Mathematik II für Informatik
6. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 26. Mai 2017
Abgabe: 01./02. Juni 2017

Bitte beachten Sie, dass die **Übungen am Donnerstag, den 25.05.2017** auf Grund des Feiertags **entfallen**. Daher gibt es auf diesem Übungsblatt auch **nur Hausübungen**.
Sie können gerne die Übungen am Freitag, den 26.05.2017 als **zusätzliche Sprechstunden** nutzen.
Die Hausübungen dieses Blatts geben Sie bitte **zusammen mit den Hausübungen von Blatt 5** wie gewohnt in Ihrer Übung am 01. bzw. 02.06.2017 ab.

Hausübung

Aufgabe H1 (Trigonometrische und hyperbolische Funktionen) (12 Punkte)
Wir betrachten die trigonometrischen Funktionen aus Definition 5.10.6 und die hyperbolischen Funktionen, wie sie in Definition 5.10.22 definiert sind.

(a) Beweisen Sie die Eulersche Formel: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z).$$

(b) Zeigen Sie nun, dass

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

gilt.

(c) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

(d) Zeigen Sie: Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).$$

(e) Überprüfen Sie, ob $\sinh(z)$ und $\cosh(z)$ gerade oder ungerade Funktionen sind.

Lösungshinweise:

(a) Wir nutzen die Reihendarstellungen von e^z, $\sin(z)$ und $\cos(z)$:

$$\begin{aligned}\cos(z) + i\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(i^2)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = e^{iz}.\end{aligned}$$

(b) Wir nutzen die Formel aus (a) und die Symmetrie-Eigenschaften von $\sin(z)$ und $\cos(z)$:

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= \frac{1}{2}(\cos(z)+i\sin(z)+\cos(-z)+i\sin(-z))\\ &= \frac{1}{2}(\cos(z)+i\sin(z)+\cos(z)-i\sin(z))\\ &= \cos(z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} &= \frac{1}{2}(\cos(z)+i\sin(z)-\cos(-z)-i\sin(-z))\\ &= \frac{1}{2i}(\cos(z)+i\sin(z)-\cos(z)+i\sin(z))\\ &= \sin(z).\end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}\cosh^2(z)-\sinh^2(z) &= \frac{1}{4}\left((e^z+e^{-z})^2-(e^z-e^{-z})^2\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2z}+2e^ze^{-z}+e^{-2z}-e^{2z}+2e^ze^{-z}-e^{-2z}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(4e^{z-z}\right) = e^0 = 1.\end{aligned}$$

(d) Wir nutzen die Darstellung von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ aus (b).

$$\begin{aligned}\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^y+e^{-y}\right)+\frac{i}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^y-e^{-y}\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{ix+y}+e^{ix-y}-e^{-ix+y}-e^{-ix-y}\right)+\frac{i}{4}\left(e^{ix+y}-e^{ix-y}+e^{-ix+y}-e^{-ix-y}\right)\\ &= \left(\frac{1}{4i}+\frac{i}{4}\right)\left(e^{ix+y}-e^{-ix-y}\right)+\left(\frac{1}{4i}-\frac{i}{4}\right)\left(e^{ix-y}-e^{-ix+y}\right)\\ &= \frac{1+i^2}{4i}\left(e^{ix+y}-e^{-ix-y}\right)+\frac{1-i^2}{4i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)\\ &= \frac{1-1}{4i}\left(e^{ix+y}-e^{-ix-y}\right)+\frac{2}{4i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\\ &= 0+\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\\ &= \sin(z).\end{aligned}$$

(e) Die Funktion $\sinh(z)$ ist eine ungerade Funktion:

$$\sinh(-z) = \frac{e^{-z}-e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2} = -\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = -\sinh(z).$$

Die Funktion $\cosh(z)$ ist eine gerade Funktion:

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z}+e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \cosh(z).$$

Aufgabe H2 (Tangens und Polarkoordinaten) (12 Punkte)

(a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $\tan(z)$, definiert wie in Definition 5.10.14, eine gerade oder eine ungerade Funktion ist. Bestimmen Sie außerdem die Periode von $\tan(z)$, falls möglich.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ gilt:

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \text{und} \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

(c) Zeigen Sie die Formel von De Moivre: Für $z = re^{i\varphi} \neq 0 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \right).$$

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe von (c) alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt: $z^3 = 8$. Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ an.

(e) Bestimmen Sie von $z_1 = -(1 + i\sqrt{3})$ die Darstellung in Polarkoordinaten (mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$) und von $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ die Darstellung in kartesischen Koordinaten.

Lösungshinweise:

(a) Die Tangens-Funktion ist ungerade:

$$\tan(-z) = \frac{\sin(-z)}{\cos(-z)} = \frac{-\sin(z)}{\cos(z)} = -\tan(z).$$

Außerdem ist sie π-periodisch:

$$\tan(z + \pi) = \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} \overset{\text{Satz 5.10.12 (c)}}{=} \frac{-\sin(z)}{-\cos(z)} = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \tan(z).$$

(b) Es gilt:

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (trigonometrischer Pythagoras).
Mit den Additionstheoremen aus Satz 5.10.12 (b) für $x = y$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} &= \frac{2\frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\
&= \frac{2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1 - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{2\tan(x)}{1 - \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2} \\
&= \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.
\end{aligned}$$

(c) Mit der Eulerschen Formel (H1) erhalten wir:

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \right).$$

(d) Wir setzen $z = re^{i\varphi}$. Nach der Formel von De Moivre (c) muss gelten:

$$8 = z^3 = r^3 e^{3i\varphi} \qquad \text{und insbesondere} \qquad 8 = |8| = \left| r^3 e^{3i\varphi} \right| = r^3 \left| e^{3i\varphi} \right|.$$

Da

$$\left| e^{iz} \right| = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt, muss $r^3 = 8$ bzw.

$$r = 2,$$

sowie

$$1 = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}$$

gelten. Da $\varphi \in \mathbb{R}$, verrät ein Blick auf die Eulersche Formel, dass

$$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = 1 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

gilt. Damit folgt:

$$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{3\varphi\mathrm{i}} \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi = \frac{2}{3}k\pi.$$

Da nun aber (nach Konvention) $\varphi \in (-\pi, \pi]$ gefordert ist, gibt es nur die drei (verschiedene) Lösungen mit $k \in \{-1, 0, 1\}$:

$$\varphi_1 = -\frac{2}{3}\pi, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \frac{2}{3}\pi$$

und somit

$$z_1 = 2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}, \quad z_2 = 2, \quad z_3 = 2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}.$$

(e) Wir orientieren uns an Bemerkung 5.10.8. Es gilt:

$$z_1 = -1 - \sqrt{3} \cdot \mathrm{i}, \text{ d.h. } x_1 = -1 \text{ und } y_1 = -\sqrt{3}.$$

Damit berechnen wir:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

und

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \pi = \arctan(\sqrt{3}) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi, \text{ da } x_1 < 0 \text{ und } y_1 < 0.$$

Also ist

$$z_1 = 2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}.$$

Weiter gilt für z_2:

$$x_2 = r_2 \cos(\varphi_2) = 2\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

und

$$y_2 = r_2 \sin(\varphi_2) = 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Damit erhalten wir:

$$z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Aufgabe H3 (Stetigkeit und Potenzreihen) (12 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0, \\ \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{sonst.} \end{cases}$$

i. Sind die beiden Funktionen

$$k_1(x) = f(x,0) \qquad \text{und} \qquad k_2(y) = f(0,y)$$

stetig?

ii. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen f stetig bzw. nicht stetig ist.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 8^n \cdot (x+1)^{3n} \,?$$

Lösungshinweise:

(a) i. Beide Funktionen sind Nullfunktionen und daher stetig.

ii. Der Nenner x^2+y^2 verschwindet nur für $x = 0 = y$. Daher ist die Funktion auf jeden Fall auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. (Satz 5.8.5)

Es bleibt also die Stetigkeit in $(0,0)$ zu prüfen. Dazu wählen wir die Folge

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

und berechnen:

$$f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = f(0,0) = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Da die beiden Grenzwerte nicht übereinstimmen, kann f in $(0,0)$ nicht stetig sein.

(b) Wir substituieren zunächst mit

$$z := (x+1)^3$$

und erhalten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 8^n \cdot z^n.$$

Nun können wir den Konvergenzradius mit Hilfe des Quotientenkriteriums berechnen: Zunächst ist

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 8^{n+1}}{n \cdot 8^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8(n+1)}{n} = 8$$

und somit

$$r = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{8}.$$

Also konvergiert die Potenzreihe auf jeden Fall für alle

$$|z| < \frac{1}{8} \qquad \text{bzw. } |x+1| < \frac{1}{2}.$$

Das Konvergenzintervall bezüglich x ist also mindestens

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Es bleibt der Rand, also $x = -\frac{3}{2}$ und $x = -\frac{1}{2}$, zu prüfen. Wir berechnen

$$x = -\frac{3}{2}: \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 8^n \cdot \left(-\frac{3}{2}+1\right)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 8^n \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (-1)^n,$$

$$x = -\frac{1}{2}: \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 8^n \cdot \left(-\frac{1}{2}+1\right)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 8^n \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

und sehen, dass beide Reihen divergieren, da die Folgen $(n \cdot (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolgen sind. Folglich konvergiert die Potenzreihe für alle

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$