Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Johanna Biehl
M.Sc. Paloma Schäfer Aguilar

SoSe 2019
23./24./26. April 2019

Umzug Lernzentrum Mathematik: Bitte beachten Sie, dass im kommenden Semester die offene Sprechstunde des LZMs in S1|08 in Raum 201 statt finden wird. Das alte LZM ist ab dem Sommersemester 2019 vorübergehend geschlossen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lagrangesches Interpolationspolynom)
Es seien folgende Daten gegeben:

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
y_k	−6	0	2	6

(1)

(a) Bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom p_3 vom Grad $n \leq 3$, das die Interpolationsbedingungen für (1) erfüllt.

(b) Zeichnen Sie das Interpolationspolynom und die Interpolationspunkte.

Lösung:

(a) Die Lagrange-Polynome lauten

$$L_{0,3}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{3} \frac{x-x_j}{1-x_j} = \frac{x-2}{-1}\cdot\frac{x-3}{-2}\cdot\frac{x-4}{-3} = -\frac{1}{6}\left(x^3-9x^2+26x-24\right),$$

$$L_{1,3}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{3} \frac{x-x_j}{2-x_j} = \frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-3}{-1}\cdot\frac{x-4}{-2} = \frac{1}{2}\left(x^3-8x^2+19x-12\right),$$

$$L_{2,3}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{3} \frac{x-x_j}{3-x_j} = \frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{1}\cdot\frac{x-4}{-1} = -\frac{1}{2}\left(x^3-7x^2+14x-8\right),$$

$$L_{3,3}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 3}}^{3} \frac{x-x_j}{4-x_j} = \frac{x-1}{3}\cdot\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x-3}{1} = \frac{1}{6}\left(x^3-6x^2+11x-6\right),$$

und Einsetzen ergibt

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} y_k L_{k,3}(x) \\
&= \left(x^3 - 9x^2 + 26x - 24\right) - \left(x^3 - 7x^2 + 14x - 8\right) + \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) \\
&= x^3 - 8x^2 + 23x - 22.
\end{aligned}
$$

(b) Aus Abbildung 1 erkennt man, dass p_3 die Interpolationsbedingungen für (1) erfüllt.

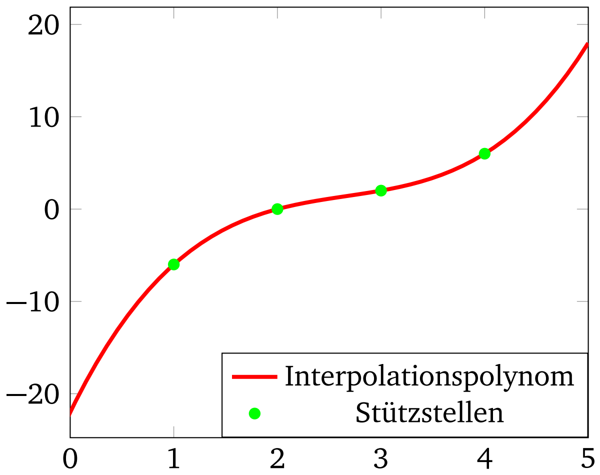

Abbildung 1: Zu Aufgabe G1: Das Interpolationspolynom p_3 und die Stützstellen.

Aufgabe G2 (Hinzunahme von Stützstellen)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$.

(a) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom p_2 vom Höchstgrad 2, welches f an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, und $x_2 = 1$ interpoliert, d.h. folgender Interpolationsbedingung genügt:

$$p_2(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

(b) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom p_3 vom Höchstgrad 3, welches f an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ interpoliert.

(c) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom p_5 vom Höchstgrad 5, welches f an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1.5$ und $x_5 = 20$ interpoliert.

Lösung: Da wir wiederholt dieselbe Funktion mit zusätzlichen Stützstellen interpolieren sollen, wählen wir das Interpolationsverfahren nach Newton.

(a) Die dividierten Differenzen lassen sich mit Hilfe des Newton-Schemas berechnen:

$$
\begin{array}{c|llllll}
x_i & y_i = f(x_i) & & & & & \\
\hline
0 & f_{[x_0]} = 3 & \searrow & & & & \\
 & & & f_{[x_0,x_1]} = \frac{f_{[x_1]} - f_{[x_0]}}{x_1 - x_0} = \frac{6-3}{-1-0} = -3 & \searrow & & \\
-1 & f_{[x_1]} = 6 & \nearrow\searrow & & & f_{[x_0,x_1,x_2]} = \frac{f_{[x_1,x_2]} - f_{[x_0,x_1]}}{x_2 - x_0} = \frac{0+3}{1-0} = 3 & \\
 & & & f_{[x_1,x_2]} = \frac{f_{[x_2]} - f_{[x_1]}}{x_2 - x_1} = \frac{6-6}{1+1} = 0 & \nearrow & & \\
1 & f_{[x_2]} = 6 & \nearrow & & & &
\end{array}
$$

Wir lesen die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung ab und erhalten

$$\gamma_0 = f_{[x_0]} = 3, \quad \gamma_1 = f_{[x_0,x_1]} = -3, \quad \gamma_2 = f_{[x_0,x_1,x_2]} = 3.$$

Daher lautet das Interpolationspolynom

$$p_2(x) = 3 - 3(x-0) + 3(x-0)(x+1) = 3x^2 + 3.$$

(b) Wir können das bestehende Newtonschema einfach um die zusätzliche Stützstelle erweitern, d.h. $f_{[x_0]}, f_{[x_1]}, f_{[x_2]}, f_{[x_0,x_1]}, f_{[x_1,x_2]}, f_{[x_0,x_1,x_2]}$ können wiederverwendet werden.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & y_i = f(x_i) & & & & & & \\
\hline
0 & 3 & \searrow & & & & & \\
 & & & -3 & \searrow & & & \\
-1 & 6 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & 3 & \searrow & \\
 & & & 0 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & 2 \\
1 & 6 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & 7 & \nearrow & \\
 & & & 21 & \nearrow & & & \\
2 & 27 & \nearrow & & & & &
\end{array}$$

Wir lesen die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung ab und erhalten

$$\gamma_0 = 3, \quad \gamma_1 = -3, \quad \gamma_2 = 3, \quad \gamma_3 = 2.$$

Daher lautet das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= 3 - 3(x-0) + 3(x-0)(x+1) + 2(x-0)(x+1)(x-1) \\
&= p_2(x) + 2x(x+1)(x-1) = 3x^2 + 3 + 2x(x^2-1) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3.
\end{aligned}$$

(c) Die zu interpolierende Funktion f ist selbst ein Polynom vom Grad 4 (also auch kleinergleich 5), das an den 6 Stützstellen die Interpolationsbedingung erfüllt. Daher gilt $p_5 = f$.

Wichtige Anmerkung: Es ist natürlich nicht Sinn und Zweck von Interpolationspolynomen, andere Polynome anzunähern. In der Regel benutzt man die Interpolation dazu, einen funktionalen Zusammenhang zu beschreiben, wenn man nur endlich viele Punktauswertungen (Messungen) zur Verfügung hat. Außerdem werden wir im Laufe der Vorlesung noch sehen, wie die Polynominterpolation dazu dient, Verfahren zur numerischen Integration schwieriger Funktionen zu entwickeln. Eine weitere Anwendung ist die sogenannte Inverse Interpolation (siehe G3), bei der man Umkehrfunktionen von bijektiven Abbildungen durch Interpolation annähert, weil diese beispielsweise nicht analytisch zu bestimmen sind.

In dieser Übung soll aber vor allem das Verfahren an sich trainiert werden. Da bieten sich Polynome als Vorlage an, da diese "schöne" Funktionswerte sicherstellen. Desweiteren sollen die wichtigen Eigenschaften von Interpolationspolynomen hervorgehoben werden.

Aufgabe G3 (Inverse Interpolation)
Es soll eine Näherung für die **Inverse Funktion** zu

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$$

bestimmt werden.

(a) Begründen Sie, warum f invertierbar ist.

(b) Die Funktion f wird an folgenden Stützstellen ausgewertet: $x_0 = 1$, $x_1 = e$, $x_2 = e^2$. (e ist die Eulersche Zahl exp(1).) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Auswertungen eine Näherung p_2 für f^{-1}. Dabei soll p_2 ein Polynom vom Höchstgrad 2 sein.

(c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus (b) um eine näherungsweise Lösung $\tilde{x}$ der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}$ zu erhalten. Vergleichen Sie ihr Ergebnis $\tilde{x}$ mit der tatsächlichen Lösung $\bar{x} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$.

Lösung:

(a) Die Funktion f ist auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$. Die Funktion ist also streng monoton wachsend und somit injektiv. Es gilt zudem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Somit ist f auch surjektiv und dementsprechend existiert eine Inverse Abbildung f^{-1}.

(b) Bei der Inversen Interpolation sind die Rollen der x_i und y_i vertauscht, d.h. die Interpolationsbedingung lautet

$$p_2(y_i) = p_2(f(x_i)) = x_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Wir stellen das Newtonschema auf und erhalten

$$\begin{array}{c|lcccc}
f(x_i) = y_i & x_i & & & & \\
\hline
0 & 1 & \searrow & & & \\
 & & & \frac{e-1}{1-0} = e-1 & \searrow & \\
1 & e & \nearrow\ \searrow & & & \frac{e^2-e-e+1}{2-0} = \frac{(e-1)^2}{2} \\
 & & & \frac{e^2-e}{2-1} = e^2 - e & \nearrow & \\
2 & e^2 & \nearrow & & &
\end{array}$$

Die Näherung für f^{-1} ist also durch

$$\begin{aligned}
p_2(y) &= 1 + (e-1)(y-0) + \frac{(e-1)^2}{2}(y-0)(y-1) = 1 + (e-1)y + \frac{(e-1)^2}{2}y^2 - \frac{(e-1)^2}{2}y \\
&= \frac{(y(e-1))^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}\right)y + 1
\end{aligned}$$

gegeben.

(c) Eine Lösung $\bar{x}$ von $f(x) = \frac{1}{2}$ ist gerade durch $\bar{x} = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ gegeben. Wir verwenden unsere Näherung p_2 für f^{-1} und erhalten

$$\tilde{x} = p_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}(e-1)^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{4}e + \frac{3}{8} \approx 1.4901,$$

was eine gute Näherung an den richtigen Wert $\bar{x} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$ ist. Zum Vergleich sind p_2 und f^{-1} in Abbildung 2 aufgetragen.

Wichtige Anmerkung: Auch für diese Aufgabe gilt, dass es sich hier eher um ein Sandkastenproblem handelt, da die Umkehrfunktion in diesem Fall natürlich bekannt ist (vgl. H3). Hier wird aber diese Tatsache genutzt, um die Näherung mit dem tatsächlichen Wert vergleichen zu können.

Hausübung

Aufgabe H1 (Newtonsche Interpolationsformel)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, 2] \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(\pi x)$$

und die Stützstellen $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

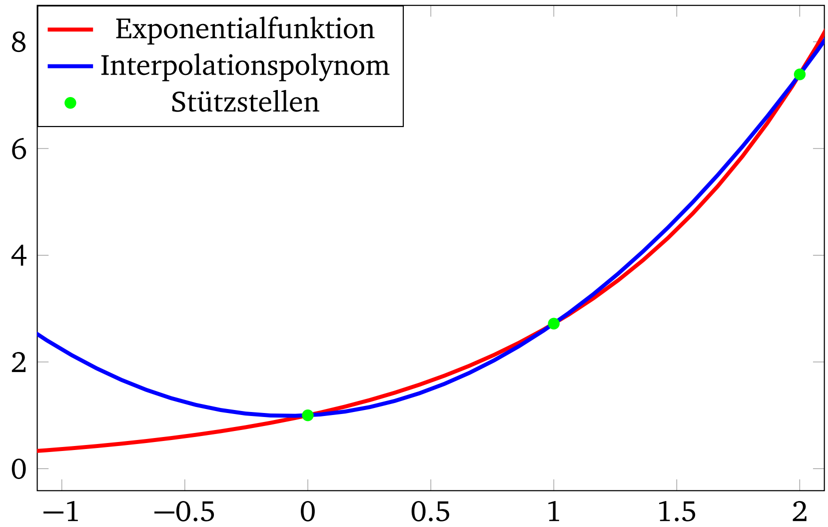

Abbildung 2: Zu Aufgabe G3: Das Interpolierende p_2 im Vergleich mit der Umkehrfunktion $f^{-1} = \exp$.

(a) Berechnen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen.

(b) Geben Sie eine obere Schranke für den Abstand von f und dem Interpolationspolynom an.

(c) Um welchen Faktor verbessert sich die Schranke, wenn die Stützstellen $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right\}$ hinzugefügt werden?

Aufgabe H2 (Lagrangesches Interpolationspolynom)
Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Lagrange-Interpolationspolynoms p_2 zwischen den Stützstellen

$$x_0 = \frac{1}{4}, \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

interpoliert werden. Vergleichen Sie die Punktauswertungen von f und p_2 in den Punkten $\tilde{x} = \frac{1}{2}$ und $\hat{x} = 2$ und skizzieren Sie die Graphen von f und p_2.

Aufgabe H3 (Inverse Interpolation)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1] \to \left[-1, \tfrac{3}{4}\right] : x \mapsto x^2 - \frac{1}{4^x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f eine Inverse Funktion besitzt.

(b) Berechnen Sie das Newtonsches Interpolationspolynom vom Grad 2 zur *Inversen Funktion* von f. Verwenden Sie dabei die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ (von f).