Aussagenlogik
& Prädikatenlogik (FGdI II)
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

SoSe 2016
15. Juni 2016

Gruppenübung

Aufgabe G5.1 (Satz von Herbrand und GI-Resolution)
Betrachten Sie die Signatur $\{R, P\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol R und einem einstelligen Relationssymbol P, und die Sätze

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \exists x\, Px\\
\varphi_2 &:= \forall x\,\big(Px \to \exists y\,(Rxy \wedge Py)\big),\\
\varphi_3 &:= \forall x\,\big(Px \to \exists y\,(Rxy \wedge \neg Py)\big),\\
\varphi_4 &:= \forall x \forall y \forall z\,\big((Rxy \wedge Rxz) \to (y = z)\big).
\end{aligned}$$

Die ersten drei dieser Sätze sind gemeinsam erfüllbar, ein mögliches Modell ist

$$\mathcal{A} := \begin{tikzcd} a \arrow[loop above] \arrow[r] & b \end{tikzcd}\ ,$$

wobei Pfeile für Tupel in der Relation R stehen und der Kreis um das a bedeutet, dass a in der Relation P enthalten ist.

(a) Finden Sie für die Sätze φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 eine Skolem-Normalform $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$, $\tilde{\varphi}_3$ und $\tilde{\varphi}_4$.

(b) Satz 3.6 über die Skolem-Normalform besagt, dass das Modell $\mathcal{A}$ von $\{\varphi_1, \varphi_2\varphi_3\}$ zu einem Modell $\mathcal{A}'$ von $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}$ erweitert werden kann. Was heißt in diesem Kontext überhaupt „erweitert"? Geben Sie eine wie im Beweis von Satz 3.6 konstruierte Erweiterung an.

(c) Der Satz von Herbrand (Satz 3.10 aus der Vorlesung) besagt, dass die Formelmenge $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}$ auch ein Herbrand-Modell $\mathcal{H}$ besitzt, und dieses kann wie im Beweis von Satz 3.10 aus $\mathcal{A}'$ konstruiert werden. Führen Sie diese Konstruktion durch.

(d) Machen Sie sich klar, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ *nicht* erfüllbar ist. Damit ist auch die Formelmenge $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4\}$ unerfüllbar. (Welcher Satz aus der Vorlesung besagt das?) Beweisen Sie die Unerfüllbarkeit mittels Grundinstanzenresolution.

Aufgabe G5.2 (Erreichbarkeit in Graphen)
Es sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die nur das zweistellige Relationssymbol E enthält. Eine σ-Struktur $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$ fassen wir als gerichteten Graphen auf. Für zwei Knoten $a, b \in G$ heißt b *von a aus erreichbar*, falls es Knoten

$$a = v_0, v_1, \ldots, v_\ell = b \in G$$

gibt, so dass $(v_{i-1}, v_i) \in E^{\mathcal{G}}$ für $i = 1, \ldots, \ell$ gilt.
Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge $\Phi(x, y) \subseteq \mathrm{FO}_2(\sigma)$ mit freien Variablen in $\{x, y\}$ gibt, so dass für alle Graphen $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$ und $a, b \in G$ gilt:

$$\mathcal{G} \models \Phi[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad b \text{ ist von } a \text{ aus in } \mathcal{G} \text{ erreichbar.}$$

Hausübung

Hinweise zur Hausübung

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu dieser Hausübung in der **Übung am 29.06.2016** ab (**Name, Nummer der Übungsgruppe und Matrikelnummer** nicht vergessen). Wir unterstützen ausdrücklich das gemeinsame Arbeiten und Diskutieren in Gruppen, die gefundenen Lösungen sollte aber jeder selbst ausformulieren. Es darf also pro Abgabe nur ein Name auf dem Blatt stehen.

Aufgabe H5.1 (Kompaktheit) (12 Punkte)
Zeigen Sie, dass es über der leeren Signatur $\sigma = \emptyset$ keine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(\emptyset)$ gibt, für die

$$\mathcal{A} \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist endlich.}$$

Aufgabe H5.2 (Resolutionskalkül, typische Klausuraufgabe) (12 Punkte)
Im Folgenden seien Q, R und S Relationssymbole und f ein Funktionssymbol passender Stelligkeit.

(i) Wir betrachten die Formelmenge $\Phi_1 := \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, wobei

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y \forall z (Rxy \lor Rxz \lor Ryz),\\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z ((Rxy \land Ryz) \to Rxz),\\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y (Rxy \to Rfxfy) \text{ und}\\
\varphi_4 &:= \forall x \neg Rxffx.
\end{aligned}$$

Machen Sie sich klar, dass und warum Φ_1 unerfüllbar ist. Weisen Sie dann ausgehend von Ihren Überlegungen mittels Grundinstanzen-Resolution formal nach, dass Φ_1 unerfüllbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\Phi_2 := \{\forall x \forall y ((Qy \land Rxy) \to Sy), \forall x \forall y ((Sx \land Rxy) \to \neg Qy), \forall x \exists y (Rxy \land Qy)\}$$

Aufgabe H5.3 (Sequenzenkalkül, alte Klausuraufgabe) (12 Punkte)
Sei $\varphi = \varphi(x)$ eine beliebige FO-Formel (mit x als einziger freier Variable) und P ein einstelliges Relationssymbol.

(a) Weisen Sie nach, dass (unabhängig von φ) die folgende Sequenz nicht allgemeingültig ist:

$$\forall x \big(Px \to \varphi(x)\big) \vdash \exists x \big(Px \land \varphi(x)\big)$$

(Hier und im Folgenden ist das Symbol „$\to$“ wie üblich zu eliminieren.)

(b) Argumentieren Sie *semantisch*, dass die folgende Sequenz allgemeingültig ist:

$$\forall x \big(Px \to \varphi(x)\big) \vdash \forall x \neg Px,\ \exists x \big(Px \land \varphi(x)\big)$$

(c) Welche der folgenden „Varianten“ der Sequenz aus (b) sind allgemeingültig, welche nicht? Es ist keine Begründung verlangt.

			allg.-gültig	nicht allg.-gültig
$\neg Pc \lor \varphi[c/x]$	$\vdash$	$\forall x \neg Px,\ \exists x \big(Px \land \varphi(x)\big)$	☐	☐
$\neg Pc \lor \varphi[c/x]$	$\vdash$	$\neg Pc,\ \exists x \big(Px \land \varphi(x)\big)$	☐	☐
$\neg Pc \lor \varphi[c/x]$	$\vdash$	$\forall x \neg Px,\ Pc \land \varphi[c/x]$	☐	☐
$\forall x \big(\neg Px \lor \phi(x)\big)$	$\vdash$	$\neg Pc,\ \exists x \big(Px \land \varphi(x)\big)$	☐	☐

(d) Leiten Sie die Sequenz aus (b) im Sequenzenkalkül ab.