Formale Grundlagen der Informatik II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
9. Juli 2014

Gruppenübung

Aufgabe G13
Seien P, Q und S einstellige Relationssymbole, R ein zweistelliges Relationssymbol und Φ die Formelmenge:

(1) $\forall x \forall y\,((Q(x) \wedge R(x,y)) \rightarrow S(y))$.

(2) $\forall x \forall y\,((S(x) \wedge R(x,y)) \rightarrow \neg Q(y))$.

(3) $\forall x \exists y\,(R(x,y) \wedge Q(y))$.

(a) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

(b) Begründen Sie intuitiv, warum diese Formelmenge nicht erfüllbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie R als die Kantenrelation eines Graphen und P, Q und S als Farben, wobei $P(x)$ bedeutet, dass der Knoten x die Farbe P hat.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

Lösung:

(a) Die erste beide Formeln sind schon in Skolemnormalform. Eine Skolemnormalform für die letzte Formel ist:
(3') $\forall x(R(x, f(x)) \wedge Q(f(x)))$.

(b) Sei x ein Element eines Modells. Die Formel (3') sagt, dass es immer eine Kante von einem Knoten $f^n x$ nach $f^{n+1}x$ gibt und dass alle Knoten von der Gestalt $f^{n+1}x$ die Farbe Q haben. (1) impliziert dann, dass Knoten von der Gestalt $f^{n+2}x$ die Farbe S haben und (2), dass Knoten von der Gestalt $f^{n+3}x$ die Farbe Q nicht haben. Also hat $f^3 x$ sowohl die Farbe Q als auch nicht die Farbe Q. Widerspruch! Also kann es kein Modell geben und ist die Formelmenge (1-3) unerfüllbar.

(c) Wir schreiben erst die Aussagen in Klauselform um:

$$\{\neg Q(x), \neg R(x,y), S(y)\}$$
$$\{\neg S(x), \neg R(x,y), \neg Q(y)\}$$
$$\{R(x, f(x))\}, \{Q(f(x))\}$$

Mit Grundinstanzen-Resolution leitet man dann ab:

$$\begin{tikzcd}
 & \{\underline{Rfcffc}\} \arrow[dr] & & \{\neg Qfc, \underline{\neg Rfcffc}, Sffc\} \arrow[dl] & \\
\{\underline{Qfc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Qfc}, Sffc\} \arrow[dl] & & \\
 & \{\underline{Sffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Sffc}, \neg Rffcfffc, \neg Qfffc\} \arrow[dl] & \\
\{\underline{Rffcfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Rffcfffc}, \neg Qfffc\} \arrow[dl] & & \\
 & \{\underline{\neg Qfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Qfffc}\} \arrow[dl] & \\
 & & \square & &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe G14

Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(a) $\forall x R(x, f(x)) \vdash \exists x R(f(x), f(f(x)))$.

(b) $\forall x f(x,x) = x \vdash \forall x(P(x) \vee \neg P(f(x,x)))$.

(c) $\exists y \forall x R(x,y) \vdash \forall x \exists y R(x,y)$.

(d) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \text{frei}(\psi)$.

Lösung:

(a)

$$\begin{array}{c}
\forall x Rxfx, Rfxffx \vdash Rfxffx, \exists x Rfxffx \\ \hline
\forall x Rxfx \vdash Rfxffx, \exists x Rfxffx \\ \hline
\forall x Rxfx \vdash \exists x Rfxffx
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c}
\hline
\forall x fxx = x, fxx = x, Px, Pfxx \vdash Px \\ \hline
\forall x fxx = x, fxx = x, Pfxx \vdash Px \\ \hline
\forall x fxx = x, Pfxx \vdash Px \\ \hline
\forall x fxx = x \vdash Px, \neg Pfxx \\ \hline
\forall x fxx = x \vdash Px \vee \neg Pfxx \\ \hline
\forall x fxx = x \vdash \forall x(Px \vee \neg Pfxx)
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{c}
\forall x Rxy, Rxy \vdash Rxy, \exists y Rxy \\ \hline
\forall x Rxy \vdash Rxy, \exists y Rxy \\ \hline
\forall x Rxy \vdash \exists y Rxy \\ \hline
\exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Rxy \\ \hline
\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy
\end{array}$$

(d) Beachte, dass $\psi(c/x) = \psi$ ist, da $x \notin \text{frei}(\psi)$.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\hline
\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vdash \varphi(c/x), \psi & \quad \forall x(\varphi \vee \psi), \psi \vdash \varphi(c/x), \psi
\end{array} \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vee \psi \vdash \varphi(c/x), \psi \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi(c/x), \psi \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \psi \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \forall x \psi \\ \hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi
\end{array}$$

Aufgabe G15 (Statman, Orevkov, Pudlak, Zhang)

Gegeben sei die folgende Theorie $\mathcal{T}$:
$\mathcal{L}(\mathcal{T})$ enthält Konstanten $0, 1$, Funktionssymbole $+, 2^{(\cdot)}$ und ein einstelliges Predikat $I(\cdot)$.
Betrachte die Konjunktion der Sätze

i) $\forall x, y, z(x + (y + z) = (x + y) + z)$,

ii) $\forall y(y + 0 = y)$,

iii) $2^0 = 1$,

iv) $\forall x(2^x + 2^x = 2^{1+x})$,

v) $I(0)$,

vi) $\forall x(I(x) \rightarrow I(1 + x))$.

Diese kann pränexiert werden zu einer Aussage der Form $\varphi :\equiv \forall x_1, \ldots, x_n \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$, wobei φ_0 keinen Quantor enthält.
Wir benutzen die Notation $2_0 := 0,\ 2_{k+1} := 2^{2_k}$. Zeigen Sie $\models \varphi \to I(2_k)$, indem Sie einen Beweis im Sequenzenkalkül $\varphi \vdash I(2_k)$ angeben, dessen Tiefe *linear in k* ist. Es reicht, diesen informell zu beschreiben. Sie dürfen (und müssen sogar) hierbei die Schnittregel (CUT) benutzen. Betrachten Sie hierfür die Relationen

$$R_0(x) := I(x), \quad R_{n+1}(x) := \forall y\big(R_n(y) \to R_n(2^x + y)\big).$$

und zeigen Sie zuerst mittels Induktion über i dass $\varphi \vdash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \to R_i(1+x))$ einen Beweis linearer Länge in i besitzt.

Lösung: Wir zeigen zuerst den Hinweis. Der Beweis des Induktionsstarts $i = 0$ ist eine Instanz von (Ax). Sei nun ein Beweis entsprechender Komplexität für $\varphi \vdash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \to R_i(1+x))$ gegeben. Da $\varphi \vdash 2^0 = 1$ (Ax), benötigen wir nur noch eine Anwendung von (Sub), um $\varphi \vdash R_{i+1}(0)$ zu schließen, da

$$R_{i+1}(0) = \forall y(R_i(y) \to R_i(2^0 + y)).$$

Zudem gilt $R_{i+1}(x) = \forall y(R_i(y) \to R_i(2^x + y))$, somit kann man mithilfe des Kontraktionslemmas $R_{i+1}(x) \vdash \forall y((R_i(y) \to R_i(2^x + y)) \wedge (R_i(2^x + y) \to R_i(2^x + (2^x + y)))$ schließen, ohne die Länge des Beweises bis auf einer von i unabhängigen Konstante zu verlängern. Mithilfe der Schnittregel (CUT) erhalten wir somit einen Beweis für $R_{i+1}(x) \vdash \forall x(R_i(y) \to R_i(2^{1+x} + y)$, wobei der Antezedent gleich $R_{i+1}(1+x)$ ist. Somit erhalten wir einen Beweis linearer Länge für

$$\varphi \vdash R_i(0), \quad \varphi, R_i(x) \vdash R_i(1+x)\big). \tag{1}$$

Nun folgt erneut mit der Schnittregel (CUT), $\varphi \vdash R_{k-1}(2^0)$, wobei der Antezedent gleich $R_{k-1}(y) \to R_{k-1}(2^0 + y)$ ist. Wenden wir (CUT) erneut an, erhalten wir $\varphi \vdash R_{k-2}(2^{2^0})$. Wenden wir (CUT) insgesamt k-mal an, erhalten wir $R_0(2_k) = I(2_k)$.

Hausübung

Aufgabe H13

Beweisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

(a) $\forall x \forall y(Rxy \to (Px \wedge \neg Py))$

(b) $\forall x \forall y(Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy))$

(c) $\forall x Rxfx$

Aufgabe H14

(a) Leiten Sie die Sequenz $\forall x \forall y(Rxy \vee Py), \exists x \neg Px \vdash \exists x \forall y Ryx$ her.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy}$$

Beachten Sie, dass sich diese Regel nicht in $\mathcal{SK}^{\neq}$ (auch nicht in $\mathcal{SK}$) herleiten lässt (warum?).

(c) Zeigen Sie, dass wenn T_1 und T_2 zwei Theorien sind, so dass $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, es ein Satz σ gibt, so dass $T_1 \models \sigma$ und $T_2 \models \neg\sigma$.

Aufgabe H15

Zeigen sie, dass jede Herbrand-Disjunktion des Satzes $\varphi \to I(2_k)$ aus Aufgabe G15 mindestens der Länge 2_k ist.