

# Formale Grundlagen der Informatik II

## 6. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach  
Alexander Kreuzer  
Pavol Safarik

SS 2012

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1

Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar, welche sind rekursiv aufzählbar?

- (a)  $\text{SAT}(\text{AL}) := \{\varphi \in \text{AL} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$
- (b)  $\{(\varphi, \psi) \in \text{AL} : \varphi \models \psi\}$
- (c)  $\text{SAT}(\text{FO}) := \{\varphi \in \text{FO} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$
- (d)  $\text{VAL}(\text{FO}) := \{\varphi \in \text{FO} : \varphi \text{ allgemeingültig}\}$
- (e)  $\text{UNSAT}(\text{FO}) := \{\varphi \in \text{FO} : \varphi \text{ unerfüllbar}\}$
- (f)  $\{(\varphi, \psi) \in \text{FO} : \varphi \models \psi\}$

#### Lösungsskizze:

- (a) entscheidbar
- (b) entscheidbar
- (c) nicht rekursiv aufzählbar
- (d) rekursiv aufzählbar
- (e) rekursiv aufzählbar
- (f) rekursiv aufzählbar

#### Aufgabe G2

(a) Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

- i.  $\forall x R x f x \vdash \exists x R f x f f x$
- ii.  $\forall x \forall y (R x y \vee P y), \exists x \neg P x \vdash \exists x \forall y R y x$
- iii.  $\forall x f x x = x \vdash \forall x (P x \vee \neg P f x x)$

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x R x f x}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y R x y}$$

Beachten Sie, daß sich diese Regel nicht in  $SK^\neq$  (auch nicht in  $SK$ ) herleiten läßt (warum?).

#### Lösungsskizze:

(a) i.

$$\frac{\frac{Rfcffc \vdash Rfcffc}{\forall x Rxfx \vdash Rfcffc}}{\forall x Rxfx \vdash \exists x Rxfxfx}$$

ii.

$$\frac{\frac{\frac{Rac, \neg Pc \vdash Rac}{Rac \vee Pc, \neg Pc \vdash Rac}}{\forall y (Ray \vee Py), \neg Pc \vdash Rac}}{\frac{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Pc \vdash Rac}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Pc \vdash \forall y Ryc}} \frac{\overline{Pc \vdash Pc}}{\overline{Pc, \neg Pc \vdash Pc}} \frac{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Pc \vdash \exists x \forall y Ryc}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Pc \vdash \exists x \forall y Ryc}$$

iii.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{Pc \vdash Pc}}{fcc = c, Pfcc \vdash Pc}}{\forall x fxx = x, Pfcc \vdash Pc}}{\frac{\forall x fxx = x \vdash Pc, \neg Pfcc}{\forall x fxx = x \vdash Pc \vee \neg Pfcc}} \frac{\forall x fxx = x \vdash \forall x (Px \vee \neg Pfx)}$$

(b) Angenommen,  $\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx$  ist allgemeingültig. Um zu zeigen, dass dann auch die Sequenz  $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy$  allgemeingültig ist, betrachten wir ein Modell  $\mathfrak{J} \models \Gamma$ . Nach Voraussetzung gibt es dann eine Formel  $\delta \in \Delta \cup \{\forall x Rxfx\}$  mit  $\mathfrak{J} \models \delta$ . Falls  $\delta \in \Delta$ , so sind wir fertig. Falls  $\mathfrak{J} \models \forall x Rxfx$ , dann gilt auch  $\mathfrak{J} \models \forall x \exists y Rxy$  und wir sind ebenfalls fertig.

### Aufgabe G3

Wir betrachten die Signatur  $S = \{f, 0\}$  mit einem einstelligem Funktionssymbol  $f$  und einer Konstanten  $0$ . Beginnend mit einem Element  $x$  einer  $S$ -Struktur betrachten wir die Folge  $x, f(x), f^2(x), \dots$  und untersuchen, wie lange es dauert bis der Wert  $0$  erreicht wird.

- (a) Geben Sie für jedes  $n > 0$  eine Formel  $\varphi_n(x)$  an, die sagt, dass in der Folge  $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$  der Wert  $0$  nicht vorkommt.
- (b) Geben Sie eine Satzmenge  $\Phi$  an, welche besagt, dass es für jedes  $n > 0$  ein  $x$  gibt, so dass, wenn wir mit  $x$  beginnen, der Wert  $0$  frühestens nach  $n$  Schritten erreicht.
- (c) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine Satzmenge  $\Phi$  gibt, welche ausdrückt, dass für jedes  $x$  schließlich die  $0$  erreicht wird, d. h., dass es kein  $x$  gibt, so dass  $f^n(x) \neq 0$  für alle  $n$ .

(Die Collatz-Vermutung behauptet, dass die durch die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$f(n) := \begin{cases} 3n + 1 & \text{für ungerade } n, \\ n/2 & \text{für gerade } n, \end{cases}$$

erzeugte Folge für jede natürliche Zahl  $> 0$  schließlich  $1$  ergibt. Bis jetzt konnte diese Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden.)

---

**Lösungsskizze:**

- (a)  $\varphi_n(x) := \bigwedge_{i < n} \neg(f^i x = 0)$ .  
(b)  $\Phi := \{ \exists x \varphi_n(x) : n > 0 \}$ .  
(c) Angenommen es gäbe eine Satzmenge  $\Phi$  mit der gewünschten Eigenschaft. Sei  $c$  ein neues Konstantensymbol. Wir definieren

$$\Psi := \Phi \cup \{ \varphi_n(c) : n > 0 \}.$$

Diese Menge ist unerfüllbar, da es in jedem Modell  $(A, f, 0, c) \models \Psi$  eine Zahl  $n$  geben muss, so dass  $f^n(c) = 0$  ist. Dies widerspricht aber  $\varphi_{n+1}(c)$ .

Nach dem Kompaktheitssatz gibt es also eine endliche Teilmenge  $\Psi_0 \subseteq \Psi$ , welche unerfüllbar ist. Sei  $m$  eine Zahl, so dass

$$\Psi_0 \subseteq \Phi \cup \{ \varphi_n(c) : 0 < n < m \}.$$

Die Struktur  $(\mathbb{N}, f, 0, m)$  mit  $f(0) = 0$  und  $f(x) = x - 1$  für  $x > 0$  ist ein Modell von  $\Psi_0$ . Widerspruch.

---

**Hausübung****Aufgabe H1****(8+4 Punkte)**

Betrachten Sie die Signatur  $S = (0, m, \leq, L)$ , wobei  $0, m$  Konstanten sind,  $\leq$  ein 2-stelliges und  $L$  ein 1-stelliges Relationssymbol ist.

Wir modellieren in dieser Signatur einen Datenspeicher. Die Konstante  $0$  steht für die Adresse des ersten Speicherblocks,  $m$  für die letzten,  $\leq$  bezeichnet die Ordnung der Speicheradressen und  $Lx$  steht dafür, dass der Speicherblock mit der Adresse  $x$  gesperrt ist.

- (a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO:
- Kein Speicherblock ist gesperrt.
  - Nicht mehr als 3 Speicherblöcke sind gesperrt.
  - Es gibt genau 5 Speicherblöcke.
  - Ein Anfangsstück des Speichers ist gesperrt.
- (b) Zeigen Sie, dass es keine Formel  $\varphi(x)$  in FO gibt, die aussagt, dass es nur endlich viele Speicherblöcke gibt.