Formale Grundlagen der Informatik II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2015**
Prof. Dr. Martin Otto **1. Juli 2015**
Julian Bitterlich, Felix Canavoi, Kord Eickmeyer, Daniel Günzel

Aufgabe G1 (Quiz)

(a) Sei $S = (c, f, P)$ und F eine geschlossene erfüllbare Formel in Skolem-Normalform; f sei dabei ein zweistelliges Funktions- und P ein zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie die Trägermenge $T_0(S)$ aller variablenfreien Terme über S für mögliche Herbrandmodelle von F an.

- ☐ $M_1 := \emptyset$
- ☐ $M_2 := \{c, x, y, fxPcy\}$
- ☐ $M_3 := \{c, Pcc, PPccc, PcPcc, \dots\}$
- ☒ $M_4 := \{c, fcc, ffccc, fcfcc, \dots\}$

(b) In der FO mit Gleichheit gibt es Formeln, die nur in Strukturen, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten, erfüllbar sind. ☒ Richtig ☐ Falsch

Begründung: Die Formel $\forall x \forall y \forall z\,((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))$ ist nur in Strukturen erfüllbar, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten. Anmerkung: Die Formel $\exists x \exists y \neg(x = y)$ ist dagegen nur in Strukturen erfüllbar, deren Grundmengen mindestens zwei Elemente enthalten.

(c) Jede PNF-Formel (pränexe Normalform) ist auch in SKNF (Skolem-Normalform). ☐ Ja ☒ Nein

Begründung: Gegenbeispiel: $\exists x Px$ ist nicht in SKNF, da sie nicht ausschließlich All-Quantoren enthält.

(d) Jede SKNF-Formel ist auch in PNF. ☒ Ja ☐ Nein

Begründung: Nach Definition ist jede SKNF-Formel eine PNF-Formel ohne Existenz-Quantoren.

Aufgabe G2

Betrachten Sie folgende Formelmenge, wobei P ein einstelliges Relations-, sowie L und R zweistellige Relationssymbole seien:

(1) $\forall x \exists y Rxy$

(2) $\forall x \exists y Lxy$

(3) $\exists x Px$

(4) $\forall x \forall y (Lxy \to Rxy)$

(5) $\forall x \forall y ((Px \wedge Rxy) \to Py)$

(a) Bringen Sie die Sätze (1)–(5) in Skolemnormalform.

(b) Zeigen Sie dass die Sätze (1)–(5) erfüllbar sind, indem sie ein Herbrandmodell angeben.

(c) Zeigen Sie, dass die Formelmenge unerfüllbar wird, wenn (3) durch die Formel

$$(3') \quad \exists x (Px \wedge \forall y (Lxy \to \neg Py))$$

ersetzt wird. Argumentieren Sie dass es kein Herbrandmodell für die neue Formelmenge geben kann.

Hinweis: Durch das Ersetzen von (3) durch (3') ändert sich die Trägermenge des Herbrandmodells *nicht* (wenn wir dieselbe Skolemkonstante „c“ verwenden).

Lösung:

(a) (1) $\forall x Rxfx$

(2) $\forall x Lxgx$

(3) Pc

(4) und (5): Diese Sätze sind schon in Skolem-Normalform.

(b) Sei $T_0 := \{c\}$ und $T_{n+1} := \{f(t), g(t) \colon t \in T_n\}$. Dann ist $\mathcal{T} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ die Trägermenge der Sätze aus (a). Das Herbrandmodell $\mathcal{H} := (\mathcal{T}, R^{\mathcal{H}}, L^{\mathcal{H}}, P^{\mathcal{H}})$ mit $R^{\mathcal{H}} = L^{\mathcal{H}} = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ und $P^{\mathcal{H}} = \mathcal{T}$ erfüllt dann die Sätze.

(c) Wir betrachten die Elemente c, $g(c)$ der Trägermenge. Mit (3') gilt Pc und mit (2) $Lcg(c)$. Damit folgt aus (3') $\neg Pg(c)$ aber mit (4)+(5) $Pg(c)$. Also sind die Sätze nicht erfüllbar.

Aufgabe G3

Wir betrachten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x[\exists y(Rxy \wedge \neg\exists x Ryx) \vee \forall y \exists z(Rxz \wedge Rzy)]\\
\varphi_2 &:= \exists x[\forall y \neg Rxy \rightarrow \exists y \forall z(Rxy \wedge Rzy)]\\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y[Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy \wedge \neg\exists x(Rzx \wedge Rxz))]
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie äquivalente Formeln in Pränex-Normalform an.

(b) Wandeln Sie ihre Ergebnisse aus (a) in Skolem-Normalform um.

(c) Betrachten Sie die Formel $\varphi := \forall x \exists y Rxy$ und die Skolem-Normalform $\psi := \forall x Rxsx$.

   i. Beweisen Sie, dass $\psi \models \varphi$ gilt.

   ii. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass $\varphi \not\models \psi$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x \exists y \forall u \forall v \exists z[(Rxy \wedge \neg Ryu) \vee (Rxz \wedge Rzv)]\\
\varphi_2 &\equiv \exists x \exists y \exists u \forall z[\neg Rxy \rightarrow (Rxu \wedge Rzu)]\\
\varphi_3 &\equiv \forall x \forall y \exists z \forall u[Rxy \rightarrow (Rxz \wedge Rzy \wedge \neg(Rzu \wedge Ruz))]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \forall x \forall u \forall v[(Rxfx \wedge \neg Rfxu) \vee (Rxgxuv \wedge Rgxuvv)]\\
\varphi_2 &: \forall z[\neg Rcd \rightarrow (Rce \wedge Rze)]\\
\varphi_3 &: \forall x \forall y \forall u[Rxy \rightarrow (Rxfxy \wedge Rfxyy \wedge \neg(Rfxyu \wedge Rufxy))]
\end{aligned}$$

(c) i. Angenommen $(\mathcal{A}, \beta) \models \psi$. Um zu zeigen, dass $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ betrachten wir ein beliebiges Element $a \in A$. Nach Annahme gilt $(a, s^{\mathcal{A}}(a)) \in R^{\mathcal{A}}$. Insbesondere gibt es also ein Element b (nämlich $b = s^{\mathcal{A}}(a)$) mit $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$. Wir haben gezeigt, dass $(\mathcal{A}, \beta) \models \forall x \exists y Rxy$.

   ii. Sei $\mathcal{A} = (A, s^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$ die Struktur mit

$$A = \{0,1\}, \quad s^{\mathcal{A}}(a) := 0, \quad R^{\mathcal{A}} := \{(0,1),(1,1)\}.$$

   Dann gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{A} \not\models \psi$.

Aufgabe G4

Betrachten Sie die Signatur $S = (0, \leq, L)$, wobei 0 eine Konstante, $\leq$ ein 2-stelliges und L ein 1-stelliges Relationssymbol ist.

Wir modellieren in dieser Signatur einen Datenspeicher. Die Konstante 0 steht für die Adresse des ersten Speicherblocks, $\leq$ bezeichnet die Ordnung der Speicheradressen und Lx steht dafür, dass der Speicherblock mit der Adresse x gesperrt ist.

(a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO:

   i. Kein Speicherblock ist gesperrt.

   ii. Nicht mehr als 3 Speicherblöcke sind gesperrt.

   iii. Es sind genau 5 Speicherblöcke gesperrt.

   iv. Ein Anfangsstück des Speichers ist gesperrt, jedoch nicht der gesamte Speicher.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Formel ϕ in FO gibt, die aussagt, dass nur endlich viele Speicherblöcke gesperrt sind.

Lösung:

(a) i. $\forall x \neg Lx$

ii. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \left(\bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j \to \bigvee_{i=1}^4 \neg L x_i \right)$

iii.
$$\phi_n := \exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \land \bigwedge_{i=1}^{n} L x_i \right)$$
$$\phi_{(\mathrm{iii})} := \phi_5 \land \neg \phi_6$$

iv. $\exists x \forall y \forall z \left[(y \leq x \land \neg(z \leq x)) \to (Ly \land \neg Lz) \right]$

(b) Angenommen es gäbe solch einen Satz φ der besagt, dass nur endlich viele Speicherblöcke gesperrt sind. Konstruiere desweiteren für jedes $n \in \mathbb{N}$ Sätze ψ_n die besagen, dass es *mindestens* n verschiedene Speicherblöcke gibt, die gesperrt sind:
$$\psi_n := \exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i \lneq x_{i+1} \land \bigwedge_{i=1}^{n} L x_i \right).$$
(Abkürzung: $x \lneq y :\iff x \leq y \land \neg(y \leq x)$.)
Die Formelmenge $\Gamma := \{\varphi\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist damit unerfüllbar: Ist φ erfüllt, so gibt es nur endlich viele (bspw. k) gesperrte Speicherblöcke. Damit ist aber bereits die (unendliche) Teilmenge $\{\psi_\ell \mid \ell > k\} \subset \Gamma$ unerfüllbar, somit auch Γ.

Da Γ unerfüllbar ist *existiert* nun nach dem Kompaktheitssatz eine *endliche* Teilmenge $\Gamma_0 \subset \Gamma$, die *unerfüllbar* ist. Allerdings sind alle endlichen Teilmengen $\Gamma_0 \subset \Gamma$ erfüllbar; konstruiere ein Modell $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{M}}, L^{\mathcal{M}}, 0^{\mathcal{M}})$ wie folgt:
$$\begin{aligned} 0^{\mathcal{M}} &:= 0 \in \mathbb{N}, \\ \leq^{\mathcal{M}} &:= \leq^{\mathbb{N}}, \\ L^{\mathcal{M}} &:= \{0, 1, \dots, k \mid k = \max\{\ell \in \mathbb{N} : \psi_\ell \in \Gamma_0\}\}. \end{aligned}$$
Dies führt zum Widerspruch, womit kein solcher Satz φ existieren kann.