Formale Grundlagen der Informatik II
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2012**
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

Gruppenübung

Aufgabe G1
Seien φ und ψ AL-Formeln. Wie kann man das Resolutionsverfahren benutzen, um zu überprüfen, ob

(a) φ unerfüllbar ist;

(b) φ erfüllbar ist;

(c) φ allgemeingültig ist;

(d) φ nicht allgemeingültig ist;

(e) $\varphi \models \psi$;

(f) eine endliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist;

(g) eine unendliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist?

Lösungsskizze: Wir bezeichnen mit $K(\varphi)$ die Klauselmenge zu φ, d.h. die Menge der Klauseln einer zu φ äquivalenten Formel in KNF.

(a) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$

(b) $\Box \notin \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$

(c) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(d) $\Box \notin \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(e) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi \wedge \neg\psi))$

(f) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi))$

(g) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi_0))$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Aufgabe G2

$$\begin{aligned} \text{Seien } \varphi &:= (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\ \psi &:= (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass

(a) φ erfüllbar ist;

(b) $\varphi \models \psi$ gilt.

Lösungsskizze:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^0(K) &= \big\{\{p, \neg q, \neg r\},\ \{\neg p, q, \neg r\},\ \{\neg p, \neg q\}\big\} \\
\mathrm{Res}^1(K) &= \mathrm{Res}^0(K) \cup \big\{\{q, \neg q, \neg r\},\ \{\neg q, \neg r\},\ \{p, \neg p, \neg r\},\ \{\neg p, \neg r\}\big\} \\
\mathrm{Res}^2(K) &= \mathrm{Res}^1(K) \cup \big\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}\big\} \\
\mathrm{Res}^3(K) &= \mathrm{Res}^2(K)
\end{aligned}$$

(b) $\varphi \wedge \neg\psi \equiv (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$, daher betrachten wir die Klauseln: $\{p, \neg q, \neg r\},\ \{\neg p, q, \neg r\},\ \{\neg p, \neg q\},\ \{p, q\},\ \{p, \neg q, r\},\ \{\neg p, q, r\}$

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p, q, r\} \arrow[d] & \{\neg p, q, \neg r\} \arrow[dl] & & \{p, \neg q, \neg r\} \arrow[dr] & \{p, \neg q, r\} \arrow[d] \\
\{\neg p, q\} \arrow[dr] & \{p, q\} \arrow[d] & & \{\neg p, \neg q\} \arrow[d] & \{p, \neg q\} \arrow[dl] \\
& \{q\} \arrow[dr] & & \{\neg q\} \arrow[dl] & \\
& & \Box & &
\end{tikzcd}$$

Da $\Box$ aus den Klauseln ableitbar ist, gilt $\varphi \models \psi$.

Aufgabe G3

Ein *Dominosystem* $\mathcal{D} = (D, H, V)$ besteht aus einer endlichen Menge D von quadratischen Dominosteinen und zwei Relationen $H \subseteq D \times D$ und $V \subseteq D \times D$, so dass

- $(d, e) \in H$ gdw. e rechts neben d passt,
- $(d, e) \in V$ gdw. e über d passt.

Wir betrachten ein festes Dominosystem $\mathcal{D} = (D, H, V)$.

(a) Geben Sie zu $n \in \mathbb{N}$ eine AL-Formelmenge Φ_n an, welche genau dann erfüllbar ist, wenn man ein Quadrat der Größe $n \times n$ so mit Dominosteinen aus $\mathcal{D}$ belegen kann, dass nebeneinander liegende Steine zueinander passen. (Wir nehmen an, dass es von jedem Dominostein beliebig viele Exemplare gibt.)

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß man die gesamte Ebene $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ korrekt mit Dominosteinen belegen kann, vorausgesetzt dies geht für alle endlichen Quadrate $n \times n$.

(c) Beweisen Sie die Aussage aus (b) mit Hilfe des Lemmas von König anstatt des Kompaktheitssatzes.

Lösungsskizze:

(a) Wir benutzen Aussagenvariablen p_{ik}^d für $d \in D$ und $1 \leq i, k \leq n$, die die folgende intuitive Bedeutung haben: "Auf Koordinate (i, k) liegt ein Stein vom Typ d."

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{d \in D} p_{ik}^d && \text{für alle } i, k \\
&\bigwedge_{d \neq e} \neg(p_{ik}^d \wedge p_{ik}^e) && \text{für alle } i, k \\
&\bigvee_{(d,e) \in H} (p_{ik}^d \wedge p_{(i+1)k}^e) && \text{für alle } i, k \\
&\bigvee_{(d,e) \in V} (p_{ik}^d \wedge p_{i(k+1)}^e) && \text{für alle } i, k
\end{aligned}$$

(b) Sei Φ eine Formelmenge wie oben, wobei aber i und k beliebige natürliche Zahlen sind. Φ ist genau dann erfüllbar, wenn sich die Ebene parkettieren lässt.

Um zu zeigen, dass Φ erfüllbar ist, verwenden wir den Kompaktheitssatz. Sei $\Psi \subseteq \Phi$ eine endliche Teilmenge. Dann gibt es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass in $\Psi \subseteq \Phi_m$. Da sich das $m \times m$ Quadrat nach Voraussetzung parkettieren läßt, hat Φ_m und damit auch Ψ ein Modell. Also ist jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar. Aufgrund des Kompaktheitssatzes ist dann auch Φ erfüllbar.

(c) Wir konstruieren einen Baum $\mathcal{B}$ wie folgt:

- Auf der n-ten Ebene gibt es einen Knoten für jede gültige Belegung von $n \times n$.
- Von einem Knoten v auf der n-ten Ebene gibt es eine Kante zu einem Knoten v' auf der $n+1$-ten Ebene genau dann wenn die Belegung von v' die Belegung von v fortsetzt.

Diese Konstruktion beschreibt einen Baum, weil jeder Knoten einen eindeutigen Vorgängerknoten hat. Den Vorgängerknoten eines Knotens auf der n-ten findet man, indem man nur die Teilbelegung auf $(n-1) \times (n-1)$ betrachtet.

Der Baum $\mathcal{B}$ ist endlich verzweigt, weil es nur endlich viele Belegung von $n \times n$ gibt. Nach Voraussetzung gibt es für jedes n eine Belegung von $n \times n$, d.h. auf jeder Ebene gibt es einen Knoten. Damit ist $\mathcal{B}$ unendlich. Nach Lemma von König gibt es nun einen unendlichen Pfad in $\mathcal{B}$. Dieser Pfad beschreibt eine Belegung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, da sich längs eines Pfades die Belegungen fortsetzen stets fortsetzen lässt.

Aufgabe G4

Für – möglicherweise unendliche – Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jede Interpretation, die alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

Lösungsskizze:

Wenn $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ gilt, dann hat die Menge $\Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle, wobei $\neg\Psi = \{\neg\psi : \psi \in \Psi\}$. Der Kompaktheitssatz impliziert dann, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle hat. Setzen wir $\Phi_0 = \{\varphi \in \Phi : \varphi \in \Gamma_0\}$ und $\Psi_0 = \{\psi \in \Psi : \neg\psi \in \Gamma_0\}$, dann heißt das, dass $\Gamma_0 = \Phi_0 \cup \neg\Psi_0$ keine Modelle hat, also $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

Hausübung

Aufgabe H1 (2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit Hilfe von aussagenlogischer Resolution, dass die folgende Formelmenge nicht erfüllbar ist.

$$\neg r, \quad p \vee q \vee r, \quad q \rightarrow \neg p, \quad (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

(b) Finden Sie das minimale Modell der folgende Horn-Formelmenge.

$$(p \wedge s) \rightarrow q, \quad r, \quad q \rightarrow s, \quad r \rightarrow p$$

Lösungsskizze:

(a) Es gelten $q \to \neg p \equiv \neg q \vee \neg p$ und $(q \wedge r) \vee (p \wedge q) \equiv q \wedge (p \vee r)$.

$$
\begin{tikzcd}
\{p, q, r\} & \{\neg r\} \arrow[dddrr] & \{\neg p, \neg q\} \arrow[dr] & \{q\} \arrow[d] & \{p, r\} \arrow[ddl] \\
 & & & \{\neg p\} \arrow[d] & \\
 & & & \{r\} \arrow[d] & \\
 & & & \square &
\end{tikzcd}
$$

Damit ist die gegebene Formelmenge *nicht* erfüllbar.

(b) Wir erhalten $\mathcal{X}_0 = \emptyset$, $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0 \cup \{r\}$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_1 \cup \{p\}$. Ein Modell ist $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(r) = 1$, $\mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(s) = 0$.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Entscheiden Sie mit Hilfe des AL-Sequenzenkalküls $\mathcal{SK}$, ob die folgenden Sequenz allgemeingültig ist oder nicht.

$$p \to q,\ p \to \neg q\ \vdash\ \neg p$$

Falls diese Sequenz nicht allgemeingültig ist, so geben Sie eine nicht erfüllende Belegung an.
Hinweis: „$\to$" ist hier wie üblich zu ersetzen.

Lösungsskizze: Die Sequenz ist allgemeingültig, denn es gilt:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p \vdash p, p$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$p, \neg p, \neg p \vdash \emptyset$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p \vdash p, q$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$p, \neg p, \neg q \vdash \emptyset$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$p, \neg p, \neg p \vee \neg q \vdash \emptyset$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, q \vdash p$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$p, \neg p, q \vdash \emptyset$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, q \vdash q$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\UnaryInfC{$p, q, \neg q \vdash \emptyset$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$p, q, \neg p \vee \neg q \vdash \emptyset$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$p, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q \vdash \emptyset$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$(p \to q), (p \to \neg q) \vdash \neg p$}
\end{prooftree}
$$

Nach der Korrektheit des Sequenzkalküls ist die obige ableitbare Sequenz damit auch allgemeingültig.