Mathematik II für Informatik
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Alexander Dietz, Anton Freund
Lucas Schöbel-Kröhn

SoSe 2018
Übung: 26./27. April 2018
Abgabe: 3./4. Mai 2018

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Topologische Eigenschaften und Häufungspunkte)
Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt? Was sind die Häufungspunkte dieser Mengen? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

(a) $\emptyset$,

(b) $\{0\}$,

(c) $(0,1]$,

(d) $(0,\infty)$,

(e) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} \cup \{0\}$,

(f) $\mathbb{Q}$.

Aufgabe G2 (Vereinigungen und Schnitte offener und abgeschlossener Mengen)
Seien $O_1, O_2, \ldots$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind.

(b) Was können Sie für Vereinigungen und Schnitte von abgeschlossenen Mengen folgern?

(c) Zeigen Sie, dass
$$\bigcup_{i=1,2,\ldots} O_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt ein } i \geq 1 \text{ mit } x \in O_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
eine offene Menge ist.

(d) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Menge
$$\bigcap_{i=1,2,\ldots} O_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{für alle } i \geq 1 \text{ gilt } x \in O_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
im Allgemeinen nicht offen ist.

Aufgabe G3 (Umkehrung stetiger Funktionen)
Gemäß Satz 5.7.20 ist die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion unter bestimmten Bedingungen stetig. Machen sie sich anhand der folgenden Beispiele klar, dass dies nicht allgemein gilt:

(a) Betrachten Sie die Funktion $f : [0,1) \cup \{2\} \to [0,1]$ mit
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0,1), \\ 1 & \text{für } x = 2. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass diese Funktion stetig und bijektiv ist. Geben Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,1] \to [0,1) \cup \{2\}$ an und zeigen Sie, dass diese nicht stetig ist. Welche Bedingung von Satz 5.7.20 ist verletzt?

(b) Geben Sie eine stetige, bijektive Funktion $h : [0,2\pi) \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ an, deren Umkehrung nicht stetig ist. Warum ist Satz 5.7.20 nicht anwendbar?

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenz in normierten Räumen) (8 Punkte)

(a) Sei

$$a_n := \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{5\cdot 3^k}{4^{k+2}} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ 42 + \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz im Raum $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ eine Cauchy-Folge ist. (Bemerkung: Der Raum $(V, \|\cdot\|_V)$ heißt vollständig, wenn die Umkehrung gilt, wenn also jede Cauchy-Folge konvergiert.)

Aufgabe H2 (Grenzwerte und Stetigkeit) (12 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert im Punkt $x = 0$, falls diese existieren. Welche der Funktionen sind in $x = 0$ stetig?

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{für } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{für } x < 0, \\ (x+2)^2, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Aufgabe H3 (Babylonisches Wurzelziehen mit dem Banachschen Fixpunktsatz) (16 Punkte)

Das Verfahren des babylonischen Wurzelziehens, auch als Heron-Verfahren bekannt, berechnet die Wurzel aus 3 mit der folgenden Rekursionsformel:

$$x_0 := 2,$$
$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n}).$$

Wir betrachten auch die Funktion $f : [\frac{3}{2}, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$.

(a) Zeigen Sie, dass das Bild von f wieder in $[\frac{3}{2}, 2]$ enthalten ist.

(b) Finden Sie ein $q \in (0,1)$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $x, y \in [\frac{3}{2}, 2]$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ ein Fixpunkt der Funktion f ist. Folgern Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$ gilt.

(d) Zeigen Sie mit der A-priori-Abschätzung aus der Vorlesung, dass $|x_4 - \sqrt{3}| < 0,001$ gilt. Geben Sie den Wert x_4 an und vergleichen Sie ihn mit dem tatsächlichen Wert $\sqrt{3}$.