Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Hannes Meinlschmidt
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2013
14. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Maximum-Likelihood-Schätzer)
Um die Präzision einer Waage zu überprüfen, wird n-mal das Gewicht eines Kilogramm-Prototyps gemessen. Die entstehende Messreihe soll als Realisierung von unabhängigen, identisch $N(1,\theta)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ mit unbekannter Varianz $\theta > 0$ aufgefasst werden.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

(b) Ist T_n erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$?

Aufgabe G2 (Konfidenzintervalle)
Bei der Größenmessung in einer Gruppe von 9 Personen ergaben sich folgende Körpergrößen [in cm]:

$$184.2,\quad 182.6,\quad 185.3,\quad 184.5,\quad 186.2,\quad 183.9,\quad 185.0,\quad 187.1,\quad 184.4.$$

Diese Messwerte werden als Realisierungen der Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_9$ angenommen, die unabhängig und identisch $N(\mu,\sigma^2)$-verteilt seien.

(a) Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für den Erwartungswert μ an, falls die Standardabweichung bekannt ist und $\sigma = 2.4$ [cm] beträgt.

(b) Welches Konfidenzintervall für μ ergibt sich in (a) für dasselbe Konfidenzniveau, falls die Standardabweichung als unbekannt angenommen wird?

(c) Ermitteln Sie im letzteren Fall ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für die Varianz σ^2.

(d) Formulieren Sie in eigenen Worten, was Ihre Resultate aus den ersten drei Aufgabenteilen besagen.

(e) Beantworten Sie folgende Frage, ohne erneut eine Rechnung durchzuführen: Sei J das Konfidenzintervall für μ zum Niveau 0.99 bei bekannter Varianz $\sigma^2 = 1.725$. Welche vergleichende Aussage können Sie über J und die in (a) und (b) berechneten Intervalle treffen?

Aufgabe G3 (Konstruktion nicht-symmetrischer Konfidenzintervalle)
Bei der Shell Jugendstudie 2006 wurden 1000 Mädchen befragt. Dabei gaben 55 Prozent der befragten Mädchen an, das Abitur anzustreben. Es soll nun ein nichtsymmetrisches Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 der Form $J = [u,1]$ für den relativen Anteil aller Mädchen in Deutschland p, die das Abitur anstreben, konstruiert werden.

(a) X_i gebe die Entscheidung eines Mädchens für ($X_i = 1$) oder gegen ($X_i = 0$) das Abitur an. Wie ist X_i verteilt?

(b) Wie können Sie aus den gegeben Informationen über die Verteilung und die Stichprobe den Wert der Stichprobenvarianz $S^2_{(1000)}$ für die durch die Umfrage gegebene Realisierung ermitteln?

(c) Machen Sie sich klar, was das Konfidenzintervall aussagt und durch welche Charakterisierung es in diesem Fall bestimmt wird. Was ist die gesuchte Größe?

(d) Nehmen Sie im Folgenden an, dass für unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ und n groß genug die Zufallsvariable

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_{(n)} - E(X_1)}{\sqrt{S^2_{(n)}}}$$

annähernd $N(0,1)$-verteilt ist und benutzen Sie dies, um ein allgemeines Konfidenzintervall für die obige Fragestellung zu konstruieren.

(e) Berechnen Sie das konkrete Konfidenzinzervall für oben angegebene Stichprobe.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konfidenzintervalle für Defektwahrscheinlichkeiten)
Man ist an einem Konfidenzintervall für die Defektwahrscheinlichkeit $\theta \in (0,1)$ eines Produktionsprozesses interessiert. Um die Anzahl defekter Produkte in einer Stichprobe vom Umfang n zu zählen, verwenden wir unabhängig identisch $B(1,\theta)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots X_n$, wobei $X_i = 1$ für $i = 1, \dots n$, falls das i-te Produkt defekt ist. Die Anzahl defekter Produkte in der Stichprobe, also die Summe $Y = X_1 + \dots + X_n$, ist dann aufgrund der Unabhängigkeitsannahme $B(n,\theta)$-verteilt.

(a) Zeigen Sie, dass

$$P_\theta\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{Y - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P_\theta\left((Y-n\theta)^2 \leq u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot n\theta(1-\theta)\right) \approx 1-\alpha$$

gilt. Sie dürfen hierbei annehmen, dass n sehr groß ist.

(b) Folgern Sie daraus, dass θ mit Wahrscheinlichkeit von etwa $1-\alpha$ im Konfidenzintervall

$$I(X_1, \dots X_n) = \left[\frac{1}{n + u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\left(Y + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Y\left(1-\frac{Y}{n}\right) + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4}}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{n + u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\left(Y + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Y\left(1-\frac{Y}{n}\right) + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4}}\right)\right]$$

liegt. Nehmen Sie an, dass $I(X_1, \dots X_n) \subset (0,1)$ gilt.

(c) Ein Hersteller von Elektrogeräten möchte eine grössere Lieferung Transistoren auf ihre Qualität testen. Dazu überprüft er 400 zufällig ausgewählte Transistoren, von denen 12 nicht den Qualitätsanforderungen genügen. Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für die Ausschusswahrscheinlichkeit zum Niveau 0.95.

Aufgabe H2 (Maximum-Likelihood-Schätzer)
Wir betrachten erneut den Schätzer aus der G1. Ist T_n auch konsistent?
Hinweis(e): Sie werden hierfür sowohl geeignet substituieren, als auch partiell integrieren müssen. Beachten Sie zudem, dass für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable S gilt:

$$\mathrm{Var}(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1.$$