Formale Grundlagen der Informatik II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2012**
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Zeigen Sie mit dem Resolutionskalkül, dass die folgenden Formelmengen unerfüllbar sind:

i. $\{ (p \vee q) \to x, (x \vee y) \to z, p \vee q \vee y, \neg z \}$

ii. $\{ \forall x \forall y (Rxy \to (Px \wedge \neg Py)), \forall x \forall y (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy)), \forall x Rxfx \}$

iii. $\{ \forall x \forall y \forall z (Rxy \vee Rxz \vee Ryz), \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),$
$\forall x \forall y (Rxy \to Rfxfy), \forall x \neg Rxffx \}$

(b) Untersuchen Sie für jede der obigen Formelmengen, ob es auch echte Teilmengen gibt, die schon unerfüllbar sind.

Aufgabe G2

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph (ohne Schleifen, d.h. es gibt keine Kante von einem Knoten zu sich selbst).
Wir nennen G 3-*färbbar*, wenn es eine Abbildung $f \colon V \to \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

(a) Erstellen Sie eine Formelmenge $\Phi(G)$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn G 3-färbbar ist.
Hinweis: Führen Sie zu jedem Knoten $v \in V$ eine Konstante c_v ein und zu jeder Farbe $i \in \{1, 2, 3\}$ ein Prädikat P_i.

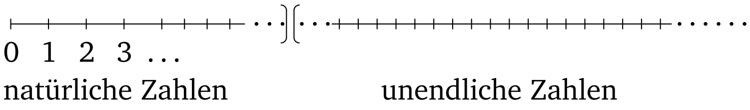
(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass ein Graph G genau dann 3-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph 3-färbbar ist. ($H = (V_0, E_0)$ ist ein Teilgraph von G, wenn $V_0 \subseteq V$ und $E_0 \subseteq E$ ist.)

Aufgabe G3

Sei $L = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ die Sprache der Arithmetik und und $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$ das Modell der natürlichen Zahlen. Dieses Modell wird auch *Standardmodell* genannt. Weiterhin sei

$$T = Th(\mathcal{N})$$

die Menge der Formeln in der Sprache L, die wahr sind in $\mathcal{N}$. Wie in der Vorlesung besprochen (siehe Skript 4.3) beschreibt T das Modell $\mathcal{N}$ nicht eindeutig, d.h. es gibt auch anderen Modelle von T. Solche Modelle werden *Nichtstandardmodelle* genannt.
Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass jedes Nichtstandardmodell eine Kopie von $\mathcal{N}$ enthält. Wir zeigen weiter, dass jedes Element, das nicht zu $\mathcal{N}$ gehört, größer ist als jedes Element in $\mathcal{N}$, d.h. dass diese Zahlen „unendlich“ sind. Nichtstandardmodelle haben damit die Form:



Sei nun ${}^*\mathcal{N} = ({}^*\mathbb{N}, +^{{}^*\mathbb{N}}, \cdot^{{}^*\mathbb{N}}, <^{{}^*\mathbb{N}}, 0^{{}^*\mathbb{N}}, 1^{{}^*\mathbb{N}})$ ein Nichtstandardmodell. Betrachten Sie die Abbildung

$$^*(-) : \mathbb{N} \to {}^*\mathbb{N} : n \mapsto {}^*n = (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-\mathrm{mal}})^{{}^*\mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung $^*(-)$ ein injektiver Homomorphismus ist, d.h. dass die Abbildung $0, 1$, die Operation $+, \cdot$ und die Ordnung $<$ erhält.

Das Bild von $^*(-)$ verhält sich also wie $\mathcal{N}$ und ist damit eine Kopie von $\mathcal{N}$ in ${}^*\mathcal{N}$.

Hinweis: Verwenden Sie hier und in den nächsten Teilaufgaben, dass alles, was wahr ist in $\mathcal{N}$ *und sich in der Logik 1. Stufe ausdrücken lässt*, auch wahr ist in ${}^*\mathcal{N}$ und umgekehrt.

(b) Zeigen Sie, dass alle Elemente, die nicht im Bild von $^*(-)$ liegen, größer als jedes ${}^*n$ (für $n \in \mathbb{N}$) sein müssen.

Diese Elemente von ${}^*\mathcal{N}$ sind die *unendlichen* Zahlen.

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes unendliches Element x in ${}^*\mathbb{N}$ ein anderes unendliches Element y gibt, so dass $2y \leq x$.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $S = (\leq)$. In dieser Aufgabe behandeln wir partielle Ordnungen. Zur Erinnerung: partielle Ordnungen sind S-Strukturen, die die folgenden Sätze erfüllen:

$$\forall x \, \forall y \; ((x \leq y \wedge y \leq x) \leftrightarrow x = y)$$
$$\forall x \, \forall y \, \forall z \; ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$$

(a) Geben Sie für die folgenden partiellen Ordnungen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ Sätze $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ an, so dass für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\mathcal{A}_i \vDash \varphi_i \qquad \text{und für } j \neq i \qquad \mathcal{A}_j \nvDash \varphi_i.$$

D.h. mit den Sätzen φ_i können die Strukturen unterschieden werden.

i. $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$

ii. $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{Q}, \leq^{\mathbb{Q}})$

iii. $\mathcal{A}_3 = (\Sigma^*, \preccurlyeq)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, wobei $\preccurlyeq$ die Präfixrelation beschreibt, d.h. für die Wörter $e_0 e_1 \ldots e_n \in \Sigma^*$ und $f_0 f_1 \ldots f_m \in \Sigma^*$ gilt

$$e_0 e_1 \ldots e_n \preccurlyeq f_0 f_1 \ldots f_m,$$

falls $n \leq m$ und $e_i = f_i$ für alle $i \leq n$.

iv. $\mathcal{A}_4 = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$

(b) Geben Sie eine S-Struktur an, die *keine* partielle Ordnung ist.

Aufgabe H2 (Zusatzaufgabe†) (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgende FO-Theorie $\mathcal{T}$ mit Gleichheit (Beispiele dieser Art gehen auf Statman, Orevkov, Pudlak oder Zhang zurück):

- Die Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ beinhaltet die Konstanten 0 und 1, die Funktionssymbole $+$, $2^{(\cdot)}$ und ein einstelliges Predikat $I(\cdot)$.
- Die Theorie $\mathcal{T}$ beinhaltet die zusätzlichen Axiome $x + (y + z) = (x + y) + z$, $y + 0 = y$, $2^0 = 1$, $2^x + 2^x = 2^{1+x}$, $I(0)$, $I(x) \to I(1 + x)$. Man beachte, dass der $\forall$-Abschluss der Konjunktion dieser Axiome als ein Universeller Satz $\forall \underline{x}\ \varphi_{\text{qf}}(\underline{x})$, wobei φ_{qf} eine quantorenfreie Formel ist, geschrieben werden kann.

Im folgenden benutzen wir die abkürzende Schreibweise

$$2_0 := 0, \quad 2_{k+1} := 2^{2_k}.$$

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von Herbrand für offene Theorien, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Herbrand-Disjunktion geben muss, so dass

$$\bigvee_{i=1}^{n} \big(\varphi_{\text{qf}}(\underline{t}_i) \to I(2_k)\big),$$

wobei $\underline{t}_i$ geschlossene Terme von $\mathcal{T}$ sind.

(b) Geben Sie einen kurzen (informellen) Beweis für $\exists \underline{x}\ \big(\varphi_{\text{qf}}(\underline{x}) \to I(2_k)\big)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Definieren Sie hierzu eine Relationen R_i mit $R_0 :\equiv I$ und $R_{i+1}(x) :\equiv \forall y\ \big(R_i(y) \to R_i(2^x + y)\big)$.

Man kann zeigen, dass es einen ($\mathcal{SK}$-)Beweis gibt der nur polynomiel in k viele Schritte benötigt.

(c) Zeigen Sie, dass jede Herbrand-Disjunktion von $\exists \underline{x}\ \big(\varphi_{\text{qf}}(\underline{x}) \to I(2_k)\big)$ mindestens die Länge 2_k hat.

†Punkte zählen für den Klausurbonus, aber nicht für die Bestimmung der Basis der 50% Schranke.