Formale Grundlagen der Informatik II
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
18. Juni 2014

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Resolutionsverfahren)
Seien φ und ψ AL-Formeln. Wie kann man das Resolutionsverfahren benutzen, um zu überprüfen, ob

(a) φ unerfüllbar ist;

(b) φ erfüllbar ist;

(c) φ allgemeingültig ist;

(d) φ nicht allgemeingültig ist;

(e) $\varphi \models \psi$;

(f) eine endliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist;

(g) eine unendliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist?

Lösung:

(a) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$ $\quad$ ($K(\varphi)$ bezeichnet die Klauselmenge zu φ.)

(b) $\square \notin \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$

(c) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(d) $\square \notin \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(e) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi \land \neg\psi))$

(f) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi))$

(g) $\square \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi_0))$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Aufgabe G5 (Sequenzenkalkül)
Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül SK für folgende Sequenzen eine Herleitung.

(a) $\vdash p \lor q \lor \neg p$

(b) $p, q \lor r \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$

Lösung:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, q}\,(\mathrm{Ax})}{p \vdash p \lor q}\,(\lor\mathrm{R})}{\vdash p \lor q, \neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p \lor q \lor \neg p}\,(\lor\mathrm{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,q \vdash p, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{p,q \vdash q, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax})}{p,q \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, p}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, r}\,(\mathrm{Ax})}{p,r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R})}{p, q \vee r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\vee\mathrm{L})}{p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

Aufgabe G6 (Kompaktheitssatz)
Für Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jedes Modell, das alle Formeln $\phi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

Lösung:
Wenn $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ gilt, dann hat die Menge $\Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle, wobei $\neg\Psi = \{\neg\psi \,:\, \psi \in \Psi\}$. Der Kompaktheitssatz impliziert dann, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle hat. Setzen wir $\Phi_0 = \{\phi \in \Phi \,:\, \phi \in \Gamma\}$ und $\Psi_0 = \{\psi \in \Psi \,:\, \neg\psi \in \Gamma\}$, dann heißt das, dass $\Gamma = \Phi_0 \cup \neg\Psi_0$ keine Modelle hat, also $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

Hausübung

Aufgabe H4 (Resolutionsverfahren) (12 Punkte)

Seien

$$\varphi := (p \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$
$$\psi := (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass

(a) φ erfüllbar ist;

(b) $\varphi \models \psi$ gilt.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^0(K) &= \{\{p,q\},\ \{q,\neg r\},\ \{p,\neg q,r\}\} \\
\mathrm{Res}^1(K) &= \mathrm{Res}^0(K) \cup \{\{p,r\},\ \{p,r,\neg r\}, \{p,q,\neg q\}\} \\
\mathrm{Res}^2(K) &= \mathrm{Res}^1(K) \cup \{\{p,q,\neg r\}\} \\
\mathrm{Res}^3(K) &= \mathrm{Res}^2(K)
\end{aligned}$$

(b) Klauseln: $\{p,q\}$, $\{q,\neg r\}$, $\{p,\neg q,r\}$, $\{p,\neg r\}$, $\{\neg p,r\}$, $\{\neg p,\neg q,\neg r\}$

$$\begin{tikzcd}
\{q,\neg r\} \arrow[d] & \{\neg p,\neg q,\neg r\} \arrow[dl] & & \{p,q\} \arrow[d] & \{p,\neg q,r\} \arrow[dl] \\
\{\neg p,\neg r\} \arrow[dr] & \{\neg p,r\} \arrow[d] & & \{p,r\} \arrow[d] & \{p,\neg r\} \arrow[dl] \\
& \{\neg p\} \arrow[dr] & & \{p\} \arrow[dl] & \\
& & \square & &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe H5 (Beweiskalküle) (12 Punkte)

Wir betrachten folgenden Beweiskalkül von Shoenfield (1967) für das System $\{\neg, \vee\}$:

Axiome: $\neg\phi \vee \phi$

Regeln: $\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}$ $\quad \dfrac{\phi \vee \phi}{\phi}$ $\quad \dfrac{\phi \vee (\psi \vee \chi)}{(\phi \vee \psi) \vee \chi}$ $\quad \dfrac{\phi \vee \psi \qquad \neg\phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$

Wir schreiben $\Phi \vdash \psi$, falls es einen Beweisbaum gibt, dessen Blätter Axiome oder Aussagen in Φ sind und dessen Wurzel ψ ist. Beweisen Sie:

(a) $\phi \vee \psi \vdash \psi \vee \phi$.

(b) $\phi, \phi \to \psi \vdash \psi$ (wie üblich betrachten wir $\phi \to \psi$ als eine Abkürzung für $\neg\phi \vee \psi$).

(c) $\phi \vee \psi, \neg\phi \vdash \psi$.

(d) $\neg\neg\phi \vdash \phi$.

Lösung:

(a)

$$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \neg\phi \vee \phi}{\psi \vee \phi}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi} \qquad \neg\phi \vee \psi}{\psi \vee \psi}}{\psi}$$

(c)

$$\dfrac{\phi \lor \psi \qquad \dfrac{\neg\phi}{\neg\phi \lor \psi}}{\dfrac{\psi \lor \psi}{\psi}}$$

(d) Aus $\neg\phi \lor \phi$ und $\neg\neg\phi$ folgt mit (c) ϕ.

Aufgabe H6 (Kompaktheitssatz) (12 Punkte)

Eine Interpretation $\mathscr{I} : \mathscr{V} = \{p_1, p_2, \ldots\} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als eine unendliche Bit-Sequenz. P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, $\overline{P}$ das Komplement von P. Wir betrachten ein P, so dass sowohl P als auch $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned} P &= \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \models \Phi\} \\ \overline{P} &= \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \models \Psi\} \end{aligned}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathscr{V})$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ sogar schon durch einzelne AL-Formeln ϕ und ψ spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

Lösung: Die Vereinigung $\Phi \cup \Psi$ kann keine Modelle haben, da solche Modelle sowohl zu P als auch zu $\overline{P}$ gehören würden. Der Kompaktheitssatz sagt jetzt, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi \cup \Psi$ keine Modelle hat. Da jede Formel in Γ entweder zu Φ oder zu Ψ gehört, muss Γ von der Form

$$\Gamma = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$$

sein, wobei $\phi_i \in \Phi$ und $\psi_i \in \Psi$. Wenn wir schreiben $\phi = \phi_1 \land \phi_2 \land \ldots \land \phi_m$ und $\psi = \psi_1 \land \psi_2 \land \ldots \land \psi_n$, dann sind die Modelle von ϕ genau die Elemente von P und die Modelle von ψ genau die Elemente von $\overline{P}$. Diese Behauptung folgt aus den folgenden drei Tatsachen:

1. Elemente von P sind Modelle von ϕ und Elemente von $\overline{P}$ sind Modelle von ψ.
2. Es gibt keine Modellen die gleichzeitig ϕ und ψ wahr machen.
3. Jedes Modell gehört entweder zu P oder zu $\overline{P}$.