Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2013**
Prof. Dr. Stefan Ulbrich **4. Juni 2013**
Dipl.-Math. Hannes Meinlschmidt
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Polynominterpolation vs. Lineare Splines)
Gegeben seien die folgenden Messwerte

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	0	0	0	0	1	0	0	0	0

(a) Zeichnen Sie die Messwerte in ein Koordinatensystem ein und überlegen Sie sich, wie der funktionale Zusammenhang zwischen x und y aussehen könnte. Zeichnen Sie ihren Vorschlag in die Skizze ein. Diskutieren Sie Ihren Vorschlag mit Ihren Nachbarn.

(b) Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p_8 vom Grad $n \leq 8$. Werten Sie p_8 an den Stellen $-4, -\frac{7}{2}, -3, \ldots, 4$ (auf 2 Nachkommastellen genau) aus und tragen Sie Ihr Ergebnis in eine Wertetabelle ein. Sie müssen p_8 nicht in einer speziellen Form angeben.

Hinweis: Wer nicht gleich losrechnet, sondern sich erst Gedanken über die geeignete Vorgehensweise macht, kann sich hier einiges an Aufwand sparen.

(c) Zeichnen Sie die Punkte aus der Wertetabelle aus (b) in die Zeichnung aus (a) ein und skizzieren Sie den Verlauf von p_8, indem Sie diese Punkte durch eine geeignete Kurve verbinden.

(d) Zeichnen Sie den linearen Spline zur Zerlegung $\Delta = \{-4, -3, \ldots, 4\}$ in die Skizze aus (a) und (c) ein und vergleichen Sie diesen mit dem Polynom p_8. Welche Funktion kommt Ihrem Vorschlag aus Aufgabenteil (a) am nächsten? Welches Interpolationsverfahren ist hier geeigneter? Warum?

Aufgabe G2 (Interpolationsfehler)
Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,2] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin(\pi x).$$

Die Abbildung f soll nun durch Interpolation an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_4$ angenähert werden.

(a) Wir wählen die Stützstellen äquidistant auf $[0,2]$, d.h. $x_k = 0 + \frac{k}{2}$, $k = 0, \ldots, 4$.
   i. Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler der Polynominterpolation vom Grad $n \leq 4$ an.
   ii. Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler der linearen Spline-Interpolation zur Zerlegung $\Delta = \{x_i \, : \, i = 0, \ldots, 4\}$ an.

(b) Wir wollen nun an den Tschebyscheff-Abszissen

$$\hat{x}_k = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{b+a}{2}, \quad k = 0, \ldots, 4$$

interpolieren.

i. Geben Sie eine bessere Abschätzung für den Fehler der Polynominterpolation vom Grad $n \leq 4$ als in (a) an.

ii. Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler der linearen Spline-Interpolation auf dem kleineren Intervall $[\hat{x}_4, \hat{x}_0]$ zur Zerlegung $\hat{\Delta} = \{\hat{x}_i \,:\, i = 0, \ldots, 4\}$ an.

Aufgabe G3 (Kubische Splinefunktion)
Wir betrachten die Funktion $s : [0,3] \to \mathbb{R}$, gegeben durch die Vorschrift

$$s(x) = \begin{cases} 0.8x^3 + 0.2x & \text{falls } x \in [0,1], \\ 0.8(2-x)^3 + 2.8(x-1)^3 + 5(x-1) + 0.2 & \text{falls } x \in (1,2], \\ 2.8(3-x)^3 + 21.8(x-2) + 5.2 & \text{falls } x \in (2,3]. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass s eine Splinefunktion der Ordnung 3 zur Zerlegung $\Delta = \{0,1,2,3\}$ ist.

(b) Ist s auch eine Splinefunktion der Ordnung 3 zur Zerlegung $\tilde{\Delta} = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$?

(c) Ist s auch eine Splinefunktion der Ordnung 3 zur Zerlegung $\hat{\Delta} = \{0, 1.5, 3\}$?

Hausübung

Aufgabe H1 (Begriffe)
Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und p ein Polynom vom Grad $\deg(p) \leq n$. Wir wollen die Interpolationsaufgabe zu den Wertepaaren

$$(x_i, p(x_i)), \quad i = 0, \ldots, n \tag{1}$$

lösen. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $\deg(p) \leq n$ und $s \in S_{\Delta,n}$ ein interpolierender Spline zu einer Zerlegung $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[a,b]$, dann stimmen p und s auf $[a,b]$ überein.

(b) Sei $\deg(p) \leq n$ und p_n ein interpolierendes Polynom vom Grad $\leq n$ an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, dann stimmen p und p_n auf $[a,b]$ überein.

(c) Sei $\deg(p) \leq 1$ und $s \in S_{\Delta,1}$ ein interpolierender Spline zur Zerlegung $\Delta = \{x_0, \ldots, x_m\}$ des Intervalls $[a,b]$, dann stimmen p und s auf $[a,b]$ überein.

(d) Sei $\deg(p) \leq 3$ und $s \in S_{\Delta,3}$ ein interpolierender Spline zur Zerlegung $\Delta = \{x_0, \ldots, x_m\}$ des Intervalls $[a,b]$, dann stimmen p und s auf $[a,b]$ überein.

Aufgabe H2 (Lineare Splines & Tschebyscheff-Interpolation)
Wir betrachten nochmals Aufgabe G2.

(a) Bestimmen Sie die Interpolationspolynome p_4 und $\hat{p}_4$ vom Grad $n \leq 4$, die die Funktion f an den Stützstellen (x_k) bzw. $(\hat{x}_k)$ interpolieren.

(b) Der jeweilig größte Interpolationsfehler wird in $x_* = 0.1878$ bzw. $\hat{x}_* = 1.3032$ gemacht. Bestimmen Sie die Werte der Interpolationsfehler und vergleichen Sie diese mit denen in G2 gemachten Abschätzungen.

(c) In Abbildung 1 sehen Sie die Funktion f. Zeichnen Sie in das Bild den linearen Spline s zu den Knoten (x_k) ein. Berechnen Sie den maximalen Interpolationsfehler des linearen Splines s zur Zerlegung Δ. Vergleichen Sie den Wert ebenfalls mit der Abschätzung aus G2.

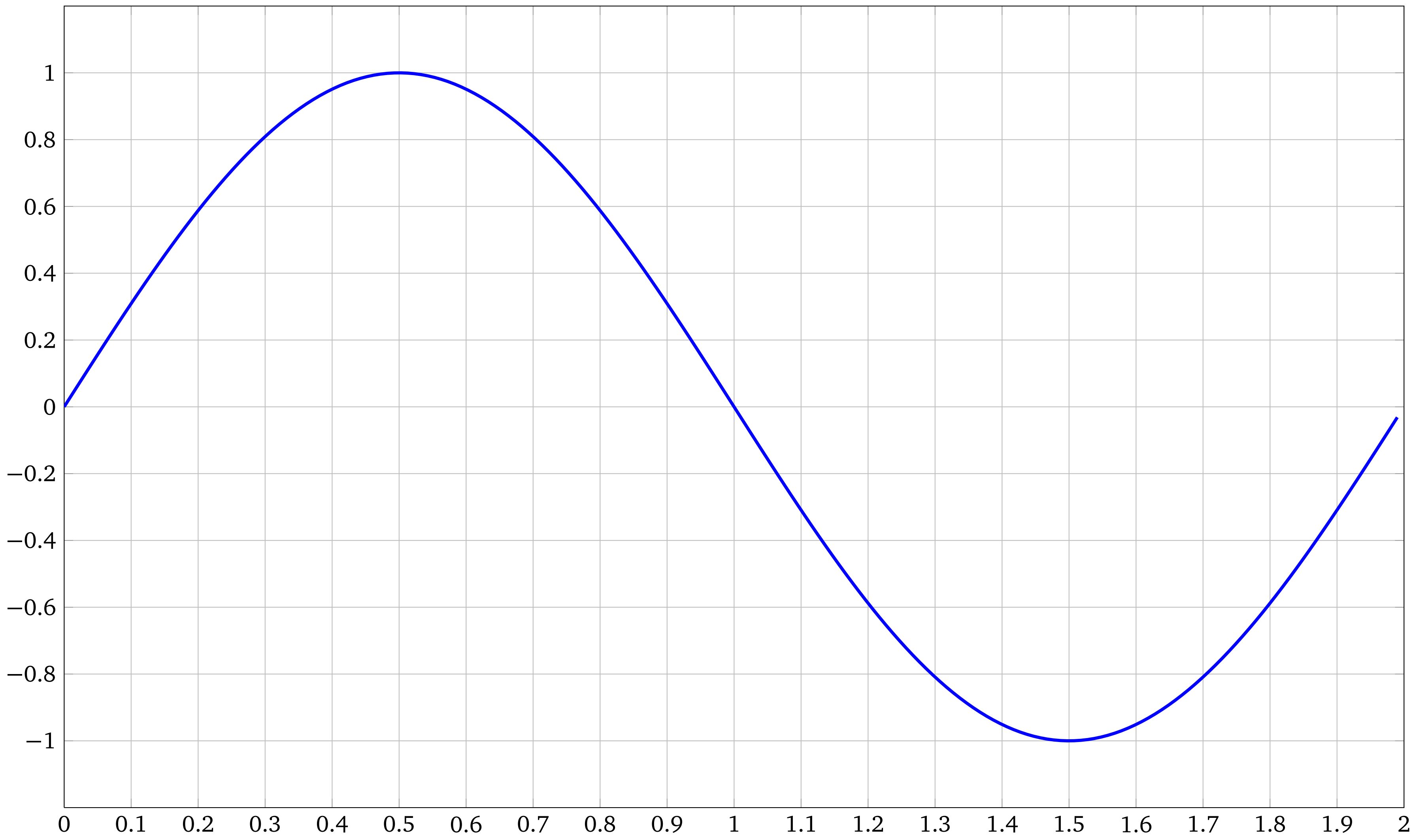

Abbildung 1: Zu Aufgabe H2: Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Newton-Interpolation)
Implementieren Sie ein Programm, dass zu gegebenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und Werten $y_0, \ldots, y_n$ das Interpolationspolynom p_n vom Grad $\leq n$ bestimmt, d.h. die Interpolationsbedingung

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

erfüllt. Lassen Sie sich zudem das Newtonschema und die Koeffizienten γ_i der Newtonschen Darstellung von p_n ausgeben. Testen Sie ihr Programm anhand von Aufgaben des 6. und 7. Übungsblattes.

Hinweis zu den Programmieraufgaben: Wir empfehlen die Bearbeitung der gestellten Programmieraufgaben in **Matlab**. Die Lösungshinweise werden ebenfalls in Matlab erstellt. Falls Sie keinen Zugang zu Matlab haben, können Sie stattdessen auch die frei verfügbare Software **Octave** verwenden. Links und Informationen zu Matlab und Octave finden Sie auf unserer Webseite.