Aussagenlogik
& Prädikatenlogik (FGdI II)
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

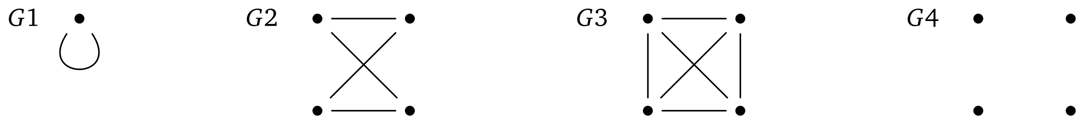
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

SoSe 2016
29. Juni 2016

Gruppenübung

Aufgabe G6.1 (Warm-up)

(a) Betrachten Sie die folgenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$:



In welchen dieser Graphen gelten welche der nachfolgenden FO-Sätze?

(i) $\forall x \forall y \, (\neg x = y \leftrightarrow Exy)$

(ii) $\exists x \exists y \exists z \, (\neg x = y \wedge \neg y = z \wedge \neg x = z \wedge Exy \wedge Eyz \wedge \neg Ezx)$

(iii) $\exists x \exists y \, (\neg x = y) \wedge \forall x \forall y \, (\neg x = y \rightarrow \neg Exy)$

(iv) $\exists x \forall y \, (x = y)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Für jede im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ ableitbare Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ gilt $\Gamma \models \delta$ für jedes $\delta \in \Delta$.

(ii) Für jede im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ ableitbare Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ gilt $\Gamma \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$.

(iii) Für jede im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ ableitbare Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ gilt $\Gamma \models \bigvee \Delta$.

(iv) Falls $\Phi \models \varphi$ für eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$ und eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$ gilt, dann ist die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ für jedes endliche $\Gamma \subseteq \Phi$ in $\mathcal{SK}$ ableitbar.

(v) Falls $\Phi \vdash \varphi$ in $\mathcal{SK}$ für eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$ und einen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$ ableitbar ist, dann gilt $\Phi \models \varphi$.

Lösung:

(i) Jeder der Sätze gilt in genau einem der Graphen. In Klammern ist jeweils die intuitive Bedeutung der Sätze angegeben.

(a) G3 (Je zwei verschiedene Knoten sind miteinander verbunden und es gibt keine Schlaufen.)

(b) G2 (Es gibt drei Knoten, die einen induzierten Pfad der Länge zwei bilden.)

(c) G4 (Der Graph enthält keine Kante, aber mindestens zwei Knoten.)

(d) G1 (Der Graph besteht aus nur einem Knoten.)

(ii) (a) falsch

(b) falsch (jedes Modell von Γ muss ein $\delta \in \Delta$ erfüllen, aber nicht alle das gleiche!)

(c) richtig

(d) falsch, die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ muss nur für *ein* endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ ableitbar sein.

(e) richtig

Aufgabe G6.2 (Sequenzenkalkül)

(a) Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Regel ($\forall$R):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall \varphi(x)}$$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

Zeigen Sie anhand von Beispielen, warum diese Regel nicht mehr korrekt ist, falls c in Γ, Δ oder $\varphi(x)$ vorkommen darf.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy}$$

(c) Im Sequenzenkalkül der Aussagenlogik liefert jeder Ableitungsbaum, in dem ein Blatt mit einer nicht allgemeingültigen Sequenz beschriftet ist, bereits einen Nachweis, dass die Sequenz in der Wurzel nicht allgemeingültig ist. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft für den Sequenzenkalkül der Logik erster Stufe nicht gilt.

Lösung:

(a) i. Die Konstante c kommt in Γ vor: Ohne die Bedingung "c nicht in Γ" könnte man die Sequenz $Pc \vdash \forall x Px$ aus $Pc \vdash Pc$ ableiten. Nur ist $Pc \vdash Pc$ allgemeingültig, jedoch nicht $Pc \vdash \forall x Px$.

ii. Die Konstante c kommt in Δ vor: Ohne die Bedingung "c nicht in Δ könnte man die Sequenz $Pd \vdash \neg c = d, \forall x Px$ aus $Pd \vdash \neg c = d, Pc$ ableiten. Nur ist $Pd \vdash \neg c = d, Pc$ allgemeingültig, jedoch nicht $Pd \vdash \neg c = d, \forall x Px$.

iii. Die Konstante c kommt in $\varphi(x)$ vor: Ohne die Bedingung "c nicht in $\varphi(x)$" könnte man die Sequenz $Pd \vdash \forall x(\neg c = d \vee Px)$ aus $Pd \vdash \neg c = d \vee Pc$ ableiten. Nur ist $Pd \vdash \neg c = d \vee Pc$ allgemeingültig, jedoch nicht $Pd \vdash \forall x(\neg c = d \vee Px)$.

(b) Angenommen, $\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx$ ist allgemeingültig. Um zu zeigen, dass dann auch die Sequenz $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy$ allgemeingültig ist, betrachten wir ein Modell $\mathcal{J} \models \Gamma$. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Formel $\delta \in \Delta \cup \{\forall x Rxfx\}$ mit $\mathcal{J} \models \delta$. Falls $\delta \in \Delta$, so sind wir fertig. Falls $\mathcal{J} \models \forall x Rxfx$, dann gilt auch $\mathcal{J} \models \forall x \exists y Rxy$ und wir sind ebenfalls fertig.

(c) Im Sequenzenkalkül der der Logik erster Stufe lässt sich aus $Pc \vdash Pd$ mit der Regel $(\exists R)$ die Sequenz $Pc \vdash \exists x Px$ ableiten. $Pc \vdash \exists x Px$ ist allgemeingültig, jedoch nicht $Pc \vdash Pd$. Folglich ist

$$\frac{Pc \vdash Pd}{Pc \vdash \exists x Px}$$

ein Ableitungsbaum mit einer allgemeingültigen Wurzel, in dem es ein nicht allgemeingültiges Blatt gibt.

Korrektheit und Vollständigkeit beider Kalküle besagen, dass jede ableitbare Sequenz allgemeingültig ist und jede allgemeingültige Sequenz ableitbar, jedoch nicht, dass sich zu jeder allgemeingültigen Sequenz ein formaler Beweis algorithmisch finden lässt. Der Sequenzenkalül für die Aussagenlogik besitzt diese Eigenschaft zusätzlich. Denn es gibt zu jeder nicht atomaren Formel in einer Sequenz eine Regel, die diese gegebene Sequenz als Konklusion hat und den führenden Junktor in der betrachteten Formel eliminiert, und alle Regeln des Kalküls erhalten Allgemeingültigkeit sowohl vorwärts als auch rückwärts. Im Sequenzenkalkül für die Logik erster Stufe gibt es Regeln, wie $(\exists R)$, bei deren Anwendung man eine nicht-deterministische Wahl treffen muss und die nur vorwärts Allgemeingültigkeit erhalten aber nicht rückwärts. Deshalb ist es möglich, zu einem Blatt mit einer nicht allgemeingültigen Sequenz zu gelangen, obwohl die Wurzel allgemeingültig war.

Aufgabe G6.3 (Ableitungen)
Leiten Sie die folgenden Sequenzen in $\mathcal{SK}$ ab.

(a) $\forall x \forall y fx = fy \vdash \exists x fx = x$

(b) $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \wedge \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$

Könnte man die entsprechenden Folgerungsbeziehungen auch mittels GI-Resolution nachweisen? Wenn ja, wie?

Lösung:

(a)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{ffc = fc \vdash ffc = fc}}{\forall y ffc = fy \vdash ffc = fc}}{\forall x \forall y fx = fy \vdash ffc = fc}}{\forall x \forall y fx = fy \vdash \exists x fx = x}$$

(b)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Rcd, Rdc \vdash Rcc, Rcd} \qquad \dfrac{}{Rcd, Rdc \vdash Rcc, Rdc}}{Rcd, Rdc \vdash Rcc, Rcd \land Rdc}}{\neg(Rcd \land Rdc), Rcd, Rdc \vdash Rcc} \qquad \dfrac{}{Rcc, Rcd, Rdc \vdash Rcc}}{\neg(Rcd \land Rdc) \lor Rcc, Rcd, Rdc \vdash Rcc}}{\neg(Rcd \land Rdc) \lor Rcc, \neg Rcc, Rcd, Rdc \vdash \emptyset}}{\neg(Rcd \land Rdc) \lor Rcc, \neg Rcc, Rcd \vdash \neg Rdc}}{\neg(Rcd \land Rdc) \lor Rcc, \neg Rcc \vdash \neg Rcd, \neg Rdc}}{\forall z(\neg(Rcd \land Rdz) \lor Rcz), \neg Rcc \vdash \neg Rcd, \neg Rdc}}{\forall y \forall z(\neg(Rcy \land Ryz) \lor Rcz), \neg Rcc \vdash \neg Rcd, \neg Rdc}}{\forall x \forall y \forall z(\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz), \neg Rcc \vdash \neg Rcd, \neg Rdc}}{\forall x \forall y \forall z(\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz), \forall x \neg Rxx \vdash \neg Rcd, \neg Rdc}}{\forall x \forall y \forall z(\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \neg Rcd, \neg Rdc}}{\forall x \forall y \forall z(\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \neg Rcd \lor \neg Rdc}}{\forall x \forall y \forall z(\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \forall y(\neg Rcy \lor \neg Ryc)}}{\forall x \forall y \forall z(\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y(\neg Rxy \lor \neg Ryx)}
$$

In den beiden letzten Schritten wurde die $\forall$R-Regel angewandt, daher ist zu beachten, dass die ersetzte Konstante c bzw. d (zu diesem Zeitpunkt!) weder in der Prämisse noch an anderer Stelle in der Konklusion vorkommt!

Hausübung

Aufgabe H6.1 (Ableitungen) (12 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen in $\mathcal{SK}$ ab:

(a) $\forall x f x x = x \vdash \forall x(Px \vee \neg P f x x)$.

(b) $\exists y \forall x R x y \vdash \forall x \exists y R x y$.

(c) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$.

Lösung:

(a)

$$\begin{array}{c} \hline Pc \vdash Pc \\ \hline fcc = c, Pfcc \vdash Pc \\ \hline \forall x f x x = x, Pfcc \vdash Pc \\ \hline \forall x f x x = x \vdash Pc, \neg Pfcc \\ \hline \forall x f x x = x \vdash Pc \vee \neg Pfcc \\ \hline \forall x f x x = x \vdash \forall x(Px \vee \neg P f x x) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c} \hline Rcd \vdash Rcd \\ \hline \forall x Rxd \vdash Rcd \\ \hline \forall x Rxd \vdash \exists y Rcy \\ \hline \exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Rcy \\ \hline \exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy \end{array}$$

(c) Beachten Sie, dass $\psi(c/x) = \psi$ gilt, da $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$.

$$\begin{array}{c} \overline{\varphi(c/x) \vdash \varphi(c/x), \psi} \qquad \overline{\psi \vdash \varphi(c/x), \psi} \\ \hline \varphi(c/x) \vee \psi \vdash \varphi(c/x), \psi \\ \hline \forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi(c/x), \psi \\ \hline \forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \psi \\ \hline \forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi \end{array}$$

Aufgabe H6.2 (Regeln) (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln für den Sequenzenkalkül der Logik erster Stufe:

(a)

$$\frac{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta, \exists x \psi(x) \qquad \Gamma, \exists x \psi(x) \vdash \Delta, \vartheta}{\Gamma, \varphi(c) \vdash \Delta, \vartheta}$$

(b)

$$\frac{\Gamma, \exists x \psi(x) \vdash c = d \qquad \Gamma, \psi(c) \vdash \vartheta}{\Gamma \vdash \neg \psi(d), \vartheta}$$

(c)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \psi(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \psi(c)}$$

Lösung:

(a) Diese Regel ist korrekt. Angenommen die Prämissen seien allgemeingültig. Wir zeigen, dass dann auch die Konklusion $\Gamma, \varphi(c) \vdash \Delta, \vartheta$ allgemeingültig ist. Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\Gamma \cup \{\varphi(c)\}$. Falls $\mathfrak{A} \models \bigvee \Delta$ gilt, sind wir fertig. Nun betrachten wir den Fall $\mathfrak{A} \not\models \bigvee \Delta$. Aus $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi(c)\}$ folgt $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi(x)\}$. Damit und mit $\mathfrak{A} \not\models \bigvee \Delta$ folgt aus der Allgemeingültigkeit der linken Prämisse $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$. Also folgt aus der Allgemeingültigkeit der rechten Prämisse $\mathfrak{A} \models \vartheta$.

(b) Auch diese Regel ist korrekt. Angenommen die Prämissen seien allgemeingültig. Wir zeigen, dass dann auch die Konklusion $\Gamma \vdash \neg\psi(d), \vartheta$ allgemeingültig ist. Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von Γ. Im Fall $\mathfrak{A} \models \neg\psi(d)$ sind wir fertig. Also nehmen wir $\mathfrak{A} \models \psi(d)$ an. Aus $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\psi(d)\}$ folgt $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\exists x \psi(x)\}$. Die Allgemeingültigkeit der linken Prämisse impliziert $\mathfrak{A} \models c = d$. Nun folgt aus $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\psi(d), c = d\}$ auch $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\psi(c)\}$. Durch die Allgemeingültigkeit der rechten Prämisse erhalten wir $\mathfrak{A} \models \vartheta$ und sind auch im zweiten Fall fertig.

(c) Diese Regel ist nicht korrekt. Wir geben ein Beispiel an, das zeigt, dass es Fälle mit einer allgemeingültigen Prämisse und einer nicht allgemeingültigen Konklusion gibt. Setze $\Gamma := \{Pd\}$, $\Delta := \emptyset$ und $\psi(x) := Px$. Die Sequenz $Pd \vdash \exists x Px$ ist allgemeingültig, $Pd \vdash Pc$ jedoch nicht.

Aufgabe H6.3 (Kompaktheit) (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass es über der Signatur $\{<\}$ keine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(\{<\})$ gibt, für die gilt

$$\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}}) \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \text{ ist isomorph zu } (\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}),$$

wobei $<^{\mathbb{N}}$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist.

Extra: Diskutieren Sie, was dies für die Beweisbarkeit von FO-Aussagen $\varphi(n)$ über natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion bedeuten könnte.

Lösung: Angenommen es existiert eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(\{<\})$, für die gilt

$$\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}}) \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \text{ ist isomorph zu } (\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}).$$

Sei c ein neues Konstantensymbol. Wir definieren für jede natürliche Zahl n, $n \geq 1$, eine Formel ψ_n, die ausdrückt, dass es mindestens n Elemente gibt, die kleiner sind als c:

$$\psi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_i = x_j) \wedge \bigwedge_i (x_i < c) \right)$$

Damit ist die Formelmenge $\Phi \cup \{\psi_n \in \mathrm{FO}_0(\{<, c\}) : n \geq 1\}$ unerfüllbar, weil es keine natürliche Zahl gibt, die unendlich viele Vorgänger hat. Nach Kompaktheitssatz hat diese Menge eine endliche Teilmenge, die unerfüllbar ist. Sei nun

$$\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \{\psi_n \in \mathrm{FO}_0(\{<, c\}) : n \geq 1\}$$

eine beliebige endliche Teilmenge. Da Φ_0 endlich ist, existiert eine maximale natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\psi_m \in \Phi_0$. Dann ist allerdings $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, c^{\mathfrak{A}})$ mit $c^{\mathfrak{A}} = m + 1$ ein Modell von Φ_0. Dies steht im Widerspruch zur Unerfüllbarkeit von $\Phi \cup \{\psi_n \in \mathrm{FO}_0(\{<, c\}) : n \geq 1\}$.