Formale Grundlagen der Informatik II
2. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
10. 06. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Sheffer- und Pierce-Operator)
Definiere die folgenden Junktoren: sei der *Sheffer-Operator* (auch: NAND) gegeben durch

$$p \uparrow q := \neg(p \wedge q) \quad \text{(äquivalent: } \neg p \vee \neg q\text{)}$$

und der *Pierce-Operator* (auch: NOR) durch

$$p \downarrow q := \neg(p \vee q) \quad \text{(äquivalent: } \neg p \wedge \neg q\text{).}$$

Beachte: Man kann $p \downarrow q$ lesen als „weder p noch q".

(a) Geben Sie die Wahrheitstafeln für $\uparrow$ und $\downarrow$ an.

(b) Beweisen Sie $p \uparrow q \equiv \big((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big) \downarrow \big((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big)$ (also kann man $\uparrow$ durch $\downarrow$ ausdrücken).

(c) Drücken Sie $\downarrow$ durch $\uparrow$ aus.

Aufgabe G5 (Disjunktive und konjunktive Normalform)
Geben Sie die DNF und KNF für die folgende Formel an:

$$(q \to p) \wedge (p \vee \neg r)$$

Aufgabe G6 (DNF vs. KNF)
Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_i \leftrightarrow q_i)$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat (welche?);

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) Geben Sie eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF an. Wie lange ist diese Formel ausgeschrieben, asymptotisch in n?

Hausübung

– Abgabe am 19.6.-21.6. 2013 in der Übung. Denken Sie daran Ihre Antworten zu begründen. –

Aufgabe H4 (Kommutativität und Assoziativität) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\oplus$ (für die Definition siehe **Aufgabe H1**) kommutativ und assoziativ ist, das heißt, $p \oplus q \equiv q \oplus p$ und $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$ gelten.

Bemerkung: Das bedeutet, dass man in Ausdrücken, wo $\oplus$ der einzige Junktor ist, die Aussagen in beliebiger Reihenfolge und ohne Klammern schreiben kann. (Dasselbe gilt natürlich auch für $\wedge$ und $\vee$.)

Aufgabe H5 (Disjunktive und konjunktive Normalform) (3 Punkte)
Gegeben sei die Boolesche Funktion

$$f(x,y,u,v) := \begin{cases} 1 & \text{wenn genau ein oder genau drei von } x,y,u,v \text{ gleich 1 sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Geben Sie DNF für $f(x,y,u,v)$ an.

(b) Geben Sie KNF für $f(x,y,u,v)$ an.

(c) Geben Sie eine Formel φ, sodass $f = f_\varphi$ und φ nur den Junktor $\oplus$ benutzt.

Aufgabe H6 (Vollständige Systeme von Junktoren) (5 Punkte)
Für jede der folgenden Junktorenmengen beweisen oder widerlegen Sie, dass sie vollständige Systeme von Junktoren sind.

(a) $\{\neg, \rightarrow\}$

(b) $\{\rightarrow, 0\}$

(c) $\{\uparrow\}$

(d) $\{\leftrightarrow\}$

(e) $\{\wedge, \vee\}$

Nachricht: Die Gesellschaft für Informatik (GI) hat zahlreiche Regional- und Studierendengruppen — auch an der TU Darmstadt. Bei Interesse tragen Sie sich in den Mailverteiler ein unter

http://mail.gi-ev.de/mailman/listinfo/sg-darmstadt

Minitest

Aufgabe M4 (Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit)
Kreuzen Sie alle Aussagen an, die im Allgemeinen wahr sind.

(a) Seien φ, ψ zwei erfüllbare Formeln. Dann ist

$\neg\varphi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \wedge \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig.

(b) Seien φ, ψ zwei allgemeingültige Formeln. Dann ist

$\neg\varphi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \wedge \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig.

(c) Sei φ erfüllbar und ψ allgemeingültig. Dann ist

$\varphi \wedge \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig.

Aufgabe M5 (Vollständige Systeme von Junktoren)
Kreuzen Sie die folgenden Mengen an, die vollständige Systeme von Junktoren sind.

☐ $\{\neg, \wedge, \vee\}$ ☐ $\{\neg, \wedge\}$ ☐ $\{\neg, \vee\}$ ☐ $\{\neg\}$ ☐ $\{0\}$ ☐ $\emptyset$