Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007

Klausur

Formale Grundlagen der Informatik II

Name:	
Matr.-Nr.:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte (maximal)	12	12	12	12	12	48 (+12)
erreichte Punkte						

Note:

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen.

Bearbeiten Sie **mindestens 4 Aufgaben** Ihrer Wahl von den folgenden 5 Aufgaben. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

Aufgabe 1 12 Punkte

Seien $\varphi := \neg[(p \wedge q) \vee (q \to r)]$ und $\psi := \neg p \wedge q \wedge \neg r$ aussagenlogische Formeln.

(a) Wandeln Sie φ und $\neg\psi$ in KNF um.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß $\varphi \models \psi$.

(c) Leiten Sie die Sequenz $\varphi \vdash \psi$ im Sequenzenkalkül ab. (Da wir keine Regeln für die Implikation $\to$ besitzen, muß diese in φ zuerst eliminiert werden.)

Aufgabe 2 12 Punkte

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle für φ (und alle relevanten Teilformeln), ob die Formel

$$\varphi := \neg[((p \to q) \vee \neg(q \wedge r)) \to (r \wedge \neg(p \vee q))]$$

erfüllbar und ob sie allgemeingültig ist.

(b) Zeigen Sie, daß es keine Formel ψ geben kann, welche äquivalent zu φ ist und in der eine der Variablen p, q oder r nicht vorkommt.

(c) Finden Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \to r \\ p \\ q \wedge r \to p \\ p \to r \end{array}$$

Wieviele erfüllende Belegungen gibt es insgesamt?

Aufgabe 3 12 Punkte

Sei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol. Betrachten Sie die FO-Sätze

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \forall x(Px \to \exists y Rxy) \\ \varphi_2 &:= \forall x \forall y[Rxy \to (\neg Px \vee \neg Py)] \\ \varphi_3 &:= \exists x Px \\ \psi &:= \exists x \neg Px \end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie φ_1, φ_2, φ_3 und $\neg\psi$ in Skolem-Normalform um.

(b) Bringen Sie $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \neg\psi$ in Klauselform.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Grundinstanzenresolution, daß $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \models \psi$.

Aufgabe 4 12 Punkte

(a) Welche der folgenden Aussagen zur Logik erster Stufe sind korrekt? Geben Sie jeweils eine kurze aber klare Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(i) Für jede erfüllbare Formel φ ist die Formel $\neg\varphi$ unerfüllbar.

(ii) Für jede erfüllbare Formel φ ist auch die Formel $\exists x \varphi$ erfüllbar.

(iii) Für jede erfüllbare Formel φ ist auch die Formel $\forall x \varphi$ erfüllbar.

(b) Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) die Folgerungsbeziehung $\Gamma \models \varphi \to \psi$;

(2) die Ableitbarkeit der Sequenz $\Gamma \vdash \neg\varphi, \psi$;

(3) die Ableitbarkeit der Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

Aufgabe 5 12 Punkte

(a) Seien P und Q einstellige Relationssymbole. Wir betrachten Strukturen der Form $(\mathbb{N}, <, P, Q)$, welche das zeitliche Verhalten eines Systems mit zwei Zuständen P und Q beschreiben sollen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in der Prädikatenlogik:

(i) P und Q treten nie gleichzeitig ein.

(ii) Keine zwei P kommen direkt hintereinander.

(iii) P tritt unendlich oft auf.

(b) Wir betrachten den Satz

$$\varphi := \forall x \forall y \forall z[(x < y \land y < z \land \neg Px \land \neg Py \land \neg Pz) \to \exists w(x < w \land w < z \land Pw)]$$

und die beiden Strukturen $\mathcal{A} = (\{1, \ldots, 16\}, <, P^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (\{1, \ldots, 16\}, <, P^{\mathcal{B}})$

$\mathcal{A}$: • − ∘ − ∘ − • − ∘ − ∘ − • − ∘ − ∘ − • − ∘ − ∘ − • − ∘ − ∘ − •

$\mathcal{B}$: • − ∘ − ∘ − • − ∘ − ∘ − ∘ − ∘ − ∘ − • − ∘ − ∘ − • − ∘ − ∘ − •

mit $P^{\mathcal{A}} := \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ und $P^{\mathcal{B}} := \{1, 4, 10, 13, 16\}$.

(i) Weisen Sie nach, daß φ nicht in $\mathcal{B}$ gilt.

(ii) Bilden Sie die Skolem-Normalform φ' von φ und finden Sie eine geeignete Skolem-Funktion f, so daß φ' in der Erweiterung $(\mathcal{A}, f)$ gilt. (Insbesondere erfüllt $\mathcal{A}$ also φ.)

Hinweis. Versuchen Sie, eine Interpretation der Skolem-Funktion zu finden, welche z. B. nur vom ersten Argument abhängt; diese kann dann in Form einer Wertetabelle angegeben werden.

(iii) Finden Sie einen Satz ψ mit kleinerem Quantorenrang als φ, welcher die beiden Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ unterscheidet. Geben Sie zusätzlich zu ψ auch eine präzise Beschreibung der von ψ formalisierten Struktureigenschaft in eigenen Worten an. (Ein Nachweis, daß ψ in $\mathcal{A}$ aber nicht in $\mathcal{B}$ gilt, bzw. umgekehrt, ist nicht erforderlich.)