Mathematik II für Informatik
8. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 08./09. Juni 2017
Abgabe: 22./23. Juni 2017

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Grenzwerte: Regel von l'Hospital und mehr I)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)+x-\cos(0)}{x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1-} \ln(x)\cdot\ln(1-x)$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} (\frac{1}{x}+\ln x)$.

Lösungshinweise: Bitte beachten Sie: Im Folgenden werden wir häufig die Regel von de l'Hospital anwenden. Bitte beachten Sie, dass es für eine sorgfältige Bearbeitung dieser Aufgabe **immer notwendig** ist, im Vorfeld zu überprüfen, ob auch die Voraussetzungen, die für die Anwendung der Regel von de l'Hospital notwendig sind (vgl. Satz 6.2.6 im Skript), erfüllt sind! Ist dies nicht der Fall, so ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar!

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+x-\cos(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)+1}{1} = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

(c) Für den letzten Teil wenden wir die Regel von L'Hospital mehrfach, genauer gesagt n mal, an. Wir erhalten dann

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

(d)

$$\lim_{x\to 1-} \ln(x)\cdot\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{1/\ln(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{-1}{(1-x)}}{\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{(\ln x)^2}\right)} = \lim_{x\to 1-} \frac{x(\ln x)^2}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{-1} = 0\,.$$

(e) Für das Reziproke gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1/x+\ln x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{1+x\ln x} = \frac{0}{1+0},$$

denn $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$. Also

$$\lim_{x\to 0+} (1/x+\ln x) = \infty.$$

Aufgabe G2 (Taylorpolynom)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x}\sin(x)$. Approximieren Sie die Funktion f durch ihr Taylorpolynom 3. Ordnung mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass der Fehler auf dem Intervall $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ höchstens 10^{-8} beträgt (Restgliedabschätzung).
Lösungshinweise:

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x}\sin(x) &\implies f'(x) = e^{-x}(\cos(x)-\sin(x)) \\ &\implies f''(x) = -2e^{-x}\cos(x) \\ &\implies f'''(x) = 2e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) \\ &\implies f^{(4)}(x) = -4e^{-x}\sin(x). \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -2, \quad f'''(0) = 2.$$

Das Taylorpolynom ist nun gegeben durch:

$$\begin{aligned} T_3(f,0)(x) &= \frac{f(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \\ &= 0 + 1\cdot x + \frac{-2}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 \\ &= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Nach Satz 6.2.12 gilt für das Restglied vom Grad 3: Es existiert ein ξ zwischen 0 und x, sodass

$$|R_3(f,0)(x)| = \left|\frac{4e^{-\xi}\sin(\xi)}{4!}x^4\right| = \left|\frac{e^{-\xi}\sin(\xi)}{3!}x^4\right| \leq \frac{e^{\frac{1}{100}}\cdot 1}{3!}(\tfrac{1}{100})^4 \leq (\tfrac{1}{100})^4 = (\tfrac{1}{10^2})^4 = 10^{-8},$$

wenn x und damit auch ξ aus dem Intervall $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ sind.

Aufgabe G3 (Zwischenwertsatz und Taylorpolynom)
Wir betrachten die Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1+x}{1-x} > 0$ für alle $x \in (-1,1)$ gilt, die Funktion also wohldefiniert ist.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe von f in 0.
Hinweis: Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}$.

(c) Nähern Sie den Wert $\ln(\sqrt{3})$ durch ein Taylorpolynom fünften Grades an. Sie müssen weder eine Fehlerabschätzung machen noch $\lim_{k\to\infty} T_{k,f}(x;0) = f(x)$ zeigen.

Lösungshinweise:

(a) Es ist

$$\frac{1+x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

also ist $\frac{1+x}{1-x} \neq 0$ für alle $x \in (-1,1)$. Für $x = \frac{1}{2}$ folgt $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 > 0$ und $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ ist wegen $x < 1$ eine stetige Funktion, so dass nach dem Zwischenwertsatz kein $x \in (-1,1)$ existieren kann mit $\frac{1+x}{1-x} < 0$. Zusammen folgt also $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

(b) Zunächst erleichtern wir uns die Arbeit durch die Beobachtung

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$$

und berechnen dann

$$f(0) = 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Wir definieren für $x \in (-1,1)$ die Funktion

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

und behaupten, dass dies die Taylorreihe von f ist. Ihr Konvergenzradius ist nach Hadamard (5.9.3)

$$r = \left(\lim_{n\to 0} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}\right)^{-1} = 1,$$

so dass wir nach Satz 6.1.15. diese Reihe gliedweise differenzieren können, woraus wir

$$g'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \overset{(*)}{=} \frac{1}{1-x^2} = f'(x), \qquad (*) = \text{geom. Reihe}$$

folgern. Nach Satz 6.2.2.(c) gilt daher $f(x) = g(x) + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.
Allerdings gilt $0 = f(0) = g(0) + c = c$, also sogar $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit schließen wir

$$T_f(x;0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(c) Eine Näherung für $\ln(\sqrt{3})$ durch das Taylorpolynom fünften Grades ist

$$\ln(\sqrt{3}) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+1/2}{1-1/2}}\right) \approx T_{5,f}\Big(\frac{1}{2};0\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} = \frac{263}{480}.$$

Aufgabe G4 (Nullstellen und Monotonie)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2\sin(2x).$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Finden Sie jeweils ein Intervall, auf dem f streng monoton wächst bzw. streng monton fällt.

Lösungshinweise:

(a) Die Gleichung $f(x) = 0$ ist äquivalent zu

$$\sin(2x) = 0.$$

Wir wissen aus dem Skript (Satz 5.10.13), dass $\sin(y) = 0$ genau für $y = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt, also für $y \in \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$. Daraus können wir wegen

$$y = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

folgern, dass $f(x) = 0$ für $x \in \{\ldots, -\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi, \ldots\}$ gilt, also für

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass f eine π-periodische Funktion ist.

b) Als erste Ableitung ergibt sich mit der Kettenregel (Satz 6.1.10)

$$f'(x) = 4\cos(2x).$$

Da wir uns für die Monotonie der Funktion f interessieren, bestimmen wir zunächst die Nullstellen von f' und denken dann über das Vorzeichen von f' zwischen diesen Nullstellen nach. Da $\cos(y) = 0$ genau für $y = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ gilt (vgl. 5.10.13), folgt mit einer Argumentation wie in a), dass

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

gilt. Für die Nullstellen von f' haben wir also $x \in \{\ldots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \ldots\}$.
Wann ist nun f' positiv und wann negativ? Betrachten wir f' an der Stelle 0. Dort gilt $f'(0) = 4\cos(0) = 4 > 0$. Wir erkennen, dass zwischen den Nullstellen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ die Funktion f' nur (echt) positive Werte annimmt. Auf dem offenen Intervall $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ist deshalb die ursprüngliche Funktion f streng monoton wachsend. Man hätte aber auch jedes andere Intervall der Form

$$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

oder ein Teilintervall daraus angeben können (da f die Periode π besitzt). Genauso argumentiert man, dass f auf dem Intervall $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ streng monoton fällt. Es erfüllt aber auch jedes andere Intervall der Form

$$\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(bzw. darin enthaltene Intervalle) die geforderte Bedingung.

Hausübung

Aufgabe H1 (Grenzwerte: Regel von de l'Hospital und mehr II) (12 Punkte)

Bestimmen Sie

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x}$.

(c) $\lim_{x\to 0} (\cosh x)^{\frac{1}{x^2}}$.

(d) Finden Sie $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$.

Hinweis: Wenden Sie die Regel von de l'Hospital nach einer Substitution an.

Lösungshinweise: Bitte beachten Sie: Im Folgenden werden wir häufig die Regel von de l'Hospital anwenden. Bitte beachten Sie, dass es für eine sorgfältige Bearbeitung dieser Aufgabe **immer notwendig** ist, im Vorfeld zu überprüfen, ob auch die Voraussetzungen, die für die Anwendung der Regel von de l'Hospital notwendig sind (vgl. Satz 6.2.6 im Skript), erfüllt sind! Ist dies nicht der Fall, so ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar!

(a) Mit der Regel von de l'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}}.$$

Da Zähler und Nenner für $x \to 1$ gegen 0 gehen, wenden wir die Regel von de l'Hospital erneut an:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^x((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1(1+1)}{-1} = -2. \end{aligned}$$

(b) Hier ist die Regel von L'Hospital nicht anwendbar, da $\lim_{x\to 0} e^x = 1$. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0} e^x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Hätten wir an dieser Stelle die Regel von L'Hospital angewendet, so wären wir auf $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$ gekommen.

(c) Es gilt

$$(\cosh x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln(\cosh x)}{x^2}}.$$

Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hospital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cosh x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} (\cosh x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cosh x)}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

(d) Sei $y = e^{-\frac{1}{x}}$. Wenn $x \to 0+$, dann gilt auch $y \to 0+$. Außerdem ist $\frac{1}{x} = -\ln y$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} &= \lim_{y\to 0+} y(-\ln y)^n = \lim_{y\to 0+} \frac{(-\ln y)^n}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0+} \frac{n(-\ln y)^{n-1}(-\frac{1}{y})}{-\frac{1}{y^2}} \\
&= \lim_{y\to 0+} \frac{n(-\ln y)^{n-1}}{\frac{1}{y}} = \ldots = \lim_{y\to 0+} \frac{n!(-\ln y)^0}{\frac{1}{y}} = n! \lim_{y\to 0+} y = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Taylor) (12 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = xe^x$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion f in $x_0 = 0$.

(b) Geben Sie an, wie im Falle von Aufgabenteil (a) das Restglied aussieht. (Sie müssen hierzu den Punkt ξ nicht exakt bestimmen)

(c) Geben Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor an, wie groß der Approximationsfehler $|f(x) - T_{3,f}(x;0)|$ höchstens werden kann, wenn wir die Funktion f nur auf dem Intervall $[0,1]$ betrachten.

Lösungshinweise:

(a) Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
&f(x) = x\,e^x, \quad f'(x) = e^x + xe^x, \quad f^{(2)}(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x, \quad f^{(3)}(x) = 3e^x + xe^x \\
&f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f^{(2)}(0) = 2, \qquad f^{(3)}(0) = 3
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert also:

$$\begin{aligned}
T_{3,f}(x;0) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{3} \frac{k}{k!}(x-0)^k \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{(k-1)!} x^k \\
&= \frac{1}{0!}x + \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^3 \\
&= x + x^2 + \frac{1}{2}x^3.
\end{aligned}$$

(b) Das Restglied ist gegeben durch

$$R_{3,f}(x;0) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-0)^4 = \frac{4e^\xi + \xi e^\xi}{4!}x^4,$$

für ein $\xi \in [0,x]$.

(c) Nach dem Satz von Taylor können wir den gesuchten Fehler mit Hilfe des Restgliedes bestimmen. Für $x \in [0,1]$ ist dann nach Aufgabenteil (b)

$$|f(x) - T_{3,f}(x;0)| = |R_{3,f}(x;0)| = \left|\frac{4e^\xi + \xi e^\xi}{4!}x^4\right| \leq \sup_{\xi\in[0,1]} \left|\frac{4e^\xi + \xi e^\xi}{4!}x^4\right| = \left|\frac{5e^1}{4!}x^4\right| \leq \left|\frac{5e}{4!}\cdot 1\right| \approx 0{,}57.$$

Aufgabe H3 (Extrema) (12 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = 55x - 20x^3 + x^5$.

(a) Entscheiden Sie ob die Funktion f ein globales Maximum/Minimum besitzt. Versuchen Sie hierzu nicht, die selbigen erst auszurechnen. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(b) Berechnen Sie sämtliche Extrema der Funktion f. Entscheiden Sie hierbei jeweils (begründet), ob es sich um ein lokales oder globales Maximum/Minimum handelt.

Lösungshinweise:

(a) Die Funktion f ist ein Polynom und somit stetig (vgl. Beispiel 5.7.17). Da das Intervall $[-5,5]$ eine kompakte Menge ist, gilt nach Satz 5.7.28, dass f sowohl sein Minimum, als auch sein Maximum annimmt.

(b) Wir betrachten zunächst die Extrema im Inneren von $[-5,5]$, oder anders gesagt auf $(-5,5)$. Hierzu nutzen wir Satz 6.3.3 und leiten f ab. Es gilt

$$f'(x) = 5x^4 - 60x^2 + 55, \qquad f''(x) = x \cdot (20x^2 - 120).$$

Nullstzen von f' und Substitution von $x^2 = y$ führt dann zu der Gleichung $0 = y^2 - 12y + 11$. Die wohlbekannte p-q-Formel ergibt

$$y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{6^2 - 11} = 6 \pm \sqrt{25} = 6 \pm 5.$$

Resubstitution liefert dann die Punkte $\pm\sqrt{1}$ und $\pm\sqrt{11}$. Einsetzen dieser in f'' ergibt

$$\begin{aligned}
f''(-\sqrt{11}) &= -\sqrt{11} \cdot (20 \cdot 11 - 120) = -\sqrt{11} \cdot 100 < 0 && \Rightarrow \text{lok. Maximum}\\
f''(-1) &= -(20 \cdot 1 - 120) = 100 > 0 && \Rightarrow \text{lok. Minimum}\\
f''(1) &= 1 \cdot (20 \cdot 1 - 120) = -100 < 0 && \Rightarrow \text{lok. Maximum}\\
f''(\sqrt{11}) &= \sqrt{11} \cdot (20 \cdot 11 - 120) = \sqrt{11} \cdot 100 > 0 && \Rightarrow \text{lok. Minimum}
\end{aligned}$$

Tatsächlich sind die obigen Extrema alle nur lokal. Betrachten wir nun nämlich die noch fehlenden Punkte -5 und 5, so ergibt sich

$$f(-5) = -900, \quad f(-\sqrt{11}) \approx 145{,}93, \quad f(-1) = -36, \quad f(1) = 36, \quad f(\sqrt{11}) \approx -145{,}93, \quad f(5) = 900.$$

Weiterhin ist $f'(-5) = f'(5) > 0$. In -5 besitzt die Funktion ihr globales Minimum und in 5 ihr globales Maximum. Wir verdeutlichen dies anhand einer Skizze des Graphen der Funktion: