Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
10.09.2010

Klausur „Formale Grundlagen der Informatik 2"

Name: .... | Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	12	12	12	12	12	60	
erreichte Punktzahl							

Vor Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen.

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben, die alle mit 12 Punkten bewertet sind. Um die maximale Punktzahl zu erreichen, brauchen Sie insgesamt 48 Punkte. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründung Wert gelegt. Zur Bearbeitung der Klausur dürfen Sie alle schriftlichen Unterlagen verwenden.

1. Aufgabe (12 Punkte)

In den folgenden AL-Formeln kann „$\rightarrow$" wie üblich eliminiert werden.

(a) Betrachten Sie die AL-Formeln

$$\varphi_1 = (q \wedge r) \rightarrow p, \qquad \varphi_2 = (q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow p).$$

Beweisen oder widerlegen Sie

(i) $\varphi_1 \models \varphi_2$,

(ii) $\varphi_2 \models \varphi_1$.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von aussagenlogischer Resolution, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\{p \rightarrow (q \vee \neg r), \quad (\neg q \wedge r) \rightarrow p, \quad \neg q, \quad r\}$$

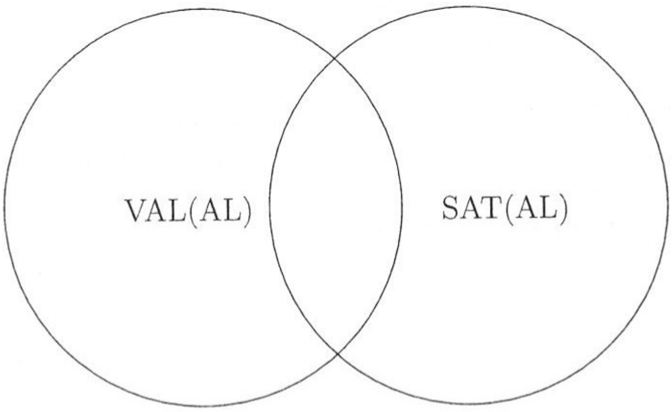
(c) Finden Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$\{(p \wedge t) \rightarrow s, \quad r, \quad (q \wedge r) \rightarrow s, \quad t \rightarrow p, \quad t\}$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Im folgenden Diagramm sind Regionen für folgende Teilmengen der Menge aller AL-Formeln repräsentiert:

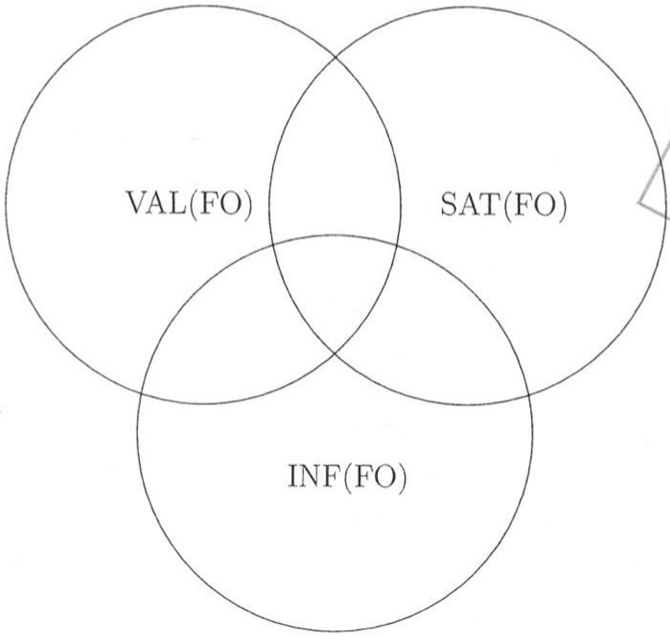
$$\mathrm{VAL(AL)} = \{\varphi \in \mathrm{AL}\colon \varphi \text{ allgemeingültig}\}$$
$$\mathrm{SAT(AL)} = \{\varphi \in \mathrm{AL}\colon \varphi \text{ erfüllbar}\}$$



(a) Markieren Sie sämtliche Regionen, die in dem obigen Diagramm leer sind. Geben Sie für jede nicht leere Region eine Beispielformel an und geben Sie an, wo die Negation des Beispiels liegt. (Beachten Sie, dass auch außerhalb der beiden Kreise eine Region ist.)

Wir betrachten nun ein ähnliches Diagramm für FO-Formeln und die folgenden Teilmengen:

$$\mathrm{VAL(FO)} = \{\varphi \in \mathrm{FO}\colon \varphi \text{ allgemeingültig}\}$$
$$\mathrm{SAT(FO)} = \{\varphi \in \mathrm{FO}\colon \varphi \text{ erfüllbar}\}$$
$$\mathrm{INF(FO)} = \{\varphi \in \mathrm{FO}\colon \varphi \text{ erfüllbar mit ausschließlich unendlichen Modellen}\}$$



(b) Markieren Sie auch hier sämtliche Regionen, die leer sind, und geben Sie die dafür relevanten Beziehungen zwischen den genannten Teilmengen (z.B. Inklusionen, Disjunktheit, etc. als Erläuterung an; es sind keine Begründungen verlangt).

(c) Ordnen Sie folgende FO(S)-Sätze in die verbleibenden Regionen ein, indem Sie deutliche Marken (i) in das Diagramm eintragen um die Lage von φ_i zu markieren. Beachten Sie, dass auch außerhalb aller Kreise Sätze liegen können.

(1) $\varphi_1 = \forall x \exists y Exy$

(2) $\varphi_2 = \forall x \forall y (Exy \rightarrow \neg Eyx)$

(3) $\varphi_3 = \forall x \forall y (Exy \wedge \neg Eyx)$

(4) $\varphi_4 = \forall x \exists y Exy \vee \exists x \exists y \neg Exy$

3. Aufgabe (12 Punkte)

Sei S die Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $<$ und drei 1-stelligen Relationssymbolen P, Q, R. Wir betrachten temporale Systeme der Form

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$$

mit der üblichen Ordnung $<$ auf $\mathbb{N}$. Die Relationssymbole P, Q, R markieren die Zeitpunkte, zu denen das System im Zustand p, q bzw. r ist.

(a) Formalisieren Sie unabhängig voneinander in FO(S):

(i) Das System ist stets in *genau* einem der drei Zustände p, q, r.

(ii) Ab einem gewissen Zeitpunkt befindet sich das System nie wieder im Zustand p oder aber nur noch im Zustand p.

(iii) Sobald Zustand p einmal angenommen wird, treten danach nur noch Zustände p und q auf.

(b) Welche der folgenden Eigenschaften der intendierten linearen Ordnung $(\mathbb{N}, <)$ lassen sich in FO($<$) formalisieren, welche nicht?

Hier sind klare Begründungen (z.B. Formalisierungen oder Kompaktheitsargumente) verlangt.

(i) Jedes Element besitzt einen direkten Nachfolger.

(ii) Es gibt kein letztes Element.

(iii) Jedes Element hat nur endlich viele Vorgänger.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $\varphi = \varphi(x)$ eine beliebige FO-Formel (mit x als einziger freien Variable), P ein 1-stelliges Relationssymbol.

(a) Weisen Sie nach, dass (unabhängig von φ!) die folgende Sequenz nicht allgemeingültig ist:

$$\forall x(Px \rightarrow \varphi(x)) \vdash \exists x(Px \wedge \varphi(x))$$

(Hier und im folgenden ist das Symbol „$\rightarrow$" wie üblich zu eliminieren).

(b) Argumentieren Sie *semantisch*, dass die folgende Sequenz allgemeingültig ist:

$$\forall x(Px \rightarrow \varphi(x)) \vdash \forall x \neg Px, \exists x(Px \wedge \varphi(x))$$

(c) Welche der folgenden „Varianten" der Sequenz aus (b) sind allgemeingültig, welche nicht? (Es ist keine Begründung verlangt; falsche Antworten führen zu Punktabzug.)

	allg.-gültig	nicht allg.-gültig
$\neg Pc \vee \varphi[c/x] \vdash \forall x \neg Px, \exists x(Px \wedge \varphi(x))$	☐	☐
$\neg Pc \vee \varphi[c/x] \vdash \neg Pc, \quad \exists x(Px \wedge \varphi(x))$	☐	☐
$\forall x(Px \rightarrow \varphi(x)) \vdash \forall x \neg Px, Pc \wedge \varphi[c/x]$	☐	☐

(d) Leiten Sie die Sequenz aus (b) im Sequenzenkalkül ab.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Betrachten Sie folgende Formelmenge:

(1) $\forall x \exists y Rxy$

(2) $\forall x \exists y Lxy$

(3) $\exists x Px$

(4) $\forall x \forall y (Lxy \rightarrow Rxy)$

(5) $\forall x \forall y ((Px \wedge Rxy) \rightarrow Py)$

(a) Geben Sie die Skolem-Normalform der Sätze (1)–(5) an.

(b) Zeigen Sie dass die Sätze (1)–(5) erfüllbar sind, indem sie ein Herbrandmodell angeben.

(c) Zeigen Sie, dass die Formelmenge unerfüllbar wird, wenn (3) durch die Formel

$$(3') \quad \exists x (Px \wedge \forall y (Lxy \rightarrow \neg Py))$$

ersetzt wird. Argumentieren Sie entweder, dass es kein Herbrandmodell für die neue Formelmenge geben kann, oder verwenden Sie GI-Resolution um dies zu zeigen.

Hinweis: Durch das Ersetzen von (3) durch (3') ändert sich die Trägermenge des Herbrandmodells *nicht* (wenn wir dieselbe Skolemkonstante „c“ verwenden).