Aussagenlogik
und Prädikatenlogik
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik **SoSe 2018**
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach **Übung: 18.04.2018**
Anton Freund, Jonathan Weinberger **Abgabe: 02.05.2018**

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Formalisierung in der Aussagenlogik)
Wir betrachten ein Netzwerk mit vier Ports. Für $i = 1, \dots, 4$ führen wir Aussagenvariablen A_i und O_i ein, welche ausdrücken, dass Port i aktiv bzw. offen ist.

(a) Formalisieren Sie die Aussage "wenn Port 1 aktiv ist, dann ist Port 2 inaktiv (nicht aktiv) oder Port 3 offen".

(b) Formalisieren Sie die Aussage "Ports 1 und 2 sind nicht beide aktiv". Geben Sie zwei mögliche Lösungen an.

(c) Welche Eigenschaft der Ports wird durch die Formel

$$(\neg A_1 \vee O_1) \wedge (\neg A_2 \vee O_2) \wedge (\neg A_3 \vee O_3) \wedge (\neg A_4 \vee O_4)$$

ausgedrückt? (Man kann die angegebene Formel durch den Ausdruck $\bigwedge_{i=1,\dots,4}(\neg A_i \vee O_i)$ angeben. Machen Sie sich klar, dass dies eine Abkürzung und keine offizielle Formel der Aussagenlogik ist.)

(d) Formalisieren Sie die Aussage "mindestens zwei Ports sind offen" (analog zu (c) kann man lange Disjunktionen als $\bigvee_{i \in I} \varphi_i$ abkürzen).

Lösung: Mögliche Lösungen sind:

(a) $A_1 \to (\neg A_2 \vee O_3)$

(b) $\neg(A_1 \wedge A_2)$ bzw. $\neg A_1 \vee \neg A_2$ (die Äquivalenz dieser Ausdrücke ist als De Morgansches Gesetz bekannt)

(c) Für jeden der vier Ports gilt: Wenn der Port aktiv ist, dann ist er offen. (Man hätte $\neg A_i \vee O_i$ auch als $A_i \to O_i$ schreiben können.)

(d) $\bigvee_{i,j \in \{1,\dots,4\}, i \neq j}(O_i \wedge O_j)$

Aufgabe G2 (Wahrheitstafeln; disjunktive Normalform)
Wir betrachten die Formel $(p \vee q \vee \neg r) \to (q \vee (\neg p \wedge r))$.

(a) Erstellen Sie eine Wahrheitstafel für die gegebene Formel. Ist die Formel erfüllbar bzw. allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine äquivalente DNF-Formel an. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Wahrheitstafel.

(c) Zeigen Sie: Jede zur gegebenen Formel äquivalente DNF-Formel hat mindestens zwei Disjunktionsglieder.

Lösung:

(a) Die Wahrheitstafel (mit relevanten Teilformeln) hat die folgende Form:

p	q	r	$p \vee q \vee \neg r$	$q \vee (\neg p \wedge r)$	$(p \vee q \vee \neg r) \to (q \vee (\neg p \wedge r))$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Die Formel ist erfüllbar (mindestens eine Eins in der letzten Spalte), aber nicht allgemeingültig (nicht nur Einsen in der letzten Spalte).

(b) Durch Umformen erhält man

$$(p \vee q \vee \neg r) \rightarrow (q \vee (\neg p \wedge r)) \equiv \neg(p \vee q \vee \neg r) \vee q \vee (\neg p \wedge r) \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee q \vee (\neg p \wedge r).$$

Das erste Disjunktionsglied ist redundant, also ist auch $q \vee (\neg p \wedge r)$ eine Lösung. Alternativ kann man die Zeilen der Wahrheitstafel mit Wert 1 sammeln: So erhält man die DNF-Formel

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee \ldots,$$

die man dann noch vereinfachen kann.

(c) Bei einer einzelnen Konjunktion müsste die Anzahl der Einsen in der letzten Spalte entweder gleich null oder von der Form 2^{3-n} sein (mit $n \leq 3$): Die Konjunktion fixiert den Wert von $n \leq 3$ Variablen, während die anderen $3-n$ Variablen frei wählbar sind. Im vorliegenden Fall ist die Anzahl der Einsen aber gleich fünf, also keine Zweierpotenz.

Aufgabe G3 (Modellbeziehung)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $\varphi \vDash \psi$ gilt und φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(b) Wenn $\varphi \vDash \theta$ oder $\psi \vDash \theta$ gilt, dann gilt $\{\varphi, \psi\} \vDash \theta$.

(c) Wenn $\{\varphi, \psi\} \vDash \theta$ gilt, dann gilt $\varphi \vDash \theta$ oder $\psi \vDash \theta$.

(d) Man hat $\{\varphi, \psi\} \vDash \theta$ genau dann, wenn $\varphi \wedge \psi \vDash \theta$ gilt.

(e) Es gilt $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \vDash \neg\varphi$.

Lösung:

(a) Die Aussage ist richtig: Gemäß der Definition von $\varphi \vDash \psi$ impliziert $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$ schon $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, für jede Interpretation $\mathfrak{I}$. Ist φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) so gilt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$ für alle Interpretationen (bzw. für mindestens eine Interpretation). Also gilt auch $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$ für alle Interpretationen (bzw. für mindestens eine Interpretation). Somit ist ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(b) Die Aussage ist richtig: Um $\{\varphi, \psi\} \vDash \theta$ zu zeigen, betrachten wir eine beliebige Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$ und $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$. Hat man $\varphi \vDash \theta$ oder $\psi \vDash \theta$, so kann man wie erwünscht auf $\theta^{\mathfrak{I}} = 1$ schließen.

(c) Die Aussage ist falsch: Sei etwa $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\theta = p \wedge q$. Aus $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$ und $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$ folgt $\theta^{\mathfrak{I}} = 1$, sodass $\{\varphi, \psi\} \vDash \theta$ gilt. Hingegen ist $\varphi \vDash \theta$ falsch, da die Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(p) = 1$ und $\mathfrak{I}(q) = 0$ zwar φ aber nicht θ erfüllt. Die Interpretation $\mathfrak{I}'$ mit $\mathfrak{I}'(p) = 0$ und $\mathfrak{I}(q) = 1$ zeigt, dass auch $\psi \vDash \theta$ falsch ist.

(d) Die Aussage ist richtig: Um $\varphi \wedge \psi \vDash \theta$ zu zeigen nimmt man $(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ an. Dann gilt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$ und $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$. Mit der Voraussetzung $\{\varphi, \psi\} \vDash \theta$ erhält man $\theta^{\mathfrak{I}}$, wie für $\varphi \wedge \psi \vDash \theta$ benötigt. Für die umgekehrte Richtung benutzt man, dass $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1 = \psi^{\mathfrak{I}}$ schon $(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ impliziert.

(e) Die Aussage ist richtig: Gilt $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ so hat man $\psi^{\mathfrak{I}} = 0$. Wenn außerdem $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ gelten soll, dann muss also $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$ sein (da $\varphi \rightarrow \psi$ eine Abkürzung für $\neg\varphi \vee \psi$ ist). Somit hat man $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$, wie gewünscht.

Hausübung

Aufgabe H1 (XOR und NOR; vollständige Systeme von Junktoren) (12 Punkte)
Wir betrachten die Junktoren $\oplus$ (XOR, exklusives Oder) und $\downarrow$ (NOR, weder noch) mit den Wahrheitstabellen

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(a) Drücken Sie XOR und NOR mit Hilfe der Junktoren $\wedge$ und $\neg$ aus.

(b) Zeigen Sie, dass $\{\downarrow\}$ ein vollständiges Junktorensystem ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\oplus$ kommutativ und assoziativ ist, dass also $p \oplus q \equiv q \oplus p$ und $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$ gilt.

(d) Folgern Sie, dass $\{\oplus\}$ kein vollständiges Junktorensystem ist.

Lösung:

(a) [3 Punkte] Man hat etwa $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)$ und $p \downarrow q \equiv \neg p \wedge \neg q$.

(b) [3 Punkte] Man hat $\neg p \equiv p \downarrow p$ und $p \wedge q \equiv \neg p \downarrow \neg q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$. Dies genügt, weil $\{\wedge, \neg\}$ laut Vorlesung ein vollständiges Junktorensystem ist.

(c) [3 Punkte] Kommutativität folgt aus der Beobachtung, dass die letzten beiden Spalten der folgenden Wahrheitstabelle übereinstimmen:

p	q	$p \oplus q$	$q \oplus p$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Die Wahrheitstabelle

p	q	r	$(p \oplus q) \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

zeigt, dass $\oplus$ auch assoziativ ist.

(d) [3 Punkte] Sei $\mathfrak{I}$ die Interpretation mit konstantem Wert 0. Dann gilt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$ für jede Formel φ, die nur den Junktor $\oplus$ enthält. Daher kann $\neg$ nicht durch $\oplus$ darstellbar sein. Man kann auch explizit argumentieren, dass jede Formel mit einzigem Junktor $\oplus$ und einziger Aussagenvariablen p die Form

$$\varphi_n := \underbrace{p \oplus \cdots \oplus p}_{n}$$

hat, wobei Klammern gemäß Teilaufgabe (c) weggelassen werden dürfen. Es gilt

$$\varphi_n \equiv \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ p & \text{sonst,} \end{cases}$$

was wieder zeigt, dass $\neg$ nicht darstellbar ist.

Aufgabe H2 (Vollständigkeit für KNF-Formeln) (12 Punkte)

Unter Vollständigkeit für KNF-Formeln verstehen wir die folgende Aussage: Zu jeder booleschen Funktion $f \in \mathscr{B}_n$ existiert eine KNF-Formel $\psi \in \mathrm{AL}_n$ mit $f = f_\psi$.

(a) Leiten Sie die Vollständigkeit für KNF-Formeln aus der Vollständigkeit für DNF-Formeln her. (Tipp: Betrachten Sie die Funktion f' mit $f'(b_1, \ldots, b_n) = 1 - f(b_1, \ldots, b_n)$).

(b) Beweisen Sie die Vollständigkeit für KNF-Formeln, ohne die Vollständigkeit für DNF-Formeln zu verwenden. (Tipp: Betrachten Sie in der zu f gehörenden Wahrheitstafel alle Zeilen mit Wert 0.)

Lösung:

(a) [6 Punkte] Definiere $f' \in \mathscr{B}_n$ wie im Tipp. Gemäß Vollständigkeit für DNF-Formeln gibt es eine DNF-Formel φ mit $f' = f_\varphi$. Schreibe

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij}$$

mit Literalen l_{ij}. Jedes Literal l ist von der Form p oder $\neg p$ für eine Aussagenvariable p. Wir schreiben

$$l^- = \begin{cases} \neg p & \text{falls } l = p, \\ p & \text{falls } l = \neg p. \end{cases}$$

Dann ist l^- wieder ein Literal und man hat $l^- \equiv \neg l$. Wir bilden nun die KNF-Formel

$$\psi := \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij}^- \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \neg l_{ij} \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij} \equiv \neg\varphi.$$

Dann hat man

$$f_\psi(b_1, \dots, b_n) = f_{\neg\varphi}(b_1, \dots, b_n) = 1 - f_\varphi(b_1, \dots, b_n) = 1 - f'(b_1, \dots, b_n) = f(b_1, \dots, b_n),$$

wie gewünscht.

(b) [6 Punkte] Als Beispiel kann man die Wahrheitstafel für $\oplus$ aus Aufgabe H1 betrachten: Man sieht dann

$$p \oplus q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q).$$

Um dies allgemein zu beschreiben führen wir die folgende Notation ein: Ist p eine Aussagenvariable und b ein boolescher Wert, so setzten wir

$$\neg^b p = \begin{cases} \neg p & \text{if } b = 1, \\ p & \text{if } b = 0. \end{cases}$$

Für $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n$ betrachten wir die Disjunktion

$$\varphi_{b_1,\dots,b_n} := \neg^{b_1} p_1 \vee \dots \vee \neg^{b_n} p_n.$$

Sind $b'_1, \dots, b'_n$ beliebige boolesche Werte, so hat man

$$\varphi_{b_1,\dots,b_n}[b'_1, \dots, b'_n] = \begin{cases} 0 & \text{wenn } (b'_1, \dots, b'_n) = (b_1, \dots, b_n), \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun bilden wir die KNF-Formel

$$\psi := \bigwedge_{\substack{(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{B}^n \\ f(b_1,\dots,b_n)=0}} \varphi_{b_1,\dots,b_n}.$$

Gilt $f(b'_1, \dots, b'_n) = 0$ so hat man $\varphi_{b'_1,\dots,b'_n}[b'_1, \dots, b'_n] = 0$ und daher $f_\psi(b'_1, \dots, b'_n) = 0$. Gilt $f(b'_1, \dots, b'_n) = 1$ so hat man $(b'_1, \dots, b'_n) \neq (b_1, \dots, b_n)$ für alle $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n$ mit $f(b_1, \dots, b_n) = 0$. Für alle diese Werte gilt daher $\varphi_{b_1,\dots,b_n}[b'_1, \dots, b'_n] = 1$, woraus man $f_\psi(b'_1, \dots, b'_n) = 1$ schließen kann. Somit hat man $f = f_\psi$, wie gewünscht.

Aufgabe H3 ("Blow-up" bei der Umwandlung zwischen DNF- und KNF-Formeln) (12 Punkte)
Für $n \geq 1$ betrachten wir die Formel

$$\varphi_n(p_1, \dots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i}).$$

(a) Schreiben Sie φ_n als KNF-Formel mit $2n$ Konjunktionsgliedern.

(b) Zeigen Sie, dass es genau 2^n Interpretationen der Aussagenvariablen $\{p_1, \dots, p_{2n}\}$ gibt, welche φ_n erfüllen.

(c) Zeigen Sie: In jedem erfüllbaren Disjunktionsglied einer zu φ_n äquivalenten DNF-Formel müssen alle Aussagenvariablen $p_1, \dots, p_{2n}$ vorkommen.

(d) Folgern Sie, dass jede zu φ_n äquivalente DNF-Formel aus mindestens 2^n Disjunktionsgliedern besteht.

Lösung:

(a) [3 Punkte] Man hat $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ und daher

$$\varphi_n \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} ((p_{2i-1} \vee p_{2i}) \wedge (\neg p_{2i-1} \vee \neg p_{2i})) \equiv (\bigwedge_{i=1}^{n} (p_{2i-1} \vee p_{2i})) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} (\neg p_{2i-1} \vee \neg p_{2i})).$$

(b) [3 Punkte] Eine Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt φ_n genau dann, wenn $\mathfrak{I}(p_{2i}) = 1 - \mathfrak{I}(p_{2i-1})$ für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt. Man kann also die Werte $\mathfrak{I}(p_{2i-1})$ für ungerade Indizes frei wählen, woraufhin die Werte für gerade Indizes determiniert sind (oder umgekehrt). Für die Werte an den n ungeraden Indizes hat man genau 2^n Möglichkeiten.

(c) [3 Punkte] Sei ψ ein erfüllbares Disjunktionsglied einer zu φ_n äquivalenten DNF-Formel. Sei außerdem $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$. Wir leiten einen Widerspruch aus der Annahme her, dass die Aussagenvariable p_i nicht in ψ vorkommt: Für ungerades i setzen wir $j = i + 1$, für gerades i hingegen $j = i - 1$. Dann ist also $\neg(p_i \leftrightarrow p_j)$ bzw. $\neg(p_j \leftrightarrow p_i)$ ein Konjunktionsglied von φ_n. Definiere nun eine abgeänderte Interpretation $\mathfrak{I}'$ durch

$$\mathfrak{I}'(p_k) = \begin{cases} \mathfrak{I}(p_j) & \text{falls } k = i, \\ \mathfrak{I}(p_k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da ψ die Variable p_i nicht enthält, gilt $\psi^{\mathfrak{I}'} = \psi^{\mathfrak{I}} = 1$. Dies impliziert $(\varphi_n)^{\mathfrak{I}'} = 1$, weil ψ ein Disjunktionsglied einer zu φ_n äquivalenten Formel ist. Daraus folgt wiederum $(p_i \leftrightarrow p_j)^{\mathfrak{I}'} = 0$, was wegen $\mathfrak{I}'(p_i) = \mathfrak{I}(p_j) = \mathfrak{I}'(p_j)$ aber unmöglich ist.

(d) [3 Punkte] Angenommen, es gibt eine zu φ_n äquivalente DNF-Formel $\bigvee_{i=1}^{m} \psi_i$ mit $m < 2^n$ Disjunktionsgliedern. Jede der 2^n Interpretationen aus Teilaufgabe (a) muss mindestens eine der Disjunktionsglieder ψ_i erfüllen. Nach dem Schubfachprinzip existiert mindestens ein Disjunktionsglied ψ_k, welches von mehr als einer Interpretation erfüllt wird. Dann muss es eine Variable p_i geben, welche in ψ_k nicht vorkommt. Dies widerspricht Teilaufgabe (b). Daher kann es keine zu φ_n äquivalente DNF-Formel $\bigvee_{i=1}^{m} \psi_i$ mit $m < 2^n$ Disjunktionsgliedern geben.