Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Johanna Biehl
M.Sc. Paloma Schäfer Aguilar

SoSe 2019
23./24./26. April 2019

Umzug Lernzentrum Mathematik: Bitte beachten Sie, dass im kommenden Semester die offene Sprechstunde des LZMs in S1|08 in Raum 201 statt finden wird. Das alte LZM ist ab dem Sommersemester 2019 vorübergehend geschlossen.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lagrangesches Interpolationspolynom)
Es seien folgende Daten gegeben:

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
y_k	−6	0	2	6

(1)

(a) Bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom p_3 vom Grad $n \leq 3$, das die Interpolationsbedingungen für (1) erfüllt.

(b) Zeichnen Sie das Interpolationspolynom und die Interpolationspunkte.

Aufgabe G2 (Hinzunahme von Stützstellen)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$.

(a) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom p_2 vom Höchstgrad 2, welches f an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, und $x_2 = 1$ interpoliert, d.h. folgender Interpolationsbedingung genügt:

$$p_2(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

(b) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom p_3 vom Höchstgrad 3, welches f an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ interpoliert.

(c) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom p_5 vom Höchstgrad 5, welches f an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1.5$ und $x_5 = 20$ interpoliert.

Aufgabe G3 (Inverse Interpolation)
Es soll eine Näherung für die **Inverse Funktion** zu

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$$

bestimmt werden.

(a) Begründen Sie, warum f invertierbar ist.

(b) Die Funktion f wird an folgenden Stützstellen ausgewertet: $x_0 = 1$, $x_1 = e$, $x_2 = e^2$. (e ist die Eulersche Zahl $\exp(1)$.) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Auswertungen eine Näherung p_2 für f^{-1}. Dabei soll p_2 ein Polynom vom Höchstgrad 2 sein.

(c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus (b) um eine näherungsweise Lösung $\tilde{x}$ der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}$ zu erhalten. Vergleichen Sie ihr Ergebnis $\tilde{x}$ mit der tatsächlichen Lösung $\bar{x} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Newtonsche Interpolationsformel)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,2] \to [-1,1] : x \mapsto \sin(\pi x)$$

und die Stützstellen $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

(a) Berechnen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen.

(b) Geben Sie eine obere Schranke für den Abstand von f und dem Interpolationspolynom an.

(c) Um welchen Faktor verbessert sich die Schranke, wenn die Stützstellen $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right\}$ hinzugefügt werden?

Aufgabe H2 (Lagrangesches Interpolationspolynom)
Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Lagrange-Interpolationspolynoms p_2 zwischen den Stützstellen

$$x_0 = \frac{1}{4}, \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

interpoliert werden. Vergleichen Sie die Punktauswertungen von f und p_2 in den Punkten $\tilde{x} = \frac{1}{2}$ und $\hat{x} = 2$ und skizzieren Sie die Graphen von f und p_2.

Aufgabe H3 (Inverse Interpolation)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1] \to \left[-1, \tfrac{3}{4}\right] : x \mapsto x^2 - \frac{1}{4^x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f eine Inverse Funktion besitzt.

(b) Berechnen Sie das Newtonsches Interpolationspolynom vom Grad 2 zur *Inversen Funktion* von f. Verwenden Sie dabei die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ (von f).