Aussagenlogik
& Prädikatenlogik (FGdI II)
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

SoSe 2016
15. Juni 2016

Gruppenübung

Aufgabe G5.1 (Satz von Herbrand und GI-Resolution)
Betrachten Sie die Signatur $\{R, P\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol R und einem einstelligen Relationssymbol P, und die Sätze

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \exists x\, Px \\
\varphi_2 &:= \forall x\,\big(Px \to \exists y\,(Rxy \land Py)\big), \\
\varphi_3 &:= \forall x\,\big(Px \to \exists y\,(Rxy \land \neg Py)\big), \\
\varphi_4 &:= \forall x \forall y \forall z\,\big((Rxy \land Rxz) \to (y = z)\big).
\end{aligned}$$

Die ersten drei dieser Sätze sind gemeinsam erfüllbar, ein mögliches Modell ist

$$\mathcal{A} := \begin{tikzcd} a \arrow[loop above] \arrow[r] & b \end{tikzcd},$$

wobei Pfeile für Tupel in der Relation R stehen und der Kreis um das a bedeutet, dass a in der Relation P enthalten ist.

(a) Finden Sie für die Sätze φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 eine Skolem-Normalform $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$, $\tilde{\varphi}_3$ und $\tilde{\varphi}_4$.

(b) Satz 3.6 über die Skolem-Normalform besagt, dass das Modell $\mathcal{A}$ von $\{\varphi_1, \varphi_2 \varphi_3\}$ zu einem Modell $\mathcal{A}'$ von $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}$ erweitert werden kann. Was heißt in diesem Kontext überhaupt „erweitert"? Geben Sie eine wie im Beweis von Satz 3.6 konstruierte Erweiterung an.

(c) Der Satz von Herbrand (Satz 3.10 aus der Vorlesung) besagt, dass die Formelmenge $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}$ auch ein Herbrand-Modell $\mathcal{H}$ besitzt, und dieses kann wie im Beweis von Satz 3.10 aus $\mathcal{A}'$ konstruiert werden. Führen Sie diese Konstruktion durch.

(d) Machen Sie sich klar, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ *nicht* erfüllbar ist. Damit ist auch die Formelmenge $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4\}$ unerfüllbar. (Welcher Satz aus der Vorlesung besagt das?) Beweisen Sie die Unerfüllbarkeit mittels Grundinstanzenresolution.

Lösung: Zunächst ist zu beachten, dass der Satz φ_4 nicht gleichheitsfrei ist. Wir können trotzdem eine Skolem-Normalform auch von φ_4 bilden, und Satz 3.6 bleibt anwendbar. Da in Aufgabenteil (c) nur über die Sätze $\tilde{\varphi}_1$ bis $\tilde{\varphi}_3$ gesprochen wird, ist auch der Satz von Herbrand anwendbar. Lediglich für die Grundinstanzenresolution von Aufgabenteil (d) muss die Gleichheit durch eine Kongruenzrelation modelliert werden.

(a) Wir bestimmen zunächst pränexe Normalformen der Sätze φ_2 und φ_3:

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &\equiv \forall x \exists y\,\big(\neg Px \lor (Rxy \land Py)\big) \\
\varphi_3 &\equiv \forall x \exists y\,\big(\neg Px \lor (Rxy \land \neg Py)\big)
\end{aligned}$$

Wir führen nun ein Konstantensymbol und zwei Funktionssymbole für die existentiell quantifizierten Variablen ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1 &:= Pc \\
\tilde{\varphi}_2 &:= \forall x\,\big(\neg Px \lor (Rxfx \land Pfx)\big) \\
\tilde{\varphi}_3 &:= \forall x\,\big(\neg Px \lor (Rxgx \land \neg Pgx)\big) \\
\tilde{\varphi}_4 &:= \forall x \forall y \forall z\,(\neg Rxy \lor \neg Rxz \lor x = z)
\end{aligned}$$

(b) Um ein Modell $\mathcal{A}'$ für $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}$ zu erhalten, müssen das Konstantensymbol c und die Funktionssymbole f und g geeignet interpretiert werden, z.B. durch

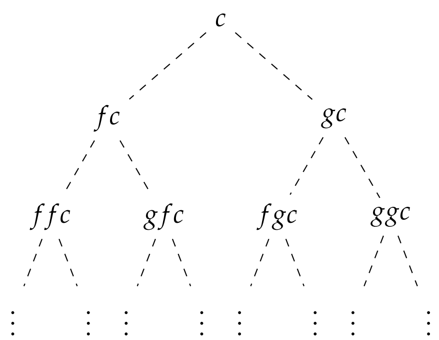
$$c^{\mathcal{A}'} = a, f^{\mathcal{A}'}(a) = a, f^{\mathcal{A}'}(b) = b, g(a)^{\mathcal{A}'} = b, \text{ und } g^{\mathcal{A}'}(b) = b.$$

Überprüfen Sie (z.B. mit dem Semantikspiel für FO), dass tatsächlich $\mathcal{A}' \models \tilde{\varphi}_1 \wedge \tilde{\varphi}_2 \wedge \tilde{\varphi}_3$ gilt!
(*Hinweis:* Hier haben wir Satz 3.6(ii) benutzt, in Aufgabenteil (d) ist die umgekehrte Richtung Satz 3.6(i) nötig.)

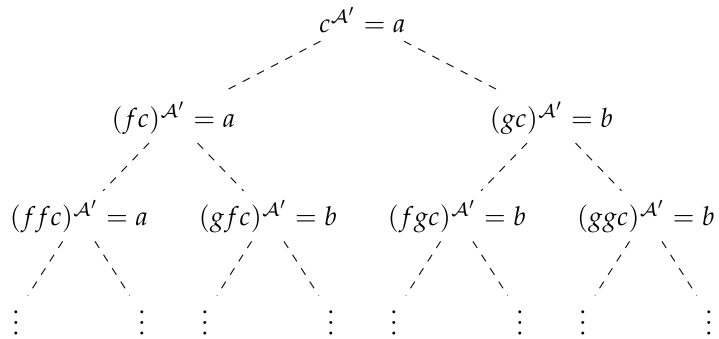
(c) Um ein Herbrand-Modell $\mathcal{H}$ für $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}$ zu erhalten, bilden wir die Megen $T_0(S)$ der variablenfreien Terme über der Signatur $S = \{c, f, g, P, R\}$:

$$T_0(S) = \{c, fc, gc, ffc, gfc, fgc, ggc, fffc, \ldots\},$$

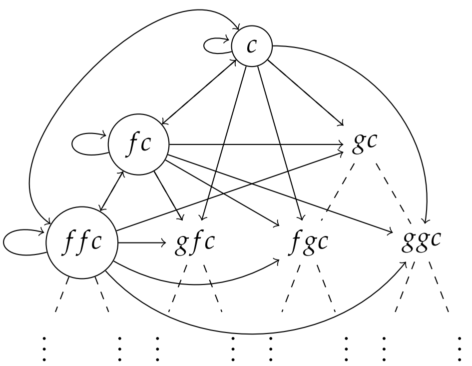
als Baum veranschaulicht:



Die Interpretation der Konstante c sowie der Funktionssymbole f und g ergibt sich direkt aus dem Aufbau der Terme. Um eine Interpretation der Relationssymbole R und P zu finden, für die $\mathcal{H}$ ein Modell von $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}$ ist, betrachten wir die Interpretationen der Terme aus $T_0(S)$ in $\mathcal{A}'$:



Damit ergibt sich für unser Herbrand-Modell $\mathcal{H}$:



Die Relation $P^{\mathcal{H}}$ enthält also genau die Terme $c, fc, ffc, fffc, \ldots$, und $R^{\mathcal{H}} = P^{\mathcal{H}} \times T_0(S)$. Wie sieht das Modell $\mathcal{H}$ aus, wenn wir in $\mathcal{A}'$ die Funktionen f und g mit $f(b) = a$ und/oder $g(b) = a$ interpretieren?

(d) Die Menge $\{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$ ist unerfüllbar, da es wegen φ_1 ein Element a geben muss, für das P gilt, und es höchstens ein b geben kann, so dass Rab gilt (φ_4). Dann ist aber φ_2 nicht erfüllt, falls $\neg Pb$ gilt, und φ_3 nicht erfüllt, falls Pb gilt.

Die Formelmenge $\{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_4\}$ ist dann wegen Satz 3.6(i) ebenfalls nicht erfüllbar. Dies können wir allerdings nicht ohne weitere Vorbereitungen mit Grundinstanzenresolution zeigen, da Grundinstanzenresolution nur die Existenz einen *Herbrand*modells ausschließt. Satz $\tilde{\varphi}_4$ ist jedoch nicht gleichheitsfrei, so dass der Satz von Herbrand (Satz 3.10) nicht anwendbar ist.

Wir ersetzen also $\tilde{\varphi}_4$ durch die Formel

$$\tilde{\varphi}'_4 := \forall x \forall y \forall z\, (\neg Rxy \lor \neg Rxz \lor Qyz)$$

und fügen die folgenden Sätze hinzu, die garantieren, dass Q eine mit f, g, P und R verträgliche Äquivalenzrelation (also eine Kongruenz) ist:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &:= \forall x\, Qxx \\
\psi_2 &:= \forall x \forall y\, (Qxy \to Qyx) \\
\psi_3 &:= \forall x \forall y \forall z\, \big((Qxy \land Qyz) \to Qxz\big) \\
\psi_4 &:= \forall x \forall y\, (Qxy \to Qfxfy) \\
\psi_5 &:= \forall x \forall y\, (Qxy \to Qgxgy) \\
\psi_6 &:= \forall x \forall y\, (Qxy \to (Px \to Py)) \\
\psi_7 &:= \forall x \forall y \forall u \forall v\, \big((Qxy \land Quv) \to (Rxu \to Ryv)\big)
\end{aligned}$$

Wir bringen diese Formeln in allquantifizierte konjunktive Normalformen und spalten diese bei Bedarf in allquantifizierte Disjunktionen von (positiven oder negativen) Literalen auf:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &:= \forall x\, Qxx \\
\psi_2 &:= \forall x \forall y\, (\neg Qxy \lor Qyx) \\
\psi_3 &:= \forall x \forall y \forall z\, (\neg Qxy \lor \neg Qyz \lor Qxz) \\
\psi_4 &:= \forall x \forall y\, (\neg Qxy \lor Qfxfy) \\
\psi_5 &:= \forall x \forall y\, (\neg Qxy \lor Qgxgy) \\
\psi_6 &:= \forall x \forall y\, (\neg Qxy \lor \neg Px \lor Py) \\
\psi_7 &:= \forall x \forall y \forall u \forall v\, (\neg Qxy \lor \neg Quv \lor \neg Rxu \lor Ryv) \\
\tilde{\varphi}_1 &:= Pc \\
\tilde{\varphi}_2 &:= \forall x\, (\neg Px \lor Rxfx) \\
\tilde{\varphi}_{2'} &:= \forall x\, (\neg Px \lor Pfx) \\
\tilde{\varphi}_3 &:= \forall x\, (\neg Px \lor Rxgx) \\
\tilde{\varphi}_{3'} &:= \forall x\, (\neg Px \lor \neg Pgx) \\
\tilde{\varphi}_4 &:= \forall x \forall y \forall z\, (\neg Rxy \lor \neg Rxz \lor Qxz)
\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Resolutionsbeweis führen:

1.	Pc	$\tilde{\varphi}_1$
2.	$\neg Pc \lor Rcfc$	$\tilde{\varphi}_2(c/x)$
3.	$Rcfc$	$(1+2)$
4.	$\neg Pc \lor Rcgc$	$\tilde{\varphi}_3(c/x)$
5.	$Rcgc$	$(1+4)$
6.	$\neg Rcfc \lor \neg Rcgc \lor Qfcgc$	$\tilde{\varphi}_4(c/x, fc/y, gc/z)$
7.	$\neg Rcgc \lor Qfcgc$	$(3+6)$
8.	$Qfcgc$	$(5+7)$
9.	$\neg Pc \lor Pfc$	$\tilde{\varphi}_{2'}(c/x)$
10.	Pfc	$(1+9)$
11.	$\neg Pc \lor \neg Pgc$	$\tilde{\varphi}_{3'}(c/x)$
12.	$\neg Pgc$	$(1+11)$
13.	$\neg Qfcgc \lor \neg Pfc \lor Pgc$	$\psi_6(fc/x, gc/y)$
14.	$\neg Pfc \lor Pgc$	$(8+13)$
15.	Pgc	$(10+14)$
16.	$\square$	$(12+15)$

Aufgabe G5.2 (Erreichbarkeit in Graphen)
Es sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die nur das zweistellige Relationssymbol E enthält. Eine σ-Struktur $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$ fassen wir als gerichteten Graphen auf. Für zwei Knoten $a, b \in G$ heißt b *von a aus erreichbar*, falls es Knoten

$$a = v_0, v_1, \ldots, v_\ell = b \in G$$

gibt, so dass $(v_{i-1}, v_i) \in E^{\mathcal{G}}$ für $i = 1, \ldots, \ell$ gilt.
Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge $\Phi(x, y) \subseteq \mathrm{FO}_2(\sigma)$ mit freien Variablen in $\{x, y\}$ gibt, so dass für alle Graphen $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$ und $a, b \in G$ gilt:

$$\mathcal{G} \models \Phi[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad b \text{ ist von } a \text{ aus in } \mathcal{G} \text{ erreichbar.}$$

Lösung: Um zu sagen, dass b nicht von a aus mit einem Pfad der Länge ℓ erreichbar ist, definieren wir Formeln φ_ℓ rekursiv durch

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, y) &:= \neg(x = y), \\
\varphi_1(x, y) &:= \neg Exy \quad \text{und} \\
\varphi_{n+1}(x, y) &:= \neg\exists z\, (Exz \wedge \varphi_n(z, y)).
\end{aligned}$$

Damit ist die Formelmenge $\Phi \cup \{\varphi_\ell : \ell \geq 0\}$ unerfüllbar. Aufgrund des Kompaktheitssatzes gibt es dann eine endliche Teilmenge Φ_0, die bereits unerfüllbar ist. Sei $\ell \in \mathbb{N}$ maximal, so dass $\varphi_\ell \in \Phi_0$. Ein Pfad der Länge $\ell + 1$ von a nach b erfüllt offensichtlich die Menge Φ_0, im Widerspruch zur Unerfüllbarkeit dieser Menge.