Aussagenlogik und Prädikatenlogik 4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Anton Freund, Jonathan Weinberger

SoSe 2018
Übung: 30.05.2018
Abgabe: 13.06.2018

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Existenzquantor und Allquantor)
Man beweise:

(a) Für jede Funktion $f : A \to \{0,1\}$ gilt $1 - \max(1 - f(a) : a \in A) = \min(f(a) : a \in A)$.

(b) Es gilt $\forall x\, \varphi \equiv \neg\exists x\, \neg\varphi$.

Lösung: (a) Nehme zunächst an, es gibt ein $a \in A$ mit $f(a) = 0$. Dann gilt

$$1 - \max(1 - f(a) : a \in A) = 1 - 1 = 0 = \min(f(a) : a \in A).$$

Nehme nun an, es gilt $f(a) = 1$ für alle $a \in A$. Dann gilt

$$1 - \max(1 - f(a) : a \in A) = 1 - 0 = 1 = \min(f(a) : a \in A).$$

(b) Sei $\mathscr{I}$ eine beliebige Interpretation. Mit Teilaufgabe (a) (für die Funktion $f : A \to \{0,1\}$ mit $f(a) = \varphi^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}$) gilt

$$(\neg\exists x\, \neg\varphi)^{\mathscr{I}} = 1 - (\exists x\, \neg\varphi)^{\mathscr{I}} = 1 - \max((\neg\varphi)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} : a \in A) =$$
$$= 1 - \max(1 - \varphi^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} : a \in A) = \min(\varphi^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} : a \in A) = (\forall x\, \varphi)^{\mathscr{I}}.$$

Aufgabe G2 (Spielsemantik I)
Man betrachte die Struktur $(\mathbb{B} = \{0,1\}, 0, 1)$ zur Signatur $S = \{0,1\}$ mit zwei Konstantensymbolen 0 und 1, sowie die Formeln $\varphi(x_1) = (x_1 = 0)$ und $\psi(x_1) = (x_1 = 1)$. Geben Sie für beliebiges $a \in \mathbb{B}$ eine Gewinnstrategie des Verifizierers im Spiel mit Startposition $(\exists x_1\, \varphi \wedge \exists x_1\, \psi, a)$ an. Geben Sie weiter eine Gewinnstrategie des Falsifizierers im Spiel mit Startposition $(\exists x_1(\varphi \wedge \psi), a)$ an. Folgern Sie, dass die Formeln $\exists x_1\varphi \wedge \exists x_1\psi$ und $\exists x_1(\varphi \wedge \psi)$ nicht äquivalent sind.

Lösung: Im Spiel mit Startposition $(\exists x_1\, \varphi \wedge \exists x_1\, \psi, a)$ hat der Verifizierer die folgende Gewinnstrategie: Er wartet ab, welches Konjunktionsglied der Falsifizierer wählt. Falls dieser die Position $(\exists x_1\, \varphi, a)$ spielt, so spielt der Verifizierer die Position $(\varphi, 0)$. Damit gewinnt er das Spiel, weil $\mathbb{B} \models \varphi(0)$ gilt. Falls der Falsifizierer die Position $(\exists x_1\, \psi, a)$ spielt, so spielt der Verifizierer die Position $(\psi, 1)$. Damit gewinnt er das Spiel, weil $\mathbb{B} \models \psi(1)$ gilt.

Im Spiel mit Startposition $(\exists x_1(\varphi \wedge \psi), a)$ hat der Falsifizierer die folgende Gewinnstrategie: Er wartet ab, welches Element von $\mathbb{B}$ der Verifizierer wählt. Falls dieser die Position $(\varphi \wedge \psi, 0)$ spielt, so spielt der Falsifizierer die Position $(\psi, 0)$. Damit gewinnt er, weil $\mathbb{B} \not\models \psi(0)$ gilt. Falls der Verifizierer die Position $(\varphi \wedge \psi, 1)$ spielt, so spielt der Falsifizierer die Position $(\varphi, 1)$. Damit gewinnt er, weil $\mathbb{B} \not\models \varphi(1)$ gilt.

Weil der Verifizierer eine Gewinnstrategie im Spiel mit Startposition $(\exists x_1\, \varphi \wedge \exists x_1\, \psi, a)$ hat, gilt $\mathbb{B} \models \exists x_1\varphi \wedge \exists x_1\psi$ (unabhängig vom Wert von a, weil die Formel $\exists x_1\, \varphi \wedge \exists x_1\, \psi$ keine freien Variablen hat). Weil der Falsifizierer eine Gewinnstrategie im Spiel mit Startposition $(\exists x_1(\varphi \wedge \psi), a)$ hat, gilt $\mathbb{B} \not\models \exists x_1(\varphi \wedge \psi)$. Insbesondere können $\exists x_1\varphi \wedge \exists x_1\psi$ und $\exists x_1(\varphi \wedge \psi)$ nicht äquivalent sein.

Aufgabe G3 (Negationsnormalform)
Beweisen Sie, dass man zu jeder FO(S)-Formel φ eine äquivalente FO(S)-Formel φ^* in Negationsnormalform konstruieren kann. (Tipp: Argumentieren Sie per Induktion über φ und konstruieren Sie gleichzeitig eine NNF-Formel $\varphi^{\neg *} \equiv \neg\varphi$.)

Lösung: Als Basis der Induktion müssen wir atomare Formeln betrachten:

- Ist $\varphi = (t_1 = t_2)$, so setzen wir $\varphi^* := (t_1 = t_2)$ und $\varphi^{\neg *} := \neg(t_1 = t_2)$. Man beachte, dass dies NNF-Formeln sind.
- Ist $\varphi = Rt_1 \dots t_n$, so setzen wir $\varphi^* := Rt_1 \dots t_n$ und $\varphi^{\neg *} := \neg Rt_1 \dots t_n$.

Im Induktionsschritt müssen wir alle Fälle betrachten, in denen φ eine zusammengesetzte Formel ist:

- Sei $\varphi = \neg\psi$. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir NNF-Formeln $\psi^* \equiv \psi$ und $\psi^{\neg *} \equiv \neg\psi$. Wir setzen nun $\varphi^* := \psi^{\neg *} \equiv \neg\psi = \varphi$ und $\varphi^{\neg *} := \psi^* \equiv \psi \equiv \neg\neg\psi = \neg\varphi$. (Übrigens: Um diesen Fall zu behandeln, war es nötig, gleichzeitig mit ψ^* die Formel $\psi^{\neg *}$ zu konstruieren: Ansonsten hätte man nicht gewusst, wie man φ^* definieren soll. Manchmal muss man also die Behauptung stärker machen, damit die Induktion funktioniert.)
- Sei $\varphi = \psi \wedge \theta$. Wir verwenden die Induktionsvoraussetzung und setzen $\varphi^* := \psi^* \wedge \theta^* \equiv \psi \wedge \theta = \varphi$, sowie $\varphi^{\neg *} := \psi^{\neg *} \vee \theta^{\neg *} \equiv \neg\psi \vee \neg\theta \equiv \neg(\psi \wedge \theta) = \neg\varphi$. Man beachte, dass φ^* und $\varphi^{\neg *}$ wieder NNF-Formeln sind.
- Sei $\varphi = \psi \vee \theta$. Wir verwenden die Induktionsvoraussetzung und setzen $\varphi^* := \psi^* \vee \theta^* \equiv \psi \vee \theta = \varphi$, sowie $\varphi^{\neg *} := \psi^{\neg *} \wedge \theta^{\neg *} \equiv \neg\psi \wedge \neg\theta \equiv \neg(\psi \vee \theta) = \neg\varphi$.
- Sei $\varphi = \forall x\, \psi$. Wir verwenden die Induktionsvoraussetzung und setzen $\varphi^* := \forall x\, \psi^* \equiv \forall x\, \psi = \varphi$, sowie außerdem $\varphi^{\neg *} := \exists x\, \psi^{\neg *} \equiv \exists x\, \neg\psi \equiv \neg\forall x\, \psi = \neg\varphi$. Man beachte, dass φ^* und $\varphi^{\neg *}$ wieder NNF-Formeln sind.
- Sei $\varphi = \exists x\, \psi$. Wir verwenden die Induktionsvoraussetzung und setzen $\varphi^* := \exists x\, \psi^* \equiv \exists x\, \psi = \varphi$, sowie außerdem $\varphi^{\neg *} := \forall x\, \psi^{\neg *} \equiv \forall x\, \neg\psi \equiv \neg\exists x\, \psi = \neg\varphi$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Vertauschung von Allquantoren) (12 Punkte)

Man zeige:

(a) Für jede Funktion $f : A \times B \to \{0,1\}$ gilt

$$\min(\min(f(a,b) : b \in B) : a \in A) = \min(f(a,b) : a \in A, b \in B) = \min(\min(f(a,b) : a \in A) : b \in B).$$

(b) Für jede Belegung $\beta : \mathcal{V} \to A$, unterschiedliche Variablen x und y und beliebige $a, b \in A$ gilt

$$\beta[x \mapsto a][y \mapsto b] = \beta[y \mapsto b][x \mapsto a].$$

(c) Es gilt $\forall x \forall y\, \varphi \equiv \forall y \forall x\, \varphi$.

Lösung: (a) [4 Punkte] Wir zeigen zunächst die erste Gleichheit: Wähle dazu $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ mit $f(a_0, b_0) = \min(f(a,b) : a \in A, b \in B)$. Wegen der Minimalität von $f(a_0, b_0)$ gilt

$$f(a_0, b_0) \leq \min(f(a,b) : b \in B)$$

für beliebiges $a \in A$. Hieraus folgt

$$\min(f(a,b) : a \in A, b \in B) = f(a_0, b_0) \leq \min(\min(f(a,b) : b \in B) : a \in A).$$

Andererseits ist

$$\min(\min(f(a,b) : b \in B) : a \in A) \leq \min(f(a_0,b) : b \in B) \leq f(a_0, b_0) = \min(f(a,b) : a \in A, b \in B).$$

Zusammen ergibt das

$$\min(\min(f(a,b) : b \in B) : a \in A) = \min(f(a,b) : a \in A, b \in B).$$

Die zweite Gleichheit zeigt man genauso: Wegen der Minimalität von $f(a_0, b_0)$ gilt

$$f(a_0, b_0) \leq \min(f(a,b) : a \in A)$$

für beliebiges $b \in B$. Hieraus folgt

$$\min(f(a,b) : a \in A, b \in B) = f(a_0, b_0) \leq \min(\min(f(a,b) : a \in A) : b \in B).$$

Andererseits ist

$$\min(\min(f(a,b) : a \in A) : b \in B) \leq \min(f(a,b_0) : a \in A) \leq f(a_0, b_0) = \min(f(a,b) : a \in A, b \in B).$$

Zusammen ergibt das

$$\min(f(a,b) : a \in A, b \in B) = \min(\min(f(a,b) : a \in A) : b \in B).$$

(b) [4 Punkte] Wir müssen $\beta[x \mapsto a][y \mapsto b](z) = \beta[y \mapsto b][x \mapsto a](z)$ für jede Variable z zeigen: Ist z die Variable x (und daher verschieden von y), so gilt

$$\beta[x \mapsto a][y \mapsto b](z) = \beta[x \mapsto a](z) = a = \beta[y \mapsto b][x \mapsto a](z).$$

Ist z die Variable y (und daher verschieden von x), so gilt

$$\beta[x \mapsto a][y \mapsto b](z) = b = \beta[y \mapsto b](z) = \beta[y \mapsto b][x \mapsto a](z).$$

Ist z verschieden von x und y, so gilt

$$\beta[x \mapsto a][y \mapsto b](z) = \beta[x \mapsto a](z) = \beta(z) = \beta[y \mapsto b](z) = \beta[y \mapsto b][x \mapsto a](z).$$

(c) [4 Punkte] Schreibt man $\forall x \forall y\, \varphi$, so nimmt man üblicherweise an, dass x und y verschiedene Variablen sind (tatsächlich ist die Behauptung in (c) trivial, wenn x und y die gleiche Variable sind). Sei nun $\mathscr{I} = (\mathscr{A}, \beta)$ eine beliebige Interpretation. Laut Teilaufgabe (b) gilt

$$\mathscr{I}[x \mapsto a][y \mapsto b] = (\mathscr{A}, \beta[x \mapsto a][y \mapsto b]) = (\mathscr{A}, \beta[y \mapsto b][x \mapsto a]) = \mathscr{I}[y \mapsto b][x \mapsto a]$$

für beliebige $a, b \in A$. Zusammen mit Teilaufgabe (a) berechnet man

$$(\forall x \forall y\, \varphi)^{\mathscr{I}} = \min((\forall y\, \varphi)^{\mathscr{I}[x \mapsto a]} : a \in A) = \min(\min(\varphi^{\mathscr{I}[x \mapsto a][y \mapsto b]} : b \in A) : a \in A) = \min(\varphi^{\mathscr{I}[x \mapsto a][y \mapsto b]} : a, b \in A) =$$
$$= \min(\varphi^{\mathscr{I}[y \mapsto b][x \mapsto a]} : a, b \in A) = \min(\min(\varphi^{\mathscr{I}[y \mapsto b][x \mapsto a]} : a \in A) : b \in A) = \min((\forall x\, \varphi)^{\mathscr{I}[y \mapsto b]} : b \in A) = (\forall y \forall x\, \varphi)^{\mathscr{I}}.$$

Aufgabe H2 (Spielsemantik II) (12 Punkte)

Sei $\preceq$ ein zweistelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \big) \Big)$$

und die Struktur $\mathscr{A} = (A, \preceq^{\mathscr{A}})$ mit $A = \{0,1,2\}$ und $\preceq^{\mathscr{A}} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,2)\}$.

(a) Geben Sie eine zu φ äquivalente Formel φ' in Negationsnormalform an.

(b) Zeigen Sie $\mathscr{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie des Falsifizierers im Spiel zur Startposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ angeben, wobei $a_1, \ldots, a_4 \in A$ beliebig sind. (Tipp: Es kann hilfreich sein, wenn Sie sich zunächst klar machen, warum $\mathscr{A}$ kein Modell von φ ist, etwa indem Sie $\mathscr{A}$ als gerichteten Graphen zeichnen.)

Lösung:

(a) [4 Punkte] Wir formen φ in Negationsnormalform um:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big(\neg (x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big)}_{=:\varphi'}.
\end{aligned}$$

(b) [8 Punkte] Wir geben eine Gewinnstrategie des Falsifizierers im Spiel mit Startposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ an, wobei $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ beliebig sind: Zunächst zieht der Falsifizierer in die Position

$$\Big(\forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big), (2, a_2, a_3, a_4) \Big).$$

Dann ist er nochmal dran und zieht nach

$$\Big(\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big), (2, 2, a_3, a_4) \Big).$$

Nun hat der Verifizierer drei Möglichkeiten:

$a_3 \mapsto 2$: Angenommen, der Verfizierer zieht in die Position

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (2,2,2,a_4)\Big).$$

Dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (2,2,2,a_4)\Big)$$

und

$$\Big(x_3 \preceq x_1, (2,2,2,a_4)\Big)$$

ziehen. Er gewinnt wegen $\mathscr{A} \not\models 2 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 1$: Angenommen, der Verfizierer zieht in die Position

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (2,2,1,a_4)\Big).$$

Dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (2,2,1,a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2,2,1,1)\Big)$$

ziehen. Von hier aus kann der Verifizierer nur die Endpositionen $(\neg x_4 \preceq x_1, (2,2,1,1))$, $(\neg x_4 \preceq x_2, (2,2,1,1))$ und $(x_4 \preceq x_3, (2,2,1,1))$ erreichen. Wegen $\mathscr{A} \models 1 \preceq 2$ und $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 1$ gewinnt der Falsifizierer in jeder dieser Endpositionen.

$a_3 \mapsto 0$: Angenommen, der Verfizierer zieht in die Position

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (2,2,0,a_4)\Big).$$

Dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (2,2,0,a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2,2,0,1)\Big)$$

ziehen. Von hier aus kann der Verifizierer nur die Endpositionen $(\neg x_4 \preceq x_1, (2,2,0,1))$, $(\neg x_4 \preceq x_2, (2,2,0,1))$ und $(x_4 \preceq x_3, (2,2,0,1))$ erreichen. Wegen $\mathscr{A} \models 1 \preceq 2$ und $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 0$ gewinnt der Falsifizierer in jeder dieser Endpositionen.

Da der Falsifizierer eine Gewinnstrategie im Spiel zur Startposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ hat, gilt $\mathscr{A} \not\models \varphi'$ (unabhängig von $a_1, \ldots . a_4$, weil φ' keine freien Variablen hat). Wegen $\varphi \equiv \varphi'$ folgt $\mathscr{A} \not\models \varphi$.

Aufgabe H3 (Logik ohne Gleichheit) (12 Punkte)

Wir betrachten eine Signatur S und Ihre Erweiterung $\hat{S} := S \cup \{\sim\}$ um ein zweistelliges Relationssymbol $\sim$, das die Gleichheit simulieren soll. Zu jeder $\mathrm{FO}(S)$-Formel φ konstruieren wir eine $\mathrm{FO}^{\neq}(\hat{S})$-Formel $\varphi^{\sim}$, indem wir jede Teilformel $t_1 = t_2$ von φ durch die Formel $t_1 \sim t_2$ ersetzen. Wir wollen zeigen, dass φ erfüllbar ist (durch ein Modell mit mengentheoretischer Gleichheit), wenn $\varphi^{\sim}$ ein Modell hat, das die Gleichheitsaxiome für $\sim$ erfüllt. Sei dazu $\mathscr{A}$ eine $\hat{S}$-Struktur, die die Gleichheitsaxiome für $\sim$ erfüllt. Für jedes $a \in A$ können wir dann die Äquivalenzklasse

$$[a] := [a]_{\sim^{\mathscr{A}}} := \{b \in A \,|\, a \sim^{\mathscr{A}} b\}$$

betrachten (man beachte $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim^{\mathscr{A}} b$). Wie in der Vorlesung definieren wir eine S-Struktur $\mathscr{A}_0$ durch

$$\begin{aligned} A_0 &:= \{[a] \,|\, a \in A\}, \\ c^{\mathscr{A}_0} &:= [c^{\mathscr{A}}], \\ f^{\mathscr{A}_0}[a_1] \ldots [a_n] &:= [f^{\mathscr{A}} a_1 \ldots a_n], \\ ([a_1], \ldots, [a_n]) \in R^{\mathscr{A}_0} &:\Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathscr{A}}. \end{aligned}$$

Da $\mathscr{A}$ die Gleichheitsaxiome erfüllt, ist dies wohldefiniert. Zu jeder Belegung $\beta : \mathscr{V} \to A$ definieren wir eine Belegung $\beta^{=} : \mathscr{V} \to A_0$ durch

$$\beta^{=}(x) := [\beta(x)].$$

Für $\mathscr{I} = (\mathscr{A}, \beta)$ schreiben wir $\mathscr{I}^{=} = (\mathscr{A}_0, \beta^{=})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\mathscr{I} = (\mathscr{A}, \beta)$ eine Interpretation über der Struktur $\mathscr{A}$. Dann gilt $t^{\mathscr{I}^=} = [t^{\mathscr{I}}]$ für jeden S-Term t.

(b) Sei $\beta : \mathscr{V} \to A$ eine Belegung. Dann gilt $\beta[x \mapsto a]^= = \beta^=[x \mapsto [a]]$ für jedes $a \in A$.

(c) Sei $\mathscr{I} = (\mathscr{A}, \beta)$ eine Interpretation über der Struktur $\mathscr{A}$. Dann ist $\mathscr{I} \models \varphi^\sim$ äquivalent zu $\mathscr{I}^= \models \varphi$.

Lösung: (a) [4 Punkte] Man beweist die Aussage durch Induktion über den Aufbau des Terms t. Als Basis der Indukion müssen wir Variablen und Konstanten betrachten:

- Sei $t = x$ eine Variable. Mit der Definition von $\mathscr{I}^=$ ist $t^{\mathscr{I}^=} = \beta^=(x) = [\beta(x)] = [t^{\mathscr{I}}]$.
- Sei $t = c$ eine Konstante. Mit der Definition von $c^{\mathscr{A}_0}$ ist $t^{\mathscr{I}^=} = c^{\mathscr{A}_0} = [c^{\mathscr{A}}] = [t^{\mathscr{I}}]$.

Im Induktionsschritt müssen wir zusammengesetzte Terme betrachten:

- Sei $t = f\, t_1 \dots t_n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $t_i^{\mathscr{I}^=} = [t_i^{\mathscr{I}}]$ für $i = 1, \dots, n$. Zusammen mit der Definition von $f^{\mathscr{A}_0}$ erhält man $t^{\mathscr{I}^=} = f^{\mathscr{A}_0} t_1^{\mathscr{I}^=} \dots t_n^{\mathscr{I}^=} = f^{\mathscr{A}_0}[t_1^{\mathscr{I}}] \dots [t_n^{\mathscr{I}}] = [f^{\mathscr{A}} t_1^{\mathscr{I}} \dots t_n^{\mathscr{I}}] = [t^{\mathscr{I}}]$.

(b) [4 Punkte] Wir müssen $\beta[x \mapsto a]^=(y) = \beta^=[x \mapsto [a]](y)$ für jede Variable y zeigen. Ist y dieselbe Variable wie x, so hat man

$$\beta[x \mapsto a]^=(x) = [\beta[x \mapsto a](x)] = [a] = \beta^=[x \mapsto [a]](x).$$

Sind x und y verschiedene Variablen, so gilt

$$\beta[x \mapsto a]^=(y) = [\beta[x \mapsto a](y)] = [\beta(y)] = \beta^=(y) = \beta^=[x \mapsto [a]](y).$$

(c) [4 Punkte] Man argumentiert per Induktion über den Aufbau von φ. Als Basis der Induktion müssen wir atomare Formeln betrachten. Es gilt hier, zwei Fälle zu unterscheiden:

- Sei $\varphi = (t_1 = t_2)$. Dann ist also $\varphi^\sim = (t_1 \sim t_2)$. Mit Teilaufgabe (a) hat man

$$\mathscr{I} \models \varphi^\sim \Leftrightarrow t_1^{\mathscr{I}} \sim^{\mathscr{A}} t_2^{\mathscr{I}} \Leftrightarrow [t_1^{\mathscr{I}}] = [t_2^{\mathscr{I}}] \Leftrightarrow t_1^{\mathscr{I}^=} = t_2^{\mathscr{I}^=} \Leftrightarrow \mathscr{I}^= \models \varphi.$$

- Sei $\varphi = R t_1 \dots t_n$. Dann ist $\varphi^\sim = R t_1 \dots t_n$ und somit

$$\mathscr{I} \models \varphi^\sim \Leftrightarrow (t_1^{\mathscr{I}}, \dots, t_n^{\mathscr{I}}) \in R^{\mathscr{A}} \Leftrightarrow ([t_1^{\mathscr{I}}], \dots, [t_n^{\mathscr{I}}]) \in R^{\mathscr{A}_0} \Leftrightarrow (t_1^{\mathscr{I}^=}, \dots, t_n^{\mathscr{I}^=}) \in R^{\mathscr{A}_0} \Leftrightarrow \mathscr{I}^= \models \varphi.$$

Im Induktionsschritt müssen wir die verschiedenen Möglichkeiten für zusammengesetzte Formeln betrachten:

- Sei $\varphi = \neg\psi$, also $\varphi^\sim = \neg\psi^\sim$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathscr{I} \models \psi^\sim$ äquivalent zu $\mathscr{I}^= \models \psi$. Hieraus folgt

$$\mathscr{I} \models \varphi^\sim \Leftrightarrow \mathscr{I} \models \neg\psi^\sim \Leftrightarrow \mathscr{I} \not\models \psi^\sim \Leftrightarrow \mathscr{I}^= \not\models \psi \Leftrightarrow \mathscr{I}^= \models \neg\psi \Leftrightarrow \mathscr{I}^= \models \varphi.$$

- Sei $\varphi = \psi \wedge \theta$, also $\varphi^\sim = \psi^\sim \wedge \theta^\sim$. Mit der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\mathscr{I} \models \varphi^\sim \Leftrightarrow [\mathscr{I} \models \psi^\sim \text{ und } \mathscr{I} \models \theta^\sim] \Leftrightarrow [\mathscr{I}^= \models \psi \text{ und } \mathscr{I}^= \models \theta] \Leftrightarrow \mathscr{I}^= \models \varphi.$$

- Sei $\varphi = \psi \vee \theta$, also $\varphi^\sim = \psi^\sim \vee \theta^\sim$. Mit der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\mathscr{I} \models \varphi^\sim \Leftrightarrow [\mathscr{I} \models \psi^\sim \text{ oder } \mathscr{I} \models \theta^\sim] \Leftrightarrow [\mathscr{I}^= \models \psi \text{ oder } \mathscr{I}^= \models \theta] \Leftrightarrow \mathscr{I}^= \models \varphi.$$

- Sei $\varphi = \forall x\, \psi$, also $\varphi^\sim = \forall x\, \psi^\sim$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(\mathscr{A}, \eta) \models \psi^\sim$ äquivalent zu $(\mathscr{A}_0, \eta^=) \models \psi$, für alle Belegungen $\eta : \mathscr{V} \to A$. Zusammen mit Teilaufgabe (b) folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{I} \models \varphi^\sim &\Leftrightarrow [\text{für alle } a \in A \text{ gilt } (\mathscr{A}, \beta[x \mapsto a]) \models \psi^\sim] &&\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [\text{für alle } a \in A \text{ gilt } (\mathscr{A}_0, \beta[x \mapsto a]^=) \models \psi] &&\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [\text{für alle } a \in A \text{ gilt } (\mathscr{A}_0, \beta^=[x \mapsto [a]]) \models \psi] &&\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [\text{für alle } [a] \in A_0 \text{ gilt } (\mathscr{A}_0, \beta^=[x \mapsto [a]]) \models \psi] &&\Leftrightarrow \mathscr{I}^= \models \varphi.
\end{aligned}$$

- Sei $\varphi = \exists x\, \psi$, also $\varphi^\sim = \exists x\, \psi^\sim$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(\mathscr{A}, \eta) \models \psi^\sim$ äquivalent zu $(\mathscr{A}_0, \eta^=) \models \psi$, für alle Belegungen $\eta : \mathscr{V} \to A$. Zusammen mit Teilaufgabe (b) folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{I} \models \varphi^\sim &\Leftrightarrow [\text{für mindestens ein } a \in A \text{ gilt } (\mathscr{A}, \beta[x \mapsto a]) \models \psi^\sim] &&\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [\text{für mindestens ein } a \in A \text{ gilt } (\mathscr{A}_0, \beta[x \mapsto a]^=) \models \psi] &&\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [\text{für mindestens ein } a \in A \text{ gilt } (\mathscr{A}_0, \beta^=[x \mapsto [a]]) \models \psi] &&\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [\text{für mindestens ein } [a] \in A_0 \text{ gilt } (\mathscr{A}_0, \beta^=[x \mapsto [a]]) \models \psi] &&\Leftrightarrow \mathscr{I}^= \models \varphi.
\end{aligned}$$