2. Aufgabe (3 × 2 P) (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie die folgenden AL-Formeln

$$\varphi := (\neg(p \vee q)) \rightarrow (\neg(p \wedge q)) \qquad \psi := (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\varphi \models \psi$,

(ii) $\psi \models \varphi$.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von aussagenlogischer Resolution, dass die folgende Formelmenge nicht erfüllbar ist:

$$q \rightarrow \neg r, \quad \neg p \wedge (r \rightarrow p), \quad (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

(c) Finden Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$(p \wedge q) \rightarrow t, \quad s \rightarrow p, \quad s, \quad p \rightarrow (s \vee \neg t), \quad q$$

3. Aufgabe (3 × 2 P) (6 Punkte)

(a) Entscheiden Sie mit Hilfe des AL-Sequenzenkalküls SK, ob die folgenden Sequenz allgemeingültig ist oder nicht.

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash q \rightarrow (p \vee r)$$

Falls diese Sequenz nicht allgemeingültig ist, so geben Sie eine nicht erfüllende Belegung an.

(b) Zeigen Sie **semantisch**, d.h. indem Sie über Modelle argumentieren, dass die folgende Regel korrekt ist.

$$\frac{\vdash \varphi \vee \psi}{\neg\psi \vdash \varphi} \quad \text{für AL-Formeln } \varphi, \psi.$$

(c) Geben Sie eine Ableitung der folgenden FO-Sequenz in SK an. Die Signatur besteht aus einem einstelligen Relationssymbol R und einer einstelligen Funktion f.

$$\exists x\,.\,(R(f(x)) \rightarrow \neg R(x)) \vdash \exists x\,.\neg R(x)$$

Hinweis: „→“ ist hier wie üblich zu ersetzen.

4. Aufgabe (4 P + 2 P) (6 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $S = (0, \leq, L)$, wobei 0 eine Konstante, $\leq$ ein 2-stelliges und L ein 1-stelliges Relationssymbol ist.
Wir modellieren in dieser Signatur einen Datenspeicher mit Locking für konsistenten simultanen Zugriff. Die Konstante 0 steht für die Adresse des ersten Speicherblocks, $\leq$ bezeichnet die Ordnung der Speicheradressen und Lx steht dafür, dass der Speicherblock mit der Adresse x gesperrt ist.

(a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO:

(i) Kein Speicherblock ist gesperrt.

(ii) Nicht mehr als 3 Speicherblöcke sind gesperrt.

(iii) Es sind genau 5 Speicherblöcke gesperrt.

(iv) Ein Anfangsstück des Speichers ist gesperrt, jedoch nicht der gesamte Speicher.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Formel $\varphi(x)$ in FO gibt, die aussagt, dass nur endlich viele Speicherblöcke gesperrt sind.

5. Aufgabe (2,5 P + 3,5 P) (6 Punkte)

Betrachten Sie folgende Sätze:

(i) $\forall x . \exists y . E(x,y)$

(ii) $\forall x . \forall y . \forall z . \Big((E(x,y) \wedge E(y,z)) \rightarrow E(x,z) \Big)$

(iii) $\exists x . \forall y . (\neg E(y,x) \wedge C(x))$

(iv) $\forall x . \Big(\forall y . (E(y,x) \rightarrow C(y)) \rightarrow C(x) \Big)$

(v) $\forall x . \neg E(x,x)$

(a) Geben Sie die Skolem-Normalform dieser Sätze an.

(b) Zeigen Sie, dass die Sätze (i)–(v) gemeinsam erfüllbar sind, indem Sie ein Modell (zum Beispiel über $\mathbb{N}$ oder ein Herbrandmodell) beschreiben.