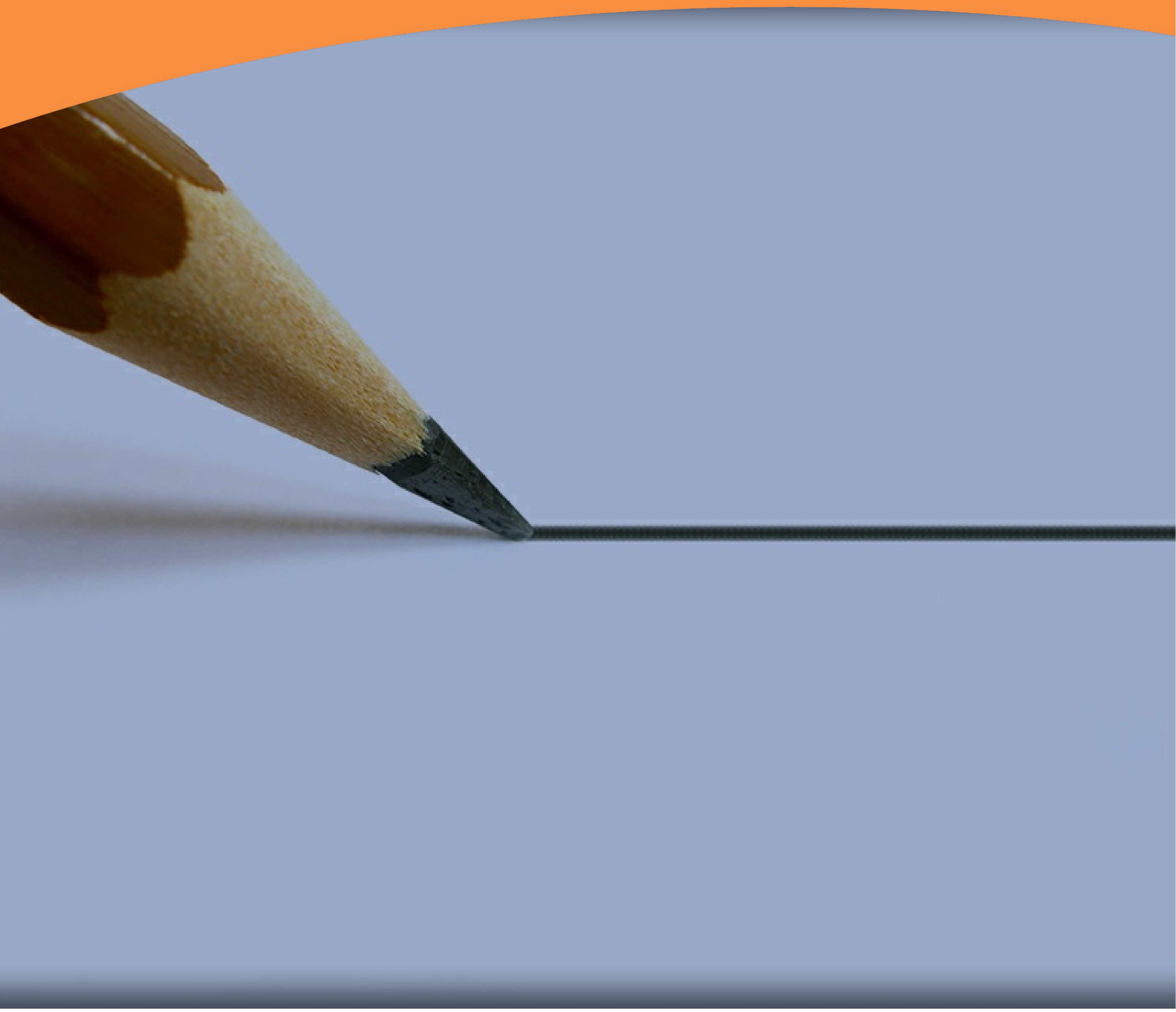
Einfach lernen! Mathematik Aufgabenbuch

Dr. Helmut Bösmann



bookboon

DR. HELMUT BÖSMANN

EINFACH LERNEN! MATHEMATIK

- AUFGABENBUCH

Download free eBooks at bookboon.com

Einfach lernen! Mathematik – Aufgabenbuch
1. Auflage
© 2006 Dr. Helmut Bösmann & bookboon.com
ISBN 87-7681-062-3

Download free eBooks at bookboon.com

INHALT

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Download free eBooks at bookboon.com

Vorwort

Diese Ausarbeitung wendet sich an Studierende der Wirtschaftswissenschaften in den ersten zwei Semestern. Zum Verständnis der volkswirtschaftlichen Theorien, bertriebswirtschaftlichen Verfahren und der Statistik benötigen sie mathematische Hilfsmittel.

Die wichtigsten dieser mathematischen Werkzeuge werden hier vorgestellt. Das sind Gleichungen, Funktionen einer Variablen und ihre Differentialrechnung, Funktionen von mehreren Variablen, lineare Gleichungssysteme, Matrizen und lineare Optimierung. Dagegen wurden die folgenden Gegenstände, weil sie seltener angewendet werden, nicht aufgegriffen: Integralrechnung, Differentialgleichungen, Vektorräume und Determinanten.

Das erste Kapitel stellt einige Fakten über Zahlen und Rechnen vor und der Leser kann es zunächst überfliegen, um nur zurückzukommen, wenn entsprechende Fragen auftauchen.

Die Kapitel über Lineare Gleichungssysteme und Lineare Optimierung können unabhängig studiert werden.

Zu jeder Aufgaben ist eine vollständige Lösung angegeben. Sie sollte eher als Anregung und Kontrollmöglichkeit genommen werden. Zur Festigung des Wissens und Erlangung der Fertigkeiten ist der eigenständige Lösungsversuch unerlässlich.

Download free eBooks at bookboon.com

1. Grundlagen

Dieses Kapitel wiederholt grundlegende Tatsachen über Zahlen und das Rechnen.

Sie sollten die folgenden Seiten überfliegen und durch Kopfrechnen nachvollziehen. Bearbeiten Sie die Ihnen weniger einfach erscheinenden Aufgaben auch schriftlich. In der Regel ist der vorgestellte Lösungsweg nicht der einzig mögliche.

Versuchen Sie eigene Ansätze!

Machen Sie sich mit der Bedienung des Taschenrechners vertraut!

1.1 Die reellen Zahlen

A 1: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. 29.03.1941 ist eine reelle Zahl.
2. 33 ist eine natürliche Zahl.
3. 0,18 ist eine rationale Zahl.
4. -5 liegt rechts von -2 auf der Zahlengeraden.
5. Alle natürlichen Zahlen sind rationale Zahlen.
6. 1,41421356 quadriert ergibt 2.
7. Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist irrational.
8. $\sqrt{2}$ ist keine reelle Zahl.
9. Es gibt keine ganze Zahl, die nicht rational ist.

Download free eBooks at bookboon.com

1.1 Die reellen Zahlen

A 1: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. 29.03.1941 ist eine reelle Zahl.
2. 33 ist eine natürliche Zahl.
3. 0,18 ist eine rationale Zahl.
4. -5 liegt rechts von -2 auf der Zahlengeraden.
5. Alle natürlichen Zahlen sind rationale Zahlen.
6. 1,41421356 quadriert ergibt 2.
7. Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist irrational.
8. $\sqrt{2}$ ist keine reelle Zahl.
9. Es gibt keine ganze Zahl, die nicht rational ist.

1.2 Rechenregeln

A 2: Überprüfen Sie! Welche Klammern könnten entfallen?

$$
\begin{aligned}
3+(4+2) &= 9 \\
3+4\cdot 2 &= 11 \\
(3+4)\cdot 2 &= 14 \\
3\cdot(4+2) &= 24 \\
3\cdot(4\cdot 2) &= 18 \\
(3+4)\cdot 2+7 &= 21 \\
3+4\cdot(2+7) &= 39 \\
(3+4)\cdot(2+7) &= 63
\end{aligned}
$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 3: Überprüfen Sie!

$$15 + (-6) = 9$$

$$-9 + 21 = 12$$

$$-12 + (-3) + 10 = -5$$

$$8 - (-12) + (-30) = -10$$

A 4: Überprüfen Sie!

$$(5a + 3b + 9c) + (2a - 10b - 2c) = 7a - 7b + 7c = 7(a - b + c)$$

A 5: Überprüfen Sie!

$$(16x + 25y) - (13x + 4y) = 3x - 21y = 3(x - 7y)$$

$$(-16x - 25y - 11z) - (13x - 30y - 16z) = -29x + 5y + 5z$$

A 6: Überprüfen Sie!

$$(29xy + 24xz - 27yz) - (-36zx + 36zy - 14xy) = 43xy + 60xz - 63yz$$

$$\begin{aligned} &5a - [7b - (6a + 3c) - (a \cdot 4 - 8c - b \cdot 17)] = \\ &5a - [7b - 6a - 3c - a \cdot 4 + 8c + b \cdot 17] = \\ &5a - 7b + 6a + 3c + a \cdot 4 - 8c - b \cdot 17 = 15a - 24b - 5c \end{aligned}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 7: Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen!

$$\begin{aligned} a^2+bx-(a+b)x &= a^2+bx-(ax+bx) = \\ &a^2+bx-ax-bx = a^2-ax = a(a-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16z[(29z-a)+2(8a-14z)+7b]-4z(28b-3a) &= \\ 16z[29z-a+16a-28z+7b]-4z(28b-3a) &= \\ 16z[z+15a+7b]-4z(28b-3a) &= \\ 16z^2+240az+112bz-112bz+12az &= 16z^2+252az \end{aligned}$$

Rechnen mit Brüchen

A 8: Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{7}{3}+\frac{2}{11}=\frac{77}{33}+\frac{6}{33}=\frac{83}{33}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{15}=\frac{9}{15}+\frac{7}{15}=\frac{16}{15}$$

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{6}=\frac{3a}{12}+\frac{2b}{12}=\frac{3a+2b}{12}$$

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{28}{5}$$

$$\frac{ab}{xy}\cdot\frac{yz}{bc}=\frac{az}{xc}$$

$$\frac{68\cdot 95}{102\cdot 133}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$$

$$\frac{17}{25}:\frac{28}{49}=\frac{17}{25}\cdot\frac{49}{28}=\frac{833}{700}$$

$$\frac{11(a-x)}{9(b-y)}:\frac{7(x-a)}{6(y-b)}=\frac{11(a-x)}{9(b-y)}\cdot\frac{6(y-b)}{7(x-a)}=\frac{11(a-x)}{9(b-y)}\cdot\frac{-6(b-y)}{-7(a-x)}=\frac{11}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{22}{21}$$

Potenzen

A 9:

$$a^3\cdot a^2=a^5 \qquad a^5\cdot a^{x-7}=a^{x-2} \qquad (-a)^2(-a)^3=a^2\cdot(-1)(a^3)=-(a^5)=-a^5$$

Download free eBooks at bookboon.com

$$25^2 \cdot 4^3 \cdot 25 = 25^3 \cdot 4^3 = (25 \cdot 4)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$$

$$125^3 \cdot 25^2 \cdot 4^7 = \left(5^3\right)^3 \cdot \left(5^2\right)^2 \cdot 4^7 = 5^9 \cdot 5^4 \cdot 4^7 = 5^{13} \cdot 4^7$$

Wurzeln

A 10: Zerlegen Sie 64 in zwei, in drei und in sechs gleiche Faktoren!
Es sei a in n gleiche Faktoren zerlegt. Wie heißt jeder Faktor?

Von welcher Zahl ist -64 die dritte Potenz?
Von welcher Zahl u ist v die n-te Potenz?

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

A 11:

$\sqrt{100}+\sqrt{36}=$ gegenüber $\sqrt{100+36}=$

$\sqrt{100}-\sqrt{36}=$ gegenüber $\sqrt{100-36}=$

$\sqrt{100}\cdot\sqrt{36}=$ gegenüber $\sqrt{100\cdot 36}=$

$\sqrt{100}:\sqrt{36}=$ gegenüber $\sqrt{100:36}=$

A 12:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{8}+5\sqrt{18}+3\sqrt{50}-7\sqrt{72}\\
&=\sqrt{2\cdot 4}+5\sqrt{2\cdot 9}+3\sqrt{2\cdot 25}-7\sqrt{2\cdot 36}\\
&=\sqrt{2}\left(\sqrt{4}+5\sqrt{9}+3\sqrt{25}-7\sqrt{36}\right)\\
&=\sqrt{2}(2+5\cdot 3+3\cdot 5-7\cdot 6)\\
&=-10\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Binomische Formeln

A 13: Das Produkt zweier Summen.

$$(13+5)\cdot(7-3)=18\cdot 4=72$$

$$\begin{aligned}
(13+5)\cdot(7-3)&=13\cdot(7-3)+5\cdot(7-3)\\
&=13\cdot 7+13\cdot(-3)+5\cdot 7+5\cdot(-3)\\
&=91-39+35-15=72
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot(c+d)&=a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)\\
&=ac+ad+bc+bd
\end{aligned}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 14: Wenden Sie die Binomischen Formeln an!

$$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

$$502^2 = (500+2)^2 = 250\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 4 = 252\,004$$

$$(\frac{5}{r} - r)^2 = \frac{25}{r^2} - 10 + r^2$$

$$9u^2 - 49v^2 = (3u+7v)(3u-7v)$$

$$301^2 - 299^2 = 600 \cdot 2 = 1\,200$$

A 15: Klammern Sie soweit wie möglich aus bzw. wenden Sie eine Binomische Formel an um die Summe als Produkt zu schreiben!

$$3x - 9y + 12z = 3(x - 3x + 4z)$$

$$8d^2e - 12de^3 = 4de(d - 3e^2)$$

$$u^2 + 4uv + 4v^2 = (u+2v)^2$$

$$\frac{1}{3}s^2 - 6st + 3t^2 = \frac{1}{3}(s^2 - 18st + 9t^2) = \frac{1}{3}(s-3t)^2$$

A 16: Bestätigen Sie die Identitäten für Potenzen dritter Ordnung!

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Mit der Binomischen Formel für Potenzen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^1(a+b)^2 \\ &= a(a+b)^2 + b(a+b)^2 \\ &= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Download free eBooks at bookboon.com

Mit der Binomischen Formel für Potenzen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)^1(a-b)^2\\ &= a(a-b)^2 - b(a-b)^2\\ &= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\ &= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)\\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\\ &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

Starre Strukturen sind der Gegner.
Du bist der Angreifer.

Next Digital Leader gesucht! Wenn's schwierig wird, drehst du richtig auf? Erneuerung ist deine Lieblingsdisziplin? Dann bist du bei uns genau richtig. Egal, ob du noch studierst oder bereits im Beruf stehst – mit deinem Willen zur Digitalisierung machst du den Weg für die digitale Zukunft der deutschen Wirtschaft frei.

Interesse? Mehr auf next-digital-leader.de!

pwc

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Binomialkoeffizienten

A 17: Aus einer Gruppe von fünf Personen sollen drei heraustreten. Wieviele Dreiergruppen sind denkbar?

Lösung: Aus der Menge {a,b,c,d,e} sind Teilmengen mit drei Elementen, wie {d,b,c}, {b,a,e}..., zu bilden.

Um systematisch vorzugehen, entnehmen wir der Menge jeweils ein Element und notieren die drei Elemente in der *Reihenfolge* ihrer Ziehung als Tripel z.B. (d,b,c). Die Zahl der möglichen Tripel bestimmen wir folgendermaßen.

1. Der erste Zug kann fünf Ergebnisse haben. Das sind
   (a,?,?) (b,?,?) (c,?,?) (d,?,?) (e,?,?).
2. Für den zweiten Zug bleiben noch vier Ergebnisse möglich. Zum Beispiel:
   (c,a,?) (c,b,?) (c,d,?) (c,e,?).
3. Danach bleiben drei mögliche Ergebnisse im dritten Zug. Zum Beispiel:
   (c,a,b) (c,a,d) (c,a,e).

Auf diese Art erhalten wir $\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3 = 60}$ Tripel.

Wir zählen noch die Tripel, die sich nur durch die Reihenfolge ihrer drei Elemente unterscheiden.

Der erste Platz kann von jedem der *drei* Elemente besetzt werden.

Der zweite Platz kann *zwei* Elemente belegt werden.

Für den dritten Platz steht nur noch *ein* Element zur Verfügung.

Download free eBooks at bookboon.com

Es gibt

$$\boxed{3\cdot 2\cdot 1=6}$$

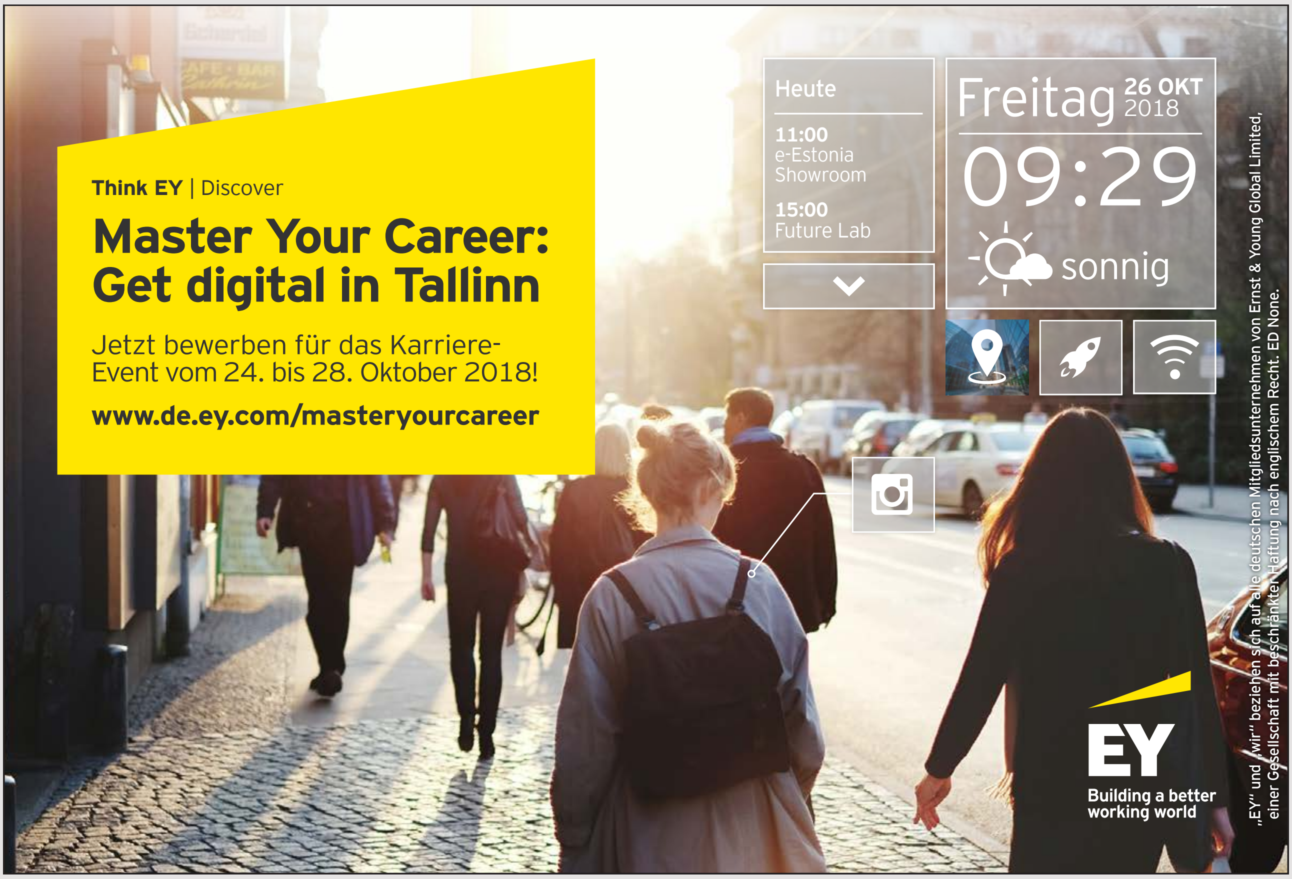
Tripel, die sich nur durch die Reihenfolge ihrer drei Elemente unterscheiden.

Für die Zahl der dreielementigen Teilmengen von {a,b,c,d,e} gilt

$$\boxed{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=\binom{5}{3}=10}$$

A 18: Zeigen Sie: Zu {a,b,c,d,e} gibt es 10 Teilmengen mit zwei Elementen!

Verwenden Sie das Ergebnis der letzten Aufgabe, indem Sie die in der Menge {a,b,c,d,e} zurück bleibenden Elemente betrachten!



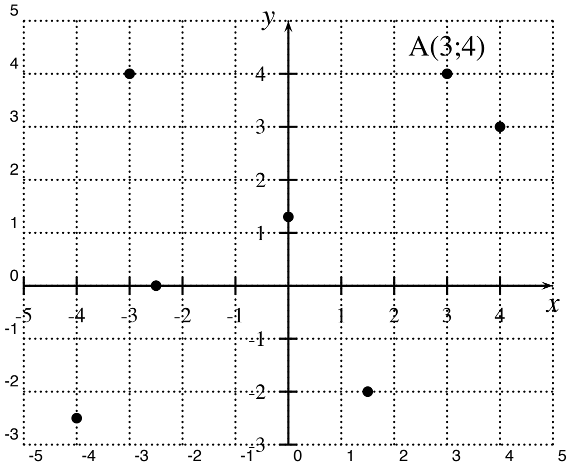
Click on the ad to read more

A 19: Bestimmen Sie zu {a,b,c,d,e} die Zahl der Teilmengen mit einem Element!

Verwenden Sie das Ergebnis, um die Zahl der vierelementigen Teilmengen anzugeben!

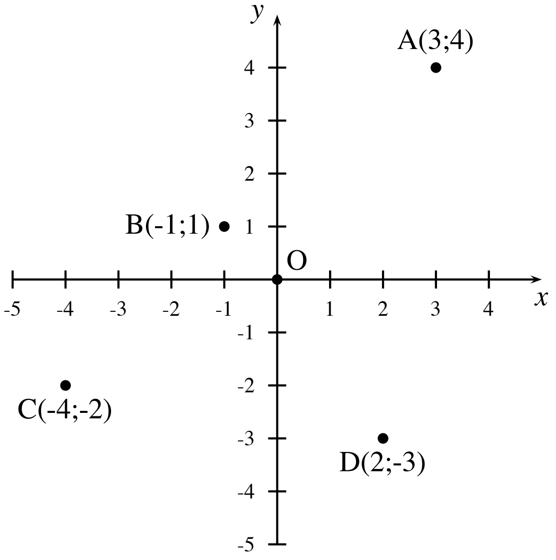
Das rechtwinklige Koordinatensystem

A 20: Geben Sie den Punkten Namen und schreiben Sie die $(x;y)$ -Koordinaten auf!



A 21: Berechnen und messen Sie den Abstand je zweier der fünf Punkte!

$$\boxed{d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$$



Download free eBooks at bookboon.com

2. Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

A 1: Die Gleichung einer Geraden soll je nach Zweckmäßigkeit in geeigneter Form aufgeschrieben werden. Die Variablen x und y treten nur *linear*, d.h. nur in der ersten Potenz, auf.

Häufig benutzte Formen sind:

Allgemeine Form:	$rx + sy + t = 0$
Steigungsform:	$y = mx + b$
Punkt-Richtungs-Form:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Zwei-Punkte-Form:	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
Achsenabschnittsform:	$\dfrac{x}{u} + \dfrac{y}{v} = 1$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Formen Sie jeweils um!

in die Achsenabschnittsform $3{,}2x + 4{,}0y = 0{,}8$

in die Steigungsform $y - 6 = 1{,}2(x - 4)$

in die allgemeine Form $\frac{y}{3} - \frac{x}{5} = 1$

Lösung:

$$3{,}2x + 4{,}0y = 0{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 5y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{0{,}25} + \frac{y}{0{,}2} = 1$$

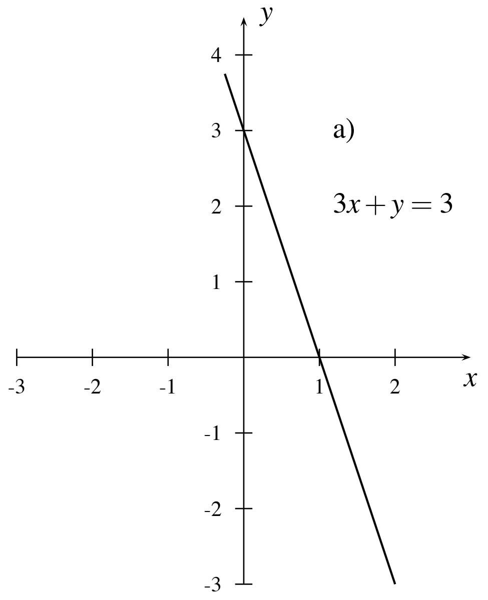
$$y - 6 = 1{,}2(x - 4) \quad \Leftrightarrow \quad y - 6 = 1{,}2x - 4{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1{,}2x + 1{,}2$$

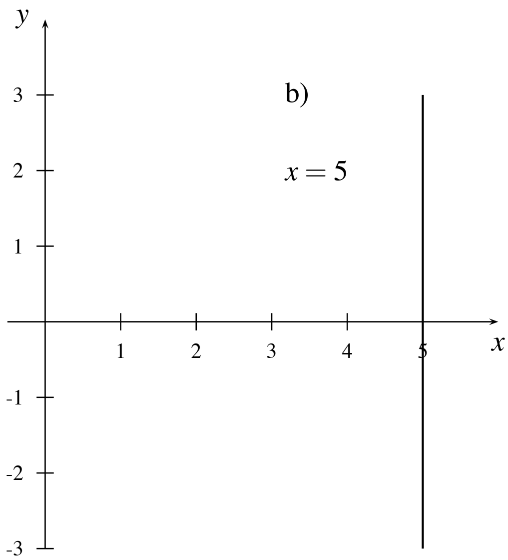
$$\frac{y}{3} - \frac{x}{5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5y + 15 = 0$$

A 2: Stellen Sie die durch die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen definierten Teilmengen der Ebene graphisch dar!

$a)$ $3x + y = 3$ $\qquad b)$ $x = 5$ $\qquad c)$ $\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = c \quad (c \neq 0, x \neq 0)$

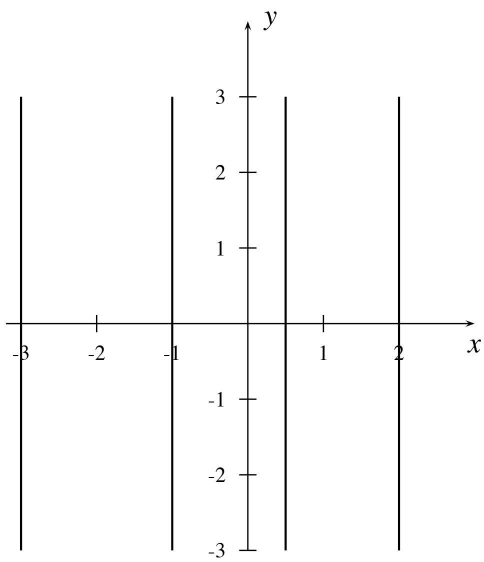
$d)$ $(x-2)^2 > x^2 + y$ $\qquad e)$ $2y \leq 2x + 16$ $\qquad f)$ $x \geq -1 \quad , \quad y < 2$





b)

$x = 5$



c)

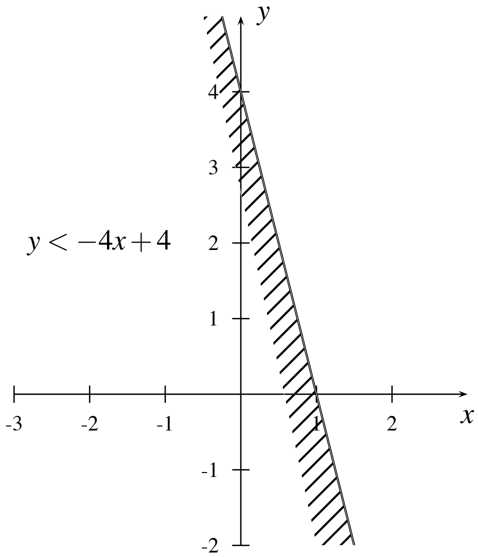
$\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = c \quad (c \neq 0, x \neq 0)$

$x = -\frac{1}{c} \quad (c \neq 0)$

Parallelenschar zur y-Achse

Download free eBooks at bookboon.com

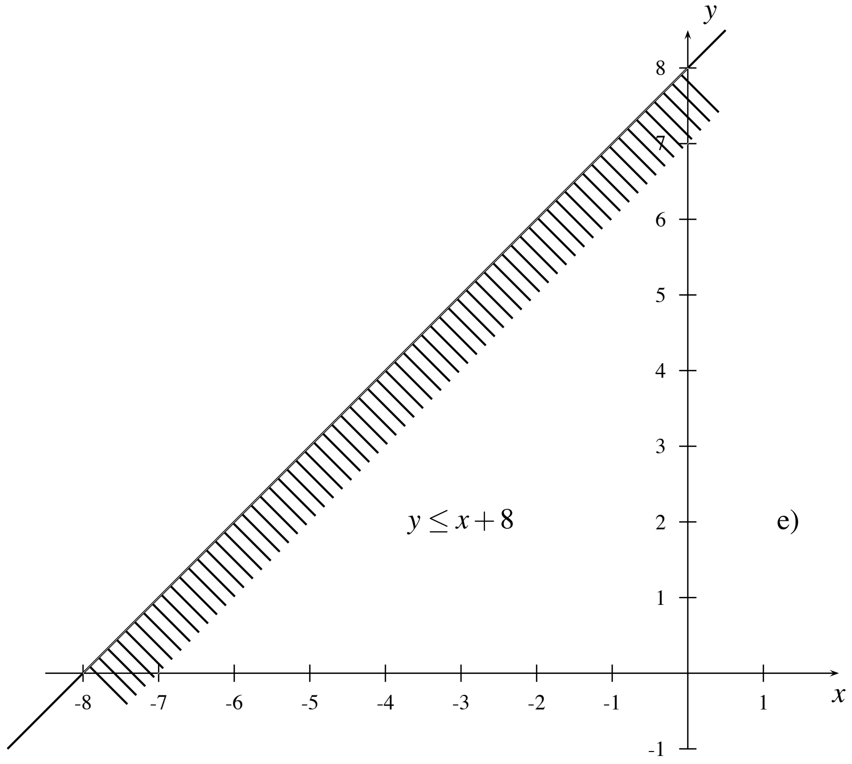
$y < -4x + 4$



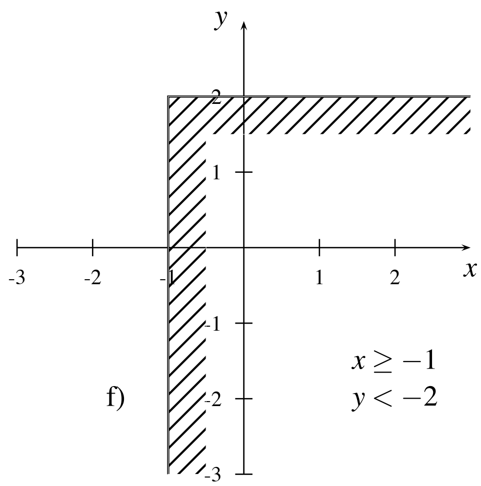
d)

Halbebene ohne Rand

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more



Halbebene mit Rand



Die Gerade $y = 2$ gehört nicht zum Gebiet.

Download free eBooks at bookboon.com

A 3: Ein Landwirt möchte seine Ackerfläche von 200 Morgen mit Roggen und Weizen bebauen. Für die Erzeugung von einem Doppelzentner Roggen benötigt er 0,12 Morgen, von einem dz Weizen 0,08 Morgen.

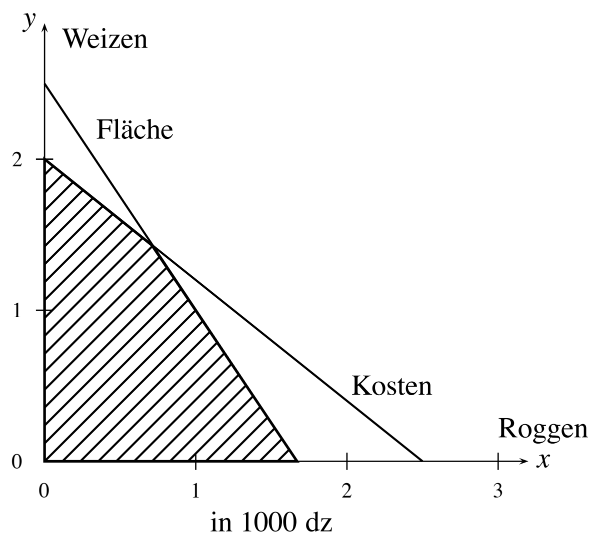
Der Anbau eines dz Roggen kostet 8 EUR, die Kosten für Weizen sind 10 EUR. Der Landwirt hat 20 000 EUR zur Verfügung.

Stellen Sie die zur Erzeugung von x dz Roggen und y dz Weizen möglichen Kombinationen (x,y) graphisch dar, wenn
a) ein Teil der Fläche brach liegen darf, b) die gesamte Fläche genutzt werden soll!

Lösung:

$$\begin{aligned} 0{,}12x + 0{,}08 &\leq 200 \qquad \text{Fläche} \\ 8x + 10y &\leq 20\,000 \quad \text{Kosten} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 5\,000 \\ 4x + 5y &\leq 10\,000 \end{aligned}$$

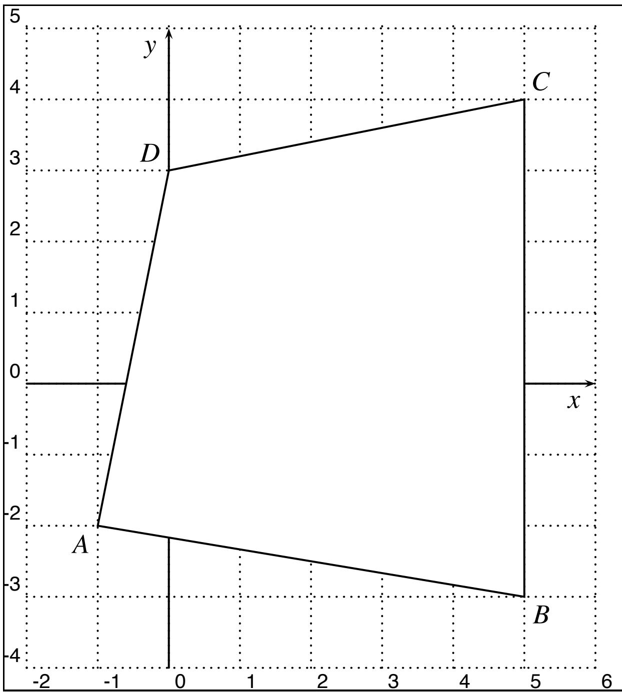


Im Fall a) liefern alle Punkte des schraffierten Gebietes einschließlich seines Randes zulässige Zahlenpaare (x,y).

Im Fall b) stellen alle Punkte der Strecke $(\frac{5000}{7},\frac{10\,000}{7})(\frac{5\,000}{3},0)$ zulässige Zahlenpaare dar.

Download free eBooks at bookboon.com

A 4: Stellen Sie die Gleichungen der Begrenzungsgeraden des Vierecks $A(-1;-2)B(5;-3)C(5;4)D(0;3)$ auf und bezeichnen Sie mit Hilfe geeigneter Ungleichungen das Viereck!



Geradengleichungen:

$$AB: \quad y+2=-\frac{1}{6}(x+1)$$

$$BC: \quad x=5$$

$$CD: \quad y=\frac{1}{5}x+3$$

$$AD: \quad y=5x+3$$

Ungleichungen:

$$y \geq -\frac{1}{6}x-\frac{13}{6}$$

$$x \leq 5$$

$$y \leq \frac{1}{5}x+3$$

$$y \leq 5x+3$$

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

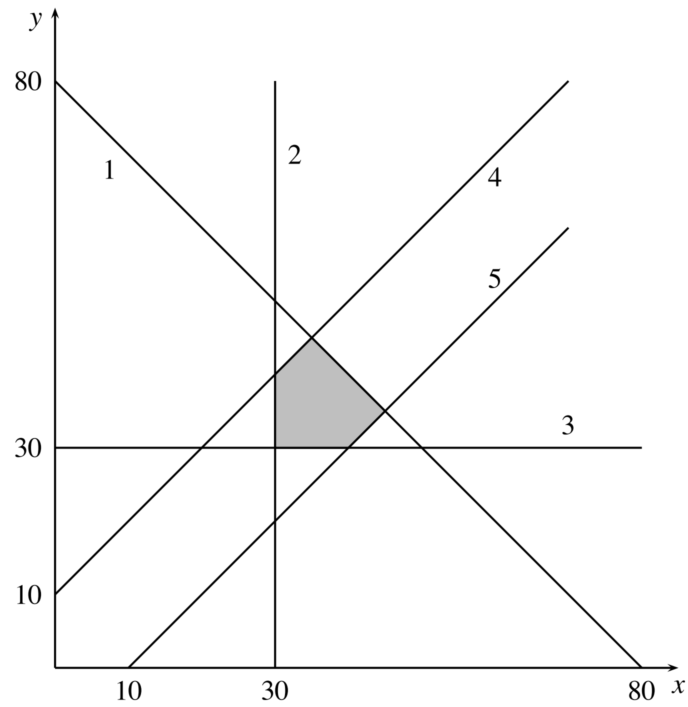
A 5: Zwei verdienten Sekretärinnen soll mit Blumen Dank abgestattet werden. Dazu stehen 80 EUR zur Verfügung. Jeder Strauß soll mindestens 30 EUR kosten und die Preise sollen sich um höchstens 10 EUR unterscheiden. Skizzieren Sie die möglichen Preispaare in der Ebene!

Seien x und y die Preise der Sträuße.

1. $x+y \leq 80$
2. $x \geq 30$
3. $y \geq 30$
4. $x-y \geq -10$

$+5.$ $x-y \leq 10$

Die Koordinaten der Punkte die im Durchschnitt aller fünf Halbebenen – also im kleinen Fünfeck – liegen, geben die möglichen Preispaare an.



A 6: Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden zu

$$2x-3y=0 \quad \text{und} \quad y-2=\frac{1}{6}(x-3)\ !$$

Łösung:

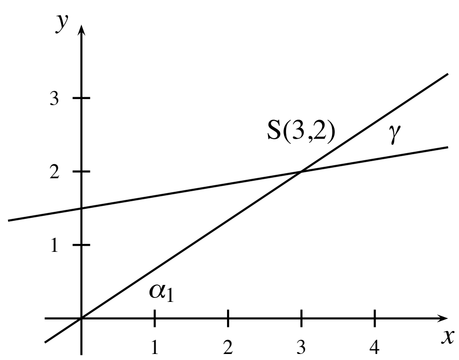
$$y=\frac{2}{3}x \qquad \wedge \qquad y=\frac{x}{6}+\frac{3}{2}$$

gleichsetzen

$$\frac{2}{3}x=\frac{x}{6}+\frac{3}{2}$$

$$x=3$$

$$y=2$$



Download free eBooks at bookboon.com

Es gilt

$$m = \tan\alpha \quad \text{, also} \quad \alpha = \arctan m$$

$$\alpha_1 = \arctan\frac{2}{3} = 33{,}69^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \arctan\frac{1}{6} = 9{,}46^\circ.$$

Der Schnittwinkel berechnet sich als Differenz der Steigungswinkel.

$$\gamma = 33{,}69^\circ - 9{,}46^\circ$$

2.2 Quadratische Gleichungen

A 7: Die reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$x^2 - 144 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 144 \Longleftrightarrow x = -12 \vee x = 12 \tag{1}$$

$$2x^2 - 450 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 225 \Longleftrightarrow x = -15 \vee x = 15 \tag{2}$$

$$3r^2 + 5 = 0 \Longleftrightarrow r^2 = -\frac{5}{3} \Longrightarrow \mathbb{L} = \emptyset \tag{3}$$

$$\sqrt{5}u^2 - 17 = 0 \Longleftrightarrow u^2 = \frac{17}{\sqrt{5}} \Longleftrightarrow u = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[4]{5}} \vee u = -\frac{\sqrt{17}}{\sqrt[4]{5}} \tag{4}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 8: Die spezielle quadratische Gleichung $ax^2 + bx = 0$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge durch Ausklammern!

$$4x^2 - 36x = 0$$

$$\Longleftrightarrow 4x \cdot (x-9) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 9$$

$$\mathbb{L} = \{0;9\}$$

Der folgende Rechengang führt nicht zur richtigen Lösung.

$$4x^2 - 36x = 0 \qquad | : 4x \quad (\text{ nur für } \quad x \neq 0 \quad \text{gültig })$$

$$x - 9 = 0 \qquad | + 9$$

$$x = 9$$

Die Lösung $x = 0$ fehlt, sie ist bei der Division durch $4x$ „verloren gegangen“, denn bei der Division muss der Divisor von null verschieden sein.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

A 9: Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

$$(x-3)^2-16=0$$

$$\Longleftrightarrow (x-3)^2=16$$

$$\Longleftrightarrow x-3=-4 \quad \vee \quad x-3=4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=-1 \quad \vee \quad x=7$$

$$\mathbb{L}=\{-1;7\}$$

A 10: Lösen Sie die Gleichung durch quadratische Ergänzung!

$$x^2+14x+13=0 \qquad \mid -13$$

$$x^2+14x=-13 \qquad \mid +\left(\frac{14}{2}\right)^2$$

$$x^2+14x+7^2=7^2-13$$

$$(x+7)^2=36$$

$$x+7=-6 \vee x+7=6$$

$$x=-13 \quad \vee \quad x=-1$$

$$\mathbb{L}=\{-13;-1\}$$

Die pq -Formel:

$$x^2+14x+13=0$$

$$x=-7-\sqrt{49-13} \quad \vee \quad x=-7+\sqrt{49-13}$$

$$x=-13 \quad \vee \quad x=-1$$

$$\mathbb{L}=\{-13;-1\}$$

A 11:

$$x^2+14x+50=0 \qquad |-50$$

$$x^2+14x=-50 \qquad |+\left(\frac{14}{2}\right)^2$$

$$x^2+14x+7^2=7^2-50$$

$$(x+7)^2=-1$$

$$\mathbb{L}=\emptyset$$

Die pq -Formel:

$$x^2+14x+50=0$$

$$x=-7-\sqrt{49-50} \quad \vee \quad x=-7+\sqrt{49-50}$$

$\mathbb{L}=\emptyset$,weil $\sqrt{-1}$ keine reelle Zahl ist.

A 12:

$$\sqrt{5}x^2+\sqrt{7}x-5\sqrt{5}=0 \qquad |:\sqrt{5}$$

$$x^2+\sqrt{\frac{7}{5}}\cdot x-5=0 \qquad |pq\text{-Formel}$$

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}\pm\sqrt{\frac{7}{20}+5}$$

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{107}{5}}$$

$$x=\frac{-\sqrt{7}\pm\sqrt{107}}{2\sqrt{5}} \qquad x=1{,}7214 \quad \vee \quad x=-2{,}9046$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 13:

$$\sqrt{5}x^2+\sqrt{7}x-5\sqrt{5}=0 \qquad |:\sqrt{5}$$

$$x^2+\sqrt{\frac{7}{5}}\cdot x-5=0 \qquad |\ pq\text{-Formel}$$

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}\pm\sqrt{\frac{7}{20}+5}$$

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{107}{5}}$$

$$x=\frac{-\sqrt{7}\pm\sqrt{107}}{2\sqrt{5}}$$

$$x=1{,}7214 \quad \vee \quad x=-2{,}9046$$

Haben Sie Ihr Studium erfolgreich abgeschlossen und möchten jetzt handeln? Wollen Sie für komplexe Geschäftsprozesse einfache Lösungen finden? Dann sind Sie bei uns genau richtig als

(Junior-)Projektmanager IT (m/w)

Wir freuen uns auf Ihre Bewerbung!
www.aldi-nord.de/karriere/it-berufe.html

fuer-echte-kaufleute.de

ALDI

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

A 14:

$$x = 5 - \sqrt{15-3x} \qquad \text{mit} \quad x \leq 5$$

Die Wurzel auf einer Seite isolieren und beide Seiten quadrieren.

$$x - 5 = \sqrt{15-3x}$$

$$(x-5)^2 = 15 - 3x$$

$$x^2 - 10x + 25 = 15 - 3x \qquad | -15 + 3x$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \qquad | \; pq\text{-Formel}$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10}$$

$$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5 \qquad \vee \qquad x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$$

Probe: Beide Lösungen erfüllen die Ausgangsbedingung $x \leq 5$ und die Ausgangsgleichung.

$$\mathbb{L} = \{2; 5\}$$

A 15:

$$x = 5 + \sqrt{15-3x} \qquad \text{mit} \quad x \leq 5$$

Die Wurzel auf einer Seite isolieren und beide Seiten quadrieren.

$$x - 5 = \sqrt{15-3x}$$
$$(x-5)^2 = 15 - 3x$$
$$x^2 - 10x + 25 = 15 - 3x \qquad | -15 + 3x$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0 \qquad | pq\text{-Formel}$$
$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10}$$
$$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5 \qquad \vee \qquad x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$$

Download free eBooks at bookboon.com

Probe: Beide Lösungen erfüllen die Ausgangsbedingung $x \leq 5$, aber nur $x = 5$ erfüllt die Ausgangsgleichung jedoch $x = 2$ nicht.

$$\mathbb{L} = \{5\}$$

Die beiden letzten Aufgaben zeigen:

Das Quadrieren einer Gleichung kann die Anzahl der Lösungen erhöhen. Folglich muss unbedingt die Probe durchgeführt werden, um ggf. die eingeschleppten Lösungen auszusondern.

A 16: In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ die Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2}$?

Lösung durch Gleichsetzen:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 10x + 19 = -x + 1$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18}$$

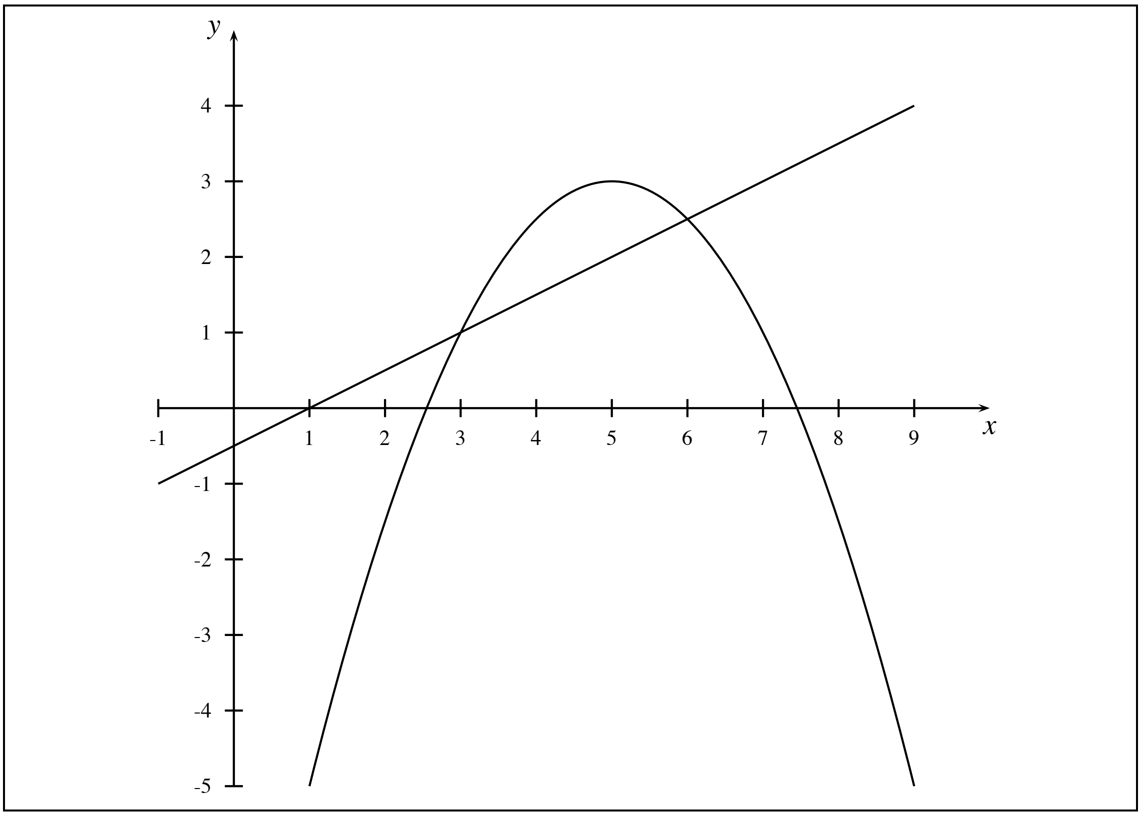
$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

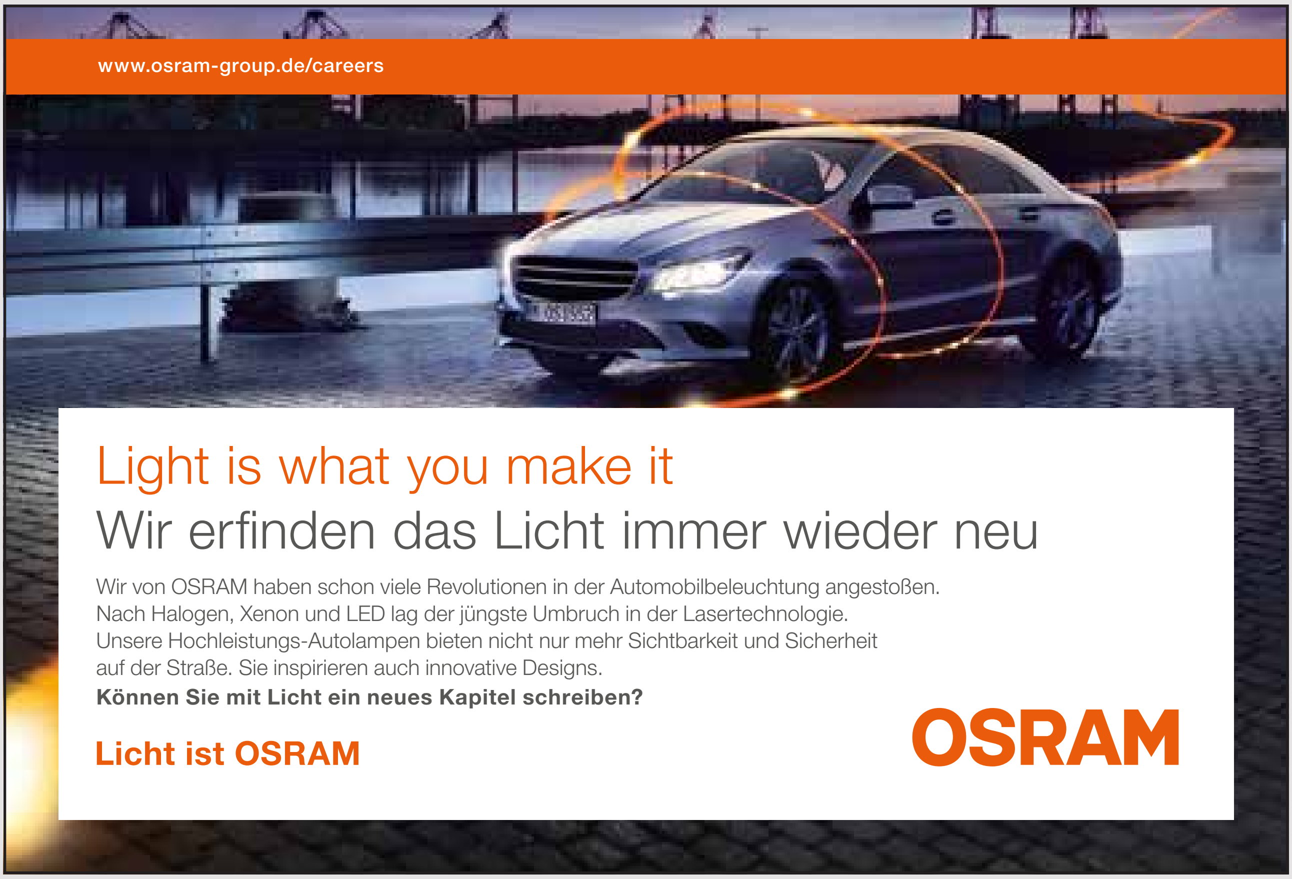
$$x = 3 \quad \vee \quad x = 6$$

$$y = \frac{1}{2}(3-1) = 1 \quad \vee \quad y = \frac{1}{2}(6-1) = \frac{5}{2}$$

In den Punkten mit den Koordinaten $(3;1)$ und $(6;2{,}5)$ schneiden sich die Gerade und die Parabel.

Download free eBooks at bookboon.com





Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

A 17:

$$x^6 - 19x^3 - 216 = 0$$

Durch die *Substitution* $x^3 = z$ geht diese Gleichung über in

$$z^2 - 19z - 216 = 0$$

mit den Lösungen

$$z = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{19^2}{4} + 216}$$

$$z = \frac{19}{2} \pm \frac{35}{2}$$

$$z = -8 \quad \vee \quad z = 27$$

Wir benutzen die Substitutionsgleichung $x^3 = z$, um die entsprechenden Lösungen für x zu berechnen.

$$x^3 = -8 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$x^3 = 27 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$$

Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist $\mathbb{L} = \{-2;3\}$.

A 18:

$$\frac{2x+8}{2x-4} = \frac{7x+4}{4x-2} \quad \text{mit} \quad x \neq \frac{1}{2} \quad x \neq 2$$

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{7x+4}{4x-2}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$\frac{x+4}{x-2} \cdot (x-2)(4x-2) = \frac{7x+4}{4x-2} \cdot (x-2)(4x-2)$$

Download free eBooks at bookboon.com

und Kürzen

$$(x+4)(4x-2) = (7x+4)(x-2)$$

$$4x^2 + 14x - 8 = 7x^2 - 10x - 8$$

$$3x^2 - 24x = 0$$

$$3x(x-8) = 0$$

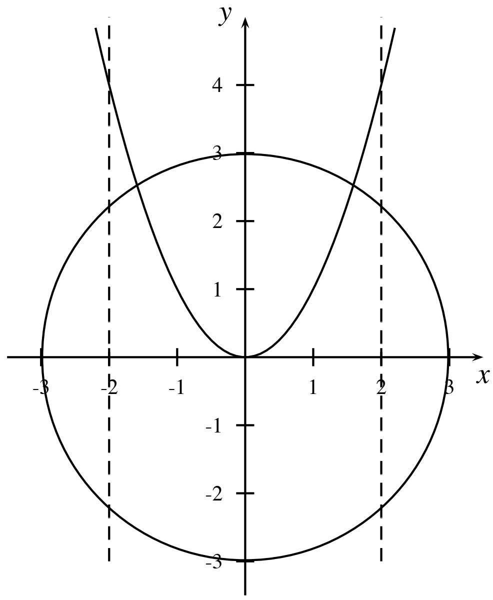
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 8 \qquad \mathbb{L} = \{0;8\}$$

Probe: Die Ausgangsgleichung ist für die Elemente der Lösungsmenge definiert und

$$\frac{2\cdot 0+8}{2\cdot 0-4} = \frac{7\cdot 0+4}{4\cdot 0-2} \quad \surd \qquad \frac{2\cdot 8+8}{2\cdot 8-4} = \frac{7\cdot 8+4}{4\cdot 8-2} \quad \surd.$$

A 19: Skizzieren Sie die Punktmenge
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 \leq 9 \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq x^2 \leq 4\}$!

Lösung:



Das Gebiet enthält genau die Punkte, die

1. in dem Kreis,
2. in der oberen Halbebene,
3. unterhalb der Parabel und
4. zwischen den Parallelen zur y-Achse

liegen.

Download free eBooks at bookboon.com

A 20: Punkte $P(x,y)$, deren Koordinaten die Gleichung $y=ax^2+bx+c$ erfüllen, liegen auf einer Parabel. Bestimmen Sie jeweils die Schnittpunkte mit der Abszissenachse und den Scheitelpunkt!

$$y=\frac{x^2}{2}-3x+\frac{5}{2}$$

$$y+3=0{,}25(x+4)^2$$

Lösung: Umformung der ersten Gleichung auf die Scheitelpunktsform führt auf $y+2=\frac{1}{2}(x-3)^2$. Damit ist der Scheitelpunkt $(3,-2)$ direkt abzulesen. Für $x=0$ ergibt sich $2{,}5$ als Schnittstelle auf der y -Achse.

Zur Berechnung der Schnittstellen mit der x -Achse – also den Nullstellen der Funktion – ist die Gleichung $x^2-6x+5=0$ zu lösen. Nach der pq -Formel

$$x=3+\sqrt{9-5}=5 \quad \vee \quad x=3-\sqrt{9-5}=1$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Die zweite Gleichung liegt in der Scheitelpunktsform vor und zeigt $(-4,-3)$ als Scheitelpunktskoordinaten. Für $y=0$ erhalten wir

$$(x+4)^2 = 12$$

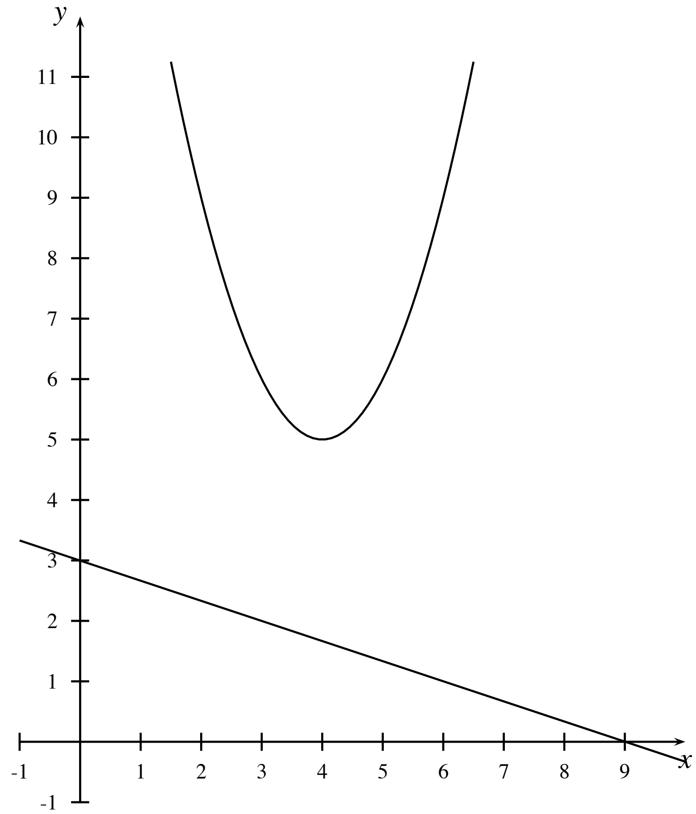
$$x+4 = -\sqrt{12} \quad \vee \quad x+4 = +\sqrt{12}$$

$$x = -7{,}46 \quad \vee \quad x = -0{,}54$$

die Schnittpunkte mit der x-Achse.

A 21: Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems graphisch!

$$y-5 < (x-4)^2 \quad \vee \quad y \geq -\frac{1}{3}x+3$$



Die Koordinaten jeden Punktes unterhalb der Parabel und oberhalb der Geraden liefern ein Lösungspaar des Gleichungssystems.

Die Punkte der Geraden gehören zur Lösungsmenge, die der Parabel nicht.

Download free eBooks at bookboon.com

2.3 Bruchgleichungen

A 22: Welche Zahlen erfüllen die Ungleichung

$$\frac{10}{2x-10} < 5?$$

Fallunterscheidung: $2x - 10 > 0 \Leftrightarrow 5 < x$ oder $2x - 10 < 0 \Leftrightarrow x < 5$

$$\frac{2}{2x-10} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2 < 2x - 10 \quad x > 6 \quad \text{für} \quad 5 < x \quad \text{also} \quad 6 < x \\ \\ 2 > 2x - 10 \quad x < 6 \quad \text{für} \quad x < 5 \quad \text{also} \quad x < 5 \end{cases}$$

Die Ungleichung wird von jedem $x \notin [5;6]$ erfüllt.

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \quad \vee \quad 6 < x\}$$

A 23: Geben Sie die Lösungsmenge an!

$$\frac{x^2 - 16}{|x^2 - 4|} < 1$$

Lösung:

Der Bruchterm ist an den Nullstellen des Nenners $x = -2 \vee x = 2$ nicht definiert.

Fallunterscheidung für den Absolutbetrag:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 \quad \text{für} \quad x < -2 \quad \vee \quad 2 < x \\ \\ 4 - x^2 \quad \text{für} \quad x > -2 \quad \vee \quad 2 > x \end{cases}$$

$$x^2 - 16 < |x^2 - 4| \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - 16 < x^2 - 4 \quad \text{für} \quad x < -2 \quad \vee \quad 2 < x \\ \\ x^2 - 16 < 4 - x^2 \quad \text{für} \quad -2 < x < 2 \end{cases}$$

Download free eBooks at bookboon.com

Die erste Gleichung ist eine wahre Aussage und die zweite eine falsche.

Die Ungleichung wird von jedem $x \notin [-2;2]$ erfüllt.

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \quad \vee \quad 2 < x\}$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

3. Funktionen einer Variablen

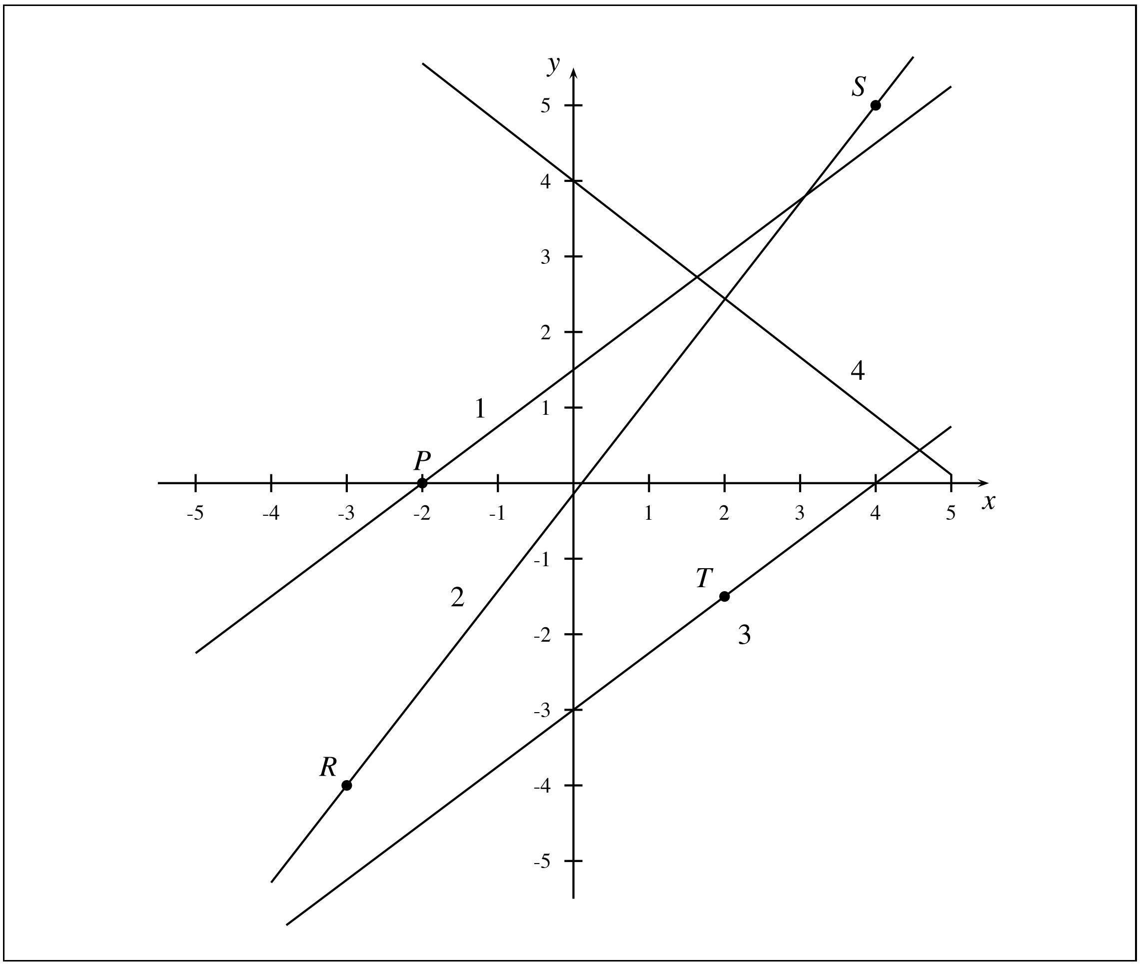
3.1 Lineare Funktionen

A 1: Zeichnen Sie ein Achsenkreuz mit $-5 \leq x,y \leq 5$

1. die Gerade mit $m = \frac{3}{4}$ durch den Punkt $P(-2;0)$,
2. die Gerade durch die Punkte $R(-3;-4)$ und $S(4;5)$,
3. die Parallele zur ersten durch den Punkt $T(2;-1,5)$,
4. und die Senkrechte zur zweiten mit dem y-Achsenabschnitt 4 !

Schreiben Sie für jede Gerade die Gleichung in der Form $y = mx + b$ auf!

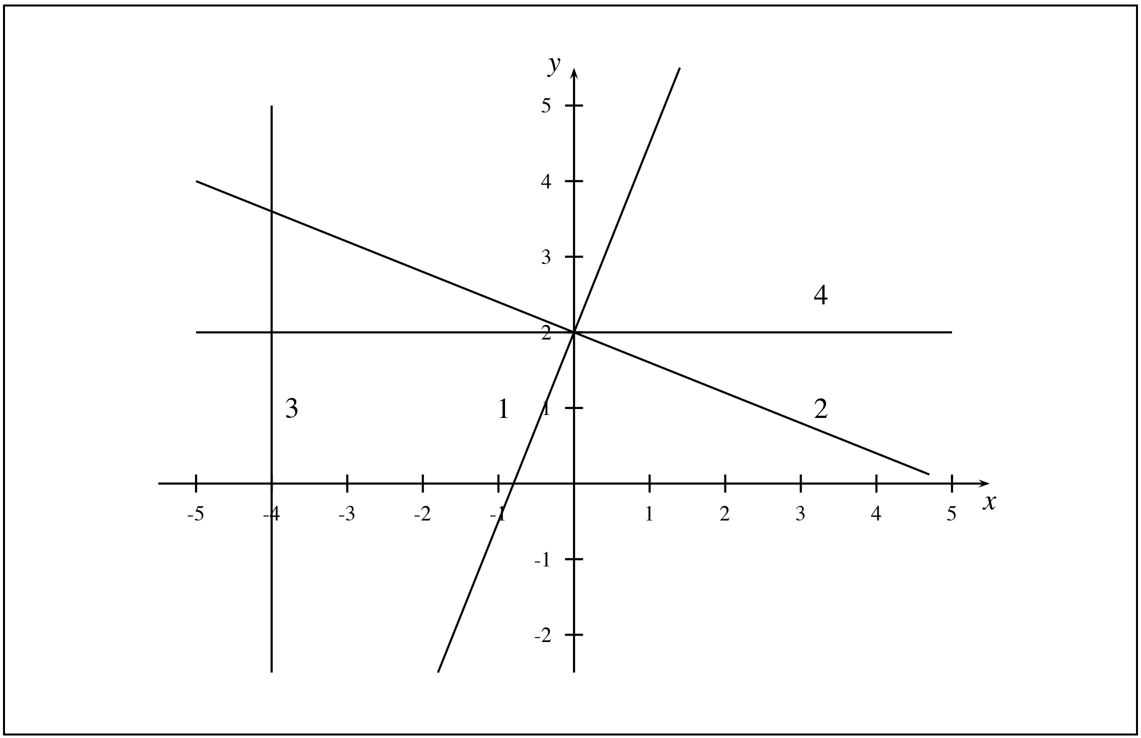
Berechnen Sie einige Schnittpunkte!



$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \tag{1}$$
$$y = \frac{9}{7}x - \frac{1}{7} \tag{2}$$
$$y = \frac{3}{4}x - 3 \tag{3}$$
$$y = -\frac{7}{9}x + 4 \tag{4}$$

A 2: Zeichnen Sie in ein gemeinsames kartesisches Koordinatensystem die Grafen der folgenden Gleichungen in x und y !

$$-5x + 2y = -4 \qquad 2x + 5y = 10 \qquad 3x = -12 \qquad \frac{3}{4}y = \frac{3}{2}$$



A 3: Zur Angabe von Temperaturen werden die Celsius- und die Fahrenheitskala benutzt. Der Gefrierpunkt des Wassers wird mit $0\ ^\circ\mathrm{C}$ oder mit $32\ ^\circ\mathrm{F}$ angegeben und der Siedepunkt mit $100\ ^\circ\mathrm{C}$ oder mit $212\ ^\circ\mathrm{F}$.
Klären Sie, wie Sie von einer Skala auf die andere umrechnen können!

Was ist kälter: $-20\ ^\circ\mathrm{F}$ oder $-20\ ^\circ\mathrm{C}$, $-50\ ^\circ\mathrm{F}$ oder $-50\ ^\circ\mathrm{C}$?

Lösung: Die Funktion T bildet die Celsiusskala in die Fahrenheitskala ab.

$$y\ ^\circ\mathrm{F} = T(\, x\ ^\circ\mathrm{C}\,) \qquad 32\ ^\circ\mathrm{F} = T(\, 0\ ^\circ\mathrm{C}\,) \qquad 212\ ^\circ\mathrm{F} = T(\, 100\ ^\circ\mathrm{C}\,)$$

Mit dem Ansatz einer linearen Funktion

$$y = T(x) = mx + b$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} 32 &= T(0) = b \quad \text{und} \quad 212 = T(100) = m \cdot 100 + b \\ b &= 32 \quad \text{und} \quad m = \frac{212-32}{100} = \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Die Umrechnungsvorschrift ist

$$\begin{aligned} y &= \frac{9}{5}x + 32 && \text{Fahrenheit aus Celsius} \\ x &= \frac{5}{9}(y-32) && \text{Celsius aus Fahrenheit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{5}(-20) + 32 &= -4 \\ \frac{9}{5}(-50) + 32 &= -58 \end{aligned}$$

Die Temperatur von $-20\ ^\circ\mathrm{C}$ wird auf der Fahrenheitskala mit $-4\ ^\circ\mathrm{F}$ also höher als $-20\ ^\circ\mathrm{F}$ angezeigt.

Die Temperatur von $-50\ ^\circ\mathrm{C}$ wird auf der Fahrenheitskala mit $-58\ ^\circ\mathrm{F}$ also tiefer als $-50\ ^\circ\mathrm{F}$ angezeigt.

Download free eBooks at bookboon.com

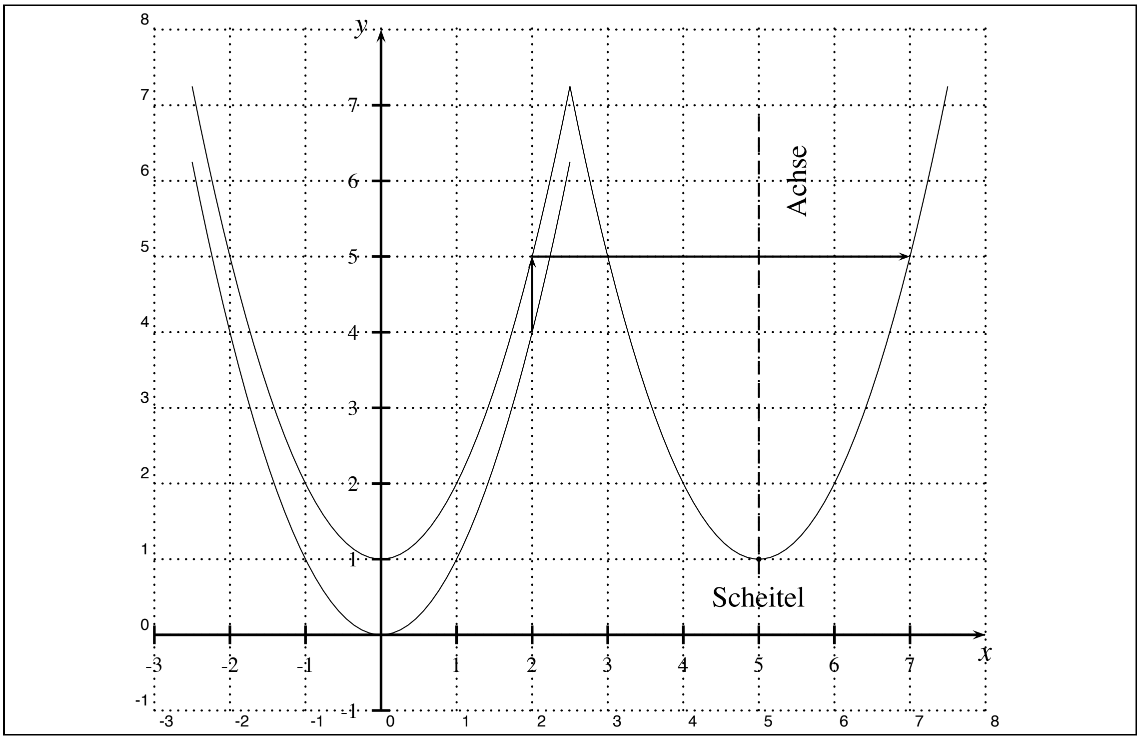
3.2 Quadratische Funktionen

Die *quadratische* Funktion $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ hat eine Parabel als Graf.

Wird der Funktionswert mit y bezeichnet, so kann man auch die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ schreiben.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

A 4: Stellen Sie zu den drei Parabeln die Gleichung auf!



Lösung: Die Parabel durch den Nullpunkt geht auch durch den Punkt $(1;1)$, es ist die *Normalparabel* mit der Gleichung

$$y = x^2.$$

Eine *Verschiebung* der Normalparabel längs der y-Achse um eine Einheit erzeugt die zweite Parabel.

$$y = x^2 + 1$$

Verschieben wir diese Parabel parallel zur x-Achse um fünf Einheiten erhalten wir die dritte Parabel. Die Verschiebung der Normalparabel um fünf nach rechts und um eins nach oben führt

zum selben Ergebnis.

$$y = (x-5)^2 + 1$$

$$y = x^2 - 10x + 26$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 5: Klären Sie, dass jede Gleichung

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

umgeformt werden kann zu

$$y - y_s = r(x - x_s)^2$$

und interpretieren Sie die Parameter r, x_s, y_s geometrisch!

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y - c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right]$$

$$y - c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$y - c + a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

$$y - \frac{ac - b^2}{4a} = a\left(x - \frac{-b}{a}\right)^2$$

Aus dieser Darstellung liest man ab:

$x_s = -\dfrac{b}{a}$ x-Koordinate des Scheitelpunktes

$y_s = \dfrac{ac - b^2}{4a}$ y-Koordinate des Scheitelpunktes

$r = a$ Öffnung der Parabel

A 6: Eine Gerade ist durch zwei Punkte festgelegt. Durch drei Punkte geht genau eine Parabel.

Geben Sie die Gleichung der Geraden durch $P(-1;4)$ und $Q(5;0)$ und die Gleichung der Parabel durch die Punkte $A(0;1), B(2;4)$ und $C(6;2)$ an!

Download free eBooks at bookboon.com

Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel! Wo schneiden die Kurven die Achsen?

Fertigen Sie eine Skizze an!

Gleichung der Geraden durch zwei Punkte:

$$\frac{y-4}{x+1}=\frac{0-4}{5+1}=-\frac{2}{3}$$

$$y-4=-\frac{2}{3}(x+1)=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x=0$ also bei $y=\frac{10}{3}$.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $y=0$ also bei $x=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{2}=5$.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Gleichung der Parabel durch drei Punkte:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$1 = c \qquad \text{für} \quad A(0;1)$$

$$4 = 4a + 2b + c \qquad \text{für} \quad B(2;4)$$

$$2 = 36a + 6b + c \qquad \text{für} \quad C(6;2)$$

Einsetzen von $c = 1$ in die zweite und dritte Gleichung:

$$4a + 2b = 3$$

$$36a + 6b = 1$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad b = \frac{13}{6}$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + 1$$

Schnittpunkt mit der y -Achse: $x = 0$ also bei $y = 1$.

Schnittpunkt mit der x -Achse: $y = 0$

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{13}{6}x + 1 = 0$$

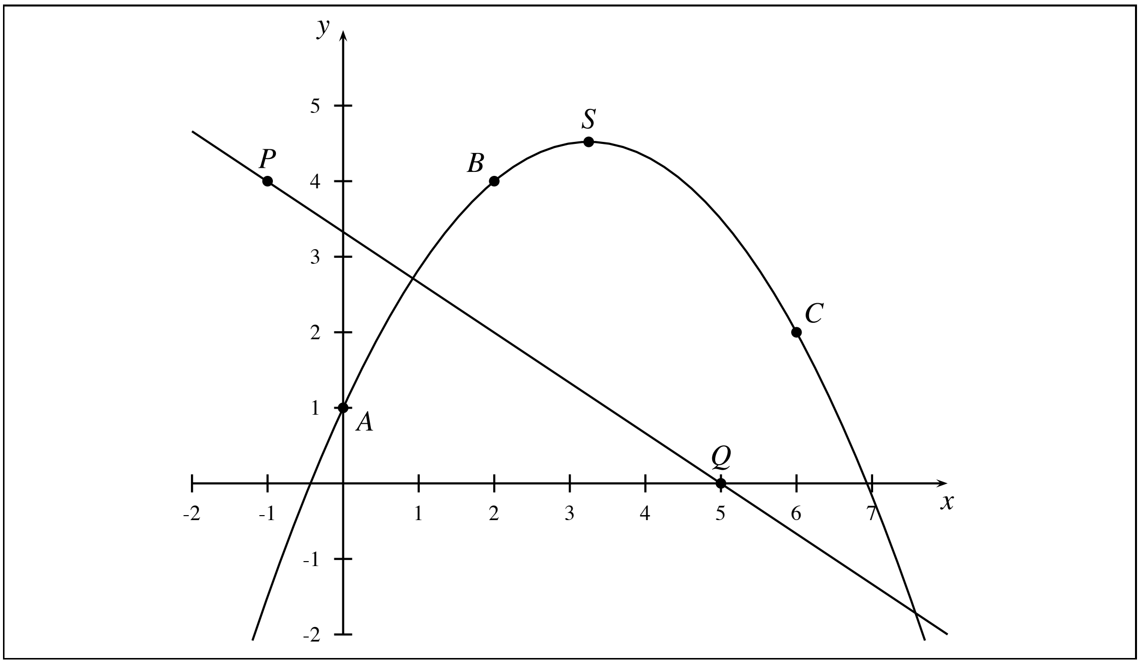
$$x^2 - \frac{13}{2}x - 3 = 0$$

$$x = \frac{13}{4} \pm \sqrt{\frac{169}{16} + 3} = \frac{1}{4}\left(13 \pm \sqrt{217}\right)$$

$$x \approx -0{,}43 \quad \vee \quad x \approx 6{,}93$$

Der Scheitel der Parabel liegt über dem Mittelpunkt der beiden Nullstellen. Also ist seine x -Koodinate $x_s = \frac{13}{4} = 3{,}25$ und nach Einsetzen $y_s = \frac{217}{48} \approx 4{,}52$.

Download free eBooks at bookboon.com



Zur Berechnung eines Schnittpunktes der beiden Graphen beachten wir, dass seine y-Koordinate in beiden Funktionsgleichungen links steht. Die rechten Seiten müssen daher auch übereinstimmen.

$$-\frac{1}{3}x^2+\frac{13}{6}x+1=-\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$$

$$x^2-\frac{13}{2}-3=2x-10$$

$$x^2-\frac{17}{2}+7=0$$

$$x=\frac{17}{4}\pm\sqrt{\frac{189}{16}-\frac{112}{16}}=\frac{1}{4}\left(17\pm\sqrt{177}\right)$$

$$x\approx 0{,}92 \quad \vee \quad x\approx 7{,}58$$

einsetzen in die Geradengleichung ergibt

$$y\approx 2{,}72 \quad \vee \quad y\approx -1{,}52.$$

Die Gerade schneidet die Parabel in $(0{,}92;2{,}72)$ und $(7{,}58;-1{,}52)$.

Download free eBooks at bookboon.com

3.3 Ganzrationale Funktionen

A 7: Bestätigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6$$

bei $x = 3$ eine Nullstelle hat, ermitteln Sie weitere Nullstellen und stellen sie den Funktionsterm als Produkt dar!

Lösung: Der Funktionswert ist an der Stelle 3 zu berechnen.

$$f(3) = -2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 6 = -54 + 18 + 30 + 6 = 0$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(-2x^3 + 2x^2 + 10x + 6) : (x-3) = -2x^2 - 4x - 2 \\
\underline{-2x^3 + 6x^2} \\
\qquad - 4x^2 \\
\qquad \underline{-4x^2 + 12x} \\
\qquad\qquad\quad - 2x \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Click on the ad to read more

Download free eBooks at bookboon.com

Für dieses Ergebnis läßt sich mit Hilfe der Binomischen Formel die Produktdarstellung angeben.

$$-2x^2-4x-2=-2(x^2+2x+1)=-2(x+1)^2$$

Damit ist

$$f(x)=-2(x+1)^2(x-3)$$

die Darstellung von f als Produkt.

3.4 Gebrochen-rationale Funktionen

A 8: Ermitteln Sie die Polstellen, die Nullstelle und die Asymptote der Funktion

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-x-6}!$$

Die Funktion ist an den Nullstellen des Nennerpolynoms nicht definiert.

$$x^2-x-6=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x=-2 \quad \vee \quad x=3$$

Da das Zählerpolynom an diesen beiden Stellen ungleich Null ist, liegen hier Polstellen vor.

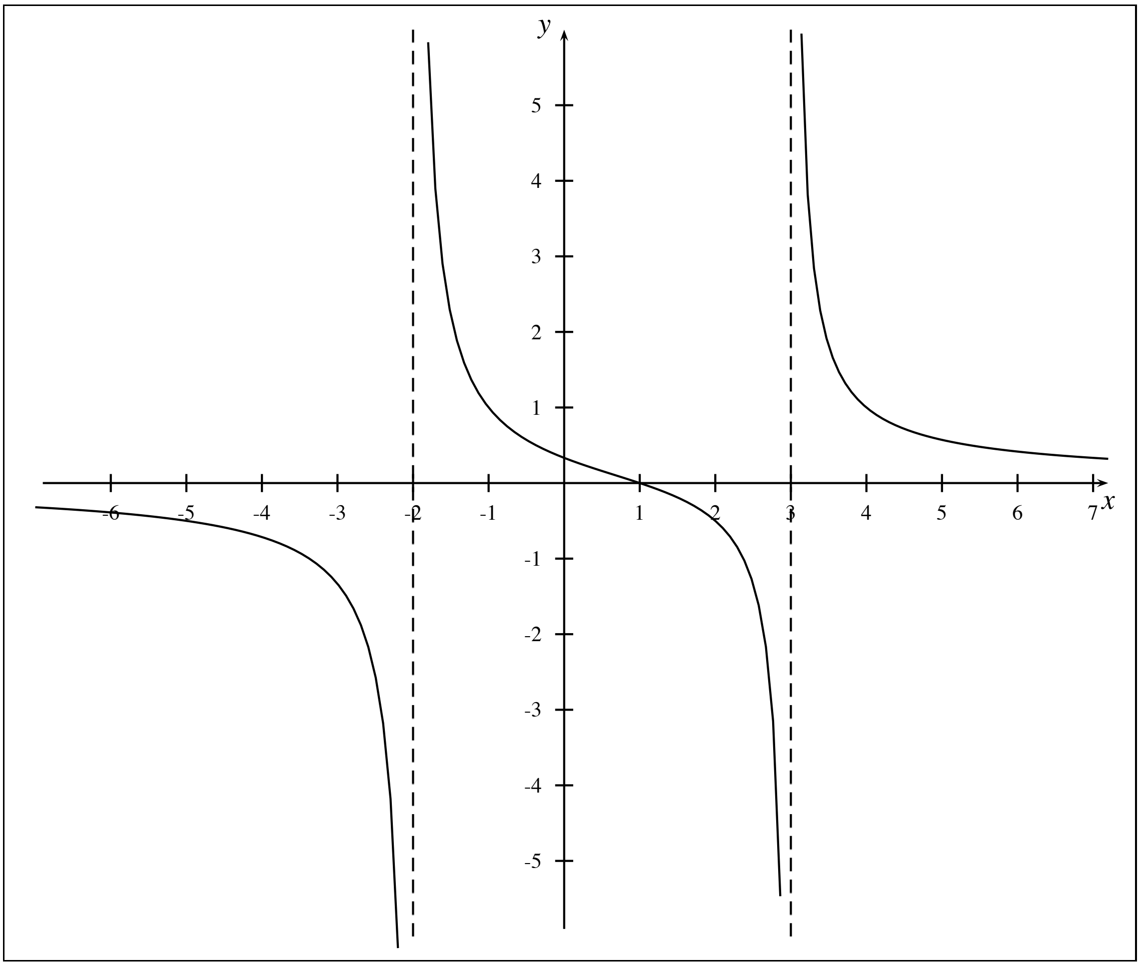
$$f(x)=\frac{2x-2}{(x+2)(x-3)}$$

Die Nullstelle der Funktion ist die Nullstelle des Zählerpolynoms $x=1$.

Für große Beträge des Arguments x nähern sich die Funktionswerte null an.

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-x-6}=\frac{2-2/x}{x-1-6/x}\to 0 \quad \text{für} \quad x\to\infty$$

Download free eBooks at bookboon.com



3.5 Potenzfunktionen - Wurzelfunktionen

A 9: Herr Holm hat bei einem Kredit die Wahl:
(i) $21{,}5\%$ jährlicher Zinssatz bei jährlicher Zinszahlung
(ii) 20% jährlicher Zinssatz bei vierteljährlicher Zinszahlung.

Vergleichen Sie die Angebote!

Lösung: Die vierteljährliche Verzinsung führt zu dem jährlichen Aufzinsungsfaktor

$$\left(1+\frac{1}{4}\frac{20}{100}\right)^4 = 1{,}05^4 \simeq 1{,}2155$$

Damit ist bei diesen Konditionen der effektive Jahreszinssatz $21{,}55\%$, also größer als $21{,}5\%$.
Herr Holm sollte das erste Angebot wählen.

Download free eBooks at bookboon.com

3.6 Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

3.6.1 Exponentialfunktion

A 10: Sei $f_a(x) = a^x$. Zeigen Sie, dass $f_a(r+s) = f_a(r) \cdot f_a(s)$!

Lösung:

$$f_a(r+s) = a^{r+s} = a^r \cdot a^s = f_a(r) \cdot f_a(s)$$

A 11: Skizzieren Sie die Graphen der Exponentialfunktionen zu den Basen $\frac{1}{3}$, 3, 2 und $\frac{1}{2}$ und e !

Benutzen Sie die $\boxed{y^x}$ -Taste und die $\boxed{e^x}$ -Taste Ihres Taschenrechners! Versuchen Sie mit wenigen, gut gewählten Punkten auszukommen!

Explore how we support ventures into outer space

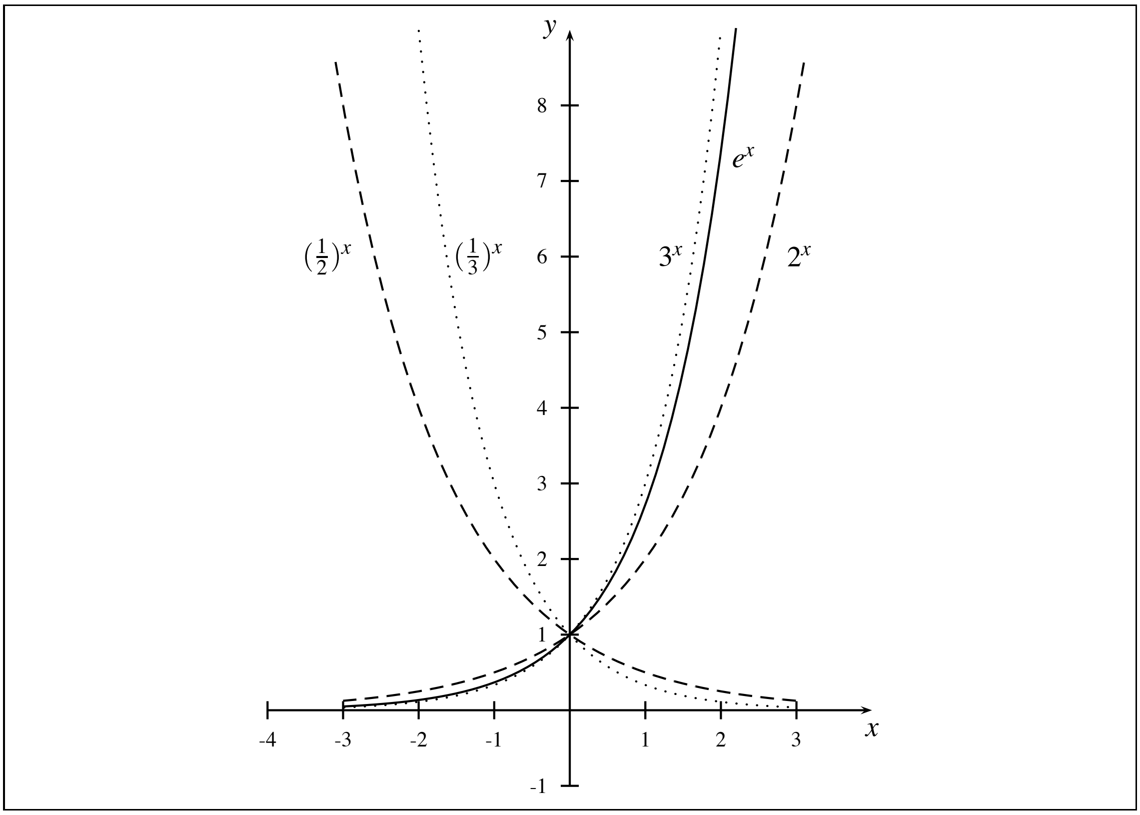
Are you ready for an exclusive journey? We invite you to get a panoramic view of the most interesting facets of today's insurance business. Like tailor-made solutions for the aerospace industry offered by Munich Re. Take the opportunity and jump right into EXPLORE, the cross-divisional trainee programme of Munich Re (Group).

Join EXPLORE and explore our world! **www.munichre.com/explore**

Munich RE

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more



Zeichnen Sie die Parallele zur y -Achse durch (1;0)!
Was kann an ihren Schnittpunkten mit den Graphen abgelesen werden?

A 12: Zeigen Sie, die Exponentialfunktion zu jeder Basis $a \in \mathbb{R}_+$ kann mit Hilfe der e -Funktion und die zugehörige Logarithmusfunktion mit Hilfe des natürlichen Logarithmus dargestellt werden!

Lösung:

Der Wertebereich der e -Funktion sind die positiven reellen Zahlen.

$$a = e^{\ln a} \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}$$

$$y = x^x \qquad\qquad x = \log_a y$$

Download free eBooks at bookboon.com

$$y = e^{x \cdot \ln a} \qquad x \cdot \ln a = \ln y \qquad x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

A 13: Nehmen Sie an, dass eine Bakterienkolonie nach dem Gesetz wächst:

$$P(t) = 2000e^{0{,}04t} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \quad ; \quad t \text{ bezeichnet die Zahl der Tage}$$

Berechnen Sie die Größe der Kolonie nach 10 bzw. nach 80 Tagen.

Lösung: $P(10) \approx 2984$ und $P(80) \approx 49065$

A 14: Wenn ein Lichtbündel der Intensität I_0 durch ein Medium fällt, wird seine Intensität auf jedem Zentimeter auf denselben Bruchteil gesenkt.

Die Intensität nimmt *exponentiell* ab.

$$I(s) = I_0 e^{-ks}$$

Dabei ist k eine positive Materialkonstante und s die Strecke im Medium in Zentimetern.

Leiten Sie aus $I(s+1) : I(s)$ den oben genannten Bruchteil her!

Lösung:

$$\frac{I(s+1)}{I(s)} = \frac{I_0 e^{-k(s+1)}}{I_0 e^{-ks}} = \frac{e^{-ks-k}}{e^{-ks}} = \frac{e^{-ks} \cdot e^{-k}}{e^{-ks}} = e^{-k}$$

Berechnen Sie für $k = 3$ die Intensität eines 80-lumen starken Lichbündels, nachdem es eine 4,2 cm dicke Schicht durchdrungen hat!

$$I(4{,}2) = 80 \cdot e^{-3 \cdot 4{,}2} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-4} = 0{,}00027$$

Download free eBooks at bookboon.com

3.6.2 Logarithmusfunktion

A 15: Benutzen Sie $a^b = c \Longleftrightarrow \log_a(c) = b$ zur Berechnung im Kopf!

$$\log_{10} 1000 \qquad \log_3 9 \qquad \log_{25} 5 \qquad \log_2 \frac{1}{8} \qquad \ln e \qquad \ln(\frac{1}{e^4})$$

$$\ln 1 \qquad \log_3 x = 4 \qquad \log_2 x = -3 \qquad \log_x 100 = 2 \qquad \log_x(\frac{1}{9}) = -\frac{1}{2} \qquad a^{\log_a x}$$

A 16: Berechnen Sie mit Hilfe des natürlichen Logarithmus auf vier Dezimalstellen!

$$\log_3 50 = \ln 50 : \ln 3 =$$

$$\log_4 25 =$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 20 =$$

Click on the ad to read more

$$\log_6 300 =$$

$$\log_4 0{,}25 =$$

A 17: Im Jahr 1994 betrug der Verbrauch an Erdgas 1 824 Einheiten (Millionen Tonnen Erdöläquivalent). Am Ende jenes Jahres wurden 128 300 Einheiten an Reserven geschätzt. Wie lange reichen die Reserven, wenn der Verbrauch jährlich um 2% steigt?

Lösung: In den Jahren $1995, 1996\ldots$ werden $1824 \cdot 1{,}02$, $1824 \cdot 1{,}02^2, \ldots$ Einheiten Gas verbraucht. Der Gesamtverbrauch in den n Jahren ab 1995 ist durch die folgende Summe gegeben.

$$1\,824 \cdot (1{,}02 + 1{,}02^2 + \cdots + 1{,}02^n)$$

Auswertung der geometrischen Reihe

$$= 1\,824 \cdot 1{,}02 \frac{1{,}02^n - 1}{0{,}02}$$

Gleichsetzen mit der Reserve

$$\begin{aligned}
1\,824 \cdot 1{,}02 \frac{1{,}02^n - 1}{0{,}02} &= 128\,300 \\
1{,}02^n - 1 &= \frac{128\,300 \cdot 0{,}02}{1\,824 \cdot 1{,}02} \\
1{,}02^n &= \frac{128\,300 \cdot 0{,}02}{1\,824 \cdot 1{,}02} + 1 \\
n &= \ln\left(\frac{128\,300 \cdot 0{,}02}{1\,824 \cdot 1{,}02} + 1\right) : \ln 1{,}02 \simeq 43{,}77
\end{aligned}$$

Nach ca. 44 Jahren werden die Reserven aufgebraucht sein.

A 18: Eine Population wachse so, dass t Tage nach Beobachtungsbeginn ihre Größe durch

$$P(t) = \frac{10{,}000}{5 + 20e^{-0{,}1 \cdot t}}$$

gegeben ist.

Berechnen Sie die Anfangsgröße der Population!

Download free eBooks at bookboon.com

Lösung:

$$P(0) = \frac{10{,}000}{5+20e^{-0{,}1\cdot 0}} = \frac{10{,}000}{5+20} = 400$$

Wie lange dauert es, bis 500 erreicht ist?

$$P(t) = \frac{10{,}000}{5+20e^{-0{,}1\cdot t}} \quad \wedge \quad P(t) = 500$$

$$500 = \frac{10{,}000}{5+20e^{-0{,}1\cdot t}}$$

$$5+20e^{-0{,}1\cdot t} = \frac{10{,}000}{500} = 20$$

$$e^{-0{,}1\cdot t} = \frac{15}{20} = 0{,}75$$

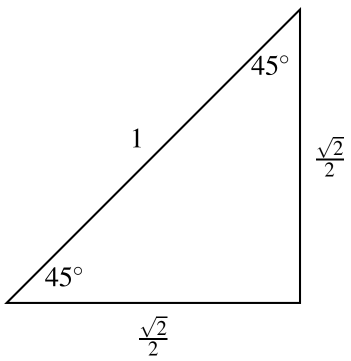
$$-0{,}1\cdot t = \ln 0{,}75$$

$$t = -10\cdot \ln 0{,}75 \approx 2{,}88$$

3.7 Winkelfunktionen

A 19: Lesen Sie an den rechtwinkligen Dreiecken die Werte der Winkelfunktionen ab!

Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

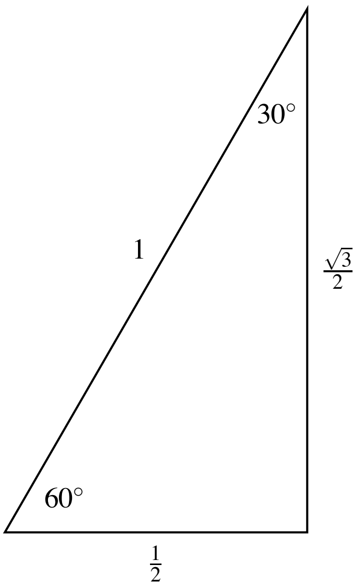


$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Download free eBooks at bookboon.com



$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

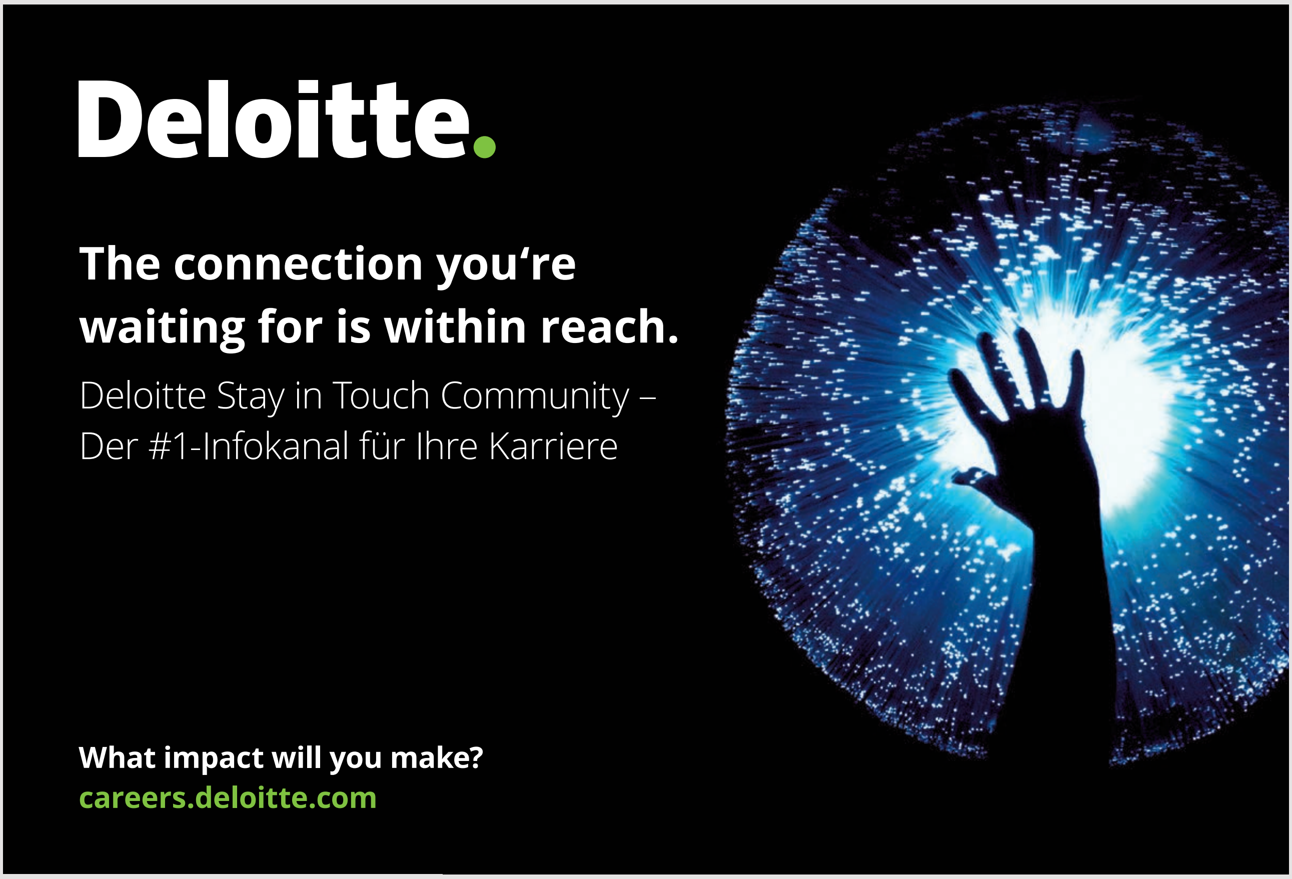
$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^\circ = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$



Click on the ad to read more

4. Differentialrechnung

4.1 Differenzieren von Funktionen

A 1: Bilden Sie die erste Ableitung der Funktionen!

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 7x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 12x + \frac{14}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$g(u) = \frac{4u^3 - 7}{3u^4 + 5}$$

$$g'(u) = \frac{12u^2(3u^4 + 5) - (4u^3 - 7)12u^3}{(3u^4 + 5)^2}$$

$$= \frac{-12u^6 + 84u^3 + 60u^2}{(3u^4 + 5)^2}$$

$$h(s) = \sqrt{3s^4 + s^2 + 9}$$

$$h'(s) = \left[(3s^4 + s^2 + 9)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(3s^4 + s^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot (12s^3 + 2s)$$

$$= \frac{6s^3 + s}{\sqrt{3s^4 + s^2 + 9}}$$

$$k(t) = (2t^2 - t)e^{rt}$$

$$k'(t) = (4t - 1)e^{rt} + (2t^2 - t)e^{rt} \cdot r = (2rt^2 - rt + 4t - 1)e^{rt}$$

Download free eBooks at bookboon.com

$$f(y) = 1{,}5\ln(0{,}5y^2+3)$$

$$f'(y) = 1{,}5\frac{y}{0{,}5y^2+3}$$

A 2: Die Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ seien positiv. Für die Funktion

$$f(x) = [A(x)]^{\alpha}\,[B(x)]^{\beta}$$

ist zu zeigen, dass

$$f'(x) = \left[\alpha\frac{A'(x)}{A(x)} + \beta\frac{B'(x)}{B(x)}\right]\cdot f(x)$$

gilt.

Nach der Produktregel und der Kettenregel der Differentiation gilt

$$f'(x) = \alpha A^{\alpha-1}(x)A'(x)B^{\beta}(x) + A^{\alpha}(x)\beta B^{\beta-1}(x)B'(x).$$

Eine mögliche Umformungskette mit dem genannten Ziel ist

$$= \alpha\frac{A^{\alpha}}{A}A'B^{\beta} + A^{\alpha}\beta\frac{B^{\beta}}{B}B'$$

$$= \alpha\frac{A'}{A}A^{\alpha}B^{\beta} + \beta\frac{B'}{B}A^{\alpha}B^{\beta}$$

$$= \left(\alpha\frac{A'}{A} + \beta\frac{B'}{B}\right)A^{\alpha}B^{\beta}$$

$$= \left(\alpha\frac{A'}{A} + \beta\frac{B'}{B}\right)f.$$

Man könnte auch die rechte Seite der Zielgleichung umformen und zeigen, dass sie die Ableitung der Funktion f darstellt.

Download free eBooks at bookboon.com

Ein eleganter Weg führt über den Logarithmus:

$$\ln f(x) = \ln\left[(A(x))^{\alpha}\,(B(x))^{\beta}\right] = \alpha \ln A(x) + \beta \ln B(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \frac{A'(x)}{A(x)} + \beta \frac{B'(x)}{B(x)}$$

4.1.1 Tangenten

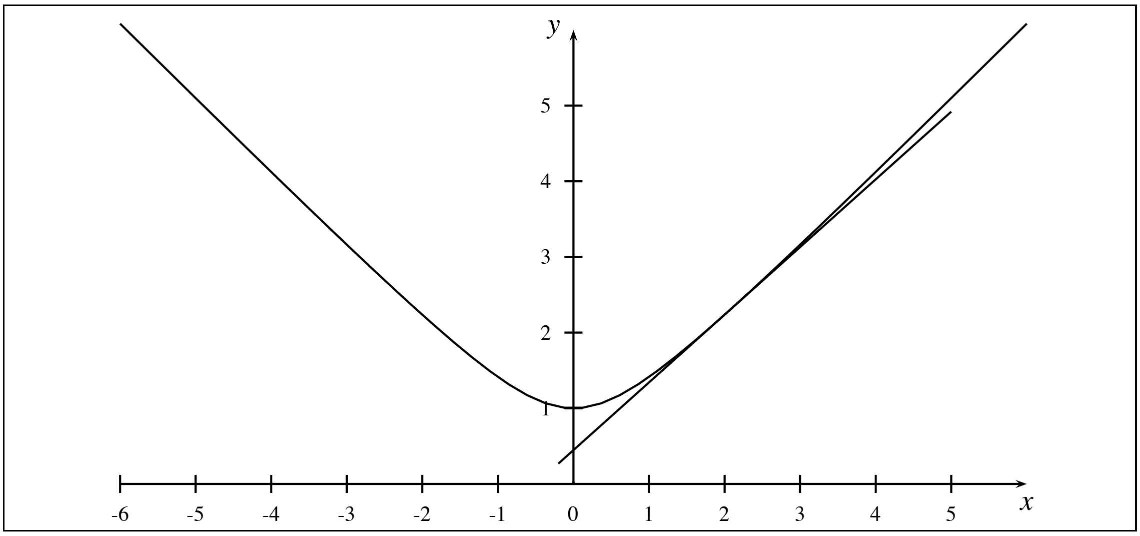
A 3: Stellen Sie die Gleichung der Geraden auf, die den Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ im Punkt $P(2;\sqrt{5})$ berührt!

Lösung:

Die Tangentengleichung hat die Form $y = \ell(x) = f(2) + f'(2)(x-2)$.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad f'(2) = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad y = \ell(x) = \sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}(x-2) = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}$$



4.1.2 Näherung mit der Tangente und das Differential

Der monatliche Sozialbeitrag $S(m)$ in Euro sei gegeben durch

$$S(m) = \sqrt{m}$$

mit dem Monatslohn m in Euro. Der Lohn steige von 2 300 EUR auf 2 370 EUR.

Schätzen Sie den zusätzlichen Sozialbeitrag mit Hilfe des Differentials und vergleichen Sie mit dem exakten Wert!

Lösung:

$$S(2370) - S(2300) \approx S'(2300) \cdot (2370 - 2300) = \frac{1}{2\sqrt{2300}} \cdot 70 = 0{,}73$$

$$S(2370) - S(2300) = \sqrt{2370} - \sqrt{2300} = 0{,}72$$

4.2 Anwendung der Ableitung

A 4: Seien $K(x)$, $u(x)$ und $G(x)$ die Kosten-, Umsatz- und Gewinnfunktion für x Einheiten eines produzierten und verkauften Gutes.

Mit welcher Berechtigung bezeichnet man K' als Stückkosten?
Interpretieren Sie entsprechend U' und G' !

4.2.1 Extrema von Funktionen

A 5: In welchen Grenzen liegen die Werte der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$$

auf dem Intervall $[-3;3]$?

Lösung: Bestimmung der relativen Extrema:

$$f'(x) = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2} = 0{,}5 \pm 1{,}5 \Longleftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

$$f''(x) = 2x - 1$$

$x = -1 : f''(-1) = -3$ $\quad f(-1) = \frac{7}{6}$ $\quad$ relatives Maximum

$x = 2 :$ $\quad f''(2) = 3$ $\quad f(2) = -\frac{10}{3}$ $\quad$ relatives Minimum

Download free eBooks at bookboon.com

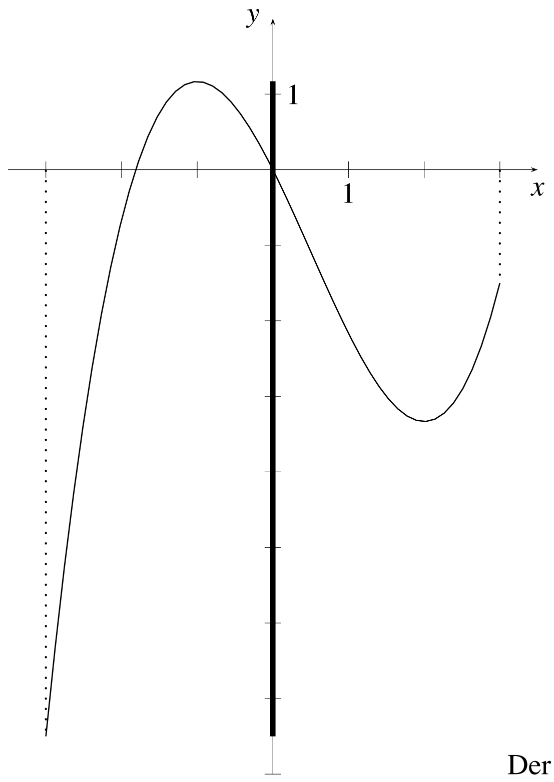
Funktionswerte an den Intervallgrenzen:

$$f(-3) = -\frac{15}{2} \qquad -\frac{15}{2} < -\frac{10}{3} \Longrightarrow \quad \text{absolutes Minimum bei} \quad -3$$

$$f(3) = -\frac{3}{2} \qquad -\frac{15}{2} < -\frac{3}{2} < \frac{7}{6}$$

Damit sind $f(-3)$ und $f(-1)$ die absoluten Extrema auf dem Intervall und die Funktion nimmt alle Werte zwischen ihnen – also aus dem Intervall $[-\frac{15}{2}, \frac{7}{6}]$ – an.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more



Der Wertebereich ist auf der y-Achse markiert.

Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente auf!

Wendestelle:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Da f'' – als lineare Funktion – hier sein Vorzeichen wechselt, liegt eine Wendestelle vor.

Es gilt $f(\frac{1}{2}) = -\frac{13}{12}$ und der Wendepunkt hat die Koordinaten $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{12}\right)$.

Steigung und Gleichung der Wendetangente:

$$\begin{aligned}
m &= f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4} \\
y - \left(-\frac{13}{12}\right) &= -\frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad y - y_0 = m(x - x_0) \\
y &= -\frac{9}{4}x + \frac{9}{8} - \frac{13}{12} = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 6: Für die Produktionsmenge x sei $K(x) = x^2 + 4$ die Kostenfunktion und $E(x) = 3x - 6$ die Erlösfunktion. Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge die *Wirtschaftlichkeit*

$$W(x) = \frac{E(x)}{K(x)}$$

am größten ist!

Lösung:

$$W'(x) = \frac{3(x^2+4) - (3x-6)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{3x^2+12-6x^2+12x}{(x^2+4)^2} = -3\frac{x^2-4x-4}{(x^2+4)^2}$$

$$W'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 + \sqrt{8} \quad \text{, da} \quad x > 0.$$

An dieser Stelle wechselt W' von positiven zu negativen Werten; damit nimmt W ein relatives Maximum an.

Bei der Produktionsmenge $2 + \sqrt{8} \approx 4{,}83$ entstehen $27{,}31$ Kosten und $8{,}49$ Erlös. Damit ist die Wirtschaftlichkeit $0{,}31$.

A 7: Seien a, b feste reelle Zahlen. Bestimmen Sie das absolute Minimum der Funktion

$$f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,!$$

Lösung:

$$f'(x) = 2(x-a) + 2(x-b) = 4x - 2(a+b)] = 4\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{a+b}{2} \quad \text{stationäre Stelle}$$

$$f''(x) = 2 + 2 = 4 \Longrightarrow \quad \text{relatives Minimum}$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{2}$$

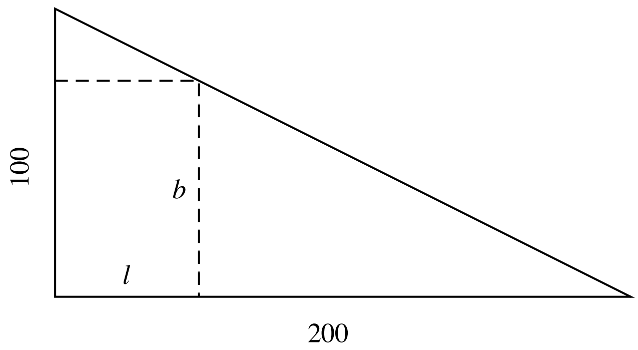
Da f eine quadratische Funktion mit positivem Koeffizient bei x^2 ist – ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel – , liegt ein absolutes Minimum vor.

Download free eBooks at bookboon.com

A 8:

Auf einem Grundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 200 m und 100 m hat, soll parallel zu den Katheten eine rechteckige Eislauffläche angelegt werden.

Wie groß kann diese Eislauffläche höchstens gewählt werden? Wie groß kann diese Eislauffläche höchstens gewählt werden?

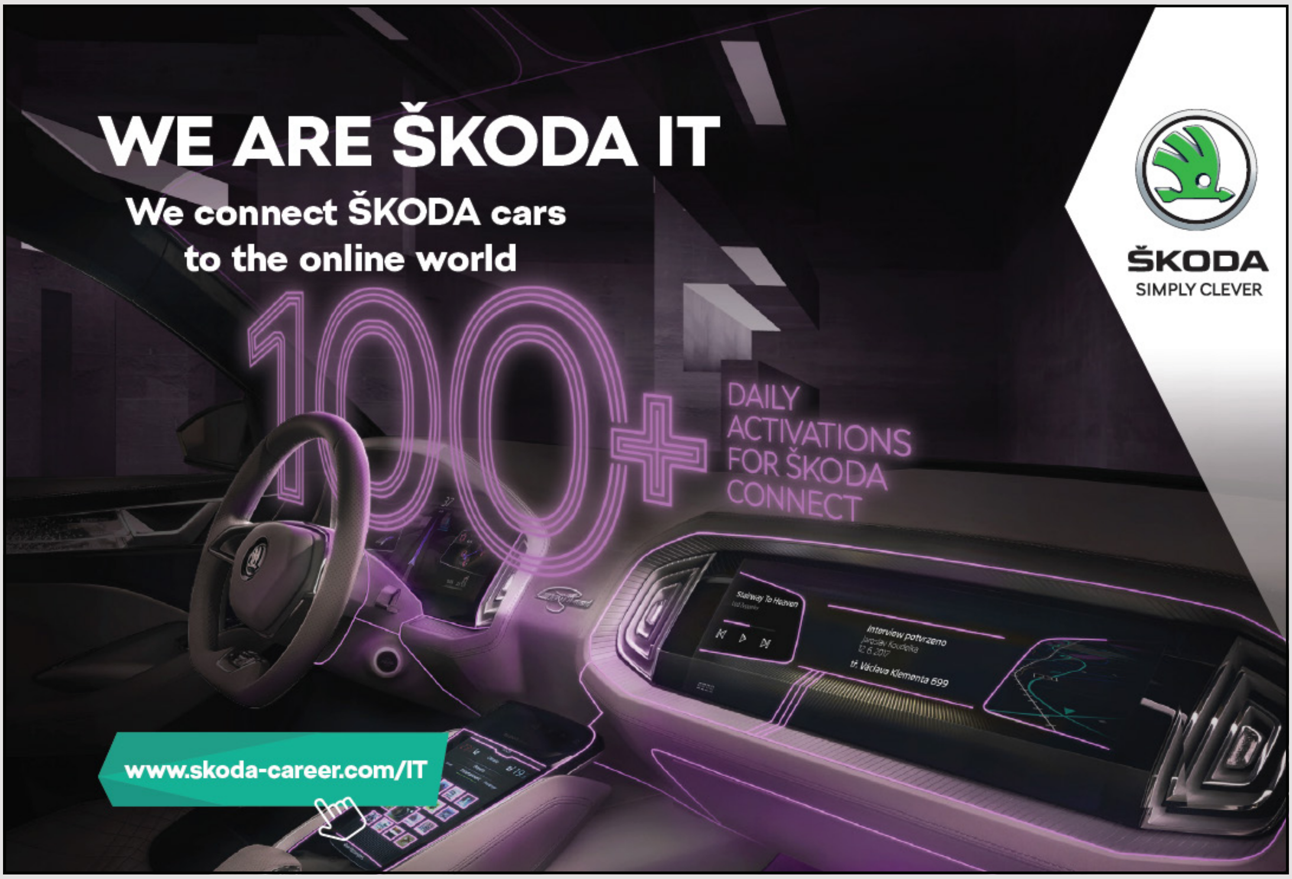


Lösung: Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{b}{100} = \frac{200 - l}{200} \quad \Longleftrightarrow \quad l = 200 - 2b$$

$$A(b) = l \cdot b = (200 - 2b)b = 200b - 2b^2$$

$$A'(b) = 200 - 4b \qquad A'(b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 50.$$



Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Da $A''(b) = -4 < 0$, liegt ein Maximum vor.

$$l = 200 - 2 \cdot 50 = 100 \quad \text{und} \quad A = 100 \cdot 50 = 5000$$

A 9: Ein Unternehmen erzielt bei einem Absatz von x Mengeneinheiten einen Gewinn vor Steuern der Höhe $G(x) = 2\sqrt{x} - 10x$. Es wird eine Mengensteuer von $T(x) = rx$, $0 \leq r$ erhoben.

a) Bei welcher Absatzmenge x_m ist der Nettogewinn $N(x) = G(x) - T(x)$ am größten?

b) Berechnen Sie den Steuersatz r , der beim Nettogewinnmaximum des Unternehmens dem Staat die größtmögliche Steuereinnahme verschafft! (Mit x_m ist also $T(x_m) = rx_m = f(r)$ zu maximieren.)

a)

$$N(x) = G(x) - T(x) = 2\sqrt{x} - 10x - rx \qquad 0 \leq x \quad , \quad 0 \leq r$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 10 - r \qquad N''(x) = -\frac{1}{2}x^{-1,5}$$

$$N'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_m = \frac{1}{(10+r)^2}$$

Da $N'' < 0$ für jedes $x > 0$, liegt bei x_m ein relatives Maximum vor; es ist sogar ein absolutes Maximum, denn N' fällt monoton von positiven Werten für $x < x_m$ zu negativen Werten für $x_m < x$. Also steigt die Funktion N auf $(0, x_m)$ und fällt auf (x_m, ∞) .

$$N(x_m) = \frac{2}{10+r} - \frac{10+r}{(10+r)^2} = \frac{1}{10+r}$$

b) Die Menge x_m , bei der maximaler Nettogewinn erzielt wird, ist eine Funktion des Steuersatzes r .

$$x_m(r) = \frac{1}{(10+r)^2}$$

Download free eBooks at bookboon.com

Damit ist auch die Steuereinnahme beim Nettogewinnmaximum eine Funktion des Steuersatzes.

$$T(x_m) = rx_m(r) = \frac{r}{(10+r)^2} = t(r)$$

Es soll das Maximum von $t(r)$ ermittelt werden.

$$t'(r) = \frac{(10+r)^2 - 2r(10+r)}{(10+r)^4} = \frac{10-r}{(10+r)^3}$$

$$t'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = 10$$

Die Ableitung der Funktion $t(r)$ wechselt an der Stelle $r = 10$ von positiven nach negativen Werten, es muss also ein relatives Maximum von t sein; es ist darüberhinaus ein absoltes Maximum, weil t auf $(0,10)$ steigt und auf $(10,\infty)$ fällt.

Beim Steuersatz von 10 wird die maximale Steuer eingenommen, sie beträgt $\frac{1}{40}$, falls das Unternehmen soviel produziert, dass es den größtmöglichen Nettogewinn erzielt.

A 10: Die Nachfragemenge x einer Ware hänge auf die folgende Weise $x = N(p) = 80 - 20p$ vom Preis p ab. Bei der Herstellung entstehen Kosten der Höhe $K(x) = 2x + c$ mit $0 \leq c$.

a) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion, die Umsatzfunktion und die Reingewinnfunktion!

b) Bei welchem Preis wird der maximale Reingewinn erzielt?

c) Für welche Werte des Parameters c ist der maximale Reingewinn positiv?

Lösung: a)

Grenzkosten: $K'(x) = 2$

Umsatz: $U(p) = px = pN(p) = 80p - 20p^2$

Reingewinn: $R(p) = U(p) - K(x) = U(p) - K(N(p)) = -20p^2 + 120p - 160 - c$

Download free eBooks at bookboon.com

b) Der Reingewinn R ist eine Funktion zweiten Grades von p mit -20 als Koeffizient von p^2 (nach unten geöffnete Parabel) und hat damit genau ein absolutes Maximum (Scheitel der Parabel).

$$R'(p) = -40p + 120 \qquad R'(p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 3$$

$$R(3) = -180 + 360 - 160 - c = 20 - c$$

Bei dem Preis von $3\,\mathrm{GE/ME}$ wird der größte Gewinn von $(20-c)\,\mathrm{GE/ME}$ erzielt.

c) Der maximale Reingewinn ist eine Funktion von c:

$$m(c) = 20 - c \qquad m(c) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le c < 20$$

Für $c \in [0;20)$ ist der maximale Reingewinn positiv und für Werte größer als 20 wird mit Verlust gearbeitet.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

A 11: Ein Wohnwagengespann verbraucht bei einer mittleren Geschwindigkeit von v Kilometer pro Stunde

$$B(v) = \frac{1}{500}\left(\frac{1000}{v} + v\right)$$

Liter Benzin auf einen Kilometer.

Mit welcher Geschwindigkeit erreicht man die geringsten Kosten für eine Strecke von 400 km, wenn ein Liter Benzin 2,12 EUR kostet?

Lösung: Zunächst spielen die Streckenlänge und der Literpreis keine Rolle, sondern kommt es nur auf den Verbrauch pro Kilometer an. Wir berechnen das Minimum der Funktion $B(v)$.

Es gilt $v > 0$

$$B'(v) = \frac{1}{500}\left(-\frac{1000}{v^2} + 1\right)$$

$$B'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1000}{v^2} + 1 = 0 - \frac{1000}{v^2} + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad v^2 = 1000 \quad \Longleftrightarrow \quad v = \sqrt{1000}$$

$$B''(v) = \frac{2 \cdot 1000}{500v^3} > 0$$

Die Funktion hat bei $v = \sqrt{1000} \approx 31{,}6$ ein Minimum mit dem Wert

$$B(\sqrt{1000}) = \frac{1}{500}\left(\frac{1000}{\sqrt{1000}} + \sqrt{1000}\right) = \frac{2\sqrt{1000}}{500} \approx 0{,}1265.$$

Die Kosten sind

$$\frac{2\sqrt{1000}}{500} \cdot 2{,}12 \cdot 400 = 107{,}26$$

4.2.2 Funktionsdiskussion

A 12: Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-3)(x^2 - x - 6)!$$

Nullstellen:

$$x - 3 = 0 \quad \vee \quad x^2 - x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -2 \vee x = 3$$

$$x = -2 \quad \vee \quad x = 3 \quad \text{doppelt}$$

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - x + 6$$

$$f'(x) = x^2 - \frac{8}{3}x - 1$$

$$f''(x) = 2x - \frac{8}{3}$$

Extrema:

$$f' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - \frac{8}{3}x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x = 3$$

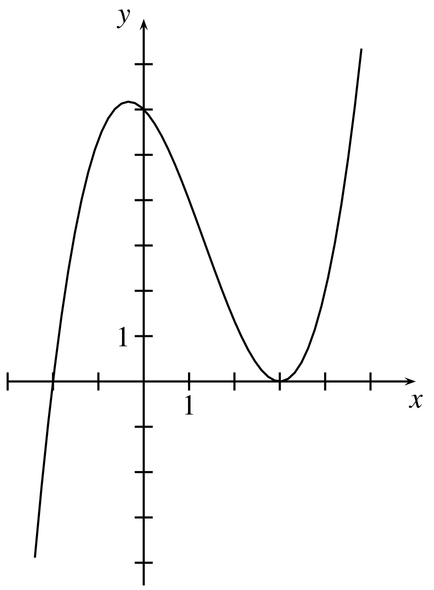
$$f''(-\frac{1}{3}) = -\frac{10}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bei} \quad -\frac{1}{3} \quad \text{rel. Max.}$$

$$f''(3) = \frac{10}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bei} \quad 3 \quad \text{rel. Min.}$$

Wendestelle:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}$$

x	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	4
f	$\frac{16}{3}$	$\frac{500}{81}$	$\frac{250}{81}$	2



A 13: Diskutieren Sie die Funktion

$$g(t) = \ln^2(t-1) \ !$$

Lösung:

Definitionsbereich: $1 < t$

Wertebereich: $y \geq 0$

Nullstellen:

$$\ln^2(t-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(t-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t-1 = 1 \quad \Longleftrightarrow t = 2$$

Ableitungen:

$$g'(t) = 2\ln(t-1) \cdot \frac{1}{t-1}$$

$$g''(t) = 2\frac{1-\ln(t-1)}{(t-1)^2}$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Extremum:

$$g'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(t-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2$$

$$g''(2) = 2 > 0$$

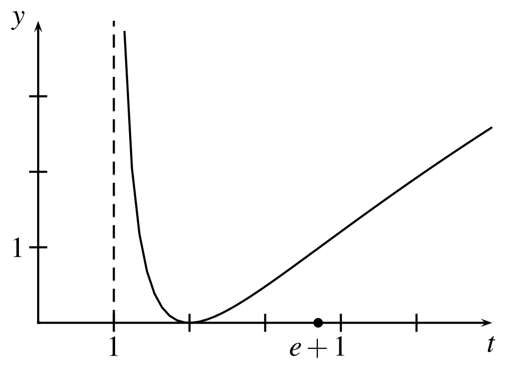
$$g(2) = 0$$

Da $g \geq 0$, liegt das absolute Minimum vor.

Wendepunkt:

$$g''(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(t-1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t-1 = e^1 \quad \Longleftrightarrow \quad t = e+1$$

g'' wechselt bei $e+1$ sein Vorzeichen von $+$ nach $-$; damit ist $(e+1, g(e+1)) = (e+1, 1)$ Wendepunkt des Graphen.



A 14: Diskutieren Sie die Funktion!

$$h(r) = (0{,}5r^2 + r + 0{,}5) \cdot e^{-2r+7}$$

Download free eBooks at bookboon.com

Nullstellen:

Da $e^z > 0$, gilt

$$h(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = -1.$$

Ableitungen:

$$h'(r) = \{(r+1) - (r+1)^2\}e^{-2r+7} = -r(r+1)e^{-2r+7}$$

$$h''(r) = \{-(2r+1) + 2r(r+1)\}e^{-2r+7} = (2r^2 - 1)e^{-2r+7}$$

Extrema:

$$h'(r) = 0 \qquad \Longleftrightarrow r(r+1) = 0 \Longleftrightarrow r = 0 \quad \vee \quad r = -1$$

$$h''(0) = -e^7 < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{rel. Max mit} \quad h(0) = e^7/2$$

$$h''(-1) = e^9 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{rel. Min mit} \quad h(-1) = 0$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Wendepunkte:

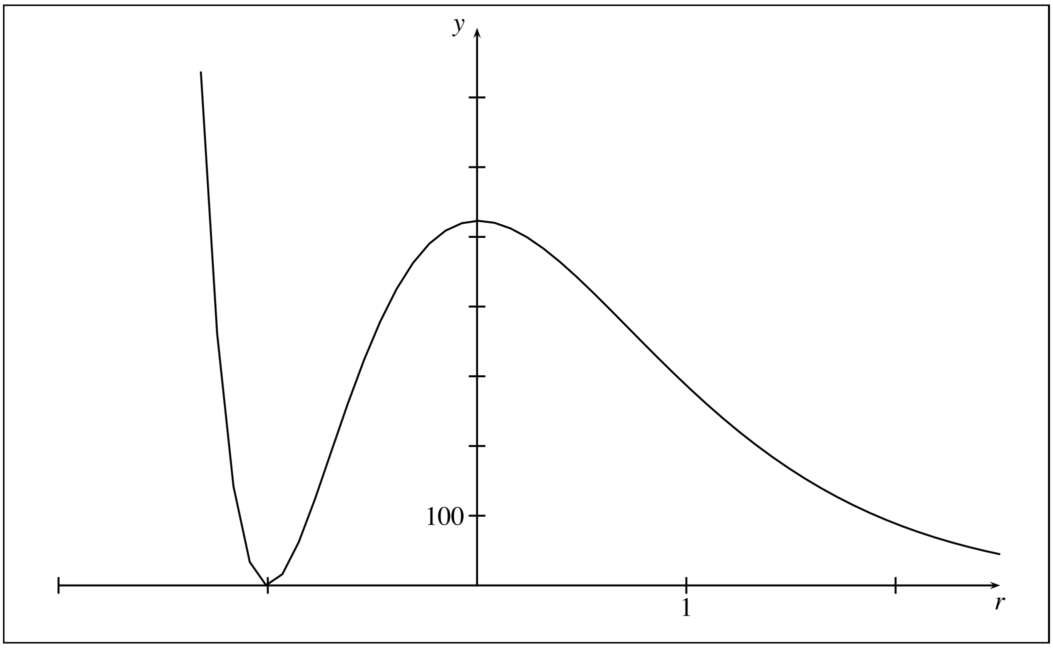
$$h''(r) = 0 \iff 2r^2 - 1 = 0 \iff r = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

An diesen Stellen wechselt h'' das Vorzeichen; es liegen also Wendestellen vor.

$$h(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 193{,}5 \quad \text{und} \quad h(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 388{,}5$$

Asymptote:

Wegen $\lim_{r\to\infty} e^{-2r+7} = 0$ ist die Abszissenachse Asymptote des Graphen.



4.2.3 Das Newton - Verfahren zur Approximation von Nullstellen

A 15: Lösen Sie die Gleichung $2x^3 + x = 2$ mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens!

Lösung: Es sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x^3 + x - 2$ zu berechnen.

Wegen $f(0) = -2$ und $f(1) = 1$ liegt eine Nullstelle zwischen 0 und 1.

$$x_0 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 + x - 2}{6x_n^2 + 1} = \frac{4x_n^3 + 2}{6x_n^2 + 1}$$

$$x_1 = \frac{4 \cdot 1^3 + 2}{6 \cdot 1^2 + 1} = \frac{6}{7} = 0{,}85$$

$$x_2 = 0{,}8356$$

$$x_3 = 0{,}8351226$$

$$x_4 = 0{,}835122348481$$

$$x_5 = 0{,}835122348483$$

Da $f'(x) = 6x^2 + 1 > 1$ steigt die Funktion streng monoton. Damit hat sie genau eine Nullstelle.

Click on the ad to read more

5. Funktionen mehrerer Variablen

5.1 Graphische Darstellung

A 1: Sei

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \quad \text{für} \quad x^2+y^2>0.$$

Beschreiben Sie die Isoquanten (Höhenlinien)!

Eine Isoquante ist eine Linie der (x,y) - Ebene, auf der $f(x,y)$ in allen Punkten den selben Wert c annimmt. Der Wertebereich des Logarithmus sind die reellen Zahlen, also sind für c alle reellen Zahlen zugelassen.

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x^2+y^2) = 2c$$

$$x^2+y^2 = e^{2c} = (e^c)^2$$

Die Isoquanten der Funktion sind Kreise um den Ursprung mit dem Radius e^c .

Geben Sie die Lösungsmenge von $f(x,y)=0$ an!

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = 0$$

$$\ln(x^2+y^2) = 0$$

$$x^2+y^2 = e^0 = 1$$

Man hätte statt $e^0 = 1$ auch die Gleichung $\ln 1 = 0$ verwenden können.
Die Lösungsmenge der besteht aus den Zahlenpaaren (x,y) , die die letzte Gleichung erfüllen.
Es sind genau die Koordinaten der Punkte des Einheitskreises.

Download free eBooks at bookboon.com

5.2 Partielle Ableitungen

A 2: Sei

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \quad \text{für} \quad x^2+y^2>0.$$

Zeigen Sie

$$f_{xx}+f_{yy}=0!$$

Wegen $\ln'|z| = \frac{1}{z}$ und der Kettenregel und der Quotientenregel gelten die Gleichungen

$$f_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad f_{xx} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad f_{yy} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Da $f_{xx} = -f_{yy}$, folgt die Behauptung.

5.3 Extrema

5.3.1 Freie Extrema

A 3: Die Produktionsfunktion $F(K,A) = 6K^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{3}}$ gibt die Menge des hergestellten Gutes an, sie hängt von den eingesetzten Faktoren Kapital K und Arbeit A ab.

- Die Kosten pro Einheit des Kapitals sind $0{,}1$.
- Die Kosten pro Einheit der Arbeit sind 1.
- Der Preis pro Einheit des Gutes ist $0{,}5$.

Download free eBooks at bookboon.com

Stellen Sie die Gewinnfunktion $G(K,A)$ auf und bestimmen Sie ihr Maximum!

- Gewinn = Erlös minus Kosten
- Erlös = Verkaufspreis mal Menge : $0{,}5 \cdot F(K,A)$
- Kosten = Kapitalkosten plus Arbeitskosten : $0{,}1 \cdot K + 1 \cdot A$

$$G(K,A) = 0{,}5 \cdot F(K,A) - [0{,}1 \cdot K + 1 \cdot A]$$

$$= 3 \cdot K^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{3}} - 0{,}1 \cdot K - 1 \cdot A \qquad \text{mit} \quad A \geq 0 \quad \text{und} \quad K \geq 0$$

$$G_K(K,A) = \frac{3}{2} K^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{10}$$

$$G_A(K,A) = K^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{2}{3}} - 1$$

OXEA
the oxo people


Mit der Qualität von Nahrungsmitteln haben wir nichts zu tun. Obwohl – in trendigen Kunststoffflaschen, Lebensmittelfolien oder innovativen Kühlsystemen sind oft auch OXEA-Produkte enthalten, Genauso wie in Parfum, Autolacken, Schmiermitteln und Sicherheitsglas. OXEA ist einer der weltweit größten Hersteller von Oxo-Produkten und hat den höchsten kommerziellen Marktanteil. Wirtschaftlich solide und auf Wachstumskurs. Mit grünem Gewissen und Bewusstsein für eine Wertekultur. Mit über 1.400 Mitarbeitern bieten wir Ihnen ein Arbeitsumfeld mit flachen Hierarchien – und damit eine enorme Aufgabenvielfalt, die Sie fachlich herausfordert und persönlich weiterbringt.

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Die ersten partiellen Ableitungen sind gleich Null zu setzen.

$$K^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{15} \qquad \wedge \qquad K^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{2}{3}} = 1$$

Auflösen von I und Einsetzen von $K^{\frac{1}{2}}$ in II:

$$K^{\frac{1}{2}} = 15A^{\frac{1}{3}} \qquad \wedge \qquad (15A^{\frac{1}{3}}A^{-\frac{2}{3}} = 1 \Longleftrightarrow 15A^{-\frac{1}{3}} = 1 \Longleftrightarrow A^{\frac{1}{3}} = 15 \Longleftrightarrow A = 15^3)$$

Einsetzen von $A^{\frac{1}{3}}$ in I:

$$K^{\frac{1}{2}} = 15 \cdot 15 \Longrightarrow K = 15^4$$

Damit ist $(K,A) = (15^4, 15^3) = (50\,625; 3\,375)$ die einzige stationäre Stelle.

$$G_{KK} = -\frac{3}{4}K^{-\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{3}}$$

$$G_{AA} = -\frac{2}{3}K^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{5}{3}}$$

$$G_{KA} = \frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{2}{3}}$$

$$G_{KK}G_{AA} - G_{KA}^2 = \frac{1}{2}K^{-1}A^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{4}K^{-1}A^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}K^{-1}A^{-\frac{4}{3}} > 0 \quad \text{da} \quad K = 15^4\ ,\ A = 15^3$$

Es liegt ein relatives Extremum vor.

Da weiter $G_{KK} < 0$, hat die Funktion ein relatives Maximum.
Der Maximalwert beträgt $G(15^4, 15^3) = 1\,687{,}5$.

Es wird hier nicht bewiesen, dass ein absolutes Maximum vorliegt.

5.3.2 Gebundene Extrema

A 4: Ermitteln Sie die Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Download free eBooks at bookboon.com

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = 0 \text{ mit } g(x,y,z) := xy - 1 \text{ !}$$

Reduzieren Sie zunächst mit Hilfe der Nebenbedingung die Anzahl der Variablen von f !

Lösung:

Aus der Nebenbedingung $x \cdot y = 1$ folgt $x \neq 0$ und $y \neq 0$; die Substitution $y = \frac{1}{x}$ führt zu

$$\varphi(x,z) = f(x, \frac{1}{x}, z) = x^2 + \frac{1}{x^2} + z^2 \qquad x \neq 0 \text{ , } z \in \mathbb{R}$$

Die Extrema von φ sind die Extrema von f unter der Nebenbedingung.

$$\varphi_x = 2x - \frac{2}{x^3} \qquad \varphi_{xx} = 2 + \frac{6}{x^4} \qquad \varphi_{xz} = 0$$

$$\varphi_z = 2z \qquad \varphi_{zz} = 2$$

$$\left|\begin{array}{c} \varphi_x = 0 \\ \\ \varphi_z = 0 \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{c} x - \frac{1}{x^3} = 0 \\ \\ z = 0 \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{c} x^4 = 1 \\ \\ z = 0 \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{c} x = -1 \lor x = 1 \\ \\ z = 0 \end{array}\right|$$

Die Funktion φ ist an den Stellen $(-1;0)$ und $(1;0)$ stationär.

$$D(x,z) = \varphi_{xx}\varphi_{zz} - \varphi_{xz}^2 = 4 + \frac{12}{x^4} > 0 \qquad \text{für} \qquad x \neq 0 \qquad \text{und} \qquad z \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Weiter ist $\varphi_{zz} = 2 > 0$ und damit nimmt φ an den Stellen relative Minima mit den Werten

$$\varphi(-1;0) = \varphi(1;0) = 2$$

an.

Die vorgegebene Funktion f nimmt unter der Restriktion $g = 0$ an den Stellen $(-1;-1;0)$ und $(1;1;0)$ je ein relatives Minimum mit dem Wert 2 an.

Download free eBooks at bookboon.com

Es ist sogar das absolute Minimum, wie man an $\varphi(x,z) \geq \varphi(x,0)$ erkennt.

Die Funktion φ ist nach oben unbeschränkt und hat deswegen kein absolutes Maximum.

A 5: In zwei Erzgruben entstehen jeweils neben den fixen Kosten von 500 GE die variablen Kosten in Abhängigkeit von den Fördermengen x ME bzw. y ME:

$$K_1 := 0{,}5x^2 \quad \text{und} \quad K_2(y) := y^2 + 2y$$

Aus beiden Gruben sollen insgesamt 80 ME gefördert werden.

Berechnen Sie die Fördermengen, bei denen die geringsten Gesamtkosten entstehen!
Wenden Sie dazu die Verfahren der Variablensubstitution und der Lagrangeschen Multiplikatoren an!

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Die Kostenfunktion

$$K(x,y) = 2\cdot 500 + K_1(x) + K_2(y) = 1000 + \frac{x^2}{2} + y^2 + 2y \quad ; \quad 0 \le x,y \le 80$$

ist unter der Nebenbedingung

$$x + y = 80$$

zu minimieren.

Mit $y = 80 - x$ wird die Variablenzahl der Kostenfunktion reduziert.

$$k(x) := K(x, 80-x) = 1000 + \frac{x^2}{2} + (80-x)^2 + 2(80-x)$$

$$k'(x) = x - 2(80-x) - 2 = 3x - 162$$

$$k''(x) = 3$$

$$k'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 54$$

$$k'' > 0$$

Bei 54 hat k ein relatives Minimum mit $k(54) = 3\,186$.

Die Kombination 54 ME aus der ersten Grube und 26 ME aus der zweiten führt auf die geringsten Kosten für insgesamt 80 ME, sie betragen $K(54;26) = 3\,186$ GE .

Lösung nach der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren:

$$L(x,y,\lambda) = K(x,y) + \lambda g(x,y) = 1000 + \frac{x^2}{2} + y^2 + 2y + \lambda(x+y-80)$$

$$L_x = x + \lambda$$

$$L_y = 2y + 2 + \lambda$$

$$L_\lambda = x + y - 80$$

$$\left| \begin{array}{l} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{array} \right| \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x = -\lambda \\ 2y + 2 = -\lambda \\ x + y = 80 \end{array} \right|$$

Download free eBooks at bookboon.com

Aus den ersten beiden Gleichungen dieses Systems folgt $x = 2y + 2$, eingesetzt in die dritte Gleichung erhält man:

$$(2y+2)+y=80 \quad \Longleftrightarrow \quad y=26 \quad \Longrightarrow \quad x=54 \quad \Longrightarrow \quad \lambda=-54$$

Mit diesen Werten liefert die Lagrangefunktion

$$L(54;26;-54) = 3\,186.$$

A 6: Bestimmen Sie die Extremstelle und den Extremwert der Funktion

$$f(x,y,z,w) := x^2+y^2+z^2+w^2$$

unter der Nebenbedingung

$$(x+y+z=3 \quad \text{und} \quad z+w=6)!$$

Lösung:

Das Gleichungssystem der Nebenbedingung erlaubt z.B. w und z durch x und y darzustellen, um die Aufgabe auf eine Funktion mit zwei Variablen zurückzuführen.

$$w=6-z \quad \wedge \quad z=3-x-y \quad \Longrightarrow \quad w=3+x+y$$

$$h(x,y) := f(x,y,3-x-y,3+x+y) = x^2+y^2+(3-x-y)^2+(3+x+y)^2$$

$$= 3x^2+3y^2+4xy+18$$

Wir berechnen die Extrema von h .

$$h_x = 6x+4y \qquad h_{xx} = 6 \qquad h_{xy} = 4$$

$$h_y = 6y+4x \qquad h_{yy} = 6$$

$$\left| \begin{matrix} h_x = 0 \\ h_y = 0 \end{matrix} \right| \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{matrix} 3x+2y=0 \\ 3y+2x=0 \end{matrix} \right| \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (0;0)$$

$$h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 = 36-16 > 0 \quad \text{und} \quad h_{xx} > 0$$

Download free eBooks at bookboon.com

Damit ist $(0;0)$ die Stelle eines relativen Minimums der Funktion h mit dem Wert $h(0;0) = 18$.

Die Funktion f nimmt unter der Einschränkung an der Stelle $(x, y, z, w) = (0;0;3;3)$ ihr relatives Minimum mit dem Wert $f(0;0;3;3) = 18$ an. Da f und h nach oben unbeschränkt sind, haben sie keine Maxima.

A 7: Der Ernteertrag E hänge von den eingesetzten Mengen dreier Düngemittel wie folgt ab

$$E(x, y, z) := A(1 - e^{-x^2yz}) \text{ mit } 0 < A, x, y, z.$$

Es sollen insgesamt 4 ME Düngemittel verwendet werden und von dem ersten Mittel soll doppelt soviel wie vom zweiten gegeben werden. Bestimmen Sie den maximalen Ertrag!

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Die Nebenbedingung ist durch das Gleichungssysten

$$x+y+z=4 \quad \wedge \quad x=2y$$

gegeben. Damit lässt sich die Variablenzahl auf eins reduzieren.

$$f(x) := E(x, \frac{x}{2}, 4-\frac{3}{2}x)$$

$$= A(1-e^{-x^2\frac{x}{2}(4-\frac{3}{2}x)}) = A(1-e^{\frac{3}{4}x^4-2x^3})$$

$$f'(x) = -Ae^{\frac{3}{4}x^4-2x^3}(3x^3-6x^2)$$

$$f'(x)=0 \iff 3x^3-6x^2=0 \iff 3x^2(x-2)=0 \iff x=0 \quad \vee \quad x=2$$

Wegen $E(0,y,z)=A(1-e^0)=0$ liegt für $x=0$ sicher kein Maximum vor. An der Stelle $x=2$ wechselt f' das Vorzeichen von $+$ nach $-$; also hat die Funktion dort mit $f(2)=A(1-e^{-4})$ ein relatives Maximum.

Bei den Mengen $(x,y,z)=(2;1;1)$ werden insgesamt 4 ME Düngemittel eingesetzt und es wird der unter diesen Bedingungen größtmögliche Ertrag erzielt.

A 8: Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode die stationären Stellen!

a) $f(x,y)=3x^2+4y^2+6xy$ unter der Nebenbedingung $2x+y-3=0$

Lösung:

$$L(x,y,\lambda)=3x^2+4y^2+6xy+\lambda(2x+y-3)$$

$$\left| \begin{array}{c} L_x = 6x+6y+2\lambda = 0 \\ L_y = 8y+6x+\lambda = 0 \\ L_\lambda = 2x+y-3=0 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{c} 6x+6y+2(-8y-6x)=0 \\ \lambda = -8y-6x \\ y=3-2x \end{array} \right|$$

$$3x+5(3-2x)=0 \implies x=\frac{15}{7} \quad ; \quad y=3-2\cdot\frac{15}{7}=-\frac{9}{7} \quad ; \quad \lambda=-\frac{18}{7}$$

Download free eBooks at bookboon.com

$(\frac{15}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{18}{7})$ ist stationäre Stelle der Lagrangefunktion L und f hat in $(\frac{15}{7}, -\frac{9}{7})$ ihre einzige stationäre Stelle.

b) $f(x,y) = 3x + 2y + 5$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 = 1$

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 3x + 2y + 5 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$$

$$\left| \begin{array}{c} L_x = 2x\lambda + 3 = 0 \\ L_y = 4y\lambda + 2 = 0 \\ L_\lambda = x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{c} x = -\frac{3}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{array} \right|$$

$$\left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \iff \frac{11}{4\lambda^2} = 1 \iff \lambda^2 = \frac{11}{4}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{11}}{2} \quad \vee \quad \lambda = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$(x,y,\lambda) = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$$

$$(x,y,\lambda) = \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$$

Stationäre Stellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ sind

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right).$$

---

6. Lineare Gleichungssysteme

6.1 Gaußsches Verfahren

Systeme mit genau einer Lösung

A 1: Lösen Sie das Gleichungssystem!

$$2x + y - z = 3$$

$$3x + 5y - 4z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 2$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Standard:

x	y	z	b
$\boxed{2}$	1	-1	3
3	5	-4	1
4	-3	2	2
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	$\boxed{\frac{7}{2}}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$
0	-5	4	-4
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	$-\frac{5}{7}$	-1
0	0	$\boxed{\frac{3}{7}}$	-9
1	$\frac{1}{2}$	0	-9
0	$\boxed{1}$	0	-16
0	0	1	-21
1	0	0	-1
0	1	0	-16
0	0	1	-21

Variante:

x	y	z	b
2	1	$\boxed{-1}$	3
3	5	-4	1
4	-3	2	2
2	1	-1	3
-5	1	0	-11
8	$\boxed{-1}$	0	8
10	0	-1	11
$\boxed{3}$	0	0	-1
8	-1	0	8
0	0	1	-21
1	0	0	-1
0	1	0	-16

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \\ -21 \end{pmatrix}$$

A 2:

$$2u - v + 5w = 43$$

$$3u + 4v - w = -6$$

$$5u + 3v - 2w = -5$$

Download free eBooks at bookboon.com

u	v	w	b
2	-1	5	43
3	4	$\boxed{-1}$	-6
5	3	-2	-5
17	19	0	13
3	4	-1	-6
$\boxed{-1}$	-5	0	7
0	$\boxed{-66}$	0	132
0	-11	-1	15
1	5	0	-7
0	1	0	-2
0	0	-1	-7
1	0	0	3

$$(u,v,w) = (3;-2;7)$$

A 3:

$$2a - b + 4c = -27$$

$$5a + 3b - 2c = 9$$

$$a + 7b + 2c = 9$$

Download free eBooks at bookboon.com

a	b	c	r
2	−1	4	−27
5	3	$\boxed{-2}$	9
1	7	2	9
12	5	0	−9
5	3	−2	9
6	$\boxed{10}$	0	18
$\boxed{9}$	0	0	−18
5	3	−2	9
3	5	0	9
1	0	0	−2
0	3	−2	19
0	5	0	15
1	0	0	−2
0	0	1	−5
0	1	0	3

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

A 4: Bestimmen Sie die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, deren Graph durch die Punkte $A(-3;18), B(-1;-6)$ und $C(4;4)$ geht!

Aus den drei Forderungen $f(-3) = 18$, $f(-1) = 6$ und $f(4) = 4$ folgen die drei Gleichungen für die Koeffizienten.

Download free eBooks at bookboon.com

$$a - b + c = -6$$

$$16a + 4b + c = 4$$

$$9a - 3b + c = 18$$

a	b	c	r
1	−1	$\boxed{1}$	−6
16	4	1	4
9	−3	1	18
1	−1	1	−6
15	$\boxed{5}$	0	10
8	−2	0	24
4	0	1	−4
3	1	0	2
$\boxed{7}$	0	0	14
0	0	1	−12
0	1	0	−4
1	0	0	2

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 12$$

ist die Funktion mit den geforderten Eigenschaften.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

A 5:

$$3u - v - 2w + x = 1$$

$$2u + v + w + 3x = 6$$

$$-u + 3v + 2w + 4x = 1$$

$$-2u - 2v + 3w - 2x = 7$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

u	v	w	x	b	
3	−1	−2	1	1	II
2	1	1	3	6	III
$\boxed{-1}$	3	2	4	1	I
−2	−2	3	−2	7	
1	−3	−2	−4	−1	
0	8	4	13	4	$II - III$
0	7	5	11	8	$8III - 7II$
0	−8	−1	−10	5	$IV + II$
1	−3	−2	−4	−1	
0	1	−1	2	−4	
0	0	12	−3	36	$IV, -4III$
0	0	3	3	9	III
1	−3	−2	−4	−1	
0	1	−1	2	−4	
0	0	1	1	3	
0	0	0	−15	0	
1	−3	−2	0	−1	$I + 2III$
0	1	−1	0	−4	$II + III$
0	0	$\boxed{1}$	0	3	
0	0	0	1	0	
1	−3	0	0	5	$I + 3II$
0	$\boxed{1}$	0	0	−1	
0	0	1	0	3	
0	0	0	1	0	
1	0	0	0	2	
0	1	0	0	−1	
0	0	1	0	3	
0	0	0	1	0	

Download free eBooks at bookboon.com

Einparametrige Lösungsmenge

A 6:

$$x - 3y + 2z = 4$$

$$-2x + y + 3z = 2$$

$$2x - 16y + 18z = 28$$

x	y	z	
$\boxed{1}$	-3	2	4
-2	1	3	2
2	-16	18	28
1	-3	2	4
0	$\boxed{-5}$	7	10
0	-10	14	20
1	-3	2	4
0	$\boxed{-5}$	7	10
0	0	0	0
1	0	$-\frac{11}{5}$	-2
0	1	$-\frac{7}{5}$	-2

Sei $z = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ als Parameter gewählt.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oder mit $s = \frac{t}{5}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A 7: Homogenes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 19y - 9z &= 0 \\ 3x - 5y - z &= 0 \\ 4x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

x	y	z
$\boxed{1}$	-19	-9
3	-5	-1
4	2	3
1	-19	-9
0	52	26
0	78	39
1	-19	-9
0	$\boxed{2}$	1
0	2	1
1	0	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Sei $z = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ als Parameter gewählt.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oder mit $s = -\frac{t}{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A 8: Zweiparametrige Lösungsmenge

$$2x + 3y - 5z = 6$$

$$-3x - 4{,}5y + 7{,}5z = -9$$

$$5x + 7{,}5y - 12{,}5z = 15$$

x	y	z		
2	3	-5	6	
-3	$-4{,}5$	7,5	-9	$\cdot(-\frac{2}{3})$
5	7,5	$-12{,}5$	15	$\cdot(-\frac{2}{5})$
2	3	-5	6	
2	3	-5	6	
2	3	-5	6	
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	3	

Parameterwahl: $y = s \quad , \quad z = t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A 9: Leere Lösungsmenge

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= 6 \\ -3x - 4{,}5y + 7{,}5z &= 9 \\ 5x + 7{,}5y - 12{,}5z &= 15 \end{aligned}$$

x	y	z	
2	3	−5	6
−3	−4,5	7,5	9
5	7,5	−12,5	15
2	3	−5	6
2	3	−5	−6
2	3	−5	6
2	3	−5	6
0	0	0	−12
0	0	0	0

Die zweite Gleichung $0 = -12$ ist eine falsche Aussage, daher ist die Lösungsmenge leer.

A 10: Geben Sie für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + 2b - 3c &= r \\ 2a - 3b + c &= s \\ 3a - b - 2c &= t \end{aligned}$$

die Bedingungen an, denen r,s,t genügen müssen, damit es eine nicht leere Lösungsmenge besitzt, und bestimmen Sie diese!

Lösung:

a	b	c	
$\boxed{1}$	2	-3	r
2	-3	1	s
3	-1	-2	t
1	2	-3	r
0	-7	7	$s-2r$
0	-7	7	$t-3r$

Fallunterscheidung:

1. Für $s-2r \neq t-3r$ ist die Lösungsmenge leer.
2. Andernfalls gilt $t=s+r$. Das ist die Bedingung.

1	2	-3	r
0	1	-1	$\frac{2r-s}{7}$
1	0	-1	$r-2\frac{2r-s}{7}$
0	1	-1	$\frac{2r-s}{7}$

Wähle $c=\alpha$ als Parameter.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{r}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com

6.2 Matrizen

A 11: Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens!

$$\begin{aligned} a+2b+3c &= 2\\ a+3b+5c &= 5\\ a+5b+8c &= 7 \end{aligned}$$

a	b	c	
$\boxed{1}$	2	3	2
1	3	5	7
1	5	8	7
1	2	3	2
0	$\boxed{1}$	2	3
0	3	5	5
1	2	3	2
0	1	2	3
0	0	$\boxed{-1}$	4
1	2	0	−10
0	$\boxed{1}$	0	−5
0	0	1	4
1	0	0	0
0	1	0	−5
0	0	1	4

$$(a,b,c) = (0;-5;4)$$

$$\begin{aligned} 12u+16v-4w+8z &= 20\\ 10u+14v+16w+18z &= -15 \end{aligned}$$

u	v	w	z	
$\boxed{3}$	4	−1	2	5
10	14	16	18	−15
$\boxed{30}$	40	−10	20	50
30	42	48	54	−45
3	4	−1	2	5
0	$\boxed{2}$	58	34	−95
3	0	−117	−66	195
0	2	58	34	−95
1	0	−39	−22	65
0	1	29	17	−47,5

Parameter: $s = w,\ t = z$

$$\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65\\ -47{,}5\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 39\\ -29\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 22\\ -17\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 12: Drei Gleichungen für drei Variable.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 60 \\ 128 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 32 \\ 28 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	
$\boxed{1}$	1	-1	26
2	-3	4	60
4	3	-2	128
1	1	-1	26
0	-5	6	8
0	$\boxed{-1}$	2	24
1	0	1	50
0	0	$\boxed{-4}$	-112
0	1	-2	-24
1	0	0	22
0	0	1	28
0	1	0	32

RAUM FÜR GESTALTUNG

Stellen Sie sich vor, Sie könnten einfach alles machen, was Ihnen wichtig ist. Stellen Sie sich vor, man ließe Ihren Ideen Raum. Stellen Sie sich vor, Ihre private Planung ließe sich perfekt integrieren. Und Kollegen und Vorgesetzte würden Sie schätzen und unterstützen.

Stellen Sie sich vor bei Unternehmen der TÜV NORD GROUP

wenn Sie einen Abschluss in einem technischen oder naturwissenschaftlichen Studium haben – oder erste Berufserfahrungen.

Wir würden Sie gern kennenlernen.

www.tuev-nord.de/karriere

Frau Tint
020 18 252134

TÜV NORD GROUP

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

Drei Gleichungen für fünf Variable.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\boxed{1}$	1	1	6	2	8
0	1	−1	−2	1	−2
1	1	2	9	3	10
1	1	1	6	2	8
0	1	−1	−2	1	−2
0	0	$\boxed{1}$	3	1	2
1	1	0	3	1	6
0	$\boxed{1}$	0	1	2	0
0	0	1	3	1	2
1	0	0	2	−1	6
0	1	0	1	2	0
0	0	1	3	1	2

Parameter: $s = x_4, t = x_5$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 13: Für welche Werte des Parameters t ist die Lösungsmenge nicht leer?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ t \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	
$\boxed{1}$	2	3	4
1	3	5	6
2	5	8	t
1	2	3	4
0	$\boxed{1}$	2	2
0	1	2	$t-8$
1	2	3	4
0	1	2	2
0	0	0	$t-10$

Für $t \neq 10$ gilt $\mathbb{L} = \emptyset$.

Sei $t = 10$.

1	2	3	4
0	$\boxed{1}$	2	2
1	0	-1	0
0	1	2	2

Parameter: $s = x_3$ mit $s \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 14: Für welche Werte des Parameters t ist die Lösungsmenge nicht leer?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ t \\ 5 \end{pmatrix}$$

INNOVATIVE
LIKE YOU.

If you're hoping for a truly modern education, one where you're encouraged to speak your mind and to think long-term, both when it comes to your own future and the future of the planet. Then the University of Gothenburg is the place for you.

Study a Master's programme in Gothenburg, Sweden | www.gu.se/education

UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

$$
\begin{array}{rrrrr}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
\boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 4 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 6 \\
9 & 10 & 1 & 2 & t \\
3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\
0 & \boxed{-4} & -8 & -12 & -14 \\
0 & -8 & -26 & -34 & t-36 \\
0 & -2 & -4 & -6 & -7 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\
0 & 2 & 4 & 6 & 7 \\
0 & 0 & \boxed{-10} & -10 & t-8 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 1 & 1{,}6+0{,}3t \\
0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 3{,}8+0{,}4t \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0{,}8-0{,}1t \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -2{,}2-0{,}1t \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1{,}9+0{,}2t \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0{,}8-0{,}1t \\
\hline
\end{array}
$$

$$\vec{x} = 0{,}1 \begin{pmatrix} -22 \\ 19 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier wurde im zweiten System die vierte Zeile weggelassen, weil sie die Hälfte der zweiten Zeile ist. Danach wurde $x_4 = s$ als Parameter gewählt. Das Sytem hat für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ eine nicht leere Lösungsmenge.

Download free eBooks at bookboon.com

A 15: Bestimmen Sie die Inverse der Matrix!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -5 & 6 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -5 & 6 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 4 & -18 & -1 & 5 \\
\hline
4 & 0 & 0 & 6 & 1 & -1 \\
0 & -20 & 0 & 100 & 10 & -30 \\
0 & 0 & 4 & -18 & -1 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 1 & 0 & -5 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\
\hline
\end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -20 & -2 & 6 \\ -18 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 16: Berechnen Sie die Produkte je zweier der Matrizen, sofern sie erklärt sind!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: Es sind nur AB , BC , CA erklärt.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 22 & 5 \\ -11 & 25 \\ 23 & 3 \end{pmatrix} \qquad BC = \begin{pmatrix} 19 & 26 & 33 & 40 \\ 11 & 14 & 17 & 20 \\ -18 & -16 & -14 & -12 \end{pmatrix} \qquad CA = \begin{pmatrix} 21 & 28 & -1 \\ 61 & 68 & -9 \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

A 17: Zeigen Sie, dass $A^n = O$ für $n \geq 3$!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -7 & -6 & -8 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -36 & -48 & -48 \\ -18 & -24 & -24 \\ 45 & 60 & 60 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^n = O \quad \text{für} \quad n \geq 3$$

A 18: Bestimmen Sie die Matrix X aus der Gleichung $A \cdot X = B$!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wenn die Inverse zu A bekannt ist, kann mit ihrer Hilfe die Gleichung gelöst werden.

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Download free eBooks at bookboon.com

Hier wird der Gaußsche Algorithmus durchgeführt.

A		B		
3	5	3	1	15
−1	2	−1	−4	6
3	5	3	1	15
0	11	0	−11	33
3	0	3	6	0
0	1	0	−1	3
1	0	1	2	0
0	1	0	−1	3

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

A 19: Gegeben sei die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Matrizen A an, für die gilt $AS = SA$! Dazu sind Spalten- und Zeilenzahl festzustellen und welche Werte die Matrizenelemente a_{ij} annehmen können.

Lösung:

AS : Da S dreizeilig ist, muss A dreispaltig sein.

SA : Da S dreispaltig ist, muss A dreizeilig sein.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Da die rechten Seiten gleich sein sollen, folgt

$$-a_{12} = a_{12} = 0 \qquad -a_{13} = a_{13} = 0$$

$$-a_{21} = a_{21} = 0 \qquad -a_{31} = a_{31} = 0$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Die anderen Elemente von A sind beliebig.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A 20: Zur Herstellung der Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 werden die Materialien M_1, M_2, M_3 verwendet. Der Materialverbrauch ist in der folgenden Tabelle vorgegeben.

	E_1	E_2	E_3
M_1	1	2	3
M_2	3	1	4
M_3	2	5	2

a) Es sind $15, 8, 9$ Einheiten der jeweiligen Erzeugnisse geplant. Berechnen Sie den Materialbedarf!

b) Im Lager sind $25, 25, 50$ Einheiten der jeweiligen Materialien vorrätig.
Wieviel Einheiten der drei Erzeugnisse müssen gefertigt werden, um das Lager zu räumen?

Lösung:

Die Vektoren $\vec{m}, \vec{e}$ geben die Mengen der Materialien und Erzeugnisse an.

Der in der Tabelle angegebene Bedarf in ME des Materials M_k zur Herstellung einer ME des Erzeugnisses E_l werde mit b_{kl} bezeichnet.

Dann wird der beschriebene Zusammenhang der Mengen durch das Gleichungssystem

$$b_{k1}e_1 + b_{k2}e_2 + b_{k3}e_3 = m_k \qquad k = 1,2,3$$

erfasst.

Oder in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad B\vec{e} = \vec{m}$$

Download free eBooks at bookboon.com

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 89 \\ 88 \end{pmatrix}$$

b) Hier ist zu gegebenem $\vec{m}$ die Gleichung $B\vec{e} = \vec{m}$ nach $\vec{e}$ aufzulösen.

e_1	e_2	e_3	m
1	2	3	25
3	1	4	25
2	5	2	50
1	2	3	25
0	−5	−5	−50
0	1	−4	0
1	2	3	25
0	1	1	10
0	0	−5	−10
1	2	0	19
0	1	0	8
0	0	1	2
1	0	0	3
0	1	0	8
0	0	1	2

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es sind 3ME, 8ME und 2ME der Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 zu erzeugen, wenn das Lager geräumt werden soll.

A 21: Die Einzelteile T_1, T_2, T_3, T_4 werden zur Montage der Baugruppen B_1, B_2, B_3 benötigt und aus den Baugruppen werden die Endprodukte P_1, P_2 gefertigt.

a_{ij} bezeichnet die Zahl der Einheiten von T_i für den Bau einer Einheit von B_j
b_{kl} bezeichnet die Zahl der Einheiten von B_k für den Bau einer Einheit von P_l .

Download free eBooks at bookboon.com

$$A = (a_{ij})_{4,3} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = (b_{kl})_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Bedarf an Einzelteilen für die Endprodukte!

b) Von den Produkten sollen 8 bzw. 10 Einheiten hergestellt werden. Berechnen Sie den Bedarf an Einzelteilen!

In den Spalten

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$$

seien die Mengen der Produkte, Baugruppen und Einzelteile notiert.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Dann gelten die Matrizengleichungen (Gleichungssysteme)

$$p_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\iff B\vec{p}=\vec{b}$$

$$b_1\begin{pmatrix}5\\4\\2\\3\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}2\\3\\6\\5\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}3\\2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}5&2&3\\4&3&2\\2&6&5\\3&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{pmatrix}\iff A\vec{b}=\vec{t}$$

a) Hiermit können zu vorgegebenen Produktmengen die Mengen der benötigten Einzelteile berechnet werden:

$$\vec{t}=A\vec{b}=A(B\vec{p})=(AB)\vec{p}=C\vec{p}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}5&2&3\\4&3&2\\2&6&5\\3&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&21\\17&17\\30&25\\24&20\end{pmatrix}=(c_{il})_{4,2}$$

c_{il} bezeichnet die Zahl der Einheiten von T_i für den Bau einer Einheit von P_l.

b)

$$C\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&21\\17&17\\30&25\\24&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}346\\306\\490\\392\end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 22: Bei der Produktion der Waren P_1 und P_2 werden die Faktoren F_1, F_2 und F_3 eingesetzt.

Die Kosten je Einheit des Faktors F_i seien k_i mit $i = 1,2,3$.

Für die Herstellung einer Einheit der Ware P_j werden a_{ij} Einheiten des Faktors F_i verwendet.

Der Verkaufspreis von P_j sei p_j .

$$A = (a_{ij})_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad K = (k_i)_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad P = (p_j)_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 55 \end{pmatrix}$$

a) Benutzen Sie einspaltige Matrizen X und Y zur Darstellung der Produkt- und der Faktormengen und zeigen Sie, dass die *Faktorbedarfsfunktion* durch die Gleichung $Y = AX$, die *Kostenfunktion* durch K^TY und die *Umsatzfunktion* durch P^TX gegeben sind!

Leiten Sie weiter her, dass die *Gewinnfunktion* $(P^T - K^TA)X$ ist!

b) Berechnen Sie alle Funktionswerte für den Fall, dass 12 Einheiten des ersten und 14 Einheiten des zweiten Produkts hergestellt und verkauft werden!

Lösung:

a) In den Spalten $X = (x_1, x_2)^T$ und $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$ werden die Mengen der Produkte bzw. der Faktoren notiert.

Faktorbedarf:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Kosten:

$$K^TY = (k_1, k_2, k_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3$$

Download free eBooks at bookboon.com

Umsatz:

$$P^T X = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

Gewinn gleich Umsatz minus Kosten:

$$P^T X - K^T Y = P^T X - K^T AX = (P^T - K^T A) X$$

b) Vorgabe der Produktmengen: $X^T = (12, 14)$

Bedarf der Faktoren:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Kosten:

$$K^T Y = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 54 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} = 1\,210$$

Umsatz:

$$P^T X = \begin{pmatrix} 40 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix} = 1\,250$$

Gewinn:

$$P^T X - K^T Y = 1\,250 - 1\,210 = 40$$

A 23: Eine Volkswirtschaft sei beschrieben durch drei produzierende Sektoren S_k , $k = 1,2,3$, die sich gegenseitig beliefern.

Der Wert der Lieferung von S_k an S_l werde mit w_{kl} und die für den Endverbrauchssektor verbleibende Produktion von S_k mit y_k bezeichnet.

Damit gilt für den Gesamtoutput x_k des Sektors S_k

$$x_k = w_{k1} + w_{k2} + w_{k3} + y_k \qquad (k = 1,2,3)$$

Es ist zweckmäßig, Gleichungen anzugeben, in denen nur die Outputs auftreten.

Dazu werden die „Input-Output-Koeffizienten“ mit $a_{kl} = \frac{w_{kl}}{x_l}$ $(k,l = 1,2,3)$ definiert.

Damit ergibt sich als Bilanz das Gleichungssystem

$$x_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + y_k \qquad (k = 1,2,3)$$

a) Begründen Sie, dass aus wirtschaftlichen Gründen $0 \leq a_{kk} < 1 \quad (k = 1,2,3)$ gefordert werden muss!

Download free eBooks at bookboon.com

b) Die Matrix der Input-Output-Koeffizienten sei

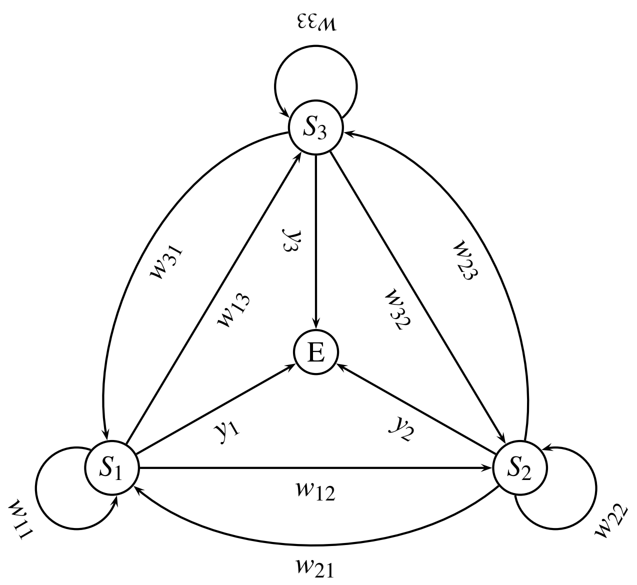
$$A = (a_{kl}) = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Endverbrauchsvektor für den Outputvektor $(200, 150, 100)$!

Berechnen Sie den Outputvektor für den Endverbrauchsvektor $(10, 20, 10)$!

Die oben beschriebenen Lieferungen sind auf zwei verschiedene Weisen formal dargestellt: als Tabelle und als Graph.

	S_1	S_2	S_3	E
S_1	w_{11}	w_{12}	w_{13}	y_1
S_2	w_{21}	w_{22}	w_{23}	y_2
S_3	w_{31}	w_{32}	w_{33}	y_3



Der Sektor S_k steuert mit dem Wert w_{kl} zum Output des Sektors S_l bei. Das Verhältnis $a_{kl} := \frac{w_{kl}}{x_l}$ bezeichnet den relativen Anteil des Wertes der Lieferung von Sektor S_k am Output des Sektors S_l .

Lösung:

a) Da die Sektoren produzierend sind, können die Variablen x_k, y_k, w_{kl}, a_{kl} nur nichtnegative Werte annehmen.

Download free eBooks at bookboon.com

Weiter folgt, dass $0 \leq a_{kl} \leq 1$, denn für $w_{kl} > x_l$ erhält S_l mehr Wert von S_k geliefert als er als Output produziert, selbst für $w_{kl} = x_l$ kann der Sektor S_l nicht mehr als produktiv bezeichnet werden.

Man muss also $0 \leq a_{kl} < 1$ annehmen, insbesonders bedeutet $a_{kk} = 1$, dass der Sektor S_k seinen gesamten Output an sich selbst zurückfließen lässt und damit im Sinne der Volkswirtschaft unproduktiv ist.

b) Mit den „Input-Output-Koeffizienten“ folgt das Gleichungssystem für die Bilanz.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + y_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + y_2 \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + y_3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung von $\vec{y}$ aus vorgegebenem $\vec{x}$:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{y} = \vec{x} - A\vec{x} = E\vec{x} - A\vec{x} = (E - A)\vec{x}$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 - a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Versicherungen bieten eine überraschende Vielzahl von Berufsbildern und Einsatzgebieten – das gilt insbesondere für den Talanx-Konzern und seine Gesellschaften.

Ob als (Wirtschafts-)Informatiker (m/w) in der Software- oder Anwendungsentwicklung, der Administration von Datenbanken, im Projektmanagement, in der Business Intelligence, IT-Architektur oder Digitalisierung – Sie finden bei uns viele Möglichkeiten, Ihre Talente zu entfalten.

Bei uns erwarten Sie ein dynamisches Umfeld, ein ausgesprochen kollegiales Arbeitsklima, ein attraktives Gehalt, eine gute Work-Life-Balance sowie sichere und beständige Perspektiven.

Haben wir Sie neugierig gemacht?

karriere.talanx.com

talanx.
Versicherungen. Finanzen.

HDI TARGO VERSICHERUNG PB Versicherungen neue leben ampega. hannover re

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung von $\vec{x}$ aus vorgegebenem $\vec{y}$:

x_1	x_2	x_3	y
0,3	−0,2	−0,2	10
−0,2	0,4	0	20
−0,1	−0,2	0,6	10
1	2	−6	−100
−2	4	0	200
3	−2	−2	100
1	2	−6	−100
0	8	−12	0
0	−8	16	400
1	2	−6	−100
0	2	−3	0
0	0	4	400
1	2	0	500
0	2	0	300
0	0	1	100
1	0	0	200
0	1	0	150
0	0	1	100

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 \\ 15 & 20 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 24: Ein Markt sei unter drei konkurrierenden Produkten P_k $(k = 1,2,3)$ aufgeteilt.

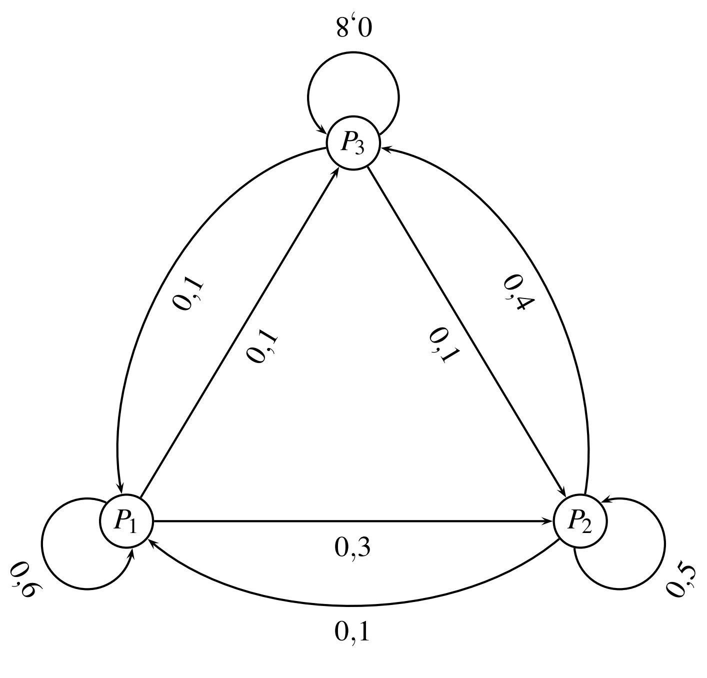
Der Vektor $(0{,}5\,;0{,}4\,;0{,}1)$ gibt die Marktanteile der Produkte zum Zeitpunkt t an.

Die Käuferfluktuation in der Zeitspanne von t bis $t+1$ ist durch die folgende Tabelle gegeben

		nach		
		P_1	P_2	P_3
	P_1	0,6	0,3	0,1
von	P_2	0,1	0,5	0,4
	P_3	0,1	0,1	0,8

a) Berechnen Sie die Marktanteile zu den Zeitpunkten $t+1$ und $t+2$!

b) Gibt es eine stationäre Verteilung, d.h. eine Aufteilung des Marktes, die trotz der Käuferfluktuation wieder zu denselben Marktanteilen für jedes Produkt führt? Berechnen Sie sie gegebenenfalls!



Der Graph stellt die anteilige Fluktuation dar und gibt die selbe Information wie die vorgegebene Tabelle.

Download free eBooks at bookboon.com

Lösung:

a) Sei $\vec{x}^T(t) = (0,5;0,4;0,1)$ der Marktanteilvektor zum Zeitpunkt t. Damit werden die Marktanteile zum Zeitpunkt $t+1$ nach der folgenden Bilanz berechnet.

$$0{,}6x_1(t) + 0{,}1x_2(t) + 0{,}1x_3(t) = x_1(t+1)$$

$$0{,}3x_1(t) + 0{,}5x_2(t) + 0{,}1x_3(t) = x_2(t+1)$$

$$0{,}1x_1(t) + 0{,}4x_2(t) + 0{,}8x_3(t) = x_3(t+1)$$

$$A\vec{x}(t) = \vec{x}(t+1)$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}36 \\ 0{,}29 \end{pmatrix}$$

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Bei unveränderten Fluktuationsanteilen gilt $A\vec{x}(t+1) = \vec{x}(t+2)$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}36 \\ 0{,}29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}275 \\ 0{,}314 \\ 0{,}411 \end{pmatrix}$$

Man hätte auch wegen $\vec{x}(t+2) = A\vec{x}(t+1) = A(A\vec{x}(t)) = A^2\vec{x}$ zunächst

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}34 & 0{,}26 \\ 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}16 & 0{,}69 \end{pmatrix}$$

berechnen können und mit $A^2\vec{x}(t)$ die Käuferanteile zum Zeitpunkt $t+2$ bestimmen können.

b) Wenn $\vec{x}(t+1) = \vec{x}(t)$ gilt, heißt die Marktverteilung *stationär*.

In diesem Fall ist $\vec{x}$ Lösung des folgenden Gleichungssystems.

$$A\vec{x} = \vec{x} \Longleftrightarrow A\vec{x} - \vec{x} = \vec{o} \Longleftrightarrow (A-E)\vec{x} = \vec{o}$$

Eine Lösung dieses homogenen Gleichungssystems gibt die Anfangsverteilung, die trotz Fluktuation unverändert bleibt.

$$\begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & -0{,}2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{o}$$

Da die dritte Matrixzeile die Differenz der ersten beiden ist, hat das System eine Lösung ungleich $\vec{o}$.

Im folgenden Tableau ist die rechte Spalte nicht notiert, da sie nur Nullen enthält.

Download free eBooks at bookboon.com

Nach Vertauschung der ersten mit der dritten Zeile und Multiplikation mit 10 erhält man

x_1	x_2	x_3
1	4	-2
3	-5	1
-4	1	1
1	4	-2
0	-17	7
0	17	-7
1	4	-2
0	17	-7
1	0	$-\frac{6}{17}$
0	1	$-\frac{7}{17}$

Sei $r := x_3$ als Parameter gewählt:

$$x_1 = \frac{6}{17}r \quad , \quad x_2 = \frac{7}{17}r \quad , \quad x_3 = r \; .$$

Der Markt ist vollständig unter den drei Produkten aufgeteilt, also gilt

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \text{also} \quad \frac{30}{17}r = 1 \quad \text{d.h.} \quad r = \frac{17}{30} \; .$$

Damit führt

$$\vec{x}^T = \frac{17}{30}\left(\frac{6}{17}; \frac{7}{17}; 1\right) = \frac{1}{30}(6; 7; 17)$$

zu einer stationären Marktverteilung.

Download free eBooks at bookboon.com

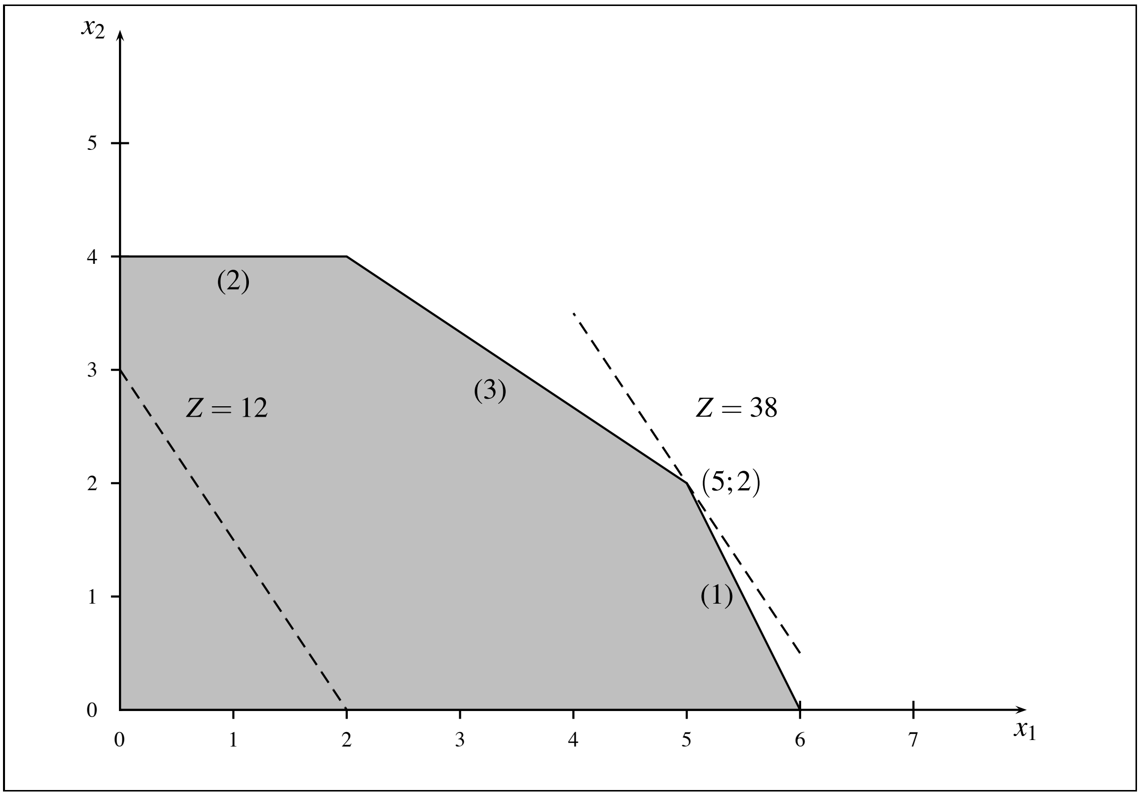
7. Lineare Optimierung

7.1 Graphisches Verfahren

A 1: Das Lineare Programm soll gelöst werden.

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1, x_2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 16 \\ z = 6x_1 + 4x_2 & \quad \text{ist zu maximieren.} \end{aligned}$$

Die Restriktionen sind mit (1),(2) und (3) bezeichnet.

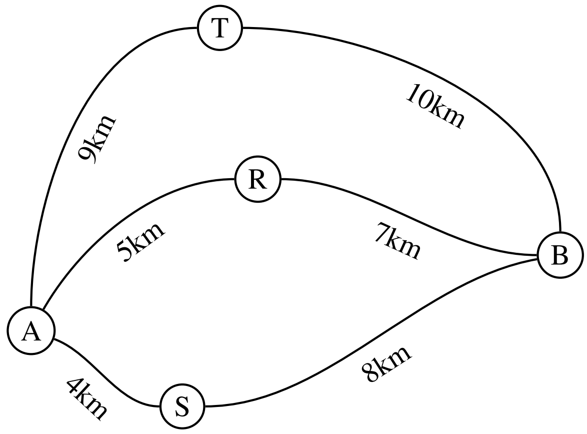


In $(x_1, x_2) = (5;2)$ nimmt z sein Maximum an mit $z(5,2) = 38$.

A 2:

In den Rangierbahnhöfen A und B stehen 18 bzw. 12 leere Güterwaggons.
In den Bahnhöfen R,S und T werden 11, 10 bzw. 9 Waggons benötigt.

Wie sind die Waggons zu leiten, um die Gesamtlänge der von allen Waggons zurückgelegten Leerfahrten zu minimieren?



Lösung: Da genau soviele Waggons bereitstehen, wie angefordert sind, kann das Problem als eine Aufgabe mit zwei Variablen formuliert werden.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Es sind die Zahl der Wagen von jedem Rangierbahnhof zu jedem anfordernden Bahnhof zu bestimmen. In diesem Fall werden alle vorhandenen Wagen angefordert, daher kann die Variablenzahl von sechs auf zwei reduziert werden. Seien x, y die Zahl der Wagen von A nach R bzw. von A nach S.

	R	S	T
A	x	y	$18-x-y$
B	$11-x$	$10-y$	$x+y-9$

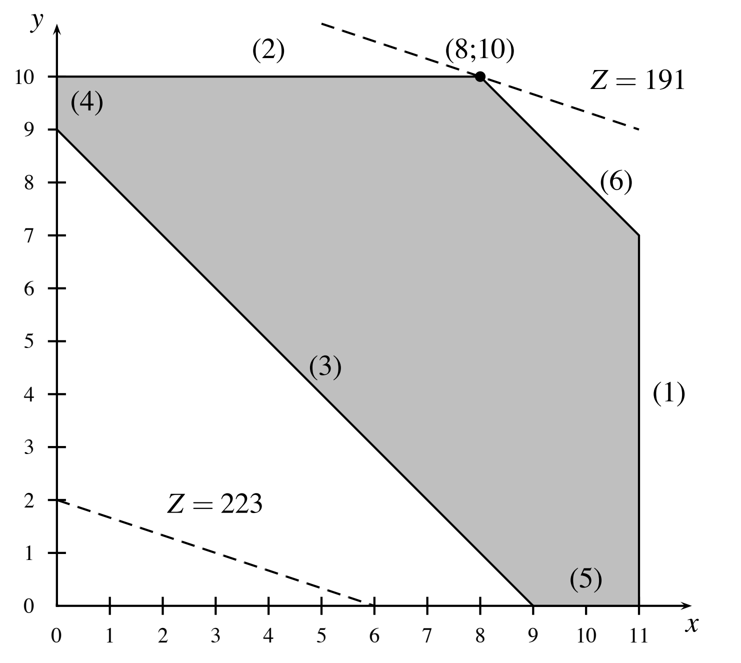
Von A nach T müssen $18-x-y$ Wagen geleitet werden, weil alle in A verfügbaren Wagen benötigt werden. Von B werden jeweils die restlichen Anforderungen bedient.

Jeder dieser Züge soll höchstens so lang sein, dass er die Anforderung des Zielbahnhofs allein erfüllen kann. Das führt auf die Restriktionen:

$$\begin{array}{llll}
A \to R & & (1) & x \le 11 \\
A \to S & & (2) & y \le 10 \\
A \to T & 18-x-y \le 9 & (3) & x+y \ge 9 \\
B \to R & 11-x \le 11 & (4) & 0 \le x \\
B \to S & 10-y \le 10 & (5) & 0 \le y \\
B \to T & x+y-9 \le 9 & (6) & x+y \le 18
\end{array}$$

Zielfunktion:

$$Z(x,y) = 5x+4y+9(18-x-y)+7(11-x)+8(10-y)+10(x+y-9) = 229-x-3y \to \min$$



In $(x,y) = (8;10)$ nimmt Z sein Minimum an mit $Z(8,10) = 191$.

Dazu müssen folgende Züge zusammen gestellt werden:

	R	S	T
A	8	10	0
B	3	0	9

A 3: Zur Herstellung eines bestimmten Kunststeins wird ein Rohmaterial mit den Bestandteilen B_1, B_2 und B_3 benötigt, das zwei Steinbrüche S_1 und S_2 mit verschiedenen Anteilen und zu verschiedenen Preisen anbieten.

Bestandteil	S_1 : Anteil je t	S_1 : Anteil je t	Mindestbedarf
B_1	0,2t	0,1t	1,4t
B_2	0,1t	0,1t	1,0t
B_3	0,0t	0,1t	0,3t
Preise	6 EUR/t	8 EUR/t	

Welche Mengen müssen von den beiden Steinbrüchen bezogen werden, um die Rohstoffkosten zu minimieren?

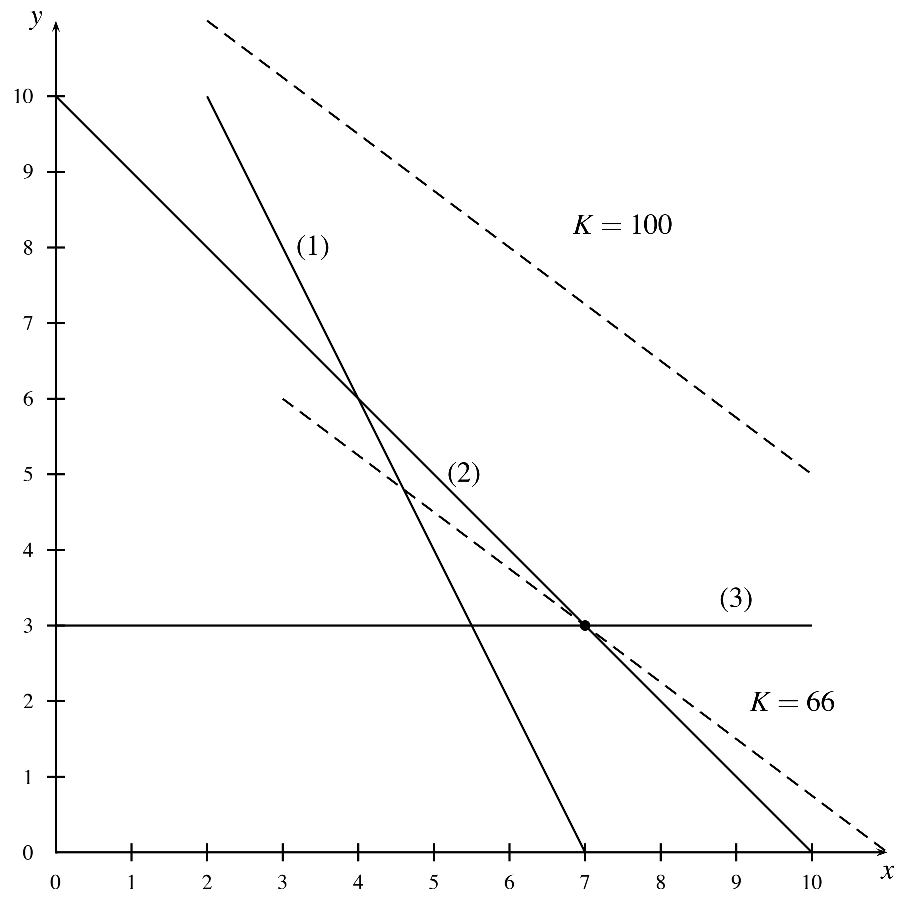
Lösung: Seien x und y die Bezugsmengen (in t) aus S_1 und S_2 . Dann sind die folgenden Restriktionen einzuhalten:

$$\begin{array}{lll} B_1: & 0{,}2x + 0{,}1y \geq 1{,}4 & 2x + y \geq 14 \\ B_2: & 0{,}1x + 0{,}1y \geq 1{,}0 & x + y \geq 10 \\ B_3: & 0{,}1y \geq 0{,}3 & y \geq 3 \end{array}$$

mit der Zielfunktion

$$K(x,y) = 6x + 8y \rightarrow \min \ .$$

Download free eBooks at bookboon.com



Die Geraden (2) und (3) schneiden sich im Punkt $P(7;3)$. Beim Bezug von 7 t Material aus dem ersten Steinbruch und 3 t aus dem zweiten entstehen mit 66 EUR die geringsten Kosten.

$$\begin{aligned} B_1: &\quad 0{,}2 \cdot 7 + 0{,}1 \cdot 3 = 1{,}7 > 1{,}4 \\ B_2: &\quad 0{,}1 \cdot 7 + 0{,}1 \cdot 3 = 1{,}0 \\ B_3: &\quad 0{,}1 \cdot 3 = 0{,}3 \end{aligned}$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 4: Ein Unternehmen stellt zwei Produkte A und B her. Dabei sind die folgenden Beschränkungen zu beachten:

Für eine Einheit von A sind eine Einheit eines bestimmten Produktionsfaktors F sowie zwei Arbeitsstunden erforderlich und für eine Einheit von B drei Einheiten von F sowie eine Arbeitsstunde.

Es stehen 15 Einheiten des Faktors F und 12 Arbeitsstunden zur Verfügung.

Für beide Produkte entstehen Stückkosten von einer Geldeinheit und das Kostenbudget beträgt 7 GE.

Es werden die Deckungsbeiträge von 4 GE und 5 GE für eine Einheit von A bzw. von B erzielt.

Welche Mengen müssen produziert werden, um den Gewinn zu maximieren?

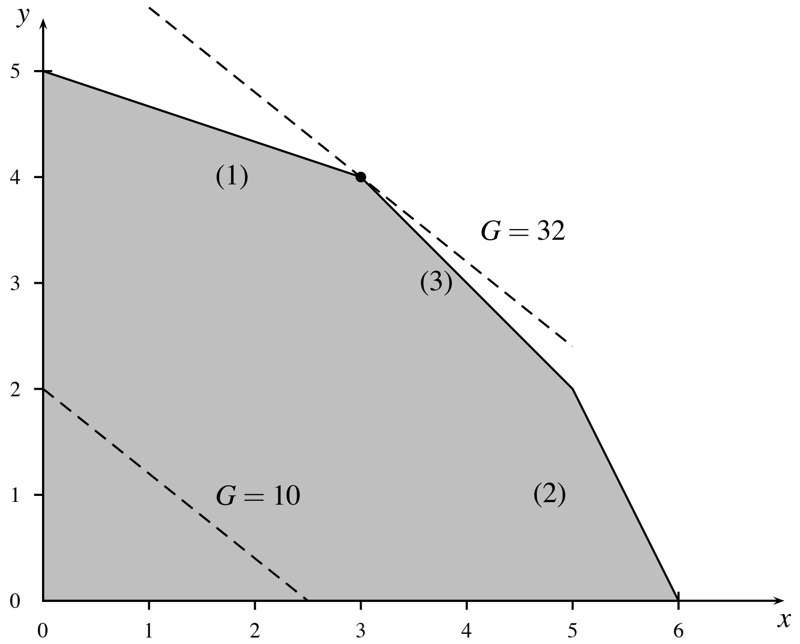
Überprüfen Sie auch den Fall der Deckungsbeiträge 1 GE und 3 GE!

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Lösung: Werden mit x und y die Mengen der Produkte A bzw. B in den entsprechenden Einheiten bezeichnet, führen die Bedingungen zu der Optimierungsaufgabe:

	$0 \leq x,y$	NN
(1)	$x+3y \leq 15$	Faktor F
(2)	$2x+y \leq 12$	Arbeitszeit
(3)	$x+y \leq 7$	Budget

$$G(x,y) = 4x+5y \rightarrow \max$$



Die Geraden (1) und (3) schneiden sich im Punkt $P(3;4)$. Bei der Produktion von drei Einheiten von A und vier Einheiten von B wird der größte Gewinn erzielt. Er ist $G(3,4) = 32$. Dabei werden der Faktor F und das Budget vollständig verbraucht und es bleiben zwei ungenutzte Arbeitsstunden.

Bei der Gewinnfunktion $H(x,y) = x+3y$ liegen die Geraden gleichen Gewinns *parallel* zur ersten Restriktionsgeraden. Alle Punkte der Strecke $\overline{(0;5)(3;4)}$ liefern die optimale Lösung.

Download free eBooks at bookboon.com

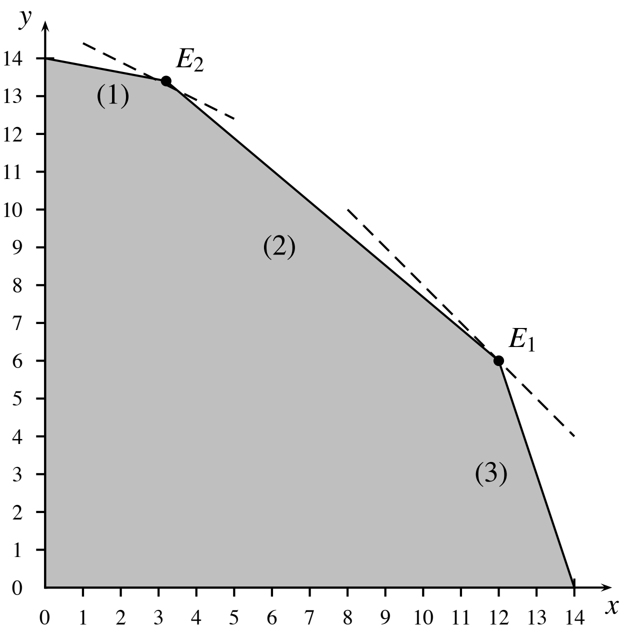
A 5: Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Linearen Optimierungsaufgaben für die verschiedenen Zielfunktionen!

$$0 \leq x, 0 \leq y \qquad Z_1 := 5x + 5y \to \max$$

$$x + 5y \leq 70 \qquad Z_2 := 5x + 6y \to \max$$

$$5x + 6y \leq 96 \qquad Z_3 := 3x + 6y \to \max$$

$$3x + y \leq 42$$



Ecken und Steigungen der Isoquanten:

$E_1 = (12;6) \qquad E_2 = (\frac{60}{19}, \frac{254}{19})$

$m_1 = -1 \qquad m_2 = -\frac{5}{6} \qquad m_3 = -\frac{1}{2}$

Maxima der Zielfunktionen:

$Z_1(12,6) = 90$

$Z_2(x,y) = Z_2(12,6) = 96$
auf der Strecke $\overline{E_1E_2}$

$Z_3(\frac{60}{19}, \frac{254}{19}) = \frac{1704}{19} = 89{,}7$

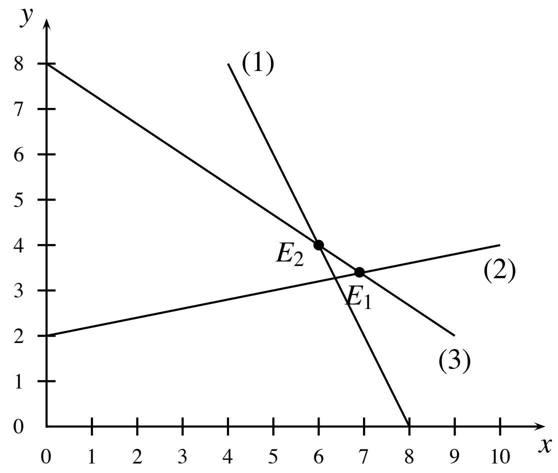
$$0 \leq x, 0 \leq y \qquad Z_1 := 6x + 4y \to \min$$

$$2x + y \geq 16 \qquad Z_2 := 6x + 9y \to \min$$

$$-x + 5y \geq 10 \qquad Z_3 := 6x + 18y \to \min$$

$$2x + 3y \geq 24$$

Download free eBooks at bookboon.com



Ecken und Steigungen der Isoquanten:

$$E_1 = \left(\frac{90}{13}, \frac{44}{13}\right) \qquad E_2 = (6,4)$$

$$m_1 = -\frac{3}{2} \qquad m_2 = -\frac{2}{3} \qquad m_3 = -\frac{1}{3}$$

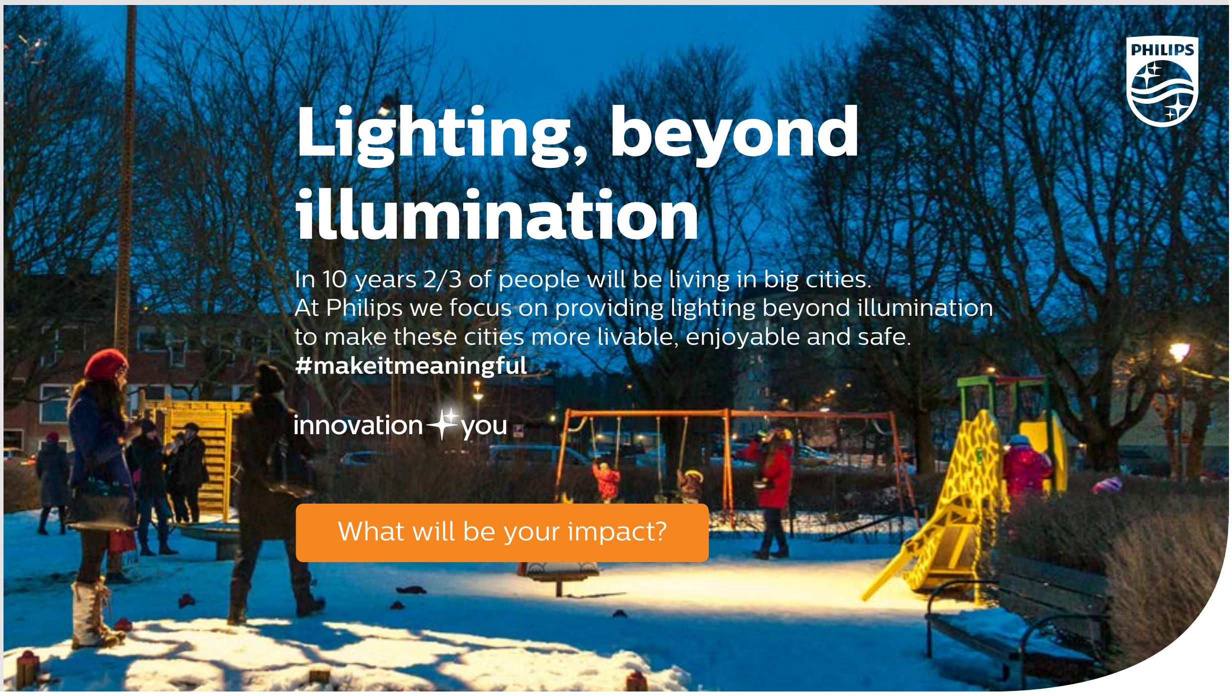
Minima der Zielfunktionen:

$$Z_1(6;4) = 52$$

$$Z_2(x,y) = Z_2(6;4) = 72$$

auf der Strecke $\overline{E_1E_2}$

$$Z_3\left(\frac{90}{13}, \frac{44}{13}\right) = \frac{1332}{13} = 102{,}5$$



www.philips.com/careers

PHILIPS

Download free eBooks at bookboon.com

Click on the ad to read more

7.2 Simplexverfahren

A 6: In einem Bürohaus soll eine Fläche von $1500\,\mathrm{m}^2$ mit Teppich belegt werden. Mindestens $400\,\mathrm{m}^2$ sollen mit der Qualität A und der Rest mit den Sorten B oder C belegt werden. Für Reinigungskosten stehen jährlich 7500 EUR zur Verfügung.

Sorte	Preis in EUR/m^2	Reinigung in EUR/m^2
A	60	4
B	30	6
C	20	7

Bestimmen Sie die Anteile der Sorten so, dass bei einer Nutzungsdauer von acht Jahren die Kosten möglichst gering sind!

Lösung: Seien x_1, x_2, x_3 die Flächeninhalte (in m^2) der mit der Qualität A,B und C zu belegenden Fußböden.

Zunächst kann die Zahl der Variablen auf zwei reduziert werden: $x_1 = 1500 - x_2 - x_3$.

Wegen $x_1 \geq 400$ gilt $x_2 + x_3 \leq 1\,100$.

Reinigungskosten: $4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 7\,500 \Longrightarrow 6\,000 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7\,500$.

Anschaffungskosten: $K(x_1, x_2, x_3) = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \quad K(x_2, x_3) = 90\,000 - 30x_2 - 40x_3$

Kosten für acht Jahre:

$$f(x_2, x_3) = 90\,000 - 30x_2 - 40x_3 + 8(6\,000 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$f(x_2, x_3) = 128\,000 - 14x_2 - 16x_3 \rightarrow \min$$

$$g(x_2, x_3) = 14x_2 + 16x_3 \rightarrow \max$$

Download free eBooks at bookboon.com

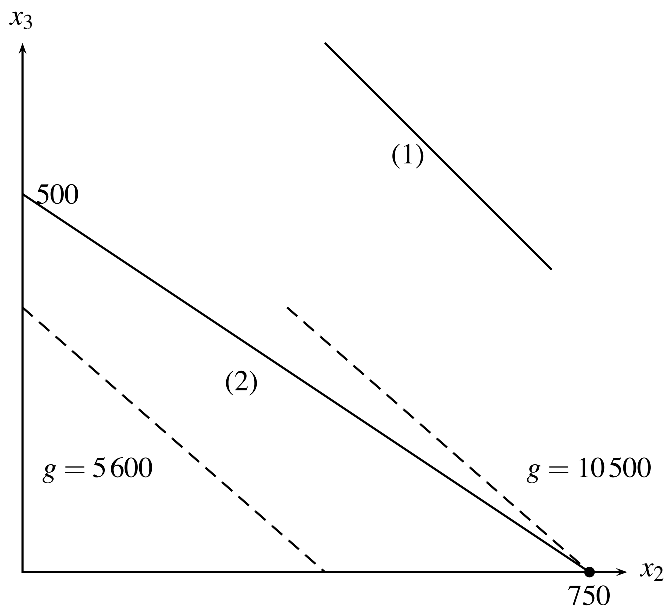
Damit ist das folgende Lineare Programm gegeben:

$$0 \leq x_2, x_3$$

$$(1) \quad x_2 + x_3 \leq 1\,100$$

$$(2) \quad 2x_2 + 3x_3 \leq 1\,500$$

$$14x_2 + 16x_3 \to \max$$



Die zweite Restriktion ist strenger als die erste, damit hat in diesem Fall nur sie eine Bedeutung.
An der Stelle $(x_2, x_3) = (750; 0)$ nimmt g sein Maximum und damit f sein Minimum an.
Damit ist $(x_1, x_2, x_3) = (750, 750, 0)$ die Lösung für die geringsten Kosten im Verlauf von acht Jahren.
Sie betragen $60 \cdot 750 + 30 \cdot 750 + 8(4 \cdot 750 + 6 \cdot 750) = 127\,500$

A 7: Ein Hersteller will aus drei Grundsubstanzen K, L und M einen Badezusatz mischen, er hat von K und L je 100 kg und 50 kg von M am Lager.

Die Preise der Substanzen betragen 15 EUR/kg für K, 12 EUR/kg für L und 10 EUR/kg für M.

Eine Mischung hat die gewünschten Eigenschaften, wenn sie mindestens 25 % von K und höchstens 50 % von M enthält. Das Produkt soll für 14 EUR/kg angeboten werden.

Bestimmen Sie die Mengen der Grundsubstanzen, bei denen der größte Gewinn erzielt werden kann!

Download free eBooks at bookboon.com

Lösung: Seien x_1, x_2, x_3 die verwendeten Mengen der Substanzen K,L und M.

$$0 \leq x_1, x_2, x_3$$

$$\begin{array}{ll}
(1) & x_1 \leq 100 \\
(2) & x_2 \leq 100 \\
(3) & x_3 \leq 50 \\
(4) & -3x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\
(5) & -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0
\end{array}$$

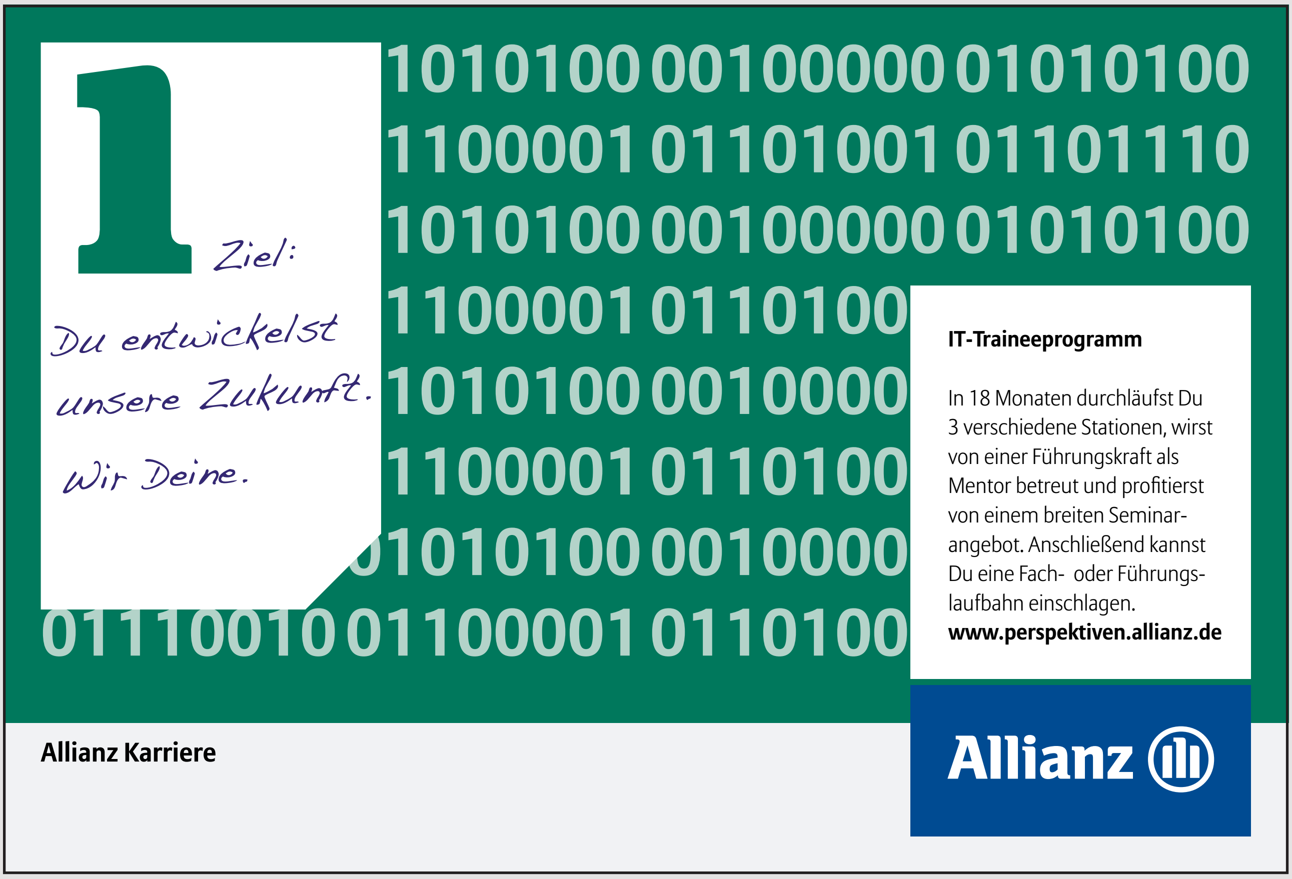
$$14(x_1 + x_2 + x_3) - 15x_1 - 12x_2 - 10x_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$

Die Ungleichungen 4 und 5 wurden durch Umformung von

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq \frac{1}{2}$$

gewonnen.

Pro Kilogramm bringen L und M 2 EUR bzw. 4 EUR Gewinn, aber K verursacht 1 EUR Verlust. Man verwende also möglichst viel von L und M und dazu dann von K möglichst wenig.



Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

Mit 100 kg von L und 50 kg von M ist gewährleistet, dass der Anteil von M nicht 50 % übersteigt. Diese 150 kg dürfen höchstens 75 % der Mischung ausmachen, also müssen mindestens 50 kg von K dazu kommen.

Der Gewinn beträgt: $G(50,100,50) = -50 + 2\cdot 100 + 4\cdot 50 = 350$.

Für die Durchführung des Simplexverfahrens ist es günstig, statt mit den verwendeten Mengen mit den Resten zu rechnen.

$$k = 100 - x_1 \quad l = 100 - x_2 \quad m = 50 - x_3$$

$$0 \le k, l, m$$

$$\begin{array}{ll} (1) & k \le 100 \\ (2) & l \le 100 \\ (3) & m \le 50 \\ (4) & 3k - l - m \le 150 \\ (5) & k + l - m \le 150 \end{array}$$

$$k - 2l - 4m + 300 \rightarrow \max$$

	k	l	m	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5		
s_1	1	0	0	1	0	0	0	0	100	100
s_2	0	1	0	0	1	0	0	0	100	/
s_3	0	0	1	0	0	1	0	0	50	/
s_4	$\boxed{3}$	-1	-1	0	0	0	1	0	150	50
s_5	1	1	-1	0	0	0	0	1	150	150
Z	-1	2	4	0	0	0	0	0	300	
s_1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	0	50	
s_2	0	1	0	0	1	0	0	0	100	
s_3	0	0	1	0	0	1	0	0	50	
k	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	50	
s_5	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	100	
Z	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	350	

Bei $(k,l,m) = (50;0;0)$ also $(x_1,x_2,x_3) = (50;100;50)$ wird der Maximalgewinn $Z = 350$ erzielt. Bemerkung: $(s_1,s_2,s_3) = (x_1,x_2,x_3)$.

Download free eBooks at bookboon.com

A 8: Hier sollen gleichzeitig zwei Zielfunktionen verarbeitet werden.

$$0 \leq x_1, x_2$$

$$\begin{array}{ll} (1) & x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ (2) & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ (3) & x_1 + x_2 \leq 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
s_1	1	$\boxed{3}$	1	0	0	15	5
s_2	2	1	0	1	0	12	12
s_3	1	1	0	0	1	7	7
Z_1	-4	-5	0	0	0	0	
Z_2	-1	-3	0	0	0	0	
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	5	15
s_2	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	7	$\frac{21}{5}$
s_3	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	2	3
Z_1	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	25	
Z_2	0	0	1	0	0	15	
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	4	
s_2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	2	
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3	
Z_1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	32	

Maxima: $Z_1(3;4) = 32$ und $Z_2(0;5) = 15$

Download free eBooks at bookboon.com

A 9: Ein Geldbetrag von höchstens 1 Mio. Euro ist so anzulegen, dass der maximale Ertrag erzielt wird.

Dazu stehen vier Anlagen zur Auswahl mit unterschiedlichen Renditen und den entsprechenden Risiken.

Anlage	A_1	A_2	A_3	A_4
Rendite	10 %	20 %	40 %	100 %
Risiko	0	2	5	10

Ein großer Risikofaktor pro Geldeinheit bedeutet ein hohes Risiko, eine Verdoppelung des Risikos wird in einer Verdoppelung des Faktors dargestellt.

In die risikolose Anlage A_1 soll mindestens ein Zehntel des Betrages investiert werden.

Der durchschnittliche Risikofaktor pro Geldeinheit soll nicht größer als fünf sein.

Lösung: Seien x_i $(i = 1, \dots 4)$ die in die Anlagen A_i investierten Beträge.

$$0 \leq x_i$$


Sind Sie bereit für IBM?
Lieben Sie Herausforderungen?
Möchten Sie innovative Lösungen für führende Unternehmen entwickeln?
Wollen Sie dem weltweit größten Beratungsunternehmen angehören?
Entdecken Sie Ihre vielfältigen Karrieremöglichkeiten. IBM ist auf der Suche nach den besten und hellsten Köpfen. Nach Menschen, die Möglichkeiten entdecken, wo andere nur Probleme sehen. Nach Mitarbeitern, die auch Mitgestalter sein wollen. Wir suchen diese Menschen aus dem Anspruch heraus, die Welt täglich ein bisschen besser zu machen. Sie sind ideengetrieben, zukunftsorientiert und möchten schon heute an den Lösungen von morgen arbeiten? Dann sollten wir uns kennenlernen!
Machen wir den Planeten ein bisschen smarter.
ibm.com/start/de
Alle Bezeichnungen, die in der männlichen Sprachform verwendet werden, schließen sowohl Frauen als auch Männer ein. IBM schafft ein offenes und tolerantes Arbeitsklima und ist stolz darauf, ein Arbeitgeber zu sein, der für Chancengleichheit steht. IBM, das IBM Logo und ibm.com sind Marken oder eingetr. Marken der International Business Machines Corp. in den Vereinigten Staaten und/oder anderen Ländern. Andere Namen von Firmen, Produkten und Dienstleistungen können Marken oder eingetr. Marken ihrer jeweiligen Inhaber sein. © 2010 IBM Corp. Alle Rechte vorbehalten.
Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10^6$	Budgetbeschränkung
$2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 5 \cdot 10^6$	Risikobeschränkung
$x_1 \geq 10^5$	Mindestbetrag für A_1

$$Z = 1{,}1x_1 + 1{,}2x_2 + 1{,}4x_3 + 2x_4 \to \max$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
s_1	1	1	1	1	1	0	0	10^6
s_2	0	2	5	10	0	1	0	$5 \cdot 10^6$
s_3	$\boxed{-1}$	0	0	0	0	0	1	-10^5
Z	$-1{,}1$	$-1{,}2$	$-1{,}4$	-2	0	0	0	0
s_1	0	1	1	1	1	0	1	$9 \cdot 10^5$
s_2	0	2	5	$\boxed{10}$	0	1	0	$5 \cdot 10^6$
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10^5
Z	0	$-1{,}2$	$-1{,}4$	-2	0	0	$-1{,}1$	$1{,}1 \cdot 10^5$
s_1	0	0,8	0,5	0	1	$-0{,}1$	$\boxed{1}$	$4 \cdot 10^5$
x_4	0	0,2	0,5	1	0	0,1	0	$5 \cdot 10^5$
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	10^5
Z	0	$-0{,}8$	$-0{,}4$	0	0	0,2	$-1{,}1$	$1{,}11 \cdot 10^6$
s_3	0	0,8	0,5	0	1	$-0{,}1$	1	$4 \cdot 10^5$
x_4	0	0,2	0,5	1	0	0,1	0	$5 \cdot 10^5$
x_1	1	0,8	0,5	0	1	$-0{,}1$	0	$5 \cdot 10^5$
Z	0	0,08	0,15	0	1,1	0,09	0	$1{,}55 \cdot 10^6$

An der Stelle $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 \cdot 10^5; 0; 0; 5 \cdot 10^5)$ nimmt Z sein Maximum an mit

$$Z_{\max} = 1{,}1 \cdot 5 \cdot 10^5 + 2 \cdot 5 \cdot 10^5 = 15{,}5 \cdot 10^5 = 1{,}55 \cdot 10^6 \,.$$

Download free eBooks at bookboon.com

A 10: Eine Werkstatt stellt die Produkte A und B her und bearbeitet beide auf einer Fräsmaschine und einer Drehbank.

Das Produkt B wird auf der Fräsmaschine drei Stunden und auf der Drehbank eine Stunde bearbeitet, A braucht auf jeder Maschine zwei Stunden.

Die Fräsmaschine kann täglich bis zu zwölf Stunden und die Drehbank bis zu acht Stunden eingesetzt werden. Der Gewinn beträgt bei A 150 EUR pro Stück und bei B 225 EUR pro Stück.

Wieviele Stücke müssen für die Maximierung des Gewinns hergestellt werden?

Lösung: Seien x, y die Stückzahlen für A und B.

$$
\begin{array}{rr}
0 \leq x, y & \\
2x + 3y \leq 12 & \text{Fräsmaschine} \\
2x + y \leq 8 & \text{Drehbank} \\
\hline
\end{array}
$$

$$Z = 150x + 225y \rightarrow \max$$

	x	y	u	v	b	q
u	2	$\boxed{3}$	1	0	12	4
v	2	1	0	1	8	8
Z	−150	−225	0	0	0	
y	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	4	6
v	$\boxed{\frac{4}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	4	3
Z	0	0	75	0	900	
y	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	
x	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	
Z	0	0	75	0	900	

Download free eBooks at bookboon.com

Im zweiten Austauschschritt kann auch x in die Basis gebracht werden; dabei wächst Z aber nicht mehr.

An den Stellen $(0;4)$ und $(3;2)$ nimmt Z sein Maximum mit dem Wert 900 an.

Darüberhinaus auch in allen Punkten der Verbindungsstrecke dieser beiden Ecken, jedes Zahlenpaar mit der Eigenschaft $[t0+(1-t)3;t4+(1-t)2] \quad 0 \leq t \leq 1$ ist eine Maximalstelle von Z.

Im Innern der Strecke gibt es allerdings keine Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

Download free eBooks at bookboon.com
Click on the ad to read more