Formale Grundlagen der Informatik II
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
08. 07. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Normalformen)
Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln, wobei c ein Konstantensymbol, P ein einstelliges Relationssymbol und R ein zweistelliges Relationsymbol ist:

(1) $\forall x\,.\,\big(Pc \wedge \exists y\,.\,(Px \leftrightarrow \neg Py)\big)$

(2) $\forall x\,.\,(Px \vee \exists x\,.\,\neg Px)$

(3) $\forall x\,.\,\exists y\,.\,\big(Rxy \rightarrow \forall x\,.\,\exists y\,.\,Ryx\big)$

(a) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

(b) Geben Sie für die Formel aus (1) ein Herbrand-Modell an.

Aufgabe G18 (Semantikspiel)
Sei $\preceq$ ein zweistelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi := \forall x_1\,.\,\forall x_2\,.\,\exists x_3\,.\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\,.\,\big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3\big)\Big).$$

Sei $\mathscr{A} = (A, \preceq^{\mathscr{A}})$ mit $A = \{0,1,2,3\}$ und

$$\preceq^{\mathscr{A}} = \big\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,2),(2,3),(3,2)\big\}.$$

Zeigen Sie $\mathscr{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.

Aufgabe G19 (Herbrand-Struktur)
Betrachten Sie die folgenden universellen, gleichheitsfreien Sätze für 1-stellige Funktionssymbole h und v:

(1) $\forall x,y,z\,.\,\big(x \sim x \wedge (x \sim y \rightarrow y \sim x) \wedge (x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z)\big)$

(2) $\forall x\,.\big(h(v(x)) \sim v(h(x))\big)$

(3) $\forall x,y\,.\,\big(x \sim y \rightarrow (h(x) \sim h(y) \wedge v(x) \sim v(y))\big)$

(a) Sei $\mathscr{H} = (\mathscr{T}, h^{\mathscr{H}}, v^{\mathscr{H}}, \sim^{\mathscr{H}})$ eine Herbrand-Struktur. Beschreiben Sie die Trägermenge $\mathscr{T}$.

(b) Man kann die Teilmenge $\sim^{\mathscr{H}} \subseteq \mathscr{T} \times \mathscr{T}$ so wählen, dass die Herbrand-Struktur $\mathscr{H}$ ein Modell von (1)–(3) wird. Geben Sie die minimale und die maximale Lösung an. Gibt es auch noch andere Möglichkeiten?

Hausübung

– Abgabe am 17.7.-19.7. 2013 in der Übung. Denken Sie daran Ihre Antworten zu begründen. –

Aufgabe H15 (Herbrand-Struktur) (6 Punkte)

Betrachten Sie folgende Formelmenge, wobei P ein einstelliges Relations-, sowie R und S zweistellige Relationssymbole seien:

(1) $\exists x \,.\, Px$

(2) $\forall x \,.\, \exists y \,.\, Rxy$

(3) $\forall x \,.\, \exists y \,.\, Sxy$

(4) $\forall x \,.\, \forall y \,.\, \big((Px \wedge Rxy) \rightarrow Py\big)$

(5) $\forall x \,.\, \forall y \,.\, \big(Sxy \rightarrow Rxy\big)$

(a) Geben Sie die Skolem-Normalform der Sätze (1)–(5) an.

(b) Zeigen Sie, dass die Sätze (1)–(5) erfüllbar sind, indem sie ein Herbrandmodell angeben.

(c) Zeigen Sie, dass die Formelmenge unerfüllbar wird, wenn (1) durch die Formel

$$(1') \quad \exists x \,.\, \big(Px \wedge \forall y \,.\, \big(Sxy \rightarrow \neg Py\big)\big)$$

ersetzt wird. Zeigen Sie, dass die neue Formelmenge nicht erfüllbar ist.

Hinweis: Argumentieren Sie, dass es kein Herbrandmodell für die neue Formelmenge geben kann. Beachte, dass sich die Trägermenge des Herbrandmodells durch das Ersetzen von (1) durch (1′) *nicht* ändert (wenn wir dieselbe Skolemkonstante „c“ verwenden).

Aufgabe H16 (Semantikspiel) (4 Punkte)

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus der **Aufgabe G18**.

(a) Geben Sie eine zu

$$\exists x_3 \,.\, \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \,.\, \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3\big)\Big)$$

äquivalente Formel in Negationsnormalform an. (Man nenne diese Formel ψ.)

(b) Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$\big(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4)\big)$$

eine Gewinnstrategie?

Minitest

Aufgabe M12 (Termmenge)
Sei $S = (c, f, P)$ und $F = \forall x \,.\, \forall y \,.\, f x P c y$ eine geschlossene Formel (d.h. ein Satz) in Skolem-Normalform; f sei dabei ein zweistelliges Funktions- und P ein zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie die Menge $T_0(S)$ aller variablenfreien Terme über S zur Formel F an.

- ☐ $M_1 := \emptyset$
- ☐ $M_2 := \{c, x, y, f x P c y\}$
- ☐ $M_3 := \{c, Pcc, PPccc, PcPcc, \ldots\}$
- ☐ $M_4 := \{c, f cc, f f ccc, f c f cc, \ldots\}$
- ☐ $M_5 := \{f, f c, f cc, f ccc, \ldots\}$

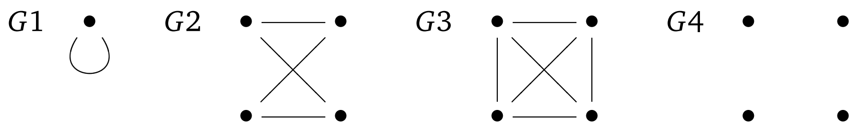
Aufgabe M13 (FO-Formeln)
Wahr oder falsch?

(a) In der FO mit Gleichheit gibt es Formeln, die nur in Strukturen, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten, erfüllbar sind.
☐ wahr ☐ falsch

(b) Jede PNF-Formel (pränexe Normalform) ist auch in SKNF (Skolem-Normalform).
☐ wahr ☐ falsch

(c) Jede SKNF-Formel ist auch in PNF.
☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe M14 (Graphen und FO)
Gegeben seien die folgenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$:



In welchem der obigen Graphen gilt welcher der nachfolgenden FO-Sätze?

G☐: $\forall x \,.\, \forall y \,.\, \big(\neg(x = y) \leftrightarrow Exy\big)$
G☐: $\exists x \,.\, \exists y \,.\, \exists z \,.\, \big(\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge Exy \wedge Eyz \wedge \neg Ezx\big)$
G☐: $\exists x \,.\, \exists y \,.\, \neg(x = y) \wedge \forall x \,.\, \forall y \,.\, \big(\neg(x = y) \rightarrow \neg Exy\big)$
G☐: $\exists x \,.\, \forall y \,.\, \big(x = y\big)$