Formale Grundlagen der Informatik II
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Julian Bitterlich, Felix Canavoi, Kord Eickmeyer, Daniel Günzel

SoSe 2015
3. Juni 2015

Aufgabe G1 (Aussagenlogische Formeln)

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p,q,r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchtens eine der Variablen p,q,r wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p,q,r,s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

Lösung:

(a) Wahrheitstafel:

p	q	r	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee (\neg q \wedge r)$	φ
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Die Formel ist also erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(b) $\varphi := (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

(c) $\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$

(d)
$$\begin{aligned}\varphi := {} & (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \\ & \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)\end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Vergleich von Binärzahlen als Formel in AL)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie induktiv über n aussagenlogische Formeln

$$\varphi_n(x_n, \ldots, x_0, y_n, \ldots, y_0),$$

welche genau dann wahr sind, wenn die in $x_n \ldots x_0$ kodierte Binärzahl $\sum_i x_i 2^i$ kleiner ist als die in $y_n \ldots y_0$ kodierte.
Lösung:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x_0, y_0) &:= \neg x_0 \wedge y_0\,, \\
\varphi_n(x_n, \ldots, x_0, y_n, \ldots, y_0) &:= \varphi_{n-1}(x_n, \ldots, x_1, y_n, \ldots, y_1) \\
&\qquad \vee [(x_n \leftrightarrow y_n) \wedge \varphi_{n-1}(x_{n-1}, \ldots, x_0, y_{n-1}, \ldots, y_0)]\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe G3 (kontextfreie Grammatik für AL_n)
Geben Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ eine kontextfreie Grammatik für $\mathrm{AL}_n \subseteq \Sigma^*$ an, wobei

$$\Sigma = \{0, 1, (,), \neg, \wedge, \vee\} \cup \{p_1, \ldots, p_n\}.$$

Wie könnte man die Syntax (und die zugehörige Grammatik) modifizieren, um z.B. redundante äußere Klammerungen zu vermeiden, aber eindeutige Lesbarkeit zu erhalten?

Lösung: Eine mögliche Grammatik ist $G = (\Sigma, \{T\}, P, T)$ mit Produktionen

$$P : T \rightarrow 0 \,|\, 1 \,|\, p_1 \,|\, \ldots \,|\, p_n \,|\, \neg T \,|\, (T \wedge T) \,|\, (T \vee T).$$

Nachtrag zu FGdI I

Aufgabe G4 (Abschlusseigenschaften)
Sei L_0 regulär, L_1 kontextfrei.

(i) Folgt, dass $L_0 \cup L_1$ kontextfrei ist?

(ii) Folgt, dass $L_0 \cap L_1$ kontextfrei ist?

(iii) Folgt, dass $L_0 \setminus L_1$ kontextfrei ist?

(iv) Folgt, dass $L_1 \setminus L_0$ kontextfrei ist?

(v) Ist das Komplement einer Typ 0 Sprache stets Typ 0?

(vi) Ist Typ 0 abgeschlossen unter Durchschnitt/Vereinigung?

Lösung:

(i) Ja, man kann leicht eine kontextfreie Grammatik für $L_0 \cup L_1$ aus kontextfreien Grammatiken für L_0 und L_1 konstruieren.

(ii) Ja, da ein PDA für L_1 so modifiziert werden kann, dass er parallel auch einen NFA für L_0 simuliert.

(iii) Nein, da kontextfreie Sprachen nicht unter Komplement abgeschlossen sind.

(iv) Ja, da $L_1 \setminus L_0 = L_1 \cap \bar{L_0}$ und $\bar{L_0}$ wieder regulär ist.

(v) Nein, da das Komplement des Halteproblems Typ 0 ist, das Halteproblem selbst jedoch nicht.

(vi) Ja, sowohl unter Vereinigung als auch unter Durchschnitt (simuliere zwei Turingmaschinen parallel).

Aufgabe G5 (Erfüllbare Formeln in AL_n)
Sei wie in Aufgabe H3

$$\Sigma = \{0, 1, (,), \neg, \wedge, \vee\} \cup \{p_1, \dots, p_n\},$$

und sei $L \subseteq \Sigma^*$ die Menge der *erfüllbaren* Formeln in AL_n.

(i) Gibt es eine Typ 0-Grammatik für L?

(ii) Gibt es eine Typ 1-Grammatik für L?

Lösung:

(i) Ja, da die Sprache L entscheidbar, also insbesondere rekursiv aufzählbar ist.

(ii) Ja, da L von einer TM entschieden werden kann, die linear platzbeschränkt ist.