Mathematik II für Informatik
3. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Anton Freund

SoSe 2019
Übung: 02./03.05.2019
Abgabe: 09./10.05.2019

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Topologie in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$)

(a) Welche der folgenden Teilmengen sind abgeschlossen in $\mathbb{R}$? Welche sind offen in $\mathbb{R}$? Welche sind kompakt in $\mathbb{R}$? Es werden keine Beweise verlangt. Begründen Sie Ihre Antworten anschaulich mit Hilfe der Sätze und Definitionen im Skript.

i. $M = \{1, 2, 3\}$
ii. $M = (1, 2)$
iii. $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$
iv. $M = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$
v. $M = \mathbb{Z}$
vi. $M = \mathbb{Q}$
vii. $M = \mathbb{R}$

(b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen im $\mathbb{R}^2$ und entscheiden Sie jeweils, ob die Menge offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt ist.

$$M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \leq y \leq x + 1\} \qquad M_2 := ([-1, 1] \times [-2, 2]) \cup ([-2, 2] \times [-1, 1])$$
$$M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \qquad M_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

(c) Geben Sie eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ an, die weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe G2 (Konvergenz in normierten Räumen)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit

$$a_n := \begin{pmatrix} \frac{n}{n^2+1} \\ \frac{8n}{2n^2+2} \\ \frac{5}{n^3+n} \end{pmatrix}$$

in $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ eine Nullfolge ist.

(b) Untersuchen Sie die angegebene Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$b_n := \begin{pmatrix} \sqrt{1+n} - \sqrt{n} \\ 42 + \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

(c) Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein vollständiger normierter Raum. Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ genau dann konvergiert wenn Sie eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe G3 (Grenzwerte für Funktionen – Teil I)
Berechnen Sie jeweils den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert der folgenden Funktionen im Punkt $x = 0$. In welchen Fällen existiert sogar der Grenzwert für $x \to 0$?

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{für } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{für } x < 0, \\ (x+2)^2, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$ (c) $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Hinweis: Betrachten Sie bei der Funktion h Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften: $a_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Topologie in $\mathbb{R}^n$) (6 Punkte)
Seien O_1, O_2 offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und seien A_1, A_2 abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind.

(c) *Zusatz/ohne Punkte*
Sei I eine beliebige unendliche Indexmenge. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen O_i, $i \in I$, nicht unbedingt offen und die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener A_i, $i \in I$, nicht unbedingt abgeschlossen sein muss.
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $U_r := \{x \in \mathbb{R} \colon -r < x < r\}$ und $C_r := \{x \in \mathbb{R} \colon -r \leq x \leq r\}$.

Aufgabe H2 (Banachscher Fixpunktsatz am Beispiel der Fibonacci-Zahlen) (7 Punkte)
Wir betrachten die Folge der Fibonacci-Zahlen, welche durch $f_0 := f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ definiert ist. Man kann zeigen, dass der Quotient $x_n = f_{n+1}/f_n$ für $n \geq 1$ die rekursive Vorschrift $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$ erfüllt. Wir wollen mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen, dass diese Folge konvergiert. Hierzu betrachten wir die Abbildungsvorschrift $\varphi(x) := 1 + \frac{1}{x}$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 1$ gilt: $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$.

(b) Für $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ ist auch $\varphi(x) \in [\frac{3}{2}, 2]$.

(c) Es existiert ein $q \in (0,1)$, sodass die Abbildung $\varphi : [\frac{3}{2}, 2] \to [\frac{3}{2}, 2]$, $x \mapsto \varphi(x)$ die Eigenschaft

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y| \quad \text{, für alle } x, y \in [\tfrac{3}{2}, 2]$$

erfüllt.

(d) Folgern Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Folge der Quotienten $x_n = f_{n+1}/f_n$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert g.

Aufgabe H3 (Grenzwerte für Funktionen – Teil II) (5 Punkte)
Berechnen Sie jeweils den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert der entsprechenden Funktion im Punkt $x = 0$. Existiert der Grenzwert $x \to 0$?

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{x-1}, & \text{für } x < 0, \\ \frac{\pi}{x+1}, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$ (ii) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{für } x < 0, \\ \frac{x+2}{x^2+1}, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$