

Formale Grundlagen der Informatik II

3. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
25. Juni 2014

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Horn-Erfüllbarkeit)

Bestimmen Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$H_0 = \{p, (p \wedge q) \rightarrow s, (r \wedge t) \rightarrow s, t \rightarrow r, t\}$$

Aufgabe G8 (Modellierung)

Ein Meteorologe versucht die zeitliche Entwicklung des Wetters an einem bestimmten Ort mit folgender Signatur in FO zu beschreiben:

$$S = \{0, N, <, S, R\}.$$

- 0 Konstante für Starttag
- N 1-stelliges Funktionssymbol für "nächster Tag"
- < 2-stelliges Relationssymbol für die zeitliche Ordnung der Tage
- S, R 1-stellige Relationssymbole für Sonne und Regen

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in $FO(S)$:

1. Auf Regen folgt (irgendwann) Sonnenschein.
2. Jeden zweiten Tag scheint die Sonne.
3. Wenn an einem Tag die Sonne scheint, gibt es innerhalb drei Tagen wieder Regen.

Aufgabe G9 (Modellierung)

Betrachte FO-Formeln in der Signatur $\{f\}$, wobei f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist.

- (a) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die von einem Modell erfüllt wird genau dann, wenn die Interpretation von f injektiv ist.
- (b) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die von einem Modell erfüllt wird genau dann, wenn die Interpretation von f surjektiv ist.
- (c) Geben Sie eine FO-Formel in der Signatur $\{f\}$ an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat.

Hausübung

Aufgabe H7 (Minimale Belegungen)

(12 Punkte)

- (a) Finden Sie alle minimalen Belegungen für die folgenden zwei Formeln. Entscheiden Sie für beide Formeln, ob sie äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln sind. Wenn ja, welche? Begründen Sie alle Antworten.
- $(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \vee s)$
 - $(p \wedge q) \leftrightarrow r$
- (b) Geben Sie eine Formel mit vier Variablen an, für die Sie zeigen, dass ihre minimale Belegungen genau $(1, 1, 1, 0)$ und $(0, 0, 1, 1)$ sind. Ist diese Formel äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln?

Aufgabe H8 (Modellierung)

(12 Punkte)

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in $\text{FO}(S)$ mithilfe der Bezeichnungen aus **Aufgabe G8**.

- Es regnet an jeden Tag.
- Regen dauert nie länger als zwei Tage.
- Innerhalb jeder Periode von vier Tagen scheint die Sonne an mindestens zwei Tagen.
- Nach jedem Übergang von einem regnerischen zu einem sonnigen Tag wird es mindestens zwei Tage sonnig sein.

Aufgabe H9 (Modellierung)

(12 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $S = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$. Zeigen Sie, dass in den folgenden S -Strukturen die Ordnung definierbar ist, d.h. dass es für jede der folgenden S -Strukturen \mathcal{A} eine Formel ohne das \leq -Symbol $\phi(x, y)$ gibt, so dass

$$a \leq^{\mathcal{A}} a' \iff \mathcal{A} \models \phi[a, a'].$$

- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \leq^{\mathbb{N}}, 0, 1)$
- $\mathcal{P} = (\mathcal{P}X, \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, X)$
- $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, \leq^{\mathbb{R}}, 0, 1)$