Aussagenlogik und Prädikatenlogik 3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Anton Freund, Jonathan Weinberger

SoSe 2018
Übung: 16.05.2018
Abgabe: 30.05.2018

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Terme und Formeln der Prädikatenlogik)
Im folgenden sei $S = \{c, g, f, R\}$ eine Signatur mit Konstantensymbol c, binären Funktionssymbolen f und g, sowie binärem Relationssymbol R. Des Weiteren sei $\mathfrak{I} = (\mathscr{A}, \beta)$ eine S-Interpretation mit Struktur

$$\mathscr{A} = (A, c^{\mathscr{A}}, g^{\mathscr{A}}, f^{\mathscr{A}}, R^{\mathscr{A}}) = (\mathbb{Z}, 1^{\mathbb{Z}}, +^{\mathbb{Z}}, \cdot^{\mathbb{Z}}, \leq^{\mathbb{Z}})$$

und Belegung β, die alle Variablen auf 0 abbildet. Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Ausdruck	Ist Formel?	Ist Term?	(Wahrheits-)Wert in $\mathfrak{I}$
gcc	✗	✓	2
$\forall x \forall y (x \to Rxy)$			
$fgcxgxc$			
$Rfgccxc$			
$Rcx \to \forall z\, Rzx$			
$\forall x \exists y\, fxy = c$			
$fRcxgcc$			

Lösung:

Ausdruck	Ist Formel?	Ist Term?	(Wahrheits-)Wert in $\mathfrak{I}$
gcc	✗	✓	2
$\forall x \forall y (x \to Rxy)$	✗	✗	–
$fgcxgxc$	✗	✓	1
$Rfgccxc$	✓	✗	1
$Rcx \to \forall z\, Rzx$	✓	✗	1
$\forall x \exists y\, fxy = c$	✓	✗	0
$fRcxgcc$	✗	✗	–

Aufgabe G2 (Modellierung in der Prädikatenlogik I)
Eine Meteorologin möchte die zeitliche Entwicklung des Wetters in der Prädikatenlogik formalisieren. Sie wählt dazu die Signatur $S = \{N, <, S, R\}$ mit einem einstelligen Funktionssymbol N ("nächster Tag"), einem zweistelligen Relationssymbol $<$ (für die zeitliche Ordnung der Tage) und einstelligen Relationssymbolen S, R (für Sonne bzw. Regen an einem gegebenen Tag). Formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) Auf Regen folgt (immer irgendwann) Sonnenschein.

(b) Genau jeden zweiten Tag scheint die Sonne.

(c) Wenn an einem Tag die Sonne scheint, dann gibt es innerhalb von drei Tagen wieder Regen.

Lösung: Eine mögliche Lösung lautet:

(a) $\forall x (Rx \to \exists y (x < y \wedge Sy))$

(b) $\forall x((Sx \to \neg SNx) \land (\neg Sx \to SNx))$; wenn man annimmt, dass jeder Tag genau eine der Möglichkeiten "Sonne" und "Regen" erfüllt, dann ist auch folgendes möglich: $\forall x((Sx \to RNx) \land (Rx \to SNx))$

(c) $\forall x(Sx \to (RNx \lor RNNx \lor RNNNx))$

Aufgabe G3 (Sequenzenkalkül)
Wir betrachten den Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für die Aussagenlogik.

(a) Beweisen Sie das Inversionslemma für die Regel ($\neg$R). Zeigen Sie also: Wenn die Sequenz $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$ in $\mathcal{SK}$ herleitbar ist, dann ist auch $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ herleitbar. (Hinweis: Argumentieren Sie per Induktion über die Herleitung von $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$. Um exzessive Schreibarbeit zu vermeiden, genügt es, wenn Sie das Axiom (Ax) und die Regeln ($\neg$L) und ($\neg$R) betrachten.)

(b) Folgern Sie: Wenn $\Gamma \vdash \Delta, \neg\neg\varphi$ in $\mathcal{SK}$ herleitbar ist, dann ist auch $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ herleitbar (Sie können das Inversionslemma für die Regel ($\neg$L) verwenden, ohne es zu beweisen).

Lösung:

(a) Man argumentiert per Induktion über die Herleitung von $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$ im Sequenzenkalkül. Um die Behauptung zu zeigen, dürfen wir also folgende Induktionsvoraussetzung annehmen: Wenn $\Gamma' \vdash \Delta', \neg\varphi$ eine Herleitung hat, die kürzer ist als die gegebene Herleitung von $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$, dann ist auch $\Gamma', \varphi \vdash \Delta'$ herleitbar. Als Basis der Induktion müssen wir die drei Axiome betrachten. Exemplarisch führen wir das Argument für (Ax) aus:

- Im Fall von (Ax) muss $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$ die Form $\Gamma', p \vdash \Delta', p$ haben. Wegen der Negation kann $\neg\varphi$ nicht die Aussagenvariable p sein. Also kommt p in Δ vor und wir können $\Delta, \varphi = \Delta'', p, \varphi$ schreiben. Beachte auch $\Gamma = \Gamma', p$. Nun kann man mit (Ax) auch $\Gamma', p, \varphi \vdash \Delta'', p$ herleiten. Dies ist gerade die gewünschte Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$.

Im Induktionsschritt betrachten wir die verschiedenen Regeln des Sequenzenkalküls:

- Im Fall von ($\neg$L) wurde $\Gamma', \neg\psi \vdash \Delta, \neg\varphi$ aus $\Gamma' \vdash \Delta, \neg\varphi, \psi$ hergeleitet (man hat also $\Gamma = \Gamma', \neg\psi$). Die Herleitung der Prämisse $\Gamma' \vdash \Delta, \neg\varphi, \psi$ ist um eine Regel kürzer als die Herleitung von $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Herleitung von $\Gamma', \varphi \vdash \Delta, \psi$. Indem man die Regel ($\neg$L) wieder anwendet, erhält man $\Gamma', \neg\psi, \varphi \vdash \Delta$, wie gewünscht.
- Im entscheidenden Fall einer Regel ($\neg$R) muss man zwei Fälle unterscheiden: Es kann sein, dass die Regel ($\neg$R) gerade benutzt wurde, um die Formel $\neg\varphi$ herzuleiten. Dann wurde also $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$ aus $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ hergeleitet. Die gewünschte Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ ist also hier schon durch die Prämisse der Regel gegeben. Es kann aber auch sein, dass die Regel ($\neg$R) benutzt wurde, um eine Formel $\neg\psi$ aus Δ herzuleiten. Dann wurde also $\Gamma \vdash \Delta', \neg\psi, \neg\varphi$ aus $\Gamma, \psi \vdash \Delta', \neg\varphi$ hergeleitet, wobei $\Delta = \Delta', \neg\psi$. Nach Induktionsvoraussetzung hat man $\Gamma, \psi, \varphi \vdash \Delta'$. Indem man ($\neg$R) erneut anwendet, erhält man die gewünschte Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \Delta', \neg\psi$.

Um den Beweis zu vervollständigen, müsste man noch die Regeln ($\lor$L), ($\lor$R), ($\land$L), ($\land$R), ($\to$L) und ($\to$R) betrachten. Das Argument ist aber immer ähnlich. Die vielen Fälle machen Argumente mit dem Sequenzenkalkül recht schreibintensiv. Es gibt aber Varianten des Sequenzenkalküls, die den Schreibaufwand deutlich reduzieren.

(b) Wenn $\Gamma \vdash \Delta, \neg\neg\varphi$ herleitbar ist, dann ist nach Teil (a) auch $\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta$ herleitbar. Mit dem Inversionslemma für die Regel ($\neg$L) folgt, dass auch $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ herleitbar ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Shoenfieldkalkül und Sequenzenkalkül) (12 Punkte)
Wir vergleichen Shoenfields Variante des Hilbert-Systems (vgl. Übungsblatt 2, Aufgabe H2) mit dem Sequenzenkalkül.

(a) Man zeige, dass die Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$ für jede aussagenlogische Formel φ im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ herleitbar ist. (Tipp: Induktion über den Aufbau von φ.)

(b) Man zeige die folgende Aussage: Wenn es im Kalkül von Shoenfield einen Beweisbaum mit Blättern $\Gamma = \varphi_1, \dots, \varphi_n$ und Wurzel ψ gibt, dann ist die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}^+$ (also mit der Schnittregel) herleitbar.

Hinweis: Sie können Abschwächungslemma, Inversionslemma und Kontraktionslemma verwenden.

Lösung:

(a) [6 Punkte] Als Basis der Induktion müssen wir zunächst die Fälle betrachten, in denen φ eine einzelne Aussagenvariable oder eine der Konstanten $0, 1$ ist:

- Angenommen, $\varphi = p$ ist eine Aussagenvariable. Dann ist $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$ ein Axiom (Ax).
- Angenommen, $\varphi = 0$. Dann ist $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$ ein Axiom (0-Ax).
- Angenommen, $\varphi = 1$. Dann ist $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$ ein Axiom (1-Ax).

Im Induktionsschritt betrachten wir die verschiedenen Möglichkeiten für eine zusammengesetzte Formel φ:

- Angenommen, $\varphi = \neg\psi$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi$ herleitbar. Mit einer Regel ($\neg$L) erhält man $\Gamma, \psi, \neg\psi \vdash \Delta$. Mit einer Regel ($\neg$R) erhält man $\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta, \neg\psi$. Wegen $\varphi = \neg\psi$ ist das gerade die gewünschte Sequenz.
- Angenommen, $\varphi = \psi \vee \theta$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi$ und $\Gamma, \theta \vdash \Delta, \theta$ herleitbar. Mit dem Abschwächungslemma sind auch $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi, \theta$ und $\Gamma, \theta \vdash \Delta, \psi, \theta$ herleitbar. Mit der Regel ($\vee$L) erhält man $\Gamma, \psi \vee \theta \vdash \Delta, \psi, \theta$. Die Regel ($\vee$R) gibt schließlich $\Gamma, \psi \vee \theta \vdash \Delta, \psi \vee \theta$.
- Angenommen, $\varphi = \psi \wedge \theta$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi$ und $\Gamma, \theta \vdash \Delta, \theta$ herleitbar. Mit dem Abschwächungslemma sind auch $\Gamma, \psi, \theta \vdash \Delta, \psi$ und $\Gamma, \psi, \theta \vdash \Delta, \theta$ herleitbar. Mit der Regel ($\wedge$R) erhält man $\Gamma, \psi, \theta \vdash \Delta, \psi \wedge \theta$. Die Regel ($\wedge$L) gibt schließlich $\Gamma, \psi \wedge \theta \vdash \Delta, \psi \wedge \theta$.
- Angenommen, $\varphi = \psi \to \theta$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi$ und $\Gamma, \theta \vdash \Delta, \theta$ herleitbar. Mit dem Abschwächungslemma sind auch $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \theta, \psi$ und $\Gamma, \psi, \theta \vdash \Delta, \theta$ herleitbar. Die Regel ($\to$L) ergibt $\Gamma, \psi, \psi \to \theta \vdash \Delta, \theta$. Mit der Regel ($\to$R) erhält man schließlich $\Gamma, \psi \to \theta \vdash \Delta, \psi \to \theta$.

(b) [6 Punkte] Man argumentiert per Induktion über den Aufbau des gegebenen Beweisbaums:

- Betrachte zunächst den Beweisbaum, der aus einem einzelnen Blatt mit der freien Annahme φ besteht. Dieses Blatt ist zugleich die Wurzel des Baumes. Wir müssen also zeigen, dass $\varphi \vdash \varphi$ im Sequenzenkalkül herleitbar ist. Das ist das Ergebnis von Teilaufgabe (a).
- Betrachte nun den Baum, der aus einem einzelnen Blatt mit dem Axiom $\neg\psi \vee \psi$ besteht. Hier brauchen wir $\vdash \neg\psi \vee \psi$. Wie eben hat man $\psi \vdash \psi$. Mit der Regel ($\neg$R) bekommt man $\vdash \neg\psi, \psi$. Die Regel ($\vee$R) liefert $\vdash \neg\psi \vee \psi$, wie gewünscht.
- Betrachte nun einen Baum mit Blättern $\Gamma = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, der in der Regel $\frac{\psi}{\psi \vee \theta}$ endet. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\Gamma \vdash \psi$ im Sequenzenkalkül herleitbar. Mit dem Abschwächungslemma ist auch $\Gamma \vdash \psi, \theta$ herleitbar. Die Regel ($\vee$R) liefert $\Gamma \vdash \psi \vee \theta$.
- Betrachte einen Baum mit Blättern Γ, der in der Regel $\frac{\psi \vee \psi}{\psi}$ endet. Nach Induktionsvoraussetzung hat man $\Gamma \vdash \psi \vee \psi$. Inversion für die Regel ($\vee$R) liefert $\Gamma \vdash \psi, \psi$. Mit dem Kontraktionslemma bekommt man $\Gamma \vdash \psi$.
- Betrachte einen Baum mit Blättern Γ, der in der Regel $\frac{\psi \vee (\theta \vee \chi)}{(\psi \vee \theta) \vee \chi}$ endet. Nach Induktionsvoraussetzung hat man $\Gamma \vdash \psi \vee (\theta \vee \chi)$. Inversion für die Regel ($\vee$R) ergibt zunächst $\Gamma \vdash \psi, \theta \vee \chi$ und dann $\Gamma \vdash \psi, \theta, \chi$. Mit der Regel ($\vee$R) erhält man $\Gamma \vdash \psi \vee \theta, \chi$ und schließlich $\Gamma \vdash (\psi \vee \theta) \vee \chi$.
- Betrachte einen Baum mit Blättern Γ, der in der Regel $\frac{\psi \vee \theta \quad \neg\psi \vee \chi}{\theta \vee \chi}$ endet. Mit Induktionsvoraussetzung und Abschwächung erhält man $\Gamma \vdash \psi \vee \theta$ und $\Gamma \vdash \neg\psi \vee \chi$ (beachte, dass Abschwächung nötig ist, weil die Teilbäume über den Prämissen $\psi \vee \theta$ und $\neg\psi \vee \chi$ nicht alle freien Annahmen aus Γ enthalten müssen). Mit Inversion für ($\vee$R) erhält man $\Gamma \vdash \psi, \theta$ und $\Gamma \vdash \neg\psi, \chi$. Abschwächung und die Regel ($\vee$R) ergeben $\Gamma \vdash \psi, \theta \vee \chi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi, \theta \vee \chi$. Durch Inversion für ($\neg$R) erhält man $\Gamma, \psi \vdash \theta \vee \chi$. Eine Anwendung der Schnittregel ergibt schließlich $\Gamma \vdash \theta \vee \chi$.

Aufgabe H2 (Modellierung in der Prädikatenlogik II) (12 Punkte)

Wir betrachte prädikatenlogische Formeln über der Signatur $\{f\}$, wobei f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Die Gleichheit $=$ ist wie üblich zugelassen.

(a) Man gebe eine Formel an, die in einem Modell genau dann erfüllt ist, wenn die Interpretation von f injektiv ist.

(b) Man gebe eine Formel an, die in einem Modell genau dann erfüllt ist, wenn die Interpretation von f surjektiv ist.

(c) Man gebe eine Formel an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat. Begründen Sie kurz, warum die von Ihnen angegebene Formel diese Eigenschaft hat.

Lösung:

(a) [4 Punkte] Eine mögliche Lösung ist $\phi_{\text{inj}} = \forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$.

(b) [4 Punkte] Eine mögliche Lösung ist $\phi_{\text{surj}} = \forall y \exists x f(x) = y$.

(c) [4 Punkte] Eine mögliche Lösung ist $\phi = \phi_{\text{inj}} \wedge \neg\phi_{\text{surj}}$. Die Formel hat kein endliches Modell, weil jede injektive Funktion $f : A \to A$ auf einer endlichen Menge A schon surjektiv ist (wenn f injektiv ist, dann hat das Bild von f genauso viele Elemente wie der Definitionsbereich A). Die Formel hat aber unendliche Modelle: Beispielsweise ist durch $f(n) = n + 1$ eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert, welche injektiv aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe H3 (Folgerungsbeziehung in der Prädikatenlogik) (12 Punkte)

Für eine Struktur $\mathscr{A}$ und eine prädikatenlogische Formel φ vereinbaren wir

$$\mathscr{A} \models \varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{für jede Belegung } \beta : \mathscr{V} \to \mathscr{A} \text{ gilt } (\mathscr{A}, \beta) \models \varphi.$$

Man beachte, dass die Schreibweise $\mathscr{A} \models \varphi$ in der Vorlesung nur für Sätze eingeführt wurde. In dieser Aufgabe verwenden wir sie auch für Formeln mit freien Variablen.

(a) Man zeige, dass $\varphi \models \psi$ schon $\models \varphi \to \psi$ impliziert. (Tipp: Lesen Sie genau nach, was dies laut Vorlesung bedeutet.)

(b) Man zeige durch ein Gegenbeispiel: Angenommen, $\mathscr{A} \models \varphi$ impliziert $\mathscr{A} \models \psi$ für jede Struktur $\mathscr{A}$. Dann muss dennoch nicht $\mathscr{A} \models \varphi \to \psi$ für jede Struktur $\mathscr{A}$ gelten.

(c) Man zeige, dass die Aussage aus Teilaufgabe (b) für Sätze stimmt: Angenommen, φ, ψ haben keine freien Variablen und $\mathscr{A} \models \varphi$ impliziert stets $\mathscr{A} \models \psi$. Dann gilt $\mathscr{A} \models \varphi \to \psi$ für jede Struktur $\mathscr{A}$.

Lösung:

(a) [4 Punkte] Um $\models \varphi \to \psi$ zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass $\mathscr{I} \models \varphi \to \psi$ für jede Interpretation $\mathscr{I} = (\mathscr{A}, \beta)$ gilt. Sei also $\mathscr{I}$ beliebig. Man hat

$$(\varphi \to \psi)^{\mathscr{I}} = (\neg\varphi \vee \psi)^{\mathscr{I}} = \max\{(\neg\varphi)^{\mathscr{I}}, \psi^{\mathscr{I}}\} = \max\{1 - \varphi^{\mathscr{I}}, \psi^{\mathscr{I}}\}.$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle: Ist $\varphi^{\mathscr{I}} = 0$, so gilt $1 - \varphi^{\mathscr{I}} = 1$ und damit $(\varphi \to \psi)^{\mathscr{I}} = 1$. Letzteres bedeutet $\mathscr{I} \models \varphi \to \psi$, wie gewünscht. Ist $\varphi^{\mathscr{I}} = 1$, also $\mathscr{I} \models \varphi$, so können wir mit $\varphi \models \psi$ auf $\mathscr{I} \models \psi$ schließen. Man folgert $\psi^{\mathscr{I}} = 1$, dann $(\varphi \to \psi)^{\mathscr{I}} = 1$, und schließlich wieder $\mathscr{I} \models \varphi \to \psi$.

(b) [4 Punkte] Wir wählen $\varphi = Px$ und $\psi = Py$ für ein Prädikatensymbol P und verschiedene Variablen x, y. Zunächst zeigen wir, dass $\mathscr{A} \models \varphi$ dann $\mathscr{A} \models \psi$ impliziert: Gilt $\mathscr{A} \models \varphi$, so haben wir $(\mathscr{A}, \beta) \models Px$ für jede Belegung β. Somit muss $P^{\mathscr{A}} = A$ gelten. Letzteres impliziert $(\mathscr{A}, \beta) \models Py$ für jede Belegung β, und somit $\mathscr{A} \models \psi$. Nun zeigen wir, dass $\mathscr{A} \models \varphi \to \psi$ im Allgemeinen nicht gilt: Wähle dazu $A = \{0, 1\}$ und $P^{\mathscr{A}} = \{0\}$. Für die Belegung β mit $\beta(x) = 0$ und $\beta(y) = 1$ gilt dann $(\mathscr{A}, \beta) \models \varphi$ aber nicht $(\mathscr{A}, \beta) \models \psi$. Somit gilt auch nicht $(\mathscr{A}, \beta) \models \varphi \to \psi$. Mit der Definition aus der Aufgabenstellung bedeutet dies, dass auch $\mathscr{A} \models \varphi \to \psi$ nicht gilt.

(c) [4 Punkte] Um $\mathscr{A} \models \varphi \to \psi$ für jede Struktur $\mathscr{A}$ nachzuweisen, genügt es, $\mathscr{I} \models \varphi \to \psi$ für jede Interpretation $\mathscr{I} = (\mathscr{A}, \beta)$ zu zeigen. Gemäß Teilaufgabe (a) reicht es aus, $\varphi \models \psi$ zu beweisen. Betrachte also eine beliebige Interpretation $\mathscr{I} = (\mathscr{A}, \beta)$ mit $\mathscr{I} \models \varphi$. Für Sätze hängt der Wahrheitswert nicht von der Belegung sondern nur von der Struktur ab (siehe Vorlesung). Daher gilt $(\mathscr{A}, \beta') \models \varphi$ für jede Belegung $\beta' : \mathscr{V} \to \mathscr{A}$. Gemäß der Definition aus der Aufgabenstellung hat man also $\mathscr{A} \models \varphi$. Nach Annahme erhält man $\mathscr{A} \models \psi$ und damit $\mathscr{I} \models \psi$, wie gewünscht.