Wir haben bei der Analyse rekursive Algorithmen bereits Rekurrenzgleichungen gesehen. z.B. bei Merge-Sort

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{, falls } n = 1, \\ 2T(n/2) + c_2, & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Die Lösung solcher Gleichungen soll hier noch einmal systematisch erklärt werden.

Unter "Lösung" verstehe ich die Bestimmung einer geschlossenen Formel für T oder die Angabe einer geschlossenen Formel für eine obere Schranke oder eine untere Schranke.

<u>Beispiel Merge-Sort</u>

$$T(1) \leq C$$
$$T(n) = T(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + C$$

Hierin sind die Funktionen $\lceil\ \rceil$ und $\lfloor\ \rfloor$ folgendermaßen definiert. Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit der Eigenschaft

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Analog dazu ist $\lceil x \rceil$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

<u>Beispiele</u>: $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$, $\lceil 3.1 \rceil = 4$,
$\lfloor -4.1 \rfloor = -5$, $\lceil -4.1 \rceil = -4$,

$\lfloor -4.1 \rfloor = -5, \lceil -4.1 \rceil = -4,$
$\lfloor -4 \rfloor = \lceil -4 \rceil = -4.$

Wir raten die Abschätzung

$$T(n) \leq 4C\, n \lg n.$$

und beweisen sie durch Induktion.

Hilfsbehauptung 1. tante

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n \qquad (\text{übung})$$

Beweis n gerade $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

n ungerade $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$

Hilfsbeh. 2

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2} \leq \frac{2}{3} n \qquad \text{für } n \geq 3$$

Beh: $T(n) \leq 4C \cdot n \lg n, \quad n \geq 2$

Beweis

Induktionsanfang:

$n = 1$: $T(1) \leq C$, $T(2) \leq T(1) + T(1) + 2C$
$\leq 4C$

$4C \cdot 2 \lg 2 = 8C$

Induktionsschritt: Sei $n > 2$ und sei Beh. wahr für alle $n' < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil\right) + cn \\
&\overset{\text{Indann}}{\leq} 4c \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 4c \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil + cn \\
&\overset{\text{HB 2}}{\leq} 4c \log\left(\tfrac{2n}{3}\right) \left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \right) + cn \\
&= 4c \lg\left(\tfrac{2}{3} n\right) n + cn \\
&= 4cn \lg n + cn \underbrace{\left(1 - 4 \lg \tfrac{3}{2}\right)}_{\leq 0} \\
&\leq 4cn \lg n
\end{aligned}
$$

Wie rät man richtig?

Grundlegend ist der folgende Satz.

<u>Satz</u> Sei $T(n) = a\, T(n/b) + f(n)$ $a \geq 1$, $b > 1$.

1) Ist $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$, dann ist $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2) Ist $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, dann ist $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3) Ist $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$. $a \cdot f(n/b) < c\, f(n)$ für ein $c < 1$

und alle hinreichend großen n, dann ist $T(n) = \Theta(f(n))$.

Anwendungen:

1) $T(n) = 9T(n/3) + n$, $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$.

$$\log_b a = \log_3 9 = 2$$

$$f(n) = n \stackrel{?}{=} O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \quad \text{für ein } \varepsilon?$$
$$= O(n^{2-\varepsilon}) \quad \text{"}$$
$$\varepsilon = 1 \; !$$

Also $T(n) = \Theta(n^2)$.

2) $T(n) = T(2n/3) + 1$.

$a = 1$, $b = 3/2$, $\log_{3/2} 1 = 0$.
$f(n) = 1$

$$f(n) = 1 = O(n^{\log_b a}) = O(1).$$

Also ist $T(n) = \Theta(\lg n)$.

3) $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$

$a = 3$, $b = 4$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} \leq n^{0.793}$

$f(n) = n \lg n \geq n \geq n^{0.793 + 0.1} \geq n^{\log_b a}$

$$\Rightarrow \quad f(n) = \Omega(n^{\log_b a + 0.1})$$

Außerdem ist

$$a \cdot f(n/b) = 3 f(n/4)$$

$$a \cdot f(n/b) = 3 f(n/4)$$
$$= 3(n/4)\ \lg(n/4) \le \underbrace{(3/4)}_{c}\ n \lg n$$

Also ist $T(n) = \Theta(n \lg n)$

4) $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

$a = b = 2$, $n^{\lg_b a} = n$, $f(n) = n \lg n$

Fall 1,2 kann nicht angewendet werden, weil $f(n) \notin \Theta(n)$.

Fall 3? Sicher gilt $f(n) = \Omega(n)$.

Aber ist auch $a f(n/b) = 2 f(n/2)$
$= n \lg(n/2) < c\ f(n) = c\ n \lg(n/2)$ für ein $c < 1$?

Es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n \lg(n/2)}{n \lg n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \lg n - n}{n \lg n}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{\lg n}}{1} = 1$$

Also gibt es ein solches c nicht.

Übungen:

G 1) Zeigen Sie, dass die Lösung von
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$
in $O(\lg n)$ liegt.

G 2) Zeigen Sie, dass die Lösung von

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

in $\Omega(n \lg n)$ liegt

H 3) Zeigen Sie, dass die Lösung von

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$$

in $O(n \lg n)$ liegt.