Formale Grundlagen der Informatik II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
2. Juli 2014

Gruppenübung

Aufgabe G10
$\preceq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \land x_3 \preceq x_2) \land \forall x_4 \left((x_4 \preceq x_1 \land x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \right) \Big).$$

Sei $\mathscr{A} = (A, \preceq^{\mathscr{A}})$ mit $A = \{0,1,2\}$ und $\preceq^{\mathscr{A}} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,2)\}$.

(a) Zeigen Sie $\mathscr{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.
Hinweis:
  i. Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.
  ii. Skizzieren Sie die Struktur $\mathscr{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.
  iii. Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \land x_3 \preceq x_2) \land \forall x_4 \left((x_4 \preceq x_1 \land x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \right) \Big)$$

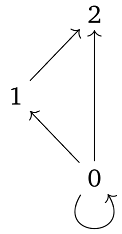
äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a'_1, a'_2) \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a'_1, a'_2, a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

Lösung:

(a) Eine Menge mit einer zweistelligen Relation ist i.A. ein (gerichteter) Graph, also kann man $\mathscr{A}$ folgendermaßen darstellen



und $\varphi^{\mathscr{A}}$ bedeutet, dass es zu zwei Elementen x_1 und x_2 ein Element x_3 gibt, mit $x_3 \rightarrow x_1$ und $x_3 \rightarrow x_2$ und sodass es zu jedem x_4 mit $x_4 \rightarrow x_1$ und $x_4 \rightarrow x_2$ eine Kante $x_4 \rightarrow x_3$ gibt. Man überprüft leicht, dass für $x_1 \mapsto 2$ und $x_2 \mapsto 2$ kein x_3 mit der benötigten Eigenschaft existiert, also $\mathscr{A} \not\models \varphi$.

Als nächstes formen wir φ in Negationsnormalform um:

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \right) \Big) \\ &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left(\neg(x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right) \Big) \\ &\equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right) \Big)}_{=:\varphi'}\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für beliebige $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ der Falsifizierer in der Spielposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ *eine Gewinnstrategie hat*: Angenommen der Falsifizierer zieht von der Position

$$\Bigg(\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right) \Big), (a_1, a_2, a_3, a_4) \Bigg)$$

nach

$$\Bigg(\forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right) \Big), (2, a_2, a_3, a_4) \Bigg)$$

und von dort nach

$$\Bigg(\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right) \Big), (2, 2, a_3, a_4) \Bigg)$$

dann hat der Verifizierer drei Möglichkeiten zu ziehen:

$a_3 \mapsto 2$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right), (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

und

$$\Big(x_3 \preceq x_1, (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathscr{A} \not\models 2 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 1$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right), (2, 2, 1, a_4) \Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right), (2, 2, 1, a_4) \Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2, 2, 1, 1) \Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathscr{A} \models 1 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 0$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right), (2, 2, 0, a_4) \Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \right), (2, 2, 0, a_4) \Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2, 2, 0, 1) \Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 0$ und $\mathscr{A} \models 1 \preceq 2$.

Also hat der Falsifizierer eine Gewinnstrategie, und es gilt $\mathscr{A} \not\models \varphi$.

(b) Wir zeigen, dass der Verifizierer für alle $(a'_1, a'_2) \in A \times A \setminus \{(2,2)\}$ eine Gewinnstrategie hat:
Der Verifizierer zieht von $(\psi, (a'_1, a'_2, a_3, a_4))$ nach

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (a'_1, a'_2, 0, a_4)\Big)$$

Der Falsifizierer hat nun zwei Zugmöglichkeiten:

i. Er zieht nach

$$\left(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (a'_1, a'_2, 0, a_4)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathscr{A} \models 0 \preceq x$ für alle $x \in A$.

ii. Er zieht nach

$$\left(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (a'_1, a'_2, 0, a_4)\right)$$

dann hat der Falsifizierer im nächsten Zug drei Möglichkeiten:

i. Er zieht nach

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a'_1, a'_2, 0, 0)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathscr{A} \models 0 \preceq 0$

ii. Er zieht nach

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a'_1, a'_2, 0, 1)\right)$$

oder

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a'_1, a'_2, 0, 2)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer in zwei Zügen, da a'_1 oder a'_2 ungleich 2 ist und $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 0$ bzw. $\mathscr{A} \not\models 2 \preceq 1$ und $\mathscr{A} \not\models 2 \preceq 0$ gelten.

Aufgabe G11
Sei Φ die Menge der folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \\
&\forall x \neg (x < x) \\
&\forall x \forall y (Exy \rightarrow x < y) \\
&\forall x \exists y Exy
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass
   i. in jedem Modell $(A, E, <)$ von Φ die Relation E keinen Kreis enthält;
   ii. Φ kein endliches Modell hat.

(b) Konstruieren Sie ein Herbrandmodell von Φ.

(c) Sei

$$\psi := \forall x \forall y \left((x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y)) \rightarrow Exy\right) .$$

Gilt ψ in dem Modell aus (b)?
Beweisen Sie, dass $\Phi \models \psi$, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösung:

(a) Würde E einen Kreis enthalten, so würde auch $<$ einen Kreis enthalten (dritte Formel), was der Transitiviät von $<$ widerspräche (erste Formel). Da E keine Kreise enthält, folgt aus der vierten Formel, dass E unendlich beliebig lange Ketten enthält. Somit kann Φ kein endliches Modell haben.

(b) Skolemnormalform:

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)\\
&\forall x \neg(x < x)\\
&\forall x \forall y (Exy \to x < y)\\
&\forall x Exfx
\end{aligned}$$

Herbrandmodell: $\mathscr{H} := (T, E, <, f)$ mit

$$\begin{aligned}
T &:= f^n c, \quad n \in \mathbb{N},\\
E &:= (f^n c, f^{n+1} c), \quad n \in \mathbb{N},\\
< &:= (f^m c, f^k c), \quad m < k.
\end{aligned}$$

(c) Diese Formel gilt in $\mathscr{H}$, allerdings gilt $\Phi \not\models \psi$. Ein Gegenbeispiel ist die Struktur $\mathscr{A} = (\mathbb{N}, E, <)$ mit

$$\begin{aligned}
E &:= \{(0,2)\} \cup \{(n, n+1), \quad n \geq 1\},\\
< &:= \{(m,k), \quad m < k\}.
\end{aligned}$$

Diese Struktur erfüllt Φ, aber nicht ψ.

Aufgabe G12

Betrachten Sie folgende offene Theorie $\mathscr{T}$ in der Sprache mit $=$, einem Konstantensymbol 0, zwei 1-stelligen Funktionssymbolen S und f und dem Axiom $\forall x\,(S(x) \neq 0)$.

(a) Zeigen Sie (informell) $\mathscr{T} \models \exists x\,\big(f(S(f(x))) \neq x\big)$.

(b) Wenden Sie Herbrands Theorem für offene Theorien an, um endlich viele geschlossene Terme der obigen Sprache zu bestimmen $t_1, \ldots, t_n$ mit

$$\mathscr{T} \models \bigvee_{j=1}^{n} \big(f(S(f(t_j))) \neq t_j\big).$$

Lösung:

(a) Wir beweisen die Aussage durch Widerspruch. Angenommen

$$\forall x (f(S(f(x))) = x). \tag{1}$$

Dann ist f injektiv, da $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = f(S(f(x_1))) = f(S(f(x_2))) = x_2$ aus (1) folgt. Somit hat f ein Linksinverses, d. h. eine Funktion g sodass $g(f(x)) = x$. Folglich gilt

$$S(f(x)) = g(f(S(f(x)))) = g(x).$$

Dies ist ein Widerspruch, da die Linksinverse einer Injektion surjektiv ist, wohingegen S nicht surjektiv sein kann, da 0 nach Voraussetzung nicht im Bild von S liegt.

(b) Wir nehmen wieder an, folgende Formeln würden gelten:

$$\forall x (f(S(f(x))) = x), \tag{2}$$

$$\forall x (S(x) \neq 0). \tag{3}$$

Formel (2) angewandt auf $x = f(0)$ ergibt dann

$$f(S(f(f(0)))) = f(0). \tag{4}$$

Auf der anderen Seite ergibt Formel (2) angewandt auf den Term $S(f(f(0)))$

$$f(S(\underbrace{f(S(f(f(0))))}_{\overset{(4)}{=} f(0)})) = S(f(f(0))).$$

Somit folgt

$$S(f(f(0))) = f(S(f(0))) \overset{(2)}{=} 0,$$

was (3) angewandt auf $x = f(f(0))$ widerspricht. Folglich können wir $t_1 = 0$, $t_2 = f(0)$ und $t_3 = S(f(f(0)))$ setzen.

Hausübung

Aufgabe H10

In der folgenden Aufgabe sind f, g Funktionssymbole und R, S Relationssymbole mit jeweils der passenden Stelligkeit. Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine äquivalente Formel in

(i) pränexer Normalform,

(ii) Skolemnormalform der in (i) gewählten Pränexnormalform und

(iii) Herbrandnormalform der in (i) gewählten Pränexnormalform

an:

(a) $(\forall x Rx) \vee (\exists x \neg Rx)$

(b) $(\neg \forall x Rxgz) \rightarrow \forall y(Sfy \vee y = z)$

Lösung:

(a) (i) $\forall x \exists y(Rx \vee \neg Ry)$

(ii) $\forall x(Rx \vee \neg Rfx)$

(iii) $\exists y(Rc \vee \neg Ry)$, wobei c ein nullstelliges Funktionssymbol ist, d. h. ein Konstantensymbol.

(b) (i)

$$\begin{aligned}(\neg \forall x Rxgz) \rightarrow \forall y(Sfy \vee y = z) &\equiv \neg\neg \forall x Rxgz \vee \forall y(Sfy \vee y = z)\\ &\equiv \forall x Rxgz \vee \forall y(Sfy \vee y = z)\\ &\equiv \forall x \forall y(Rxgz \vee Sfy \vee y = z)\end{aligned}$$

(ii) $\forall x \forall y(Rxgz \vee Sfy \vee y = z)$

(iii) $(Rc_1gz \vee Sfc_2 \vee c_2 = z)$. Hierbei sind c_1, c_2 nullstellige Funktionssymbole, d. h. Konstantensymbole.

Aufgabe H11

(a) Geben Sie für folgende FO-Formeln jeweils eine Skolemnormalform an:

i. $\forall x \exists y Rxy$

ii. $\forall x(\forall y Ryy \rightarrow \exists y Ryf(x))$

(b) Geben Sie Herbrandmodelle für die Skolemnormalformen aus (a) an.

Lösung:

(a) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

i. Skolemnormalform: $\forall x Rxs(x)$

ii. Skolemnormalform: $\forall x(\neg Rs(x)s(x) \vee Rs'(x)f(x))$:

$$\begin{aligned}\forall x(\forall y Ryy \rightarrow \exists y Ryf(x)) &\equiv \forall x(\neg \forall y Ryy \vee \exists y Ryf(x))\\ &\equiv \forall x(\exists y \neg Ryy \vee \exists y Ryf(x))\\ &\equiv \forall x(\exists z \neg Rzz \vee \exists y Ryf(x))\\ &\equiv \forall x \exists z \exists y(\neg Rzz \vee Ryf(x)).\end{aligned}$$

(b) In beiden Fällen geben wir noch ein Konstantensymbol c zur Signatur hinzu. Dann er halten wir für (i) die Trägermenge $T = \{s^i(c) : i \in \mathbb{N}\}$, wobei s^i für das i-malige Anwenden von s steht (d. h. T ist isomorph zu den natürlichen Zahlen). Die Relation R kann z. B. durch $\{(s^i(c), s^{i+1}(c)) : i \in \mathbb{N}\}$ bzw. jeder Obermenge davon interpretiert werden. In Fall (ii) er halten wir die Termstruktur $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{i+1} = \{s(t), s'(t), f(t) : t \in T_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (d. h. einen Baum, wobei jeder Knoten genau drei Nachfolger hat). Die Relation R kann z. B. durch $\emptyset$ oder $T \times T$ interpretiert werden.

Aufgabe H12

Wir betrachten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x[\exists y(Rxy \wedge \neg \exists x Ryx) \vee \forall y \exists z(Rxz \wedge Rzy)]\\ \varphi_2 &:= \exists x[\forall y \neg Rxy \rightarrow \exists y \forall z(Rxy \wedge Rzy)]\\ \varphi_3 &:= \forall x \forall y[Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy \wedge \neg \exists x(Rzx \wedge Rxz))]\end{aligned}$$

(a) Geben Sie äquivalente Formeln in Pränex-Normalform an.

(b) Wandeln Sie ihre Ergebnisse aus (a) in Skolem-Normalform um.

(c) Betrachten Sie die Formel $\varphi := \forall x \exists y Rxy$ und die Skolem-Normalform $\psi := \forall x Rxsx$.

   i. Beweisen Sie, dass $\psi \models \varphi$ gilt.

   ii. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass $\varphi \not\models \psi$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x \exists y \forall u \forall v \exists z[(Rxy \land \neg Ryu) \lor (Rxz \land Rzv)]\\
\varphi_2 &\equiv \exists x \exists y \exists u \forall z[\neg Rxy \to (Rxu \land Rzu)]\\
\varphi_3 &\equiv \forall x \forall y \exists z \forall u[Rxy \to (Rxz \land Rzy \land \neg(Rzu \land Ruz))]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \forall x \forall u \forall v[(Rxfx \land \neg Rfxu) \lor (Rxgxuv \land Rgxuvv)]\\
\varphi_2 &: \forall z[\neg Rcd \to (Rce \land Rze)]\\
\varphi_3 &: \forall x \forall y \forall u[Rxy \to (Rxfxy \land Rfxyy \land \neg(Rfxyu \land Rufxy))]
\end{aligned}$$

(c) i. Angenommen $(\mathscr{A}, \beta) \models \psi$. Um zu zeigen, dass $(\mathscr{A}, \beta) \models \varphi$ betrachten wir ein beliebiges Element $a \in A$. Nach Annahme gilt $(a, s^{\mathscr{A}}(a)) \in R^{\mathscr{A}}$. Insbesondere gibt es also ein Element b (nämlich $b = s^{\mathscr{A}}(a)$) mit $(a, b) \in R^{\mathscr{A}}$. Wir haben gezeigt, dass $(\mathscr{A}, \beta) \models \forall x \exists y Rxy$.

   ii. Sei $\mathscr{A} = (A, s^{\mathscr{A}}, R^{\mathscr{A}})$ die Struktur mit

$$A = \{0,1\}, \quad s^{\mathscr{A}}(a) := 0, \quad R^{\mathscr{A}} := \{(0,1),(1,1)\}.$$

   Dann gilt $\mathscr{A} \models \varphi$ aber $\mathscr{A} \not\models \psi$.