Mathematik II für Informatik
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Alexander Dietz, Anton Freund
Lucas Schöbel-Kröhn

SoSe 2018
Übung: 19./20. April 2018
Abgabe: 26./27. April 2018

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Landausymbole)
Zeigen Sie:

(a) Für $a_n := 2 \cdot n^2 + 42 \cdot n$ hat man $a_n \in O(n^2)$.

(b) Man hat $\sqrt{n} \in o(n)$.

(c) Aus $a_n \in o(b_n)$ folgt $a_n \in O(b_n)$.

Lösung:

(a) Für $n > 0$ ist

$$\left| \frac{2 \cdot n^2 + 42 \cdot n}{n^2} \right| = 2 + \frac{42}{n} \leq 2 + 42 = 44.$$

Somit ist die Folge $(a_n/n^2)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ beschränkt.

(b) Man hat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

(c) Aus $a_n \in o(b_n)$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Damit ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und somit insbesondere eine beschränkte Folge. Daraus folgt $a_n \in O(b_n)$.

Aufgabe G2 (Allgemeines Verständnis von Reihen)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Überlegen Sie sich eine kurze Begründung für Ihre Entscheidungen.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- ☐ Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, so konvergiert (s_n).
- ☐ Wenn (s_n) konvergiert, so ist (a_n) eine Nullfolge.
- ☐ Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, so ist (s_n) eine Nullfolge.
- ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=j}^{\infty} a_n$ für beliebiges $j \in \mathbb{N}$ konvergiert.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen.
- ☐ Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.
- ☐ Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.
- ☐ Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.
- ☐ Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
- ☐ Wenn die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- ☐ Gilt für alle $n \geq 1$ die Ungleichung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Lösung:

(a) **Falsch:** Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe mit $a_n = \frac{1}{n}$.
Richtig: Eine Reihe konvergiert nach Definition 5.5.1, wenn die Folge der Partialsummen s_n konvergiert. Für die Konvergenz der Reihe ist nun aber notwendig (Satz 5.5.5), dass a_n eine Nullfolge ist.
Falsch: Ein Gegenbeispiel ist wieder die harmonische Reihe. Ein weiteres Gegenbeispiel ist die geometrische Reihe für $|q| < 1$, mit $a_n = q^n$ und $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$.
Richtig: Für $N \geq j$ definieren wir

$$s_N^* := \sum_{k=j}^{N} a_k.$$

Dann gilt

$$s_N^* = \sum_{k=j}^{N} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{j-1} a_k = s_N - \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1} a_k}_{c:=} = s_N - c.$$

Dabei hängt c nicht von N ab. Wenn nun s_N für $N \to \infty$ konvergiert, dann konvergiert auch $s_N^* = s_N - c$, da c konstant ist und die Summe zweier konvergenter Folgen konvergiert. Andererseits gilt natürlich auch

$$s_N = s_N^* + c,$$

so dass aus der Konvergenz von s_N^* auch die Konvergenz von s_N folgt.

(b) **Richtig:** Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Somit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n < 1$ für $n \geq N$. Dann gilt $0 < a_n^2 < a_n$ für solche n. Nach dem Majorantenkriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ absolut konvergiert.
Falsch: Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, geht $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich. Insbesondere ist es keine Nullfolge und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ divergiert.
Falsch: Ein Gegenbeispiel ist $a_n = \frac{1}{n}$ (siehe Beispiel 5.5.2(c) und Beispiel 5.5.14(b)).

(c) **Richtig:** Damit der Grenzwert existiert, muss $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein. Somit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut.
Falsch: Ein Gegenbeispiel ist $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Falsch: Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe mit $a_n = \frac{1}{n}$. Für $n > 0$ hat man $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n}{n+1} < 1$, aber die harmonische Reihe divergiert.

Aufgabe G3 (Konvergenz von Reihen — Teil 1)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n$ (mit $i^2 = -1$) (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+(-1)^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$

Lösung:

(a) Die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium, da $\frac{2^n}{1+2^n} \geq \frac{2^n}{2^n+2^n} = \frac{1}{2}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$ divergiert.

(b) Wegen $i^{4n} = (i^2)^{2n} = (-1)^{2n} = 1^n = 1$ bilden die Summanden keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe.

(c) Um das Leibniz-Kriterium anzuwenden zeigen wir, dass $a_n = \frac{1}{4n+(-1)^n}$ eine monoton fallende Nullfolge ist:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{4(n+1)+(-1)^{n+1}} - \frac{1}{4n+(-1)^n} \leq \frac{1}{4(n+1)-1} - \frac{1}{4n+1} = \frac{(4n+1)-(4n+3)}{(4n+3)(4n+1)} \\ &= -\frac{2}{(4n+3)(4n+1)} \leq 0. \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe. Sie konvergiert jedoch nicht absolut, da z.B. $\frac{1}{5n}$ eine divergente Minorante für $|a_n|$ ist (vgl. harmonische Reihe):

$$|a_n| = \left|\frac{1}{4n+(-1)^n}\right| = \frac{1}{|4n+(-1)^n|} \geq \frac{1}{|4n|+|(-1)^n|} = \frac{1}{4n+1} \geq \frac{1}{4n+n} = \frac{1}{5n}.$$

(d) Die absolute Konvergenz lässt sich mit dem Quotientenkriterium zeigen:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{(3(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{(3n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenz von Reihen — Teil 2) (12 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren. Beweisen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+7}{5n^2+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$

Lösung:

(a) Die Reihe divergiert mit der harmonischen Reihe als Minorante: Für alle $n \geq 1$ gilt $\sqrt{n} \leq n$ und daher $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} > 0$.

(b) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium: Mit Satz 5.3.7 hat man

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2(n+1)-1)\sqrt{2}^n}{(2n-1)\sqrt{2}^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n+1}{(2n-1)\sqrt{2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{2+0}{2\sqrt{2}-0} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

(c) Die Reihe divergiert, da die Folgenglieder $a_n = \frac{n^2+7}{5n^2+1}$ keine Nullfolge bilden:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7}{5n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{5+0} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

(d) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium: Zunächst ist $a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}$ eine Nullfolge, nämlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Außerdem ist (a_n) monoton fallend, wegen

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{(2n+3)n-(2n+1)(n+2)}{n(n+2)}\right)$$
$$= -\frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)} < 0.$$

Die Reihe konvergiert nicht absolut, da die harmonische Reihe eine divergente Minorante ist:

$$|a_n| = \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n^2+n} \geq \frac{2n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n} > 0.$$

Aufgabe H2 (Konvergenz von Reihen — Teil 3) (12 Punkte)
Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{n}\right)^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xn}{\sqrt{n}+x}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}$

Um Null als Nenner zu vermeiden kann man in (a) und (b) jeweils $x \notin (0, \frac{1}{2})$ bzw. $x \geq 0$ annehmen.

Lösung:

(a) Für $x = 0$ hat man

$$\frac{1}{\left(x-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n} = (-1)^n \cdot n^n.$$

Somit bilden die Summanden keine Nullfolge und die Reihe divergiert. Für $x \neq 0$ verwenden wir das Wurzelkriterium: Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{\left(x-\frac{1}{n}\right)^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|x-\frac{1}{n}\right|} = \frac{1}{|x|}$$

ist die Reihe absolut konvergent für $|x| > 1$ und divergent für $|x| < 1$. Wir müssen noch die Fälle $x = 1$ und $x = -1$ betrachten: Für $x = 1$ ist $a_n = 1/\left(x - \frac{1}{n}\right)^n$ keine Nullfolge und somit divergiert die Reihe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 0.$$

Auch für $x = -1$ ist a_n keine Nullfolge und die Reihe divergiert. Dazu zeigt man, dass $|a_n|$ keine Nullfolge ist:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\left(-1-\frac{1}{n}\right)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|(-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

(b) Die Reihe divergiert für alle $x > 0$, da in diesen Fällen $a_n = \frac{xn}{\sqrt{n}+x}$ keine Nullfolge ist:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{xn}{\sqrt{n}+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\sqrt{n}}{1+\frac{x}{\sqrt{n}}} = \infty.$$

Für $x = 0$ konvergiert die Reihe absolut (alle Summanden sind Null).

(c) Für $x = 0$ sind alle Summanden Null und die Reihe konvergiert absolut. Für $x \neq 0$ verwenden wir das Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{n+2}} \right| = |x|.$$

Die Reihe ist also absolut konvergent für $|x| < 1$ und divergent für $|x| > 1$. Wir müssen noch die Fälle $x = 1$ und $x = -1$ betrachten: Für $x = 1$ hat man

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n^2}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{8n^3}} = \frac{1}{2n}.$$

Die Reihe ist also divergent mit $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ als Minorante. Für $x = -1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}$ nach dem Leibniz-Kriterium, da $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist (Nenner wächst mit n). Die Reihe konvergiert aber nicht absolut, wie im Fall $x = 1$ gesehen.

Aufgabe H3 (Exponentialfunktion und Werte von Reihen) (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für alle $x \in [0, 1)$. (Tipp: Verwenden Sie die geometrische Reihe.)

(b) Zeigen Sie $1 + x \leq e^x$ für alle $x \geq 0$.

(c) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihen.

i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n}{4^{n+2}}$ ii. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}$

(Tipp zu ii: Finden Sie eine Folge (a_k) mit $a_{k-1} - a_{k+1} = \frac{2}{k^2-1}$.)

Lösung:

(a) Sei $0 \leq x < 1$. Dann gilt $0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe). Deshalb gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(b) Wegen $x \geq 0$ gilt $x^n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann hat man

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x.$$

(c) i. Mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n}{4^{n+2}} = \frac{5}{4^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{5}{4^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}.$$

ii. Für $a_k = \frac{1}{k}$ hat man

$$\frac{2}{k^2-1} = \frac{(k+1)-(k-1)}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Mit einer Indexverschiebung haben wir also

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{2}.$$