Formale Grundlagen der Informatik II
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Aufgabe G2

(a) Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}}, 0, 1)$. Eine Formel $\varphi(x, y)$ definiert in $\mathcal{R}$ die Relation

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{R}} := \{\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \mathcal{R} \models \varphi[a, b] \,\}.$$

Geben Sie Formeln an, die die folgenden Relationen in $\mathbb{R}^2$ definieren:

i. Einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

ii. Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $2/3$.

iii. Die Strecke, welche vom Punkt $(1, 2)$ bis zum Kreis aus (i) führt und senkrecht auf diesem steht.

(b) Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass

$$\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi \quad \not\equiv \quad \exists x\, (\varphi \wedge \psi).$$

Überlegen Sie sich anhand des Semantikspiels warum Ihr Gegenbeispiel zeigt, dass die Formeln nicht äquivalent sind.

Aufgabe G3
$\preceq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big).$$

Sei $\mathcal{A} = (A, \preceq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2\}$ und $\preceq^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2)\}$.

(a) Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.
Hinweis:

i. Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie SF(φ').

ii. Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.

iii. Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big)$$

äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a'_1, a'_2) \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a'_1, a'_2, a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

Hausübung

Aufgabe H1 (3 Punkte)
Geben Sie eine Ableitung der folgende AL-Sequenz in $\mathcal{SK}$ an.

$$(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$$

Aufgabe H2 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Signatur $S = (E, P)$, wobei E ein 2-stelliges und P ein 1-stelliges Relationssymbol ist. Wir modellieren in dieser Signatur ein Netzwerk/Graph. Exy steht für die Aussage, das der Knoten x ist *direkt* mit y verbunden, Px steht für die Aussage, dass x aktiv ist.
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO:

(a) Jeder Knoten, der aktiv ist, ist mit jedem anderen aktiven Knoten direkt verbunden.

(b) Jeder Knoten, der aktiv ist, ist mit jedem anderen aktiven Knoten über maximal 2 andere aktive Knoten erreichbar.

(c) Weder alle Knoten sind aktiv noch alle inaktiv.

(d) Jeder Knoten ist mit mindestens 3 anderen direkt verbunden.