Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2006/07

Klausur

Formale Grundlagen der Informatik II

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte (maximal)	12	12	12	12	12	48 (+12)
erreichte Punkte						

Note:

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen.

Bearbeiten Sie **mindestens 4 Aufgaben** Ihrer Wahl von den folgenden 5 Aufgaben. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

Aufgabe 1 12 Punkte

(a) Ist die folgende AL-Formel erfüllbar, ist sie allgemeingültig?

$$(p \to (q \vee r)) \wedge [((p \vee q) \to r) \to \neg q].$$

Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Wandeln Sie die Formel aus (a) in konjunktive Normalform um.

(c) Gesucht sind AL-Formeln $\varphi_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ für $n > 0$, so daß eine Interpretation $\mathfrak{I}$ genau dann φ erfüllt, wenn

$$\mathfrak{I}(y_k) = 1 \quad \text{gdw} \quad \text{die Zahl der } i \leq k \text{ mit } \mathfrak{I}(x_i) = 1 \text{ gerade ist.}$$

Geben Sie φ_1 und φ_2 explizit an und zeigen Sie, wie man für $n > 1$ die Formel φ_{n+1} aus φ_n konstruieren kann.

Aufgabe 2 12 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol.

(a) Geben Sie ein Herbrand-Modell für die folgende Formel an:

$$\forall x \forall y [Rxx \wedge \neg Rxfx \wedge (Rxfy \to Rxy)].$$

(b) Zeigen Sie, daß die Formel

$$\forall x \forall y (Rxy \to Rfxfy) \wedge \forall x Rxfx \wedge \forall x \neg Rxx$$

erfüllbar ist, indem Sie ein Modell mit 3 Elementen angeben.

Aufgabe 3 12 Punkte

Seien c und d Konstantensymbole, R ein zweistelliges und P ein einstelliges Relationssymbol. Betrachten Sie die FO-Sätze

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y (Rxy \to (Px \vee Py)) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y ((Px \wedge Py) \to \neg Rxy) \\
\varphi_3 &:= Pc \wedge \neg Pd \\
\psi &:= \exists y \forall z \neg (Rcz \wedge Rzy)
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie φ_1, φ_2, φ_3 und $\neg\psi$ in Skolem-Normalform um.

(b) Bringen Sie $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \neg\psi$ in Klauselform.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Grundinstanzenresolution, daß

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \models \psi.$$

Aufgabe 4

12 Punkte

Beantworten Sie die folgenden Fragen zur Logik erster Stufe jeweils mit einer kurzen aber klaren Begründung:

(a) Gilt für alle Formeln φ und ψ, daß $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \models \forall x(\varphi \wedge \psi)$?

(b) Eine unendliche Formelmenge hat nur unendliche Modelle.

(c) Wenn es eine Formelmenge Φ gibt mit $\Phi \models \varphi$, dann ist φ erfüllbar.

(d) Für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \Psi$ gilt $\Psi \models \Phi$.

Aufgabe 5

12 Punkte

Wir wollen das zeitliche Verhalten eines Systems modellieren. Dazu betrachten wir Strukturen der Form $(\mathbb{N}, <, P, Q, R)$ wobei die natürlichen Zahlen $t \in \mathbb{N}$ als Zeitpunkte angesehen werden und die einstelligen Relationen P, Q, R den Zustand des Systems zu dem gegebenen Zeitpunkt kodieren.

(a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in FO:

(i) Das System befindet sich unendlich oft im Zustand P.

(ii) Immer, wenn sich das System im Zustand Q befindet, so gibt es einen späteren Zeitpunkt, zu welchem der Zustand R ist.

(iii) Das System wechselt nie vom Zustand P direkt in den Zustand Q.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des FO-Sequenzenkalküls, daß

$$\forall x \exists y(x < y \wedge Py) \models \exists x Px\,.$$