Formale Grundlagen der Informatik II
5. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
01. 07. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Modellierung)
Ein Meteorologe versucht die zeitliche Entwicklung des Wetters an einem bestimmten Ort mit folgender Signatur in FO zu beschreiben:

$$S = \{0, N, <, S, R\}.$$

0	Konstante für Starttag
N	1-stelliges Funktionssymbol für „nächster Tag“
$<$	2-stelliges Relationssymbol für die zeitliche Ordnung der Tage
S, R	1-stellige Relationssymbole für <u>S</u>onne und <u>R</u>egen

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO(S):

1. Auf Regen folgt (irgendwann) Sonnenschein.
2. Jeden zweiten Tag scheint die Sonne.
3. Wenn an einem Tag die Sonne scheint, gibt es innerhalb drei Tagen wieder Regen.

Aufgabe G14 (Sortieren)
Betrachten Sie die Struktur $\mathscr{N} = (\mathbb{N}, <)$, wobei $<$ die übliche Ordnung ist. Geben Sie einen Algorithmus an, der für in subquadratisch vielen Schritten entscheidet, ob eine Folge von Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden ist.

Aufgabe G15 (Wörter und Sprachen)
Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ mit Hilfe der Prädikatenlogik definieren. Wie im Skript, S. 3, definieren wir zu einem nichtleeren Wort $w = w_1 \ldots w_n \in \Sigma^+$ eine *Wortstruktur*

$$\mathscr{W}(w) = \big(\{1, \ldots, n\}, <, P_a, P_b\big)$$

wobei

$$P_a := \big\{i \leq n \,\big|\, w_i = a\big\} \quad \text{und} \quad P_b := \big\{i \leq n \,\big|\, w_i = b\big\}.$$

(Wir schließen das leere Wort aus, da es keine leeren Strukturen gibt.) Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(<, P_a, P_b)$ definiert dann die Sprache $L(\varphi) := \big\{w \in \Sigma^+ \,\big|\, \mathscr{W}(w) \models \varphi\big\}$.

(a) Welche Sprachen definieren die folgenden Formeln?
   i. $\forall x \,.\, \forall y \,.\, \big(x < y \rightarrow ((P_a x \rightarrow P_a y) \wedge (P_b y \rightarrow P_b x))\big)$
   ii. $\forall x \,.\, \forall y \,.\, \big((x < y \wedge P_a x \wedge P_a y) \rightarrow \exists z \,.\, (x < z \wedge z < y \wedge P_b z)\big)$

(b) Geben Sie zu den folgenden Sprachen Formeln an, welche sie definieren.

 i. $\mathtt{L}\left((\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\mathtt{bb}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\right)$

 ii. $\mathtt{L}\left((\mathtt{ab})^+\right)$

Aufgabe G16 (Modellierung)

(a) Geben Sie eine FO-Formel an, die besagt, dass die Trägermenge mindestens n Elemente enthält.

(b) Drinking principle von Raymond Smullyan: Betrachte eine nicht leere Kneipe. Stellen Sie mithilfe einer Formel in FO den folgenden Satz: In der Kneipe gibt es jemanden, sodass wenn er oder sie trinkt, dann trinken alle. Begründen Sie, warum Ihre Formel allgemeingültig ist.

Hausübung

– Abgabe am 10.7.-12.7. 2013 in der Übung. Denken Sie daran Ihre Antworten zu begründen. –

Aufgabe H11 (Modellierung (Vergleiche **Aufgabe G13**)) (2 Punkte)

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO(S):

1. Regen dauert nie länger als drei Tage.
2. Innerhalb jeder Periode von vier Tagen regnet es an mindestens zwei Tagen.

Aufgabe H12 (Sortieren (Vergleiche **Aufgabe G14**)) (3 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $(<)$ und eine Struktur $\mathscr{A} = (A, <^{\mathscr{A}})$ in dieser Signatur.

(a) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der bei der Eingabe einer Folge von Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus A entscheidet, ob die a_i paarweise verschieden sind. Wieviele Schritte benötigt Ihr Algorithmus?

(b) Welche Eigenschaften von $\mathscr{N}$ haben Sie in G14 benutzt und können Sie einen FO($<$) Satz φ angeben, so dass Ihr Algorithmus für alle Strukturen $(A, <^{\mathscr{A}}) \models \varphi$ funktioniert?

Aufgabe H13 (Wörter und Sprachen (Vergleiche **Aufgabe G15**)) (2 Punkte)

Wir definieren die Menge der $*$-*freien regulären Ausdrücke* induktiv durch

- $\emptyset$ und jedes Element von Σ sind $*$-freie reguläre Ausdrücke;
- sind α und β $*$-freie reguläre Ausdrücke, so auch $\alpha\beta$, $\alpha+\beta$ und $\sim\alpha$.

Die Semantik eines solchen Ausdrucks ist wie für reguläre Ausdrücke definiert, wobei die Operation $\sim$ für die Komplementierung steht: $L(\sim\alpha) := \Sigma^* \setminus L(\alpha)$. Konstruieren Sie (induktiv) zu einem gegebenen $*$-freien regulären Ausdruck α eine Formel $\varphi_\alpha(x, y)$, so dass

$$\mathscr{W}(w_1 \ldots w_n) \models \varphi_\alpha(i, k) \iff 1 \leq i \leq k \leq n \text{ und } w_i w_{i+1} \cdots w_k \in L(\alpha).$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die $*$-freien regulären Ausdrücke genau die Sprachen beschreiben, die man mit Prädikatenlogik definieren kann. Weiterhin gibt es reguläre Ausdrücke, die Sprachen beschreiben, die von keinem $*$-freien regulären Ausdruck beschrieben werden. Reguläre Ausdrücke können also mehr Sprachen beschreiben als Logik erster Stufe. Allerdings gibt es eine Erweiterung der Logik erster Stufe, die sogenannte *monadische Logik zweiter Stufe*, mit der man genau die Sprachen definieren kann, die auch von regulären Ausdrücken beschrieben werden.

Aufgabe H14 (Unendliche Erfüllbarkeit) (3 Punkte)

Betrachte FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, wobei f ein Symbol für 1-stellige Funktionen ist.

(a) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die von einem Modell erfüllt wird genau dann, wenn die Interpretation von f injektiv ist.

(b) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die von einem Modell erfüllt wird genau dann, wenn die Interpretation von f surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat.

Minitest

Aufgabe M10 (Pränex Normalform)
Sei P ein beliebiges einstelliges Prädikat. Betrachte die folgenden Formeln in Pränex Normalform.

1. $\exists x \,.\, \exists y \,.\, \big(Pz \wedge \neg Px \wedge Py\big)$
2. $\exists y \,.\, \forall x \,.\, \big((Pz \wedge Py) \vee (\neg Px \wedge \neg Pz)\big)$
3. $\exists x \,.\, (Px \wedge \neg Pz)$
4. $\forall x \,.\, \exists y \,.\, \big(Px \wedge \neg Py\big)$

Zu welchen Formeln unten sind die obigen Formeln äquivalent?

( ) $\exists x \,.\, \big(\neg(Px \rightarrow Pz) \wedge \neg\exists y \,.\, \big(Py \wedge Pz\big)\big)$
( ) $\neg\forall y \,.\, \big((Pz \wedge Py) \rightarrow \forall x \,.\, Px\big)$
( ) $\big(\forall x \,.\, \neg(Px \vee Pz)\big) \vee \exists y \,.\, \big(Pz \wedge Py\big)$

Aufgabe M11 (Allgemeingültigkeit)
Sei $P(x)$ ein beliebiges einstelliges Prädikat. Welche der folgenden Sätze in der Signatur (P) sind allgemeingültig?

☐ $\forall x \,.\, \exists y \,.\, x = y$
☐ $\exists x \,.\, \forall y \,.\, x = y$
☐ $\forall x \,.\, \big(P(x) \vee \exists y \,.\, \neg P(y)\big)$