Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008

Klausur

Formale Grundlagen der Informatik II

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	
Punkte (maximal)	12	12	12	12	12	48	(+12)
erreichte Punkte							

Note:

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen.

Bearbeiten Sie **mindestens 4 Aufgaben** Ihrer Wahl von den folgenden 5 Aufgaben. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

Aufgabe 1 **12 Punkte**

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle für φ (und alle relevanten Teilformeln), ob die Formel

$$\varphi := [\neg(p \to q) \land (r \to \neg(p \land r))] \to (p \lor \neg(q \to r))$$

erfüllbar und ob sie allgemeingültig ist.

(b) Seien

$$\varphi := (q \land r) \lor \neg(p \lor q \lor r) \quad \text{und} \quad \psi := [\neg p \land (r \to q)] \lor (p \land q \land r)$$

aussagenlogische Formeln. Bringen Sie φ und $\neg\psi$ in Klauselform.

(c) Seien φ und ψ die Formeln aus Teil (b). Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, daß $\varphi \vDash \psi$.

Aufgabe 2 **12 Punkte**

Sei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol. Betrachten Sie die FO-Sätze

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y[Rxy \to \exists z(Pz \land Rxz \land Rzy)] \\
\varphi_2 &:= \forall x \exists y Rxy \\
\psi &:= \exists x \exists y(Rxy \land Px \land Py)
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie φ_1, φ_2 und $\neg\psi$ in Skolem-Normalform um. Verwenden Sie dabei f und g als Namen für die Skolem-Funktionen in φ_1 bzw. φ_2.

(b) Bringen Sie Skolem-Normalform von $\varphi_1 \land \varphi_2 \land \neg\psi$ in Klauselform.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Grundinstanzenresolution, daß $\varphi_1 \land \varphi_2 \vDash \psi$.

Hinweis. Machen Sie sich klar, daß in jedem Modell von $\varphi_1 \land \varphi_2$ folgende Situation auftritt:

$$\begin{tikzcd}
\overset{P}{fcfcgc} \arrow[r] & \overset{P}{fcgc} \arrow[d] \\
c \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & gc
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3 **12 Punkte**

(a) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Sequenzenregeln, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:

$$\text{(i)} \quad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta, \neg\psi}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta, \neg\varphi}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi} \qquad \text{(iii)} \quad \frac{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}$$

(b) Leiten Sie die folgende Sequenz ab:

$$\exists y(Py \land Rcy), \forall y(\neg Rcy \lor Pc) \vdash \exists x \exists y(Rxy \land Px \land Py)$$

Aufgabe 4 12 Punkte

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Geben Sie jeweils eine kurze aber klare Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(i) Es gibt einen Algorithmus, der für aussagenlogische Formeln φ und ψ entscheidet, ob $\varphi \models \psi$.

(ii) Es gibt einen Algorithmus, der für FO-Formeln φ und ψ entscheidet, ob $\varphi \models \psi$.

(iii) Wenn $\varphi \wedge \psi$ unerfüllbar und $\varphi \vee \psi$ allgemeingültig ist, dann ist $\psi \equiv \neg\varphi$.

(iv) Wenn $\varphi \vee \psi$ allgemeingültig ist, dann ist φ allgemeingültig oder ψ ist allgemeingültig.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß es keine Menge Φ von FO-Formeln gibt, so daß gilt

$$(A, E) \models \Phi \quad \text{gdw} \quad E \text{ eine Äquivalenzrelation auf } A \text{ mit endlich vielen Äquivalenzklassen ist.}$$

Aufgabe 5 12 Punkte

(a) Wir betrachten Graphen $G = (V, E, P, Q)$ mit zweistelliger Kantenrelation E und zwei zusätzlichen einstelligen Relationssymbolen P und Q. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in der Prädikatenlogik:

(i) Es gibt mindestens 3 Elemente in P.

(ii) Jede Kante verläuft von einem Knoten in P zu einem Knoten in Q.

(iii) Von jedem Knoten in Q führt eine Kante zu einem Knoten in P.

(b) Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie zu dem Satz

$$\varphi := \forall x Rfxx \wedge \forall x \forall y(Rfxfy \rightarrow Rxy) \wedge \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$$

ein Herbrand-Modell an.