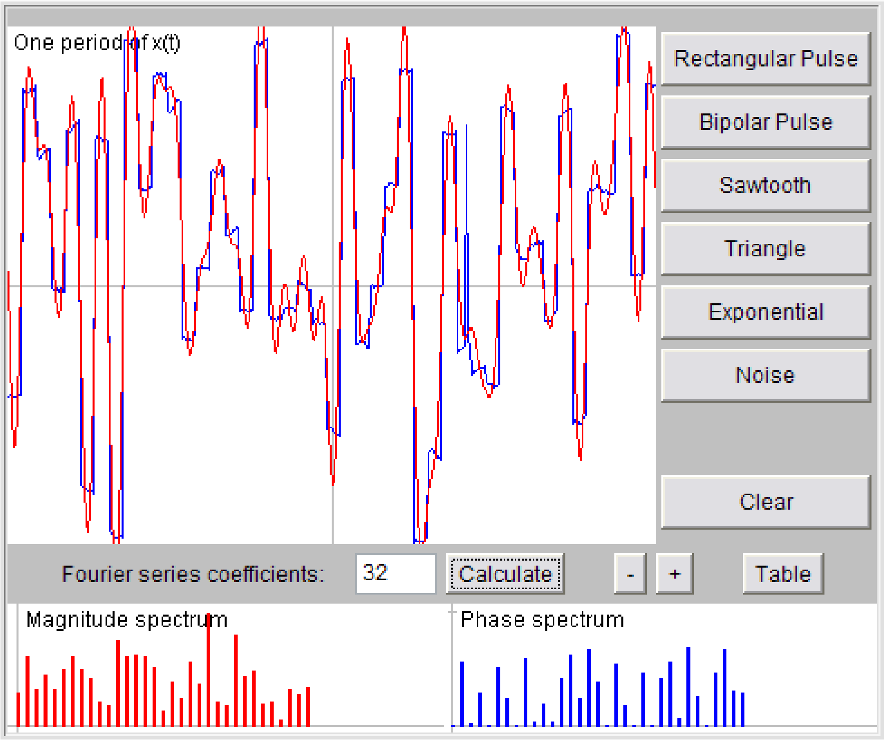
Allgemein:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x))$$

Für gerade Funktionen sind alle $b_n = 0$,
für ungerade Funktionen alle $a_n = 0$.

Andere Beispiele





http://www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html

Zusammenfassung I

- Jede 2π-periodische Funktion, die die Dirichlet-Bedingungen erfüllt, läßt sich als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen ➔ Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Übersicht

- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- **Fourier-Transformation**
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

Motivation

Lässt sich eine ähnliche Darstellung für Funktionen finden, die nicht 2π-periodisch sind?

Komplexe Zahlen

- Zwei Komponenten: Real- und Imaginärteil

$$z = a + ib, \quad i = \sqrt{-1}$$

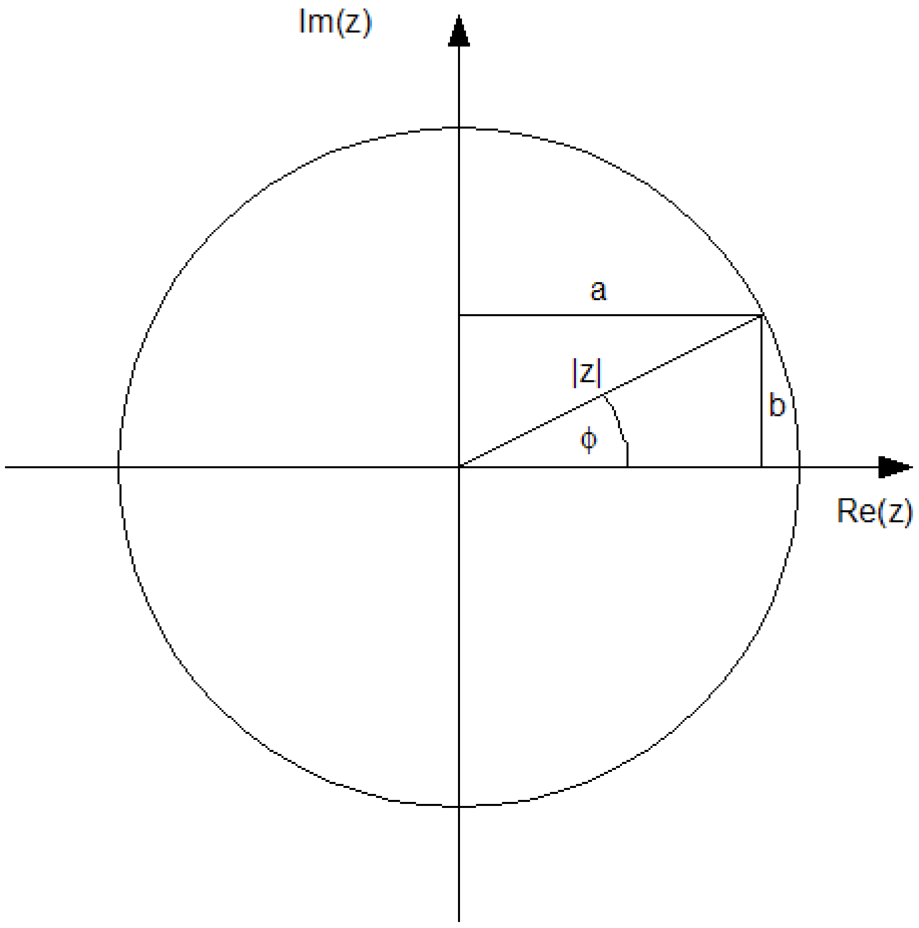
$$z = |z| \cdot e^{i\phi}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Euler-Identität (|z|=1!)

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

$$\cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$



Fourier-Reihe, komplex

Mit Euler-Identität:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$$

Das Fourier-Integral

- Nichtperiodische Funktionen
  - Zunächst betrachten wir anstatt Funktionen mit Periode 2π, Funktionen mit Periode $2L$

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{2L}x}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx \right) e^{in\frac{2\pi}{2L}x}$$

  - Nun betrachten wir den Übergang

$$L \to \infty$$

Das Fourier-Integral

$$\lim_{L\to\infty} f_L(x) = \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{-in\frac{\pi}{L}t} dt \right) e^{in\frac{2\pi}{2L}x}$$

$$= \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{-in\frac{\pi}{L}(t-x)} dt \right)$$

$$= \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} f(t) e^{-i\frac{n}{2L}2\pi(t-x)} \right)}_{\text{Riemann-Summe}} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu2\pi(t-x)} du dt$$

Das Fourier-Integral

- Diese Gleichung lässt sich als Superposition auffassen

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu2\pi(t-x)} du dt$$

mit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi iux} du$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi iut} dt$$

Die Fourier-Transformation

- Fouriertransformation

$$f(x) \rightarrow F(u) \qquad F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

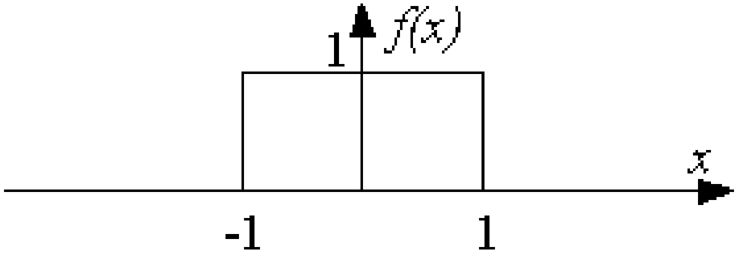
- inverse Fouriertransformation

$$F(u) \rightarrow f(x) \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{+i2\pi ux} du$$

- Oft ist $f(\mathrm{x})$ reell, $F(\mathrm{u})$ ist komplex:

$$F(u) = \mathrm{Re}\big(F(u)\big) + i\,\mathrm{Im}\big(F(u)\big)$$

Fourier-Transformation für Rechteckimpuls

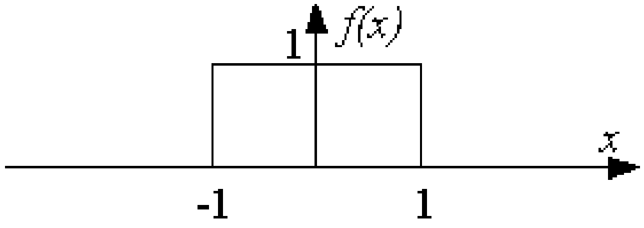


$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-2\pi iut}\,dt=\int_{-1}^{1} e^{-2\pi iut}\,dt=\frac{1}{2\pi iu}\left[e^{-2\pi iut}\right]_{+1}^{-1}$$

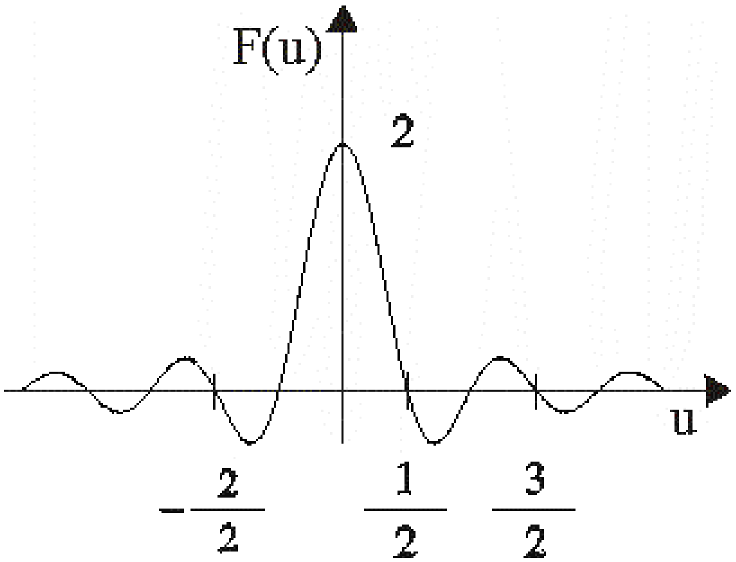
$$=\frac{1}{\pi u}\cdot\frac{e^{2\pi iu}-e^{-2\pi iu}}{2i}=2\,\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u}=2\cdot\operatorname{sinc}(2\pi u)$$

Fourier-Transformation für Rechteckimpuls

- Ortsdarstellung



- Frequenzdarstellung



Fourier-Darstellung

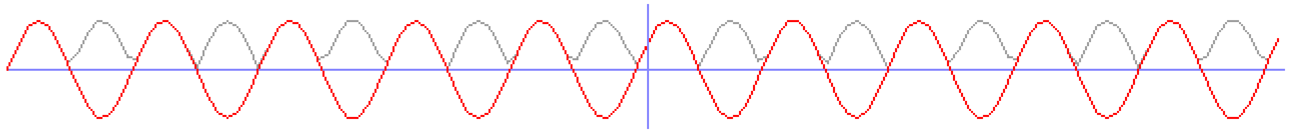
Zerlegung einer Funktion

(eines Signals) in ihre (seine)

Frequenzbestandteile.

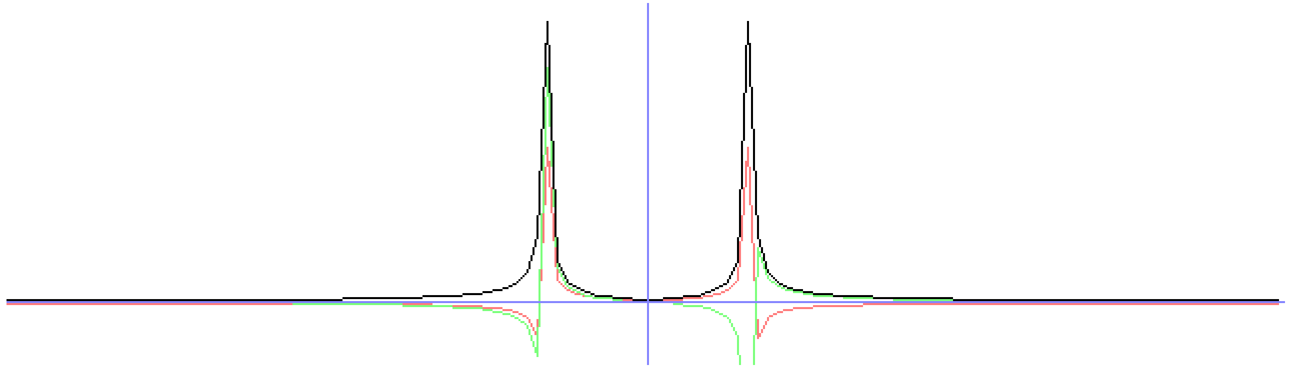
Fourier-Transformationspaare

Ortsraum



In[131]:= ft = FourierTransform[Cos[x] , x, u]

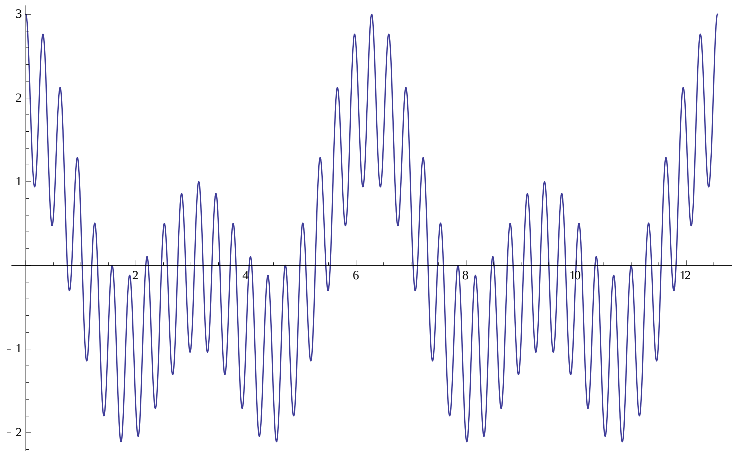
Out[131]= $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[-1 + u] + $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[1 + u]



Frequenzraum

Fourier-Transformationspaare

Ortsraum



In[139]:= FourierTransform[Cos[2 x] + Cos[x] + Cos[20 x], x, u]

Out[139]= $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[-20 + u] + $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[-2 + u] + $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[-1 + u] + $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[1 + u] + $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[2 + u] + $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ DiracDelta[20 + u]

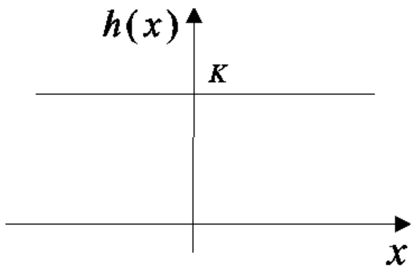
Frequenzraum: 0 außerhalb den Frequenzen -20, -2, -1, 1 2, 20

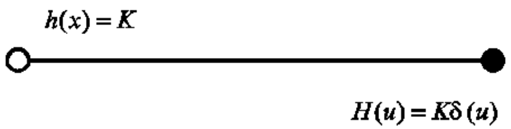
Fourier-Transformationspaare

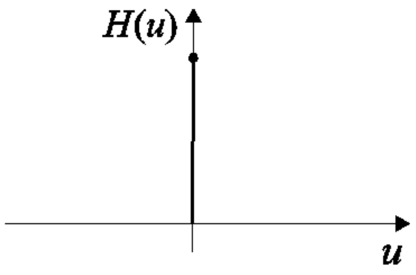
Cos(0)=1	Delta Funktion bei der Frequenz u = 0
Cos(kx)	Delta Funktion bei den Frequenzen u = ±k
Sin(kx)	Delta Funktion bei den Frequenzen u = ±ik

Ortsraum

Frequenzraum







Konstante Funktion

Delta-Funktion

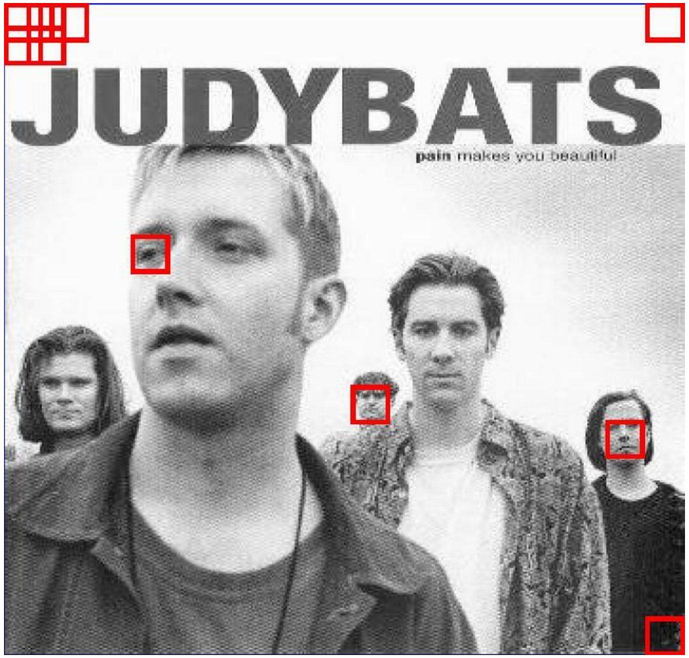
Übersicht

- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- **Faltung und Filterung**
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

Beispiel

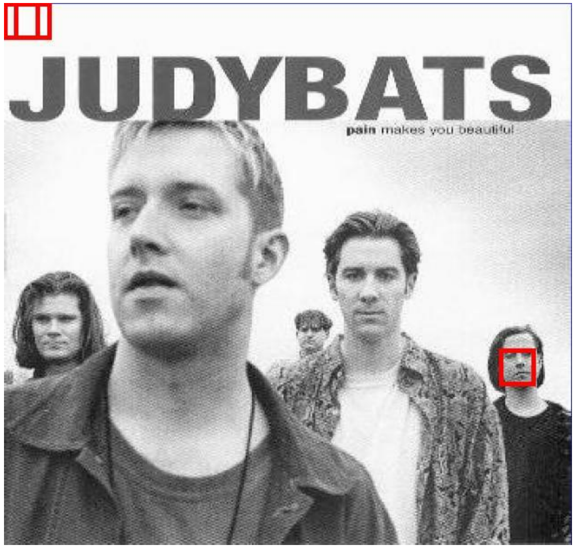
Beispiel

- Suchen über Raum und Skalierung (Sliding Window Approach)



Ein Eingabebild wird in Ein-Pixel-Schritten ***horizontal und vertikal gescannt***

• • •



Das Bild wird um den Faktor 1,2 verkleinert, die Suche wiederholt

Multiplikation im Frequenzraum

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$
\begin{aligned}
F(\xi)\cdot G(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\xi t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\, e^{-i\xi (t-x)}\, dx\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx\, e^{-i\xi t}\, dt \\
&:= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\xi t}\, dt \\
&= H(\xi)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx}$$

➔ **Faltungsintegral**

Faltungssatz

- Sei h das Faltungsintegral zweier Funktionen f und g

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x)\, dx := f(t) \circ g(t) \quad ,$$

dann gilt für die Fourier-Transformierten H, F und G

$$H(\xi) = F(\xi) \cdot G(\xi)$$

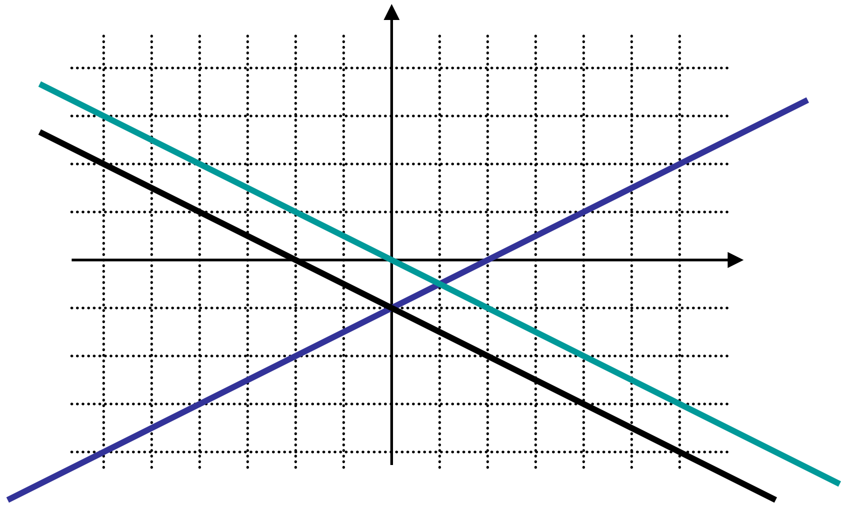
"Einer Faltung im Ortsraum entspricht eine Multiplikation im Frequenzraum!"

Faltung

- Faltung im 1D ist definiert durch

$$g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$

- Graphische Interpretation



$$g(\alpha)$$

1. Spiegelung an y-Achse

$$g(-\alpha)$$

2. Verschiebung um x, zB x=2

$$f(\alpha) := g(2-\alpha)$$

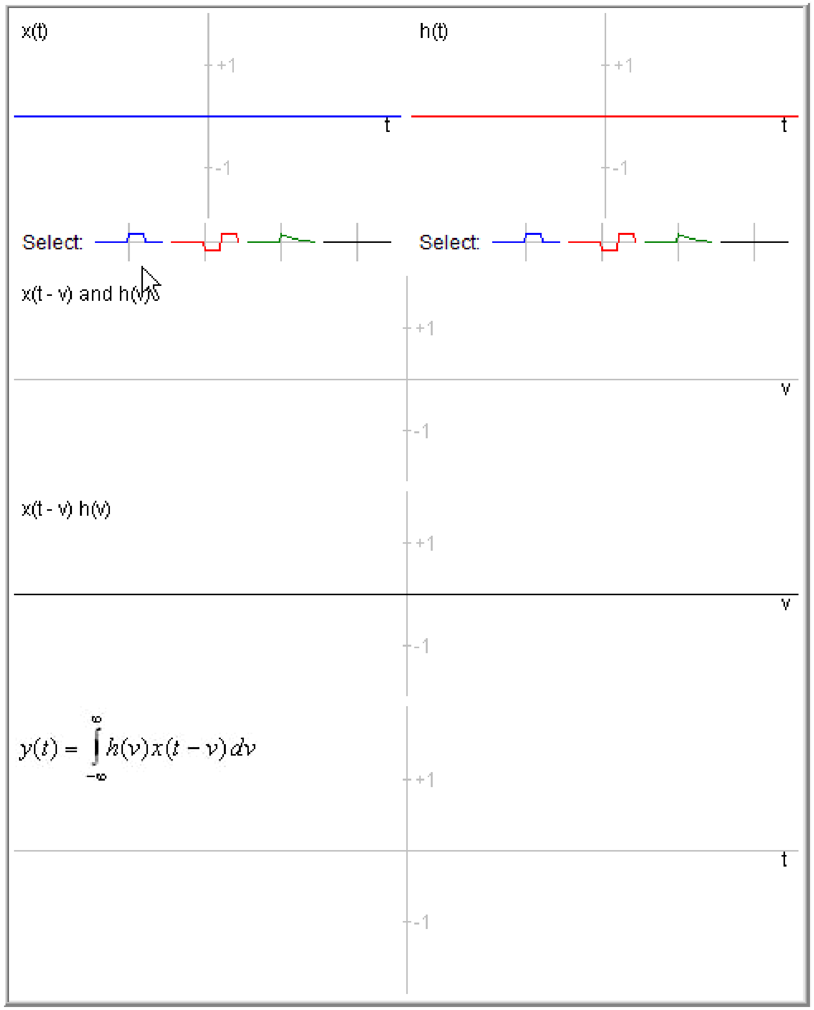
3. Multiplikation und Integration

Faltung zweier Rechteckfunktionen

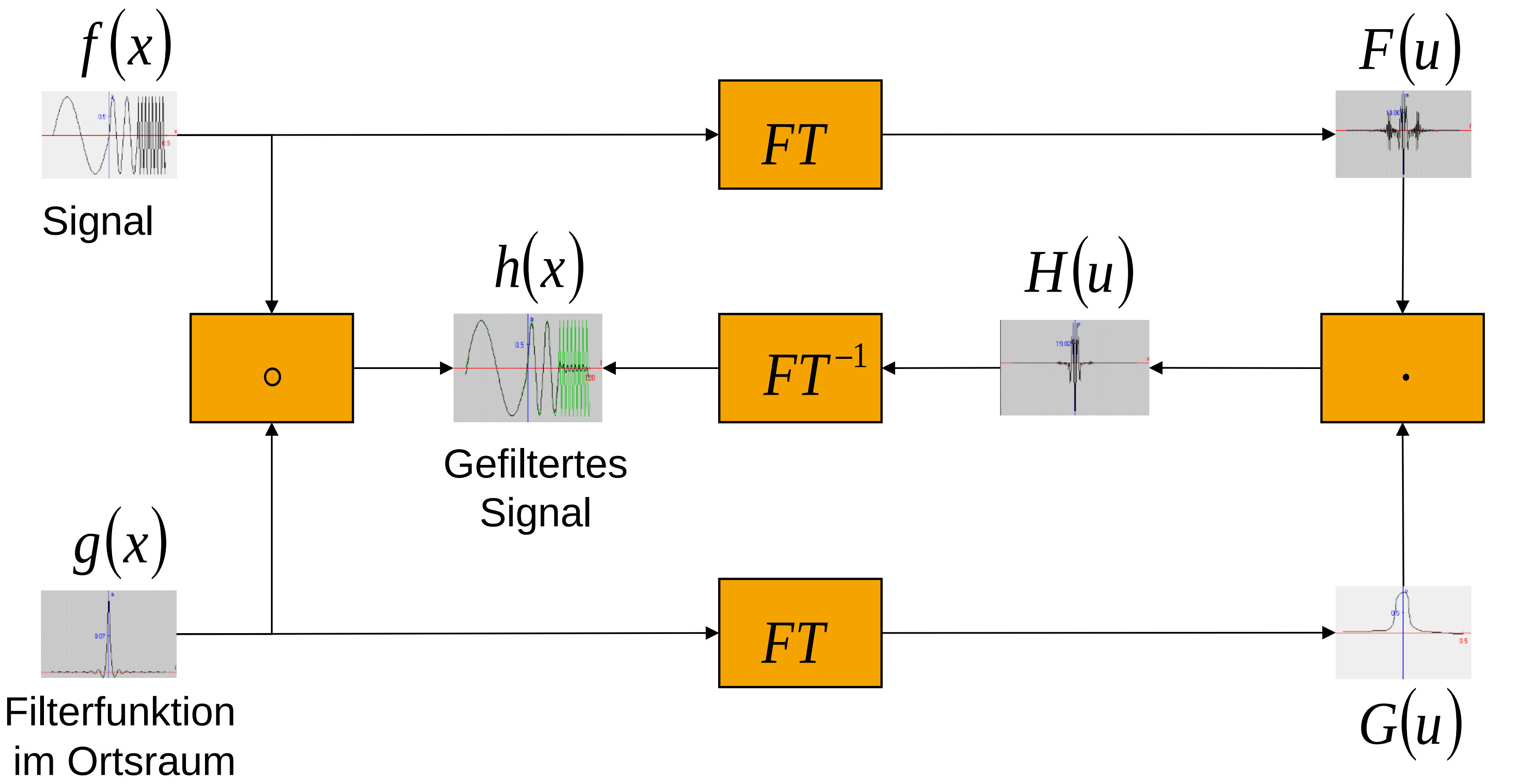
$$g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(x-\alpha) \cdot rect(\alpha)\, d\alpha$$

1. Spiegelung an y-Achse
2. Verschiebung um x, zB x=2
3. Multiplikation und Integration

http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html



Faltungssatz - Anwendung: Filter

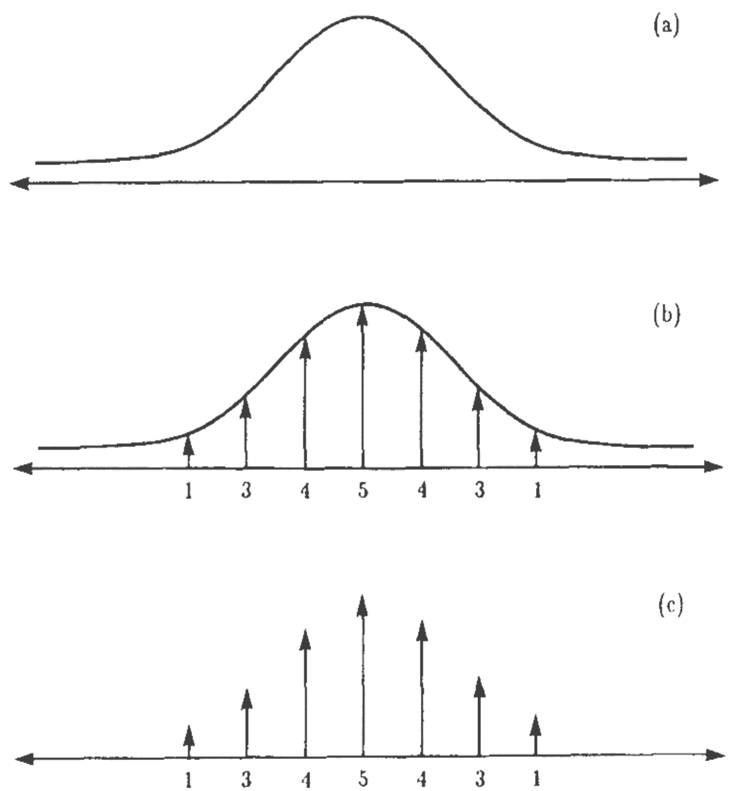


Übersicht

- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- **Abtastung von Signalen**
- Zusammenfassung

Kontinuierliche und diskrete Funktionen

- Kontinuierliche Funktion f (1-dim.)



- Diskrete Repräsentation ➔ Abtastung der Funktion an bestimmten Positionen

$$\ldots f(-\tau), f(0), f(\tau), f(2\tau), \ldots, f(n\tau), \ldots$$

➔ Wie abtasten?

Dirac-Delta-Distribution

- Definiert über ihre Wirkung auf andere Funktionen ➔ „Sampling“-Eigenschaft

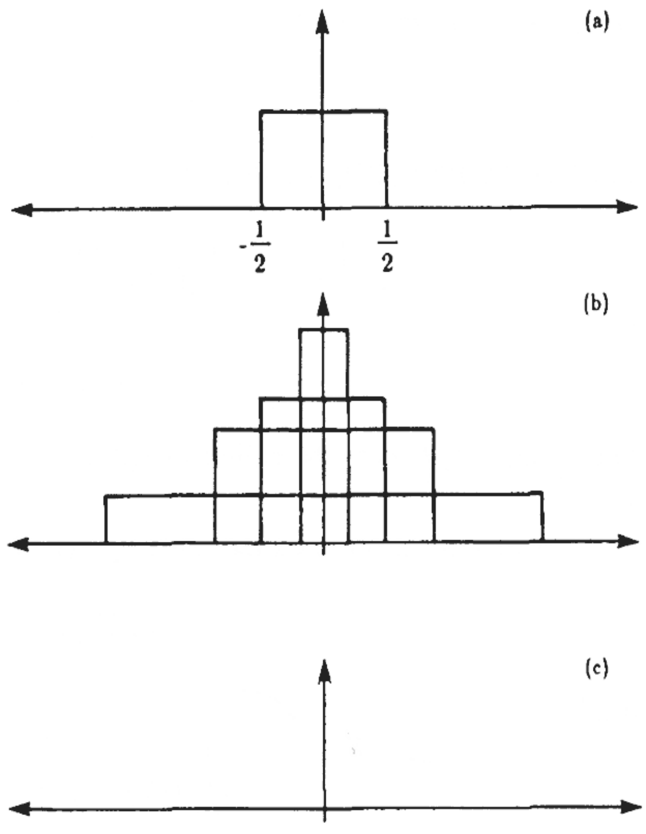
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t'-t)\,dt = f(t')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

- Anschaulich: Grenzübergang n $\rightarrow \infty$ für Funktionsreihe

$$\delta_n(t) = n \cdot rect(nt)$$

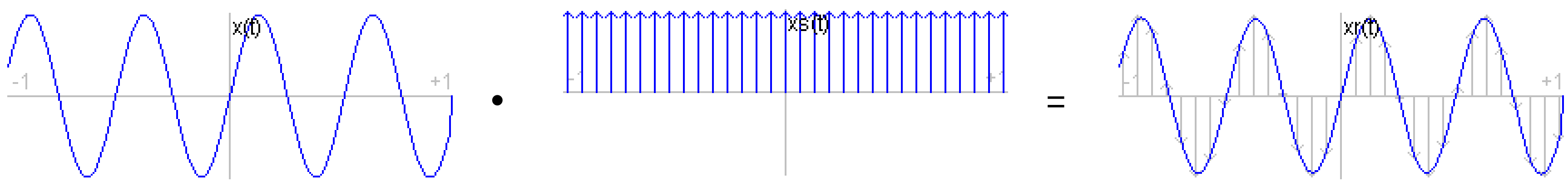
$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Abtastung eines Signals

- Diskrete Abtastung (Abtastsignal):

$$\hat{f}(x) = f(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \cdot \Delta x)$$

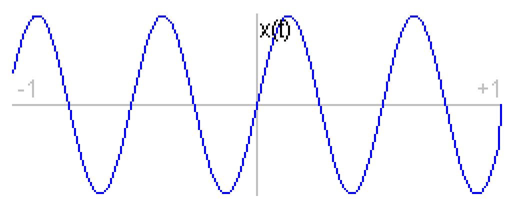


➔ Produkt zwischen Funktion *f(x)* und Kamm-Funktion

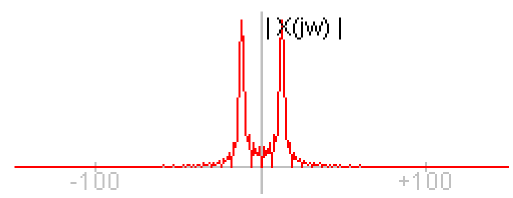
Abtastung eines Signals

- Fourier-Transformierte $\hat{F}(u)$ entspricht der Fourier-Transformierten $F(u)$ der nicht abgetasteten Funktion $f(t)$, die aber periodisch mit der Periode $1/\Delta x$ wiederholt und mit $1/\Delta x$ skaliert wird

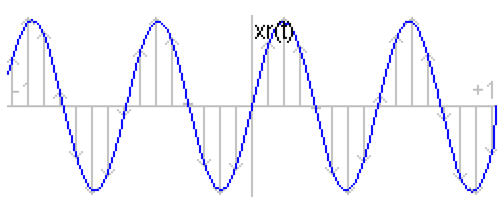
Kontinuierlich:



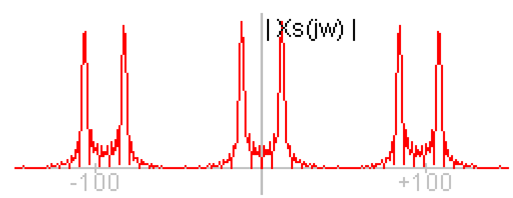
FT



Diskret:

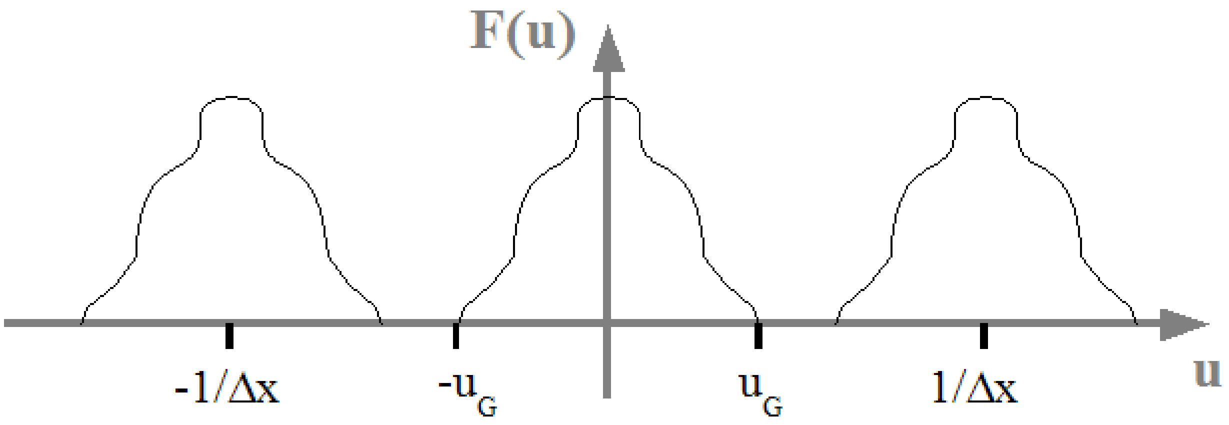


FT



Abtasttheorie

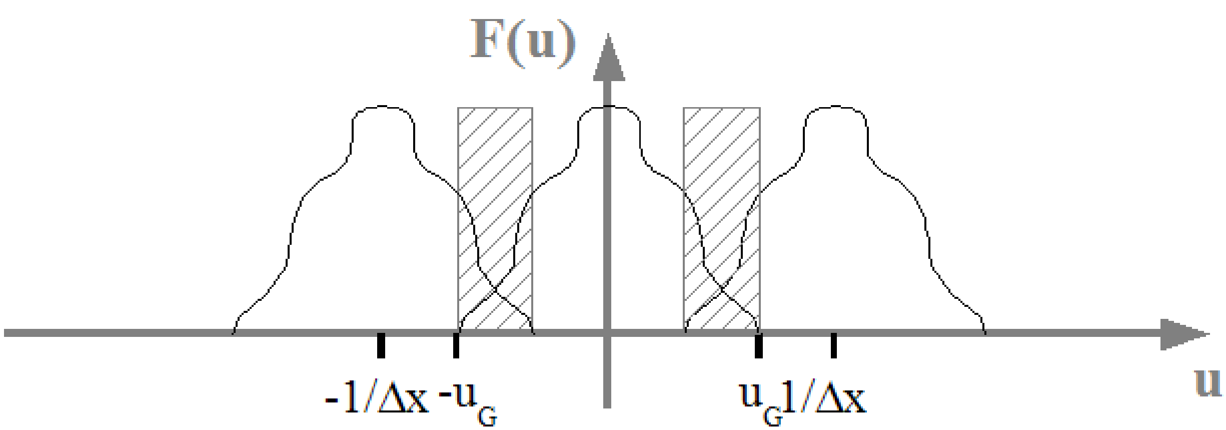
- Sei die Funktion $f(x)$ bandbegrenzt durch u_G, d.h. $F(u) = 0$ für $|u| > u_G$
- Annahme: $2u_G < \frac{1}{\Delta x}$
  - Die Kopien der Fouriertransformierten $F(u)$ überlappen sich nicht
  - Die Spektren $F(u)$ und $\hat{F}(u)$ stimmen auf dem Intervall [- u_G, u_G] bis auf den Skalierungsfaktor $1/\Delta x$ überein
  - Das Frequenzspektrum von $F(u)$ kann vollständig aus dem Abtastsignal und damit den Abtastwerten berechnet werden



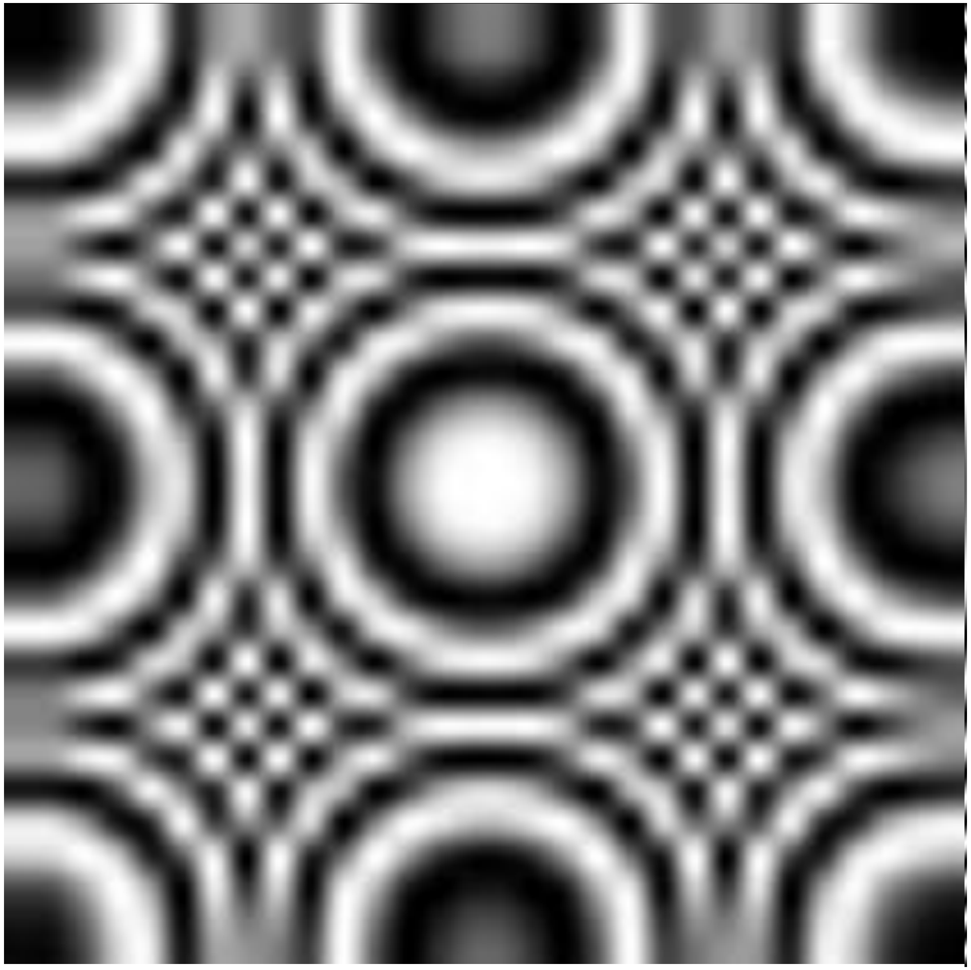
Abtasttheorie

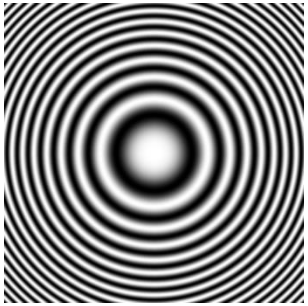
- Sei die Funktion $f(x)$ bandbegrenzt durch u_G, d.h. $F(u) = 0$ für $|u| > u_G$

- Annahme: $2u_G > \frac{1}{\Delta x}$
  - Die Kopien der Fouriertransformierten $F(u)$ überlappen sich
  - In den Überschneidungsbereichen bilden sich Summen
  - Es ist unmöglich, $F(u)$ aus den Abtastwerten wiederzugewinnen
  - ➔ Aliasing



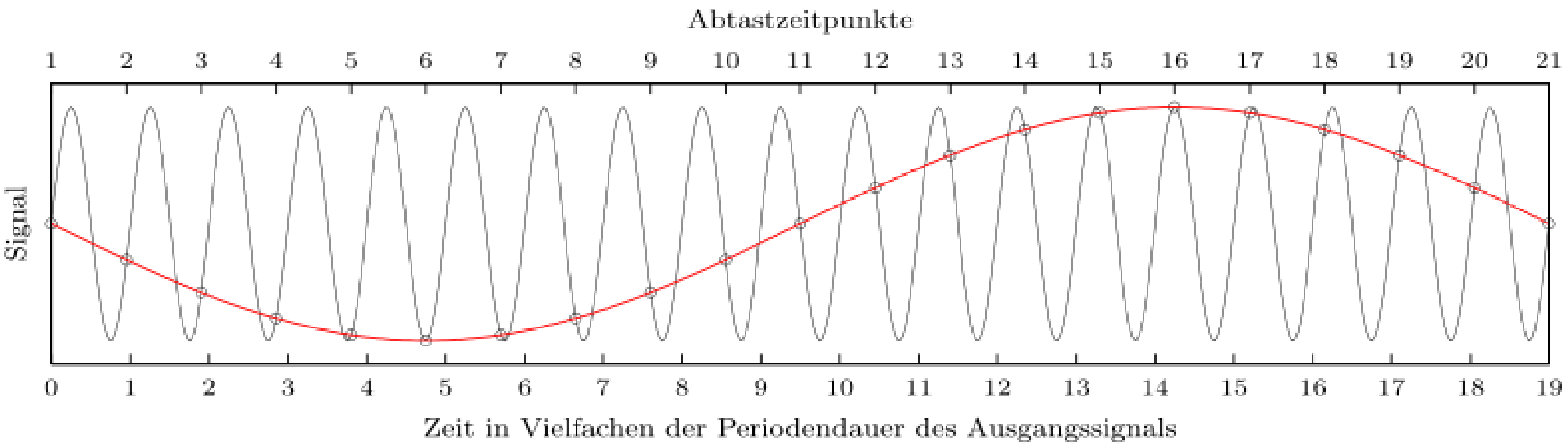
Aliasing: Fresnel-Zonenplatte





http://de.wikipedia.org/wiki/Fresnel-Zonenplatte

Aliasing



http://de.wikipedia.org/wiki/Alias-Effekt

Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

- Existiert für eine Funktion $f(x)$ eine endliche Grenzfrequenz u_G, so dass das Spektrum $F(u) = 0$ für $|u| > u_G$,

  dann ist die abgetastete Funktion $f(x)$ aus den Abtastwerten $f(n\Delta x)$ fehlerfrei rekonstruierbar, sofern die Abtastfrequenz Δx^{-1} mindestens doppelt so hoch wie u_G ist:

$$\frac{1}{\Delta x} > 2u_G$$

Übersicht

- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- **Zusammenfassung**

Zusammenfassung

- **Fourier-Reihe**: $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{inx}$$
  - Darstellung 2π-periodischer Funktionen
  - Frequenzen der Winkelfunktionen sind Vielfache einer *Grundfrequenz* ➔ diskret im Frequenzraum
  - https://www.youtube.com/watch?v=kP02nBNtjrU
- **Fourier-Transformation**: $$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-2\pi iut}\,dt \qquad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{2\pi iux}du$$
  - Darstellung nicht-periodischer Funktionen als Überlagerung unendlich vieler Frequenzen
  - Kontinuierlich im Orts- und Frequenzraum
  - https://www.youtube.com/watch?v=Xxut2PN-V8Q
- **Abtastung**
  - Diskretisierung einer kontinuierlichen Funktion mit einer Kammfunktion
  - FT des Abtastsignals ergibt skalierte, sich periodisch wiederholende Kopien der FT der Originalfunktion ➔ Abtastfrequenz entscheidend

Zum Weiterspielen

- Die Fourier-Reihe von den Seiten 35 - 40 mal in interaktiver Form:

  https://www.geogebra.org/m/xkv5SCbM

- Zusammenhang zum Einheitskreis:

  https://codepen.io/anon/pen/jPGJMK?editors=0010

- Aliasing:

  http://www.onmyphd.com/?p=aliasing&ckattempt=1

  1. Beispiel: Shannon Theorem und allgemein Aliasing.

  2. Beispiel: Kammfunktion.

  Man sieht bei beiden sehr gut den Unterschied zwischen dem originalen und dem erzeugten Signal.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit