Mathematatik II für Informatik

5. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 18./19. Mai 2017
Abgabe: 01./02. Juni 2017

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wissenscheck)
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.
Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) f heißt stetig im Häufungspunkt $x_0 \in D$, wenn für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

(b) Ist f in D stetig, so ist f auf D auch Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante $L > 0$.

(c) f ist stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn zu einem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $\|x - x_0\|_2 < \delta$.

(d) Ist f auf D stetig, so ist f auf D beschränkt.

(e) (*Definition: Ein Punkt $a \in D$ heißt isoliert, wenn es eine offene Umgebung $B_r(a)$ mit $r > 0$ gibt, in der a der einzige Punkt in D ist.*)
Sei $a \in D$ ein isolierter Punkt in D, dann ist f stetig in a.

(f) Ist eine Folge bzgl. der 2-Norm konvergent, so konvergiert sie auch bezüglich der ∞–Norm.

(g) Sei $f : D \to \mathbb{R}^p,\ D \subseteq \mathbb{R}^d$. Ist f auf D stetig, so gilt für einen Häufungspunkt $x_0 \in D$ und jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ die gegen x_0 konvergiert: $\lim\limits_{n\to\infty} ||f(a_n)||_\infty = f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} ||f(a_n)||_2$.

(h) Sei $f : D \to \mathbb{R}^n,\ D \subseteq \mathbb{R}^m$. $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ist genau dann nicht stetig, wenn keine der Komponenten $f_i : D \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n$ stetig ist.

Lösungshinweise:

(a) Falsch. Gegenbeispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \geq 0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 1 = f(0)$, aber $\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = 0 \neq 1 = f(0)$. Somit ist f unstetig in $x_0 = 0$.

(b) Falsch. Gegenbeispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(c) Falsch. Gegenbeispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \geq 0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Für $\varepsilon > 1$ ist $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Trotzdem ist f unstetig in $x_0 = 0$.

(d) Falsch. Gegenbeispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(e) Richtig. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ eine beliebige Folge mit $a_n \to a$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert damit ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|a_n - a\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wählen wir nun $\varepsilon < r$, so ist die obige Bedingung nur für $a_n = a$, $n \geq N$, erfüllt, da a ein isolierter Punkt ist. Damit ist $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ und es folgt die Stetigkeit von f in a.

(f) Richtig. Siehe Satz 5.8.11.

(g) Falsch. Für $p > 1$ stimmen nicht mal die Dimensionen überein.

(h) Falsch. Siehe Satz 5.8.4.

Aufgabe G2 (Supremumsnorm)
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und nicht-leer. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty : C(K) \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in K} |f(x)|, \; f \in C(K),$$

eine Norm ist.

Lösungshinweise: Die Existenz des Maximums folgt aus **Satz 5.8.8**. Man kann die Normaxiome wie folgt nachprüfen.

(i) Definitheit: Sei $f \in C(K)$ beliebig aber fest, dann gilt

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in K} |f(x)| \geq 0, \;\text{ und }\; \max_{x\in K} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \;\text{ für alle }\; x \in K.$$

(ii) Homogenität: Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in C(K)$ beliebig aber fest,

$$\|\alpha f\|_\infty = \max_{x\in K} |\alpha f(x)| = \max_{x\in K} |\alpha| \cdot |f(x)| = |\alpha| \max_{x\in K} |f(x)| = |\alpha| \|f\|_\infty.$$

(iii) Dreiecksungleichung: Seien $f, g \in C(K)$ beliebig aber fest, dann gilt

$$\|f+g\|_\infty = \max_{x\in K} |(f+g)(x)| = \max_{x\in K} |f(x) + g(x)| \leq \max_{x\in K} |f(x)| + \max_{x\in K} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Damit ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm.

Aufgabe G3
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $c \in \mathbb{R}$ ist die Höhenlinie zur Höhe c gegeben durch

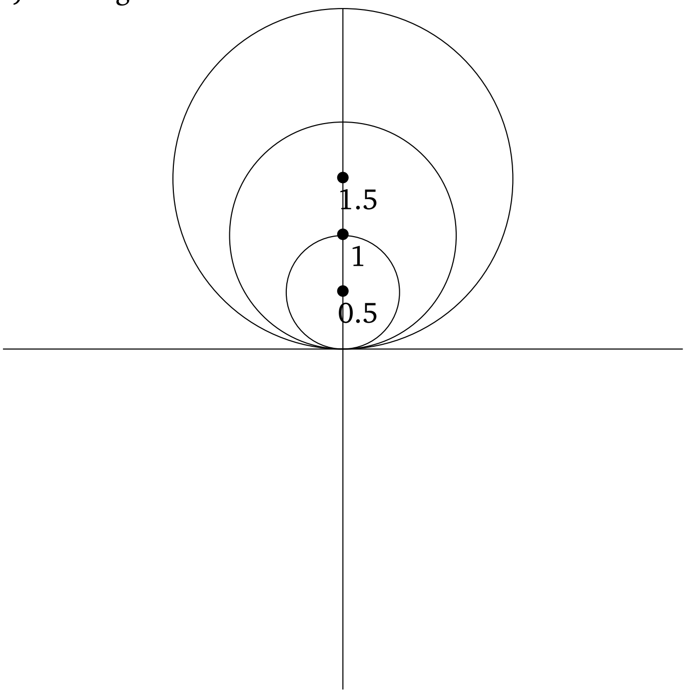
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}.$$

Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion.
Ist die Funktion stetig im Punkt $(0,0)$? Welchen Hinweis geben die Höhenlinien?
Hinweis: Kreise mit Radius r und Mittelpunkt (x_0, y_0) können durch eine Kreisgleichung der Form $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ dargestellt werden.

Lösungshinweise: Die Höhenlinien der Funktion bestimmen sich durch die Gleichungen $f(x,y)=c$, wo bei $c\in\mathbb{R}$ die Höhe bestimmt. Es gilt

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{x^2+y^2}{y} & = & c \\ \Leftrightarrow & x^2+y^2 & = & cy \\ \Leftrightarrow & x^2-cy+y^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2+y^2-2\frac{c}{2}y+(\frac{c}{2})^2-(\frac{c}{2})^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2+(y-(\frac{c}{2}))^2 & = & (\frac{c}{2})^2. \end{array}$$

Das heißt, die Höhenlinien sind Kreise mit Mittelpunkt $(0,(\frac{c}{2}))$ und Radius $(\frac{c}{2})$. Die Kreise gehen also alle durch den Punkt $(0,0)$. Im folgenden Bild sehen wir die Höhenlinien für $c=1,2,3$.



Die Funktion kann in diesem Punkt also nicht stetig sein. Sie ist unbeschränkt in der Nähe des Ursprungs. Genauer gilt $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^4})=\infty$.

Aufgabe G4 (Potenzreihen)
Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils alle $x\in\mathbb{R}$, für die sie konvergieren:

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^n \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(x-2)^n$$

(Nicht die Randpunkte vergessen!)

Lösungshinweise:

(a) Wir bestimmen den Konvergenzradius mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Es gilt:

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}\right| = \left|\frac{-(2n)!}{(2n+2)!}\right| = \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)} \to 0 \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Somit ist der Konvergenradius nach Satz 5.9.10 $r=\infty$.

(b) Konvergenzradius mit Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

also ist der Konvergenzradius 2, die Reihe konvergiert also auf jeden Fall für alle $x \in (0,4)$ (der Entwicklungspunkt ist 2) und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [0,4]$.

Untersuchung der Randpunkte:

$x = 0: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(0-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent (alternierende harmonische Reihe)

$x = 4: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(4-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (harmonische Reihe),

also konvergiert die Reihe für alle $x \in [0,4)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Kompaktheit in unendlichdimensionalen Räumen) (12 Punkte)
Sei ℓ^1 der Vektorraum aller reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die gilt

$$\|(a_n)\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Zusammen mit der oben definierten Norm $\|\cdot\|_1$, ist dieser ein unendlichdimensionaler Banachraum.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $S^0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \ : \ \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = 1\} \subseteq \ell^1$ beschränkt und abgeschlossen ist.

(b) Wir betrachten nun eine Folge in ℓ^1, welche wir mit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wollen. Da für $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x^{(k)}$ in ℓ^1 liegt, heißt das, dass $x^{(k)}$ selbst wieder eine Folge ist, also eigentlich $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$. Wir definieren diese Folge von Folgen nun durch

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anschaulich ergibt sich also

$$\begin{aligned} (x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}} &= (1,0,0,0,0,0,0,\ldots), \\ (x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} &= (0,1,0,0,0,0,0,\ldots), \\ (x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} &= (0,0,1,0,0,0,0,\ldots) \end{aligned}$$

usw.

(b_1) Zeigen Sie, dass die Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in S^0 liegt.

(b_2) Zeigen Sie, dass die Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt.

(c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) und (b) mit Definition 5.6.13 und Satz 5.6.17 im Skript. Was fällt Ihnen auf? Wieso führen Ihre Ergebnisse nicht zu einem Widerpruch?

Lösungshinweise:

(a) Aus der Definition der Menge geht hervor, dass für jedes $(x_n) \in S^0$ gilt: $\|(x_n)\|_1 \le 1$. Somit ist S^0 beschränkt. Zum Beweis der Abgeschlossenheit benutzen wir Satz 5.6.11. Sei hierzu $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in S^0, die in ℓ^1 konvergiert. Es bleibt zu Zeigen, dass dann der Grenzwert $a := \lim_{k\to\infty} a^{(k)}$ in S^0 liegt. Angenommen, dem wäre nicht so, dann wäre $\|a\|_1 \neq 1$ und somit für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|a^{(n)} - a\|_1 \ge \left|\|a^{(n)}\|_1 - \|a\|_1\right| = \left|1 - \|a\|_1\right| =: \lambda > 0.$$

Da $a \in \ell^1$, wissen wir, dass $\lambda < \infty$ gelten muss. Man erhält dann für $\varepsilon := \frac{\lambda}{2}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|a^{(n)} - a\|_1 > \varepsilon.$$

Somit kann aber $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gar nicht gegen a konvergieren. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Damit ist gezeigt, dass $a \in S^0$, weswegen S^0 abgeschlossen ist.

(b) (b$_1$) Da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^{(k)}| = \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} |x_n^{(k)}|}_{=0} + \underbrace{|x_k^{(k)}|}_{=1} + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n^{(k)}|}_{=0} = 1,$$

ist dies klar.

(b$_2$) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } i \in \{m, n\} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und somit erhalten wir

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| = 2.$$

Da der Abstand zwischen zwei (nicht identischen) Folgengliedern daher stets 2 ist, gilt dies auch für jede Teilfolge von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Insbesondere kann daher keine Teilfolge eine Cauchyfolge sein und somit erst recht nicht konvergieren.

(c) Liest man Definition 5.6.13 und Satz 5.6.17 ungenau, könnte man aus Aufgabenteil (a) folgern, dass die Menge S^0 kompakt ist, während Aufgabenteil (b) darauf schließen ließe, dass S^0 gerade nicht kompakt ist.
Essentiell ist hier jedoch, dass Definition 5.6.13 und Satz 5.6.17 für *endlichdimensionale* normierte Räume formuliert sind. Laut Aufgabentext betrachten wir hier jedoch einen *unendlichdimensionalen* Raum.

Aufgabe H2 (Quotientenkriterium für Potenzreihen) (12 Punkte)

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung: Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\sigma := \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ existiert. Dann gilt für den Konvergenzradius r von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & \text{falls } \sigma \in (0, \infty), \\ \infty, & \text{falls } \sigma = 0. \end{cases}$$

(b) Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^{2k}} x^k.$$

Lösungshinweise:

(a) Wir führen das Quotientenkriterium für Potenzreihen auf das Quotientenkriterium für Reihen in $\mathbb{K}$ zurück.
Setze $b_n := a_n \cdot x^n$. Dann gilt $|\frac{b_{n+1}}{b_n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \cdot |x|$ Sei $\sigma > 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} |\frac{b_{n+1}}{b_n}| = \sigma |x|$.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist also für $\sigma \cdot |x| < 1$ nach dem Quotientenkriterium für Reihen in $\mathbb{K}$ absolut konvergent und nach dem gleichen Kriterium divergent für $\sigma \cdot |x| > 1$. Also folgt, für den Konvergenzradius $r = \frac{1}{\sigma}$.
Sei $\sigma = 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} |\frac{b_{n+1}}{b_n}| = 0 \cdot |x| = 0 < 1$. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ für alle komplexen Zahlen $x \in \mathbb{K}$ nach dem Quotientenkriterium für Reihen komplexer Zahlen absolut.

(b) Wir bestimmen den Konvergenzradius mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Seien $a_k := \frac{(-1)^k}{c^{2k}}$ die Koeffizienten der Potenzreihe. Dann ist $\sigma = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{c^{2k}}{c^{2k+1}} = \frac{1}{c^2}$. Und der Konvergenzradius ist $r = \frac{1}{\sigma} = c^2$.

Alternativ kann man auch direkt über die geometrische Reihe argumentieren, die ja aus der Vorlesung bekannt ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^{2k}} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{c^2}\right)^n$$

konvergiert für $x \in (-c^2, c^2)$, da $\left|-\frac{x}{c^2}\right| < 1$ gelten muss.

Aufgabe H3 (Potenzreihen) (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgenden Potenzreihen konvergieren:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7 x^n}{2n!}. \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}. \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}.$$

Lösungshinweise:

i) Seien $a_n := \frac{3n^7}{2n!}$ die Koeffizienten der Potenzreihe. Für den Konvergenzradius r bestimmen wir

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3(n+1)^7}{2(n+1)!} \cdot \frac{2n!}{3n^7}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^7}{n^7(n+1)} = 0.$$

Nach Satz 5.9.10 ist der Konvergenzradius also durch $r = \infty$ gegeben. Folglich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7 x^n}{2n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Seien $b_n := \frac{1}{n}$ die Koeffizienten der Potenzreihe. Für den Konvergenzradius r bestimmen wir

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Nach Satz 5.9.10 ist der Konvergenzradius also durch $r = \frac{1}{1} = 1$ gegeben. Folglich konvergiert die Potenzreihe für alle x mit $|x-1| < 1$, also $x \in (0,2)$, und divergiert für alle x mit $|x-1| > 1$, also $x \in \mathbb{R}\backslash[0,2]$. Nun müssen wir die Randpukte des Konvergenzintervalls untersuchen.

Am linken Rand des Konvergenzintervalls ($x = 0$) lautet die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Dies ist die alternierende harmonische Reihe, die bekanntlich konvergent ist.

Am rechten Rand des Konvergenzintervalls ($x = 2$) lautet die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dies ist die harmonische Reihe, die bekanntlich divergent ist.

Insgesamt konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ für alle $x \in [0,2)$ und divergiert für $x \in \mathbb{R}\backslash[0,2)$.

iii) Seien $c_n := \frac{(-4n)^n}{2n^3}$ die Koeffizienten der Potenzreihe. Für den Konvergenzradius r bestimmen wir

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-4n)^n}{2n^3}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(4n)^n}}{\sqrt[n]{2n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\sqrt[n]{2n^3}},$$

da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3} = 1$ ist, ist die Folge unbeschränkt. Nach Satz 5.9.4 ist der Konvergenzradius also durch $r = 0$ gegeben. Folglich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}$ nur für $x = 0$.