Aussagenlogik & Prädikatenlogik (FGdI II) 3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

SoSe 2016
11. Mai 2016

Gruppenübung

Aufgabe G3.3 (Berechnungen in Aussagenlogik modellieren)
Wir wollen in dieser Aufgabe Berechnungsmodelle mit aussagenlogischen Formeln modellieren. Dabei sei Σ ein endliches Alphabet.

(a) Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A)$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) und $w \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge ℓ. Wir definieren eine Menge aussagenlogischer Variablen

$$\mathcal{V}_Q := \{p_{q,i} : q \in Q, i \geq 0\}.$$

Wir wollen einen Lauf

$$q_0 = q^{(0)} \to q^{(1)} \to q^{(2)} \to \cdots \to q^{(\ell)}$$

des Automaten $\mathcal{A}$ auf dem Wort w durch eine Interpretation $\mathfrak{I} : \mathcal{V}_Q \to \mathbb{B}$ kodieren, indem wir

$$\mathfrak{I}(p_{q,i}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q^{(i)} = q$$

setzen. Geben Sie eine Formel $\varphi_{\mathcal{A},w} \in \mathrm{AL}(\mathcal{V}_Q)$ an, für die gilt:

$$\mathfrak{I} \models \varphi_{\mathcal{A},w} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I} \text{ kodiert einen akzeptierenden Lauf von } \mathcal{A} \text{ auf } w.$$

Insbesondere gilt dann

$$\varphi_{\mathcal{A},w} \text{ erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w$$

(b) Sei jetzt $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, q^+, q^-)$ eine Turingmaschine. Wir wollen eine Formelmenge $\Phi_{\mathcal{M}}$ definieren, für die gilt:

$$\Phi_{\mathcal{M}} \text{ erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \square \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty.$$

Die Menge $\Phi_{\mathcal{M}}$ soll also genau dann erfüllbar sein, wenn $\mathcal{M}$ auf dem leeren Band gestartet *nicht* hält. Außerdem soll die Menge $\Phi_{\mathcal{M}}$ aus einer geeigneten Kodierung der Turingmaschine $\mathcal{M}$ berechnet werden können (sonst könnten wir immer $\Phi_{\mathcal{M}} = \{\bot\}$ für oder $\Phi_{\mathcal{M}} = \{\top\}$ wählen, je nachdem, ob $\square \xrightarrow{\mathcal{M}}$ STOP oder nicht).
Anleitung: Wählen Sie als Variablenmenge

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}} := \{p_{a,t,i} : a \in \Sigma, t \geq 0, i \in \mathbb{Z}\} \cup \{h_{t,i,q} : t \geq 0, i \in \mathbb{Z}, q \in Q\}$$

mit folgender intendierter Bedeutung:

$\mathfrak{I}(p_{a,t,i}) = 1 \Leftrightarrow$ in der i-ten Bandzelle steht nach t Schritten der Buchstabe a
$\mathfrak{I}(h_{t,i,q}) = 1 \Leftrightarrow$ nach t Schritten steht der Lesekopf auf der i-ten Bandzelle und die Maschine ist im Zustand q.

Dass das Band am Anfang der Berechnung leer ist, wird dann z.B. durch die Formelmenge

$$\{\neg p_{a,0,i} : a \in \Sigma, i \in \mathbb{Z}\}$$

ausgedrückt.

Diskutieren Sie: Ist das Erfüllbarkeitsproblem auch für unendliche Mengen von AL-Formeln algorithmisch loesbar? Was bedeutet das überhaupt? Ist, genauer, das Erfüllbarkeitsproblem für (unendliche) berechenbare bzw. entscheidbare Mengen von AL-Formeln entscheidbar oder aber rekursiv aufzählbar? Kann es eine (aus einer Kodierung von $\mathcal{M}$ berechenbare) Formelmenge $\Psi_{\mathcal{M}}$ geben, für die

$$\Psi_{\mathcal{M}} \text{ erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \Box \xrightarrow{\mathcal{M}} \text{STOP}$$

gilt?

Lösung:

(a) Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A)$ ein NFA und $w = a_1 a_2 \ldots a_\ell \in \Sigma^*$. Die gewünschte Formel $\varphi_{\mathcal{A},w}$ muss folgende Eigenschaften sicherstellen:

- Der Automat ist zu jedem Zeitpunkt in höchstens einem Zustand:

$$\varphi^{(\leq 1)}_{\mathcal{A},w} := \bigwedge_{i=0}^{\ell} \bigwedge_{q \neq q'} \neg(p_{q,i} \wedge p_{q',i})$$

- Der Automat startet im Zustand q_0:

$$\varphi^{(q_0)}_{\mathcal{A},w} := p_{q_0,0}$$

- Der Automat endet in einem akzeptierenden Zustand:

$$\varphi^{(\text{akz})}_{\mathcal{A},w} := \bigvee_{q \in A} p_{q,\ell}$$

- Die einzelnen Schritte des Automaten passen zum Wort w:

$$\varphi^{(\Delta)}_{\mathcal{A},w} := \bigwedge_{i=1}^{\ell} \bigwedge_{q' \in Q} \Big(p_{q',i} \to \bigvee_{\substack{q \in Q \\ (q,a_i,q') \in \Delta}} p_{q,i-1} \Big)$$

Wir setzen also

$$\varphi_{\mathcal{A},w} := \varphi^{(\leq 1)}_{\mathcal{A},w} \wedge \varphi^{(q_0)}_{\mathcal{A},w} \wedge \varphi^{(\text{akz})}_{\mathcal{A},w} \wedge \varphi^{(\Delta)}_{\mathcal{A},w}.$$

(b) Da das Band der Turingmaschine am Anfang der Berechnung komplett leer ist, können wir festlegen, dass der Schreib-/Lesekopf an Position 0 startet. Dies erledigen die Formeln:

$$\{\neg h_{0,i,q} : i \neq 0 \text{ oder } q \neq q_0\} \cup \{h_{0,0,q_0}\}$$

Dass das Band am Anfang leer ist, wird wie schon gesagt durch die Formeln

$$\{\neg p_{a,0,i} : a \in \Sigma, i \in \mathbb{Z}\}$$

sichergestellt.

Dass die Maschine niemals in einen der Zustände q^+ und q^- gelang, wird durch

$$\{\neg h_{t,i,q^+} : t \geq 0, i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\neg h_{t,i,q^-} : t \geq 0, i \in \mathbb{Z}\}$$

ausgedrückt.

Der Bandinhalt kann sich nur an der Position verändern, an der der Kopf steht:

$$\{\bigvee_{q \in Q} h_{t,i,q} \vee (p_{a,t,i} \leftrightarrow p_{a,t+1,i}) : i \in \mathbb{Z}, t \geq 0, a \in \Sigma\}$$

An der Kopfposition wird der Bandinhalt gemäß δ verändert:

$$\{(h_{t,i,q} \wedge p_{a,t,i}) \to p_{b,t+1,i} : t \geq 0, i \in \mathbb{Z}, q \in Q, a \in \Sigma, \delta(q,a) = (b,\cdot,\cdot)\} \cup$$
$$\Big\{ \big(h_{t,i,q} \wedge \bigwedge_{a \in \Sigma} \neg p_{a,t,i}\big) \to p_{b,t+1,i} : t \geq 0, i \in \mathbb{Z}, q \in Q, \delta(q,\Box) = (b,\cdot,\cdot) \Big\}$$

Wenn der Kopf zum Zeitpunkt $t+1$ an Position i steht, und die Maschine in Zustand q' ist, dann muss das zur Kopfposition und zum Zustand zum Zeitpunkt t passen:

$$\Big\{ h_{t+1,i,q'} \to \Big(\bigvee_{\substack{a\in\Sigma,q\in Q \\ \delta(q,a)=(\cdot,>,q')}} (h_{t,i-1,q} \wedge p_{a,t,i-1}) \Big) \vee \Big(\bigvee_{\substack{a\in\Sigma,q\in Q \\ \delta(q,a)=(\cdot,\circ,q')}} (h_{t,i,q} \wedge p_{a,t,i}) \Big)$$
$$\vee \Big(\bigvee_{\substack{a\in\Sigma,q\in Q \\ \delta(q,a)=(\cdot,<,q')}} (h_{t,i+1,q} \wedge p_{a,t,i+1}) \Big) \vee \Big(\bigvee_{\substack{q\in Q \\ \delta(q,\Box)=(\cdot,>,q')}} (h_{t,i-1,q} \wedge \bigwedge_a \neg p_{a,t,i-1}) \Big)$$
$$\vee \Big(\bigvee_{\substack{q\in Q \\ \delta(q,\Box)=(\cdot,\circ,q')}} (h_{t,i,q} \wedge \bigwedge_a \neg p_{a,t,i}) \Big) \vee \Big(\bigvee_{\substack{q\in Q \\ \delta(q,\Box)=(\cdot,<,q')}} (h_{t,i+1,q} \wedge \bigwedge_a \neg p_{a,t,i+1}) \Big) : t \geq 0, i \in \mathbb{Z}, q' \in Q \Big\}$$

Um über die algorithmische Lösbarkeit des Erfüllbarkeitsproblem überhaupt exakt reden zu können, müssen wir zunächst das Problem genau fixieren: Wie können wir eine potentiell unendliche Formelmenge als Eingabe für einen Algorithmus zulassen? Zwei naheliegende Ansätze, wie eine Formelmenge Φ kodiert werden kann, sind:

- Wir übergeben eine (geeignete Kodierung einer) Turingmaschine $\mathcal{M}_\Phi$, die die Menge Φ *entscheidet*, also zu einer (geeignet kodierten) Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ entscheidet, ob $\varphi \in \Phi$. Die Maschine $\mathcal{M}_\Phi$ kann dann als Unterroutine (*Orakel*) von einem Algorithmus verwendet werden.
- Wir könnten auch als Eingabe eine Turingmaschine $\mathcal{M}'_\Phi$ akzeptieren, die die Menge Φ *(rekursiv) aufzählt*. Entweder in Form einer Turingmaschine, die auf Eingabe $\varphi \in \mathrm{AL}$ genau dann anhält, wenn $\varphi \in \Phi$, oder in Form einer Turingmaschine, die auf Eingabe $n \in \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi_n \in \mathrm{AL}$ zurückgibt, so dass $\Phi = \{\varphi_n : n \geq 0\}$ (dabei ist natürlich $\varphi_n = \varphi_m$ für $n \neq m$ zugelassen und der Fall $\Phi = \emptyset$ muss getrennt behandelt werden).

Für die Frage, ob Φ erfüllbar ist oder nicht, ergibt sich dann: *Unerfüllbarkeit* ist in beiden Fällen *aufzählbar*, also sowohl für entscheidbare Φ als auch für nur aufzählbare Φ: Wir lassen uns immer größere endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ von unserem Orakel erzeugen und antworten `unerfüllbar`, sobald sich eine davon als unerfüllbar herausstellt (was wir z.B. durch Resolution oder im Sequenzenkalkül, aber auch einfach mit einer Wertetabelle überprüfen können). Der Kompaktheitssatz garantiert uns, dass dieser Algorithmus korrekt ist.
Erfüllbarkeit ist dagegen auch für entscheidbare Mengen Φ nicht aufzählbar, also auch nicht entscheidbar. Zunächst einmal folgt aus der Aufzählbarkeit der unerfüllbaren Mengen Φ, dass Erfüllbarkeit entscheidbar wäre, wenn sie aufzählbar wäre. Da die Menge $\Phi_\mathcal{M}$ aus (b) aber aus einer geeigneten Kodierung von $\mathcal{M}$ berechnet (also insbesondere aufgezählt) werden kann, wäre das Halteproblem entscheidbar, wenn die Erfüllbarkeit von $\Phi_\mathcal{M}$ entscheidbar wäre. Beides ist also nicht der Fall.
Mit dem gleichen Argument sieht man, dass es keine aus $\mathcal{M}$ berechenbare Menge $\Psi_\mathcal{M}$ wie in der Aufgabe beschrieben geben kann: Da $\Box \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty$ genau dann, wenn $\Psi_\mathcal{M}$ unerfüllbar ist, wäre sonst das Komplement des Halteproblems aufzählbar.

Hausübung

Aufgabe H3.1 (Resolution) (12 Punkte)

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(q \lor s) \land (p \lor \neg s) \land (p \lor \neg q \lor r \lor s) \land (q \to (r \to s)) \land (r \lor s) \land ((p \land s) \to r) \land (\neg p \lor \neg r)$$

(b) Weisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode die folgende Folgerungsbeziehung nach:

$$(p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor r) \models (\neg p \land q \land r) \lor (\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \to 0)$$

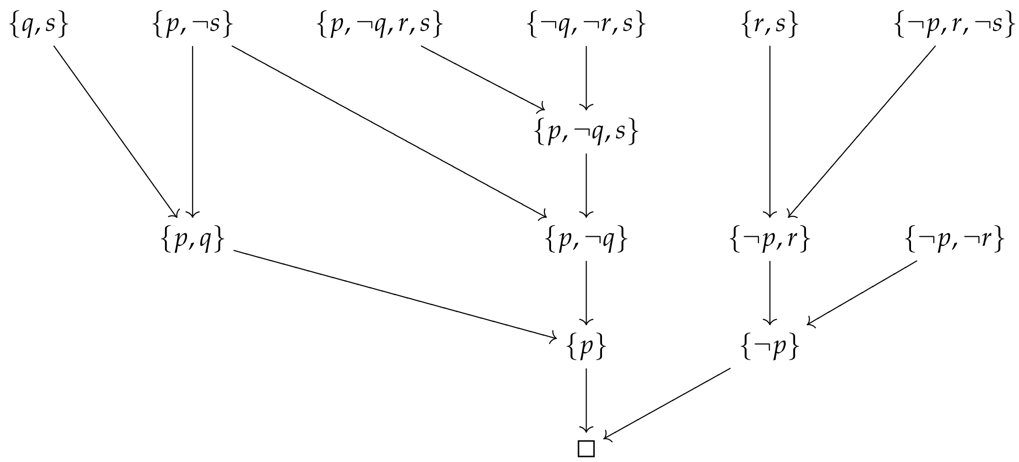
(c) Bestimmen Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$H_0 = \{(p \land t) \to s, \quad r, \quad (q \land r) \to s, \quad t \to p, \quad t\}$$

Lösung:

(a) (1 Punkt für Klauselmenge, 2 Punkte für Resolution) Klauseln:

$$\{q, s\},\ \{p, \neg s\},\ \{p, \neg q, r, s\},\ \{\neg q, \neg r, s\},\ \{r, s\},\ \{\neg p, r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg r\}$$

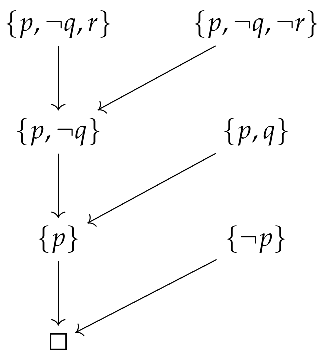


Da $\square$ aus den Klauseln ableitbar ist, ist die Formel unerfüllbar.

(b) (1 Punkt für Klauselmenge, 2 Punkte für Resolution) Wir zeigen die Unerfüllbarkeit von $\big((p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor r)\big) \land \neg\big((\neg p \land q \land r) \lor (\neg p \land \neg q) \lor p\big)$. Die Umwandlung dieser Formel in KNF ergibt die folgenden Klauseln:

$$\{p, \neg q, r\},\ \{\neg p, q, r\},\ \{p, \neg q, \neg r\},\ \{p, q\},\ \{\neg p\}$$

Wir zeigen jetzt die Unerfüllbarkeit durch Ableitung von $\square$:



(c) (2 Punkte für Klauselmenge, 1 Punkt für minimales Modell) Die Hornklauselmenge H_0 enthält keine negativen Hornklauseln, daher gibt es nach Lemma 5.12 (FGdI Skript zur Aussagenlogik) ein minimales Modell $\mathfrak{I}_0$ der Variablen in H_0. Wir verfahren wie im (konstruktiven) Beweis des Lemmas, konstruieren also schrittweise die Mengen $\mathcal{X}_i$:

$$\mathcal{X}_0 = \emptyset, \quad \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0 \cup \{r, t\}, \quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \cup \{p\}, \quad \mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_2 \cup \{s\}.$$

Das minimale Modell $\mathfrak{I}_0$ ist demnach geben durch

$$\mathfrak{I}_0(r) = \mathfrak{I}_0(t) = \mathfrak{I}_0(p) = \mathfrak{I}_0(s) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}_0(q) = 0.$$

Aufgabe H3.2 (Sequenzenkalkül) (12 Punkte)

(a) Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

i. $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

ii. $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

iii. $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

(b) Zeigen Sie semantisch, dass die folgenden Regeln korrekt sind.

i. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$

ii. $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}$

Lösung:

(a) i. (2 Punkte)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,p \vdash p,r}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{q,p \vdash q,r}\,(\mathrm{Ax})}{q,p \vdash p \wedge q, r}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{}{r,p \vdash p \wedge q, r}\,(\mathrm{Ax})}{q \vee r, p \vdash p \wedge q, r}\,(\vee\mathrm{L})}{q \vee r \vdash p \wedge q, r, \neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r, \neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})$$

ii. (2 Punkte)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,q \vdash p, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{p,q \vdash q, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax})}{p,q \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, p}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, r}\,(\mathrm{Ax})}{p,r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R})}{p, q \vee r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\vee\mathrm{L})}{p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

iii. (2 Punkte)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vdash q,q \qquad r \vdash q,p}{r \vdash q, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{}{r \vdash r, p \wedge q}\,(\mathrm{Ax})}{r \vdash q \wedge r, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R})}{\neg(p \wedge q), r \vdash q \wedge r}\,(\neg\mathrm{L})}{\neg(p \wedge q) \wedge r \vdash q \wedge r}\,(\wedge\mathrm{L})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r), q \wedge r}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

Eine nicht erfüllende Belegung ist z.B. $r \mapsto 1$ und $q, p \mapsto 0$.

(b) Um zu zeigen, dass die drei Regeln korrekt sind, müssen wir nachweisen, dass sie Allgemeingültigkeit erhalten.

   i. (3 Punkte) Angenommen die Prämisse sei allgemeingültig. Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Gamma$. Im Fall $\mathfrak{I} \not\models \varphi$ folgt direkt $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta \vee \neg\varphi$ und wir sind fertig. Im Fall $\mathfrak{I} \models \varphi$ folgt, da die Prämisse allgemeingültig ist, $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$. Somit gilt in jedem Fall $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta \vee \neg\varphi$.

   ii. (3 Punkte) Angenommen die Prämissen seien allgemeingültig. Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Gamma \wedge (\varphi \to \psi)$. Mit der Allgemeingültigkeit der linken Prämisse folgt $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta \vee \varphi$. Im Fall $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$ sind wir fertig. Angenommen es gilt $\mathfrak{I} \not\models \bigvee \Delta$. Daraus folgt nun $\mathfrak{I} \models \varphi$, was aufgrund von $\mathfrak{I} \models \varphi \to \psi$ auch $\mathfrak{I} \models \psi$ impliziert. Da die rechte Prämisse allgemeingültig ist, folgt $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$, was jedoch im Widerspruch zur Annahme steht. Also muss $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$ gelten, womit gezeigt ist, dass die Konklusion allgemeingültig ist.

Aufgabe H3.3 (Eigenschaften unendlicher Graphen) (12+3 Punkte)

Wir betrachten Graphen mit $\mathbb{N}$ als (unendlicher) Knotenmenge. Die Adjazenzmatrix eines solchen Graphen kodieren wir als Belegung der unendlichen Variablenmenge

$$\mathcal{V}_G := \{p_{ij} : 0 \leq i < j\},$$

wobei $\mathfrak{I}(p_{ij}) = 1$ für eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gelten soll, falls in dem durch $\mathfrak{I}$ kodierten Graphen eine Kante zwischen den Knoten i und j existiert.

(a) Geben Sie zu endlichem Graphen G_0 mit Knotenmenge $V(G_0) \subset \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi_{G_0} \in \mathrm{AL}(\mathcal{V}_G)$ an, für die gilt: $\mathfrak{I} \models \varphi_{G_0}$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ einen Graphen G kodiert, dessen Kanten zwischen den Knoten in $V(G_0)$ genau mit denjenigen von G_0 übereinstimmen, d.h., dass für $u, v \in V(G_0)$ gilt: u ist mit v in G verbunden gdw. u mit v in G_0 verbunden ist. (D.h. G_0 ist Teilgraph von G.)

(b) Geben Sie eine Formelmenge $\Psi_1 \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V}_G)$ an, für die gilt:

$$\mathfrak{I} \models \Psi_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I} \text{ kodiert einen 3-färbbaren Graphen.}$$

Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge $\Psi_2 \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V}_G)$ gibt, für die gilt:

$$\mathfrak{I} \models \Psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I} \text{ kodiert einen nicht 3-färbbaren Graphen.}$$

Hinweise: Erinnern Sie sich, dass

   i. ein Graph 3-färbbar ist falls sich seine Knotenmenge V in drei Teilmengen (Farbklassen) zerlegen lässt, sodass keine Kante zwei Knoten innerhalb derselben Teilmenge (derselben Farbe) verbindet.

   ii. ein Graph genau dann 3-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph 3-färbbar ist, d.h., wenn keiner der durch geeignete endliche Anfangsabschnitte von $\mathfrak{I}$ kodierten Teilgraphen ein Hindernis für die 3-Färbbarkeit darstellt (warum?).

Die Formelmenge Ψ_1 muss keine 3-Färbung eines Graphen in irgendeiner Form kodieren, sondern lediglich sicherstellen, dass kein Hindernis für die Existenz einer solchen Färbung besteht.

(c) Zwei Knoten $u, v \in V$ in einem Graph $G = (V, E)$ heißen *verbunden*, wenn $u = v$ oder es eine Folge von Knoten $u = v^{(0)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(\ell)} = v$ gibt, so dass $v^{(i-1)}v^{(i)} \in E$ für $i = 1, \ldots, \ell$. Der Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn alle Paare u, v von Knoten verbunden sind.

Zeigen Sie: Es gibt weder eine Menge $\Phi_1 \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V}_G)$, für die gilt

$$\mathfrak{I} \models \Phi_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I} \text{ kodiert einen zusammenhängenden Graphen}$$

noch eine Menge $\Phi_2 \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V}_G)$, für die gilt

$$\mathfrak{I} \models \Phi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I} \text{ kodiert einen nicht zusammenhängenden Graphen.}$$

(d) *Bonus*: Seien $G_1 = (\mathbb{N}, E_1), \ldots, G_k = (\mathbb{N}, E_k)$ Graphen mit Knotenmenge $\mathbb{N}$, also

$$E_i \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in \mathbb{N} \text{ und } u \neq v\}.$$

Geben Sie eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V}_G)$ an, so dass

$$\mathfrak{I} \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I} \text{ kodiert einen der Graphen } G_1, \ldots, G_k.$$

Lösung:

(a) (2 Punkte) Sei $V(G_0) = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{N}$. Dann leistet die Formel

$$\varphi_{G_0} := \bigwedge_{v_i v_j \in E(G_0)} p_{v_i v_j} \wedge \bigwedge_{v_i v_j \notin E(G_0)} \neg p_{v_i v_j}$$

das gewünschte.

(b) (2 Punkte) Für jedes Anfangsstück $[n] := \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gibt es nur endlich viele Graphen mit $[n]$ als Knotenmenge. Seien $G_1^{(n)}, \ldots, G_{m_n}^{(n)}$ diejenigen dieser Graphen, die 3-färbbar sind. Dann besagt die Formelmenge

$$\Psi_1 := \left\{ \bigvee_{i=1}^{m_n} \varphi_{G_i^{(n)}} : n \geq 1 \right\},$$

dass alle Anfangsabschnitte des durch $\mathfrak{I}$ kodierten Graphen 3-färbbar sind. Dann muss aber auch der gesamte Graph 3-färbbar sein.

(3 Punkte) Angenommen, es gäbe eine Menge Ψ_2 wie in der Aufgabenstellung beschrieben. Dann wäre $\Psi_1 \cup \Psi_2$ unerfüllbar, es gäbe also nach dem Kompaktheitssatz Formeln

$$\psi_1^{(1)}, \ldots \psi_m^{(1)} \in \Psi_1 \quad \text{und} \quad \psi_1^{(2)}, \ldots \psi_n^{(2)} \in \Psi_2,$$

für die bereits die Konjunktion dieser Formeln unerfüllbar ist. Sei jetzt $\mathfrak{I}$ eine Belegung mit

$$\mathfrak{I} \models \psi_1^{(1)} \wedge \ldots \wedge \psi_m^{(1)}.$$

Dann gilt

$$\mathfrak{I} \not\models \psi_1^{(2)} \wedge \ldots \wedge \psi_n^{(2)},$$

der durch $\mathfrak{I}$ kodierte Graph muss also 3-färbbar sein, da $\mathfrak{I} \not\models \Psi_2$. Da die Formel $\psi_1^{(1)} \wedge \ldots \wedge \psi_m^{(1)}$ jedoch nur über endlich viele Variablen spricht, können wir die Belegung $\mathfrak{I}$ so wählen, dass der durch sie kodierte Graph nicht 3-färbbar ist.

(c) (3 Punkte) Sei $\Psi \subset \mathrm{AL}$ die Menge

$$\{\neg(p_{1i_1} \wedge p_{i_1 i_2} \wedge \ldots \wedge p_{i_n 2}) : i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt $\mathfrak{I} \models \Psi$ genau dann, wenn die Knoten 1 und 2 in dem durch $\mathfrak{I}$ kodierten Graphen *nicht* verbunden sind (jede der Formeln in Ψ schließt einen möglichen Pfad zwischen diesen beiden Knoten aus).

Angenommen, es gäbe eine Formelmenge Φ_1 wie in der Aufgabenstellung beschrieben. Dann wäre $\Phi_1 \cup \Psi$ unerfüllbar, also gäbe es bereits eine endliche unerfüllbare Teilmenge dieser Menge. Diese kann aber nur endlich viele Pfade zwischen 1 und 2 ausschließen. Insbesondere gibt es einen Knoten v, über den diese Menge nicht spricht, und der Graph mit Kantenmenge $\{vw : w \neq v\}$ muss diese endliche Teilmenge erfüllen.

(2 Punkte) Um zu sehen, dass keine Menge Φ_2 wie in der Aufgabenstellung existieren kann, betrachten wir die Menge

$$\Phi_2 \cup \{p_{i,i+1} : i \in \mathbb{N}\}.$$

Diese ist unerfüllbar, da jeder Graph, der die rechte Menge erfüllt, zusammenhängend ist. Wieder ist dann auch eine endliche Teilmenge unerfüllbar, die aber nur die Existenz endlich vieler Kanten der Form $i, i+1$ fordert.

(d) (3 Bonuspunkte) Zu jedem einzelnen Graphen G_i gibt es eine Formelmenge Φ_i mit

$$\mathfrak{I} \models \Phi_i \Leftrightarrow \mathfrak{I} \text{ kodiert genau den Graphen } G_i,$$

etwa:

$$\Phi_i := \{p_{jk} : jk \in E_i\} \cup \{\neg p_{jk} : jk \notin E_i\}.$$

Wir numerieren die Formeln in Φ_i als $\{\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \ldots\}$. Dann leistet die Formelmenge

$$\Phi := \{\varphi_{i_1}^{(1)} \vee \varphi_{i_2}^{(2)} \vee \ldots \vee \varphi_{i_k}^{(k)} : i_1, \ldots, i_k \geq 1\}$$

genau das gewünschte: Falls $\mathfrak{I} \models \Phi_i$ gilt, dann erfüllt $\mathfrak{I}$ das i-te Disjunktionsglied in jeder der Formeln aus Φ. Falls andererseits $\mathfrak{I} \not\models \Phi_i$ für $i = 1, \ldots, k$ gilt, dann gibt es Formeln $\varphi_{j_i}^{(i)} \in \Phi_i$ für $i = 1, \ldots, k$ so dass $\mathfrak{I} \not\models \varphi_{j_i}^{(i)}$. Damit gilt aber auch $\mathfrak{I} \not\models \varphi_{j_1}^{(1)} \vee \ldots \vee \varphi_{j_k}^{(k)}$, aber diese Formel ist in Φ enthalten.