Aussagenlogik & Prädikatenlogik (FGdI II) 7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

SoSe 2016
13. Juli 2016

Gruppenübung

Aufgabe G7.1 (Berechnungen in erststufiger Logik modellieren)
In Aufgabe G3.3 haben wir von endlichen Automaten bzw. Turingmaschinen durchgeführte Berechnungen durch aussagenlogische Formelmengen modelliert und daraus unter anderem gefolgert, dass die *Erfüllbarkeit* einer (als Eingabe für einen Algorithmus geeignet kodierten) Formelmenge nicht semientscheidbar ist.

(a) Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A)$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA). Konstruieren Sie aus $\mathcal{A}$ einen Satz $\varphi_{\mathcal{A}} \in \mathrm{FO}_0$, für den gilt:

$$\varphi_{\mathcal{A}} \text{ besitzt ein endliches Modell} \quad \Leftrightarrow \quad L(\mathcal{A}) \setminus \{\epsilon\} \neq \emptyset$$

Sei dazu $S_{\Sigma,Q} = \{N\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\} \cup \{Q_q : q \in Q\}$ mit einer zweistelligen Relation N und einstelligen Relationen P_a und Q_q. Der Satz $\varphi_{\mathcal{A}}$ soll dann aussagen, dass

- N die Nachfolger-Relation eines Anfangsstücks der natürlichen Zahlen ist (jedes Element bis auf eines hat genau einen Nachfolger, jedes Element bis auf eines ist Nachfolger genau eines anderen, die beiden Ausnahmeelemente sind verschieden, sofern es mindestens zwei Elemente in der Struktur gibt),
- für jedes Element der Trägermenge genau ein P_a gilt (mit der intendierten Bedeutung, dass an der entsprechenden Position der Buchstabe a steht),
- für jedes Element der Trägermenge genau ein Q_q gilt (mit der intendierten Bedeutung, dass der Automat, *nachdem* er den entsprechenden Buchstaben gelesen hat, im Zustand q ist),
- für das eindeutige Element ohne N-Nachfolger Q_q für ein $q \in A$ gilt.

Machen Sie sich anhand eines Beispiels klar, wie Modelle von $\varphi_{\mathcal{A}}$ und akzeptierende Läufe von $\mathcal{A}$ zusammenhängen.

(b) Sei jetzt $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, q^+, q^-)$ eine Turingmaschine. Definieren Sie eine Formel $\varphi_{\mathcal{M}\downarrow}$, für die gilt

$$\varphi_{\mathcal{M}\downarrow} \text{ besitzt ein endliches Modell} \quad \Leftrightarrow \quad \square \xrightarrow{\mathcal{M}} \text{STOP}.$$

Orientieren Sie sich an der Konstruktion in Abschnitt 7.1 im Skript. Beachten Sie, dass der Satz $\varphi_{\mathcal{M}\downarrow}$ aus einer geeigneten Kodierung $\langle\mathcal{M}\rangle$ von $\mathcal{M}$ berechnet werden kann.

Zusatz:

i. Ist es auch möglich, einen Satz $\varphi'_{\mathcal{M}\downarrow}$ aus $\langle\mathcal{M}\rangle$ zu berechnen, für den gilt

$$\varphi'_{\mathcal{M}\downarrow} \text{ ist erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \square \xrightarrow{\mathcal{M}} \text{STOP?}$$

ii. Ist es möglich, einen Satz $\varphi_{\mathcal{M}\uparrow}$ aus $\langle\mathcal{M}\rangle$ zu berechnen, für den gilt

$$\varphi_{\mathcal{M}\uparrow} \text{ besitzt ein endliches Modell} \quad \Leftrightarrow \quad \square \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty?$$

iii. Ist es möglich, einen Satz $\varphi'_{\mathcal{M}\uparrow}$ aus $\langle\mathcal{M}\rangle$ zu berechnen, für den gilt

$$\varphi'_{\mathcal{M}\uparrow} \text{ ist erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \square \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty?$$

Bei Interesse können Sie schriftlich ausgearbeitete Antworten auf die Zusatzfragen bis zum 20. Juli abgeben (im Sekretariat der Arbeitsgruppe Logik, Raum S215/206); für jede der drei Fragen werden bis zu fünf Bonuspunkte vergeben. Dabei sollen Konstruktionen der fraglichen Sätze bzw. Beweise für deren Nichtexistenz detailliert angegeben werden, Verweise auf das Skript („existiert nach Satz xy“) reichen nicht.