Formale Grundlagen der Informatik II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
2. Juli 2014

Gruppenübung

Aufgabe G10
$\preceq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \land x_3 \preceq x_2) \land \forall x_4 \left((x_4 \preceq x_1 \land x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \right) \Big).$$

Sei $\mathscr{A} = (A, \preceq^{\mathscr{A}})$ mit $A = \{0,1,2\}$ und $\preceq^{\mathscr{A}} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,2)\}$.

(a) Zeigen Sie $\mathscr{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.
Hinweis:
  i. Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathrm{SF}(\varphi')$.
  ii. Skizzieren Sie die Struktur $\mathscr{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.
  iii. Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \land x_3 \preceq x_2) \land \forall x_4 \left((x_4 \preceq x_1 \land x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \right) \Big)$$

äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

Aufgabe G11
Sei Φ die Menge der folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z ((x < y \land y < z) \to x < z)\\
&\forall x \neg (x < x)\\
&\forall x \forall y (Exy \to x < y)\\
&\forall x \exists y Exy
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass
  i. in jedem Modell $(A, E, <)$ von Φ die Relation E keinen Kreis enthält;
  ii. Φ kein endliches Modell hat.

(b) Konstruieren Sie ein Herbrandmodell von Φ.

(c) Sei

$$\psi := \forall x \forall y \left((x < y \land \neg \exists z (x < z \land z < y)) \to Exy \right) .$$

Gilt ψ in dem Modell aus (b)?
Beweisen Sie, dass $\Phi \models \psi$, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe G12

Betrachten Sie folgende offene Theorie $\mathcal{T}$ in der Sprache mit $=$, einem Konstantensymbol 0, zwei 1-stelligen Funktionssymbolen S und f und dem Axiom $\forall x\,(S(x) \neq 0)$.

(a) Zeigen Sie (informell) $\mathcal{T} \models \exists x\,\big(f(S(f(x))) \neq x\big)$.

(b) Wenden Sie Herbrands Theorem für offene Theorien an, um endlich viele geschlossene Terme der obigen Sprache zu bestimmen $t_1, \dots, t_n$ mit

$$\mathcal{T} \models \bigvee_{j=1}^{n} \big(f(S(f(t_j))) \neq t_j\big).$$

Hausübung

Aufgabe H10

In der folgenden Aufgabe sind f, g Funktionssymbole und R, S Relationssymbole mit jeweils der passenden Stelligkeit. Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine äquivalente Formel in

(i) pränexer Normalform,

(ii) Skolemnormalform der in (i) gewählten Pränexnormalform und

(iii) Herbrandnormalform der in (i) gewählten Pränexnormalform

an:

(a) $(\forall x Rx) \vee (\exists x \neg Rx)$

(b) $(\neg \forall x Rxgz) \rightarrow \forall y(Sfy \vee y = z)$

Aufgabe H11

(a) Geben Sie für folgende FO-Formeln jeweils eine Skolemnormalform an:

   i. $\forall x \exists y Rxy$

   ii. $\forall x(\forall y Ryy \rightarrow \exists y Ryf(x))$

(b) Geben Sie Herbrandmodelle für die Skolemnormalformen aus (a) an.

Aufgabe H12

Wir betrachten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x[\exists y(Rxy \wedge \neg\exists x Ryx) \vee \forall y \exists z(Rxz \wedge Rzy)] \\
\varphi_2 &:= \exists x[\forall y \neg Rxy \rightarrow \exists y \forall z(Rxy \wedge Rzy)] \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y[Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy \wedge \neg\exists x(Rzx \wedge Rxz))]
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie äquivalente Formeln in Pränex-Normalform an.

(b) Wandeln Sie ihre Ergebnisse aus (a) in Skolem-Normalform um.

(c) Betrachten Sie die Formel $\varphi := \forall x \exists y Rxy$ und die Skolem-Normalform $\psi := \forall x Rxsx$.

   i. Beweisen Sie, dass $\psi \models \varphi$ gilt.

   ii. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass $\varphi \not\models \psi$.