# Mathematik IV f. Elektrotechnik
# Mathematik III f. Informatik
# 8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Stefan Ulbrich**
Dipl.-Math. Hannes Meinlschmidt
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

**SoSe 2013**
**11. Juni 2013**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Kubische Splines)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1,1] \to [1,2], \quad x \mapsto 2^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}.$$

Interpolieren Sie die Funktion $f$ durch einen kubischen Spline. Verwenden Sie dabei die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$ und natürliche Randbedingungen.

**Aufgabe G2** (Simpson- und $\frac{3}{8}$-Regel)
Wir betrachten das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie $I$.

(b) *Simpson-Regel:* Berechnen Sie eine Näherung für ln(2) durch eine näherungsweise Berechnung des gegebenen Integrals mit Hilfe der Simpson-Regel und schätzen Sie den Fehler ab.

(c) 3/8-*Regel:* Lässt sich Ihre Näherung für ln(2) verbessern, wenn Sie die $\frac{3}{8}$-Regel verwenden? Vergleichen Sie dazu sowohl die Fehlerabschätzungen, als auch die tatsächlichen Fehler.

**Aufgabe G3** (Inverses Problem der Quadratur)
Wir wollen das Integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

approximieren und dabei einen festgelegten Fehler von maximal $10^{-4}$ einhalten. Geben Sie für die summierte Trapezregel und die summierte Simpson-Regel jeweils eine möglichst große Schrittweite $h$ und eine minimale Anzahl $m$ von Teilintervallen an, sodass der Quadraturfehler bei der Berechnug von $I(f)$ höchstens $10^{-4}$ beträgt.

*Hinweis:* Das Maximum von $\left|f^{(4)}\right|$ auf dem Intervall $[0,1]$ ist $\left|f^{(4)}(0)\right| = 12$.

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Interpolationsfehler)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,2] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin(\pi x).$$

(a) Berechnen Sie jeweils einen kubischen Spline für $f$ mit natürlichen und Hermite-Randbedingungen zur Zerlegung $\Delta = \{0,1,2\}$. Überlegen Sie sich vorher, welcher Spline bei den natürlichen Randbegingungen zu erwarten ist. Was beobachten Sie bei dem erhaltenen Spline?

(b) Geben Sie eine obere Schranke für den gemachten Interpolationsfehler im Falle der Hermite-Randbedingungen an.

(c) Vergleichen Sie die Fehlerabschätzung für den kubischen Spline mit Hermite-Randbedingungen zur Zerlegung $\hat{\Delta} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ mit denen aus Aufgabe G2 vom letzten Übungsblatt.

**Aufgabe H2** (Summierte Trapezregel)
Bestimmen Sie Näherungen für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Verwenden Sie dazu die summierte Trapezregel mit 2 bzw. 4 Teilintervallen.
*Hinweis:* Der tatsächliche Wert des Integrals ist ungefähr 0.7468.

**Aufgabe H3** (Exakte Quadraturformeln)
Wir betrachten folgende Quadraturformeln zur Berechnung des Integrals $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für Funktionen $f$:

$$J_1(f) = \frac{b-a}{10}\left(f(a) + 4f\left(a + \tfrac{b-a}{3}\right) + 4f\left(b - \tfrac{b-a}{3}\right) + f(b)\right), \tag{1}$$

$$J_2(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \tag{2}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Quadraturformel $J_1$ exakt vom Grad 2 ist, d.h. ob $I(p_2) = J_1(p_2)$ für alle Polynome $p_2$ vom Grad bis zu 2 gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $J_2$ exakt vom Grad 3, nicht aber exakt vom Grad 4 ist.

(c) Welche schon bekannte Quadratur-Formel steckt hinter $J_2$?

*Hinweis 1:* Es genügt, die Aussagen in a) und b) für die Basiselemente $x^k$ des jeweiligen Polynomraumes zu zeigen.
*Hinweis 2:* Sie dürfen jeweils $[a,b] = [-1,1]$ benutzen.

**Zusatzaufgaben zum Weiterdenken:**

(d) Beweisen Sie Hinweis 1.

(e) * Beweisen Sie, dass Hinweis 2 keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt.