Aussagenlogik
und Prädikatenlogik
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Anton Freund, Jonathan Weinberger

SoSe 2018
Übung: 27.06.2018
Abgabe: 11.07.2018

Gruppenübung

Beachten Sie bitte den **Hinweis zu den Hausübungen** weiter unten.

Aufgabe G1 (Grundinstanzenresolution I)
Wir betrachten die Formeln

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x \forall y \forall z\,((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\\ \varphi_2 &:= \forall x \forall y\,(Rxy \to (Rxx \leftrightarrow \neg Ryy)),\\ \varphi_3 &:= \forall x \exists y\,(Rxy \wedge (Ryy \leftrightarrow \neg Ryx)),\end{aligned}$$

wobei R ein zweistelliges Relationssymbol ist.

(a) Bringen Sie die Formel φ_3 in Skolemnormalform.

(b) Zeigen Sie durch Grundinstanzenresolution, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Die Formelmengen $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ und $\{\varphi_1, \varphi_3\}$ sind erfüllbar. Weisen Sie dies für beide Mengen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Lösung:

(a) Die Formel $\forall x(Rxfx \wedge (Rfxfx \leftrightarrow \neg Rfxx))$ ist eine Skolemnormalform von φ_3.

(b) Man beachte, dass die Formeln φ_1 und φ_2 bereits in Skolemnormalform sind. Sie entsprechen den Klauseln

$$\begin{aligned}K_1 &:= \{\neg Rxy, \neg Ryz, Rxz\},\\ K_2 &:= \{\neg Rxy, \neg Rxx, \neg Ryy\},\\ K_3 &:= \{\neg Rxy, Rxx, Ryy\},\end{aligned}$$

Die Skolemnormalform von φ_3 entspricht den Klauseln

$$\begin{aligned}K_4 &:= \{Rxfx\},\\ K_5 &:= \{\neg Rfxfx, \neg Rfxx\},\\ K_6 &:= \{Rfxfx, Rfxx\}.\end{aligned}$$

Damit können wir folgenden Resolutionsbeweis führen:

1.	$\neg Rcc$	$K_2(c/x, c/y)$
2.	$\neg Rcfc \vee \neg Rfcc \vee Rcc$	$K_1(c/x, fc/y, c/z)$
3.	$\neg Rcfc \vee \neg Rfcc$	$(1+2)$
4.	$Rcfc$	$K_4(c/x)$
5.	$\neg Rfcc$	$(3+4)$
6.	$Rfcfc \vee Rfcc$	$K_6(c/x)$
7.	$Rfcfc$	$(3+6)$
8.	$\neg Rfcfc$	$K_2(fc/x, fc/y, fc/z)$
9.	$\square$	$(7+8)$

Sie können diesen Beweis natürlich auch als Baum schreiben.

(c) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:
- Die Formeln φ_1 und φ_2 enthalten keine Konstanten oder Funktionssymbole. Wir fügen also eine Konstante c hinzu und erhalten $T = \{c\}$ als Trägermenge der gesuchten Herbrandstruktur. Eine mögliche Interpretation des Relationssymbol ist durch $R^{\mathcal{H}} = \emptyset$ gegeben.
- Die Skolemnormalform von φ_3 enthält ein einstelliges Funktionssymbol f aber keine Konstanten. Wir fügen wieder eine Konstante c hinzu und erhalten die Trägermenge $T = \{f^n c : n \in \mathbb{N}\}$. Man sieht, dass φ_1 und φ_3 in einer linearen Ordnung ohne größtes Element erfüllt sind. Eine mögliche Interpretation des Relationssymbols ist also $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n c, f^m c) : n \leq m\}$.

Aufgabe G2 (Kompaktheit der Prädikatenlogik)
Ein Pfad in einem Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Folge $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ von Knoten, so dass $x_i E x_{i+1}$ für alle $i < n$ gilt. Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es für alle Paare von Knoten (x, y) einen Pfad $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ mit $x = x_0$ und $y = x_n$ gibt.

(a) Geben Sie Formeln $\phi_n(x, y)$ an, welche besagen, dass es zwischen x und y einen Pfad der Länge n gibt.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, sodass $\mathcal{G} \models \Gamma$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.
(Tipp: Wenden Sie Kompaktheit auf die Formelmenge $\Gamma \cup \{\neg\phi_n(c, d) \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit Konstanten c, d an.)

Lösung:

(a) Eine mögliche Lösung ist $\phi_n(x, y) = \exists x_0 \ldots \exists x_n (x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \bigwedge_{i<n} x_i E x_{i+1})$.

(b) Nehmen wir an, dass es eine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, sodass ein Graph $\mathcal{G}$ genau dann ein Modell von Γ ist, wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist. Wir erweitern die Signatur um zwei Konstanten c und d und betrachten die Formelmenge

$$\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\neg\phi_n(c, d) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Formelmenge Γ_∞ is unerfüllbar, da man in einem Modell $\mathcal{G}$ die Konstanten c und d nicht widerspruchsfrei interpretieren kann: Einerseits soll es einen Pfad zwischen $c^{\mathcal{G}}$ und $d^{\mathcal{G}}$ geben, da Γ erfüllt ist und der Graph $\mathcal{G}$ deshalb zusammenhängend sein muss. Andererseits kann es keinen Pfad zwischen $c^{\mathcal{G}}$ und $d^{\mathcal{G}}$ geben: Dieser Pfad hätte eine bestimmte Länge n, was unmöglich ist, da $\mathcal{G} \models \neg\phi_n(c, d)$ gelten soll. Also ist nach dem Kompaktheitssatz schon eine endliche Teilmenge von Γ_∞ unerfüllbar. Insbesondere gilt dies für eine Teilmenge der Form

$$\Gamma_N = \Gamma \cup \{\neg\phi_n(c, d) \mid n < N\}$$

für ein $N \in \mathbb{N}$ (da nämlich jede endliche Teilmenge von Γ_∞ in einer Teilmenge dieser Form enthalten ist). Jedes Γ_N hat aber ein Modell: In diesem gibt es einen Pfad zwischen $c^{\mathcal{G}}$ und $d^{\mathcal{G}}$, aber keinen mit einer Länge kürzer als N. Ein solches Modell ist etwa durch

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow N$$

gegeben, wobei wir c durch 0 und d durch N interpretieren. Also haben wir einen Widerspruch und schließen, dass es keine Formelmenge Γ geben kann, die den Zusammenhang eines Graphen ausdrückt.

Aufgabe G3 (Superexponentielle Herbrand-Disjunktion, nach Statman, Orevkov, Pudlák und Zhang)
Wir arbeiten in der Signatur mit Konstanten $0, 1$, einem zweistelligen Funktionssymbol $+$, einem einstelligen Funktionssymbol $2^{(\cdot)}$ und einem einstelligen Relationssymbol $I(\cdot)$. Sei $\mathcal{T}$ die Theorie mit Axiomen

$$\forall x, y, z\, (x + (y + z) = (x + y) + z),$$
$$\forall y\, (y + 0 = y),$$
$$2^0 = 1,$$
$$\forall x\, (2^x + 2^x = 2^{1+x}).$$

Sei außerdem φ die Formel

$$\varphi := I(0) \wedge \forall x\, (I(x) \rightarrow I(1 + x)).$$

Wir schreiben $\varphi \equiv \forall x\, \varphi_0(x)$ mit $\varphi_0(x) = I(0) \wedge (I(x) \rightarrow I(1 + x))$.

(a) Betrachten Sie die induktiv definierten Formeln

$$R_0(x) := I(x), \qquad R_{n+1}(x) := \forall y\big(R_n(y) \to R_n(2^x + y)\big).$$

Geben Sie informelle Beweise für $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \to R_i(1+x))$ an. (Tipp: Induktion über i.)

(b) Wir vereinbaren die Notation $2_0 := 0,\ 2_{k+1} := 2^{2_k}$. Geben Sie informelle Beweise von $\mathcal{T} \vDash \varphi \to I(2_k)$ an. Überzeugen Sie sich, dass die Formalisierung dieser Beweise im Sequenzenkalkül mit der Schnittregel Beweisbäume mit linearer Tiefe in k ergibt (Sie müssen dazu nichts aufschreiben).

(c) Zeigen Sie: Jede Herbrand-Disjunktion $\mathcal{T} \vDash \bigvee_{i=1,\dots,n}(\varphi_0(t_i) \to I(2_k))$ des Satzes $\varphi \to I(2_k) \equiv \exists_x(\varphi_0(x) \to I(2_k))$ muss aus $n \geq 2_k$ Disjunktionsgliedern bestehen.

Lösung:

(a) Wir argumentieren per Induktion über i. Für $i = 0$ bemerkt man, dass $R_0(0)$ und $\forall x(R_i(x) \to R_i(1+x))$ Konjunktionsglieder von φ sind. Im Induktionsschritt können wir annehmen, dass bereits ein Beweis für $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_i(0) \wedge \forall x(R_i(x) \to R_i(1+x))$ gegeben ist. Wegen $\mathcal{T} \vDash 2^0 = 1$ erhalten wir

$$\mathcal{T}, \varphi \vDash \forall y(R_i(y) \to R_i(2^0 + y)),$$

also gerade $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_{i+1}(0)$. Die Definition von $R_{i+1}(x)$ ergibt

$$R_{i+1}(x) \vDash R_i(y) \to R_i(2^x + y),$$
$$R_{i+1}(x) \vDash R_i(2^x + y) \to R_i(2^x + (2^x + y)).$$

Zusammen erhalten wir also

$$R_{i+1}(x) \vDash R_i(y) \to R_i(2^x + (2^x + y)).$$

Man beachte, dass hier die Schnittregel verwendet wurde. Mit $\mathcal{T} \vDash 2^x + (2^x + y) = 2^{1+x} + y$ ergibt sich

$$\mathcal{T}, R_{i+1}(x) \vDash R_i(y) \to R_i(2^{1+x} + y),$$

also gerade $\mathcal{T} \vDash R_{i+1}(x) \to R_{i+1}(1+x)$. Wir halten fest, dass die konstruierten Beweise lineare Länge in i haben.

(b) Nach Teilaufgabe (a) haben wir $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_k(0)$. Mit der Definition von $R_k(x)$ ergibt sich $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_{k-1}(0) \to R_{k-1}(2^0)$. Wieder nach (a) hat man $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_{k-1}(0)$. Dann kann man also $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_{k-1}(2^0)$ folgern. Indem man das Argument wiederholt, erhält man $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_{k-2}(2^{2^0})$ und schließlich $\mathcal{T}, \varphi \vDash R_0(2_k)$, also gerade $\mathcal{T}, \varphi \vDash I(2_k)$.

(c) Wir wollen die Annahme, dass es eine Herbrand-Disjunktion $\mathcal{T} \vDash \bigvee_{i=1,\dots,n}(\varphi_0(t_i) \to I(2_k))$ mit $n < 2_k$ Disjunktionsgliedern gibt, zu einem Widerspruch führen. Dazu suchen wir eine Interpretation $I^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, sodass das Modell $(\mathbb{N}, I^{\mathbb{N}})$, zusammen mit den üblichen Interpretationen der Konstanten und Funktionssymbole, keines der Disjunktionsglieder $\varphi_0(t_i) \to I(2_k)$ erfüllt (man beachte $\mathbb{N} \vDash \mathcal{T}$). Wegen $n < 2_k$ gibt es eine Zahl $m < 2_k$, sodass $t_i^{\mathbb{N}} \neq m$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. Betrachte nun die Interpretation $I^{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq m\}$. Dann gilt $(\mathbb{N}, I^{\mathbb{N}}) \vDash I(t_i) \to I(1+t_i)$ und somit $(\mathbb{N}, I^{\mathbb{N}}) \vDash \varphi_0(t_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wegen $m < 2_k$ gilt andererseits $(\mathbb{N}, I^{\mathbb{N}}) \nvDash I(2_k)$. Zusammen hat man also $(\mathbb{N}, I^{\mathbb{N}}) \nvDash \varphi_0(t_i) \to I(2_k)$.

Noch eine kurze Bemerkung zum Sinn der Aufgabe: Man könnte meinen, dass man aus einem kurzen Beweis eine kurze Herbrand-Disjunktion ablesen kann. Das ist aber im Allgemeinen nicht der Fall. Tatsächlich kann man aus einem kurzen Beweis *ohne Schnittregel* eine kurze Herbrand-Disjunktion ablesen. Die Schnittregel lässt sich zwar aus jedem Beweis eliminieren, dadurch kann der Beweis aber superexponentiell länger werden. Umgekehrt sieht man, dass sich Beweise enorm abkürzen lassen, wenn man geeignete neue Begriffe einführt (die Formeln $R_i(x)$ aus Teil (a) der Aufgabe) und zunächst Hilfssätze über diese Begriffe zeigt.

Hausübung

Hinweis zu den Hausübungen:

Die Hausübungen auf diesem Blatt sind **Bonusaufgaben**. Das bedeutet, dass sich die Grenze für Klausurzulassung und Notenbonus durch diese Aufgaben nicht erhöht. Die Punkte, die Sie bei diesen Aufgaben erreichen, werden Ihnen dennoch für Klausurzulassung und Notenbonus gutgeschrieben. Die **Abgabe** der Hausübung erfolgt regulär in den Übungsstunden (nämlich am 11.07.2018). Ihre korrigierten Lösungen können Sie dann in den Feriensprechstunden der Übungsgruppenleiter_innen abholen.

Aufgabe H1 (Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik) (12 Punkte)
Leiten Sie die folgenden Sequenzen im Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik her:

(a) $\forall x R(x, f(x)) \vdash \exists x R(f(x), f(f(x)))$,

(b) $\forall x x = f(x,x) \vdash \forall x(P(x) \vee \neg P(f(x,x)))$,

(c) $\exists y \forall x R(x,y) \vdash \forall x \exists y R(x,y)$,

(d) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, wobei vorausgesetzt ist, dass die Variable x nicht frei in ψ vorkommt.

Lösung:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Rxfx, Rfxffx \vdash Rfxffx, \exists x Rfxffx}{\forall x Rxfx \vdash Rfxffx, \exists x Rfxffx}}{\forall x Rxfx \vdash \exists x Rfxffx}$$

Die verwendeten Regeln lauten (Ax), ($\forall$L) und ($\exists$R). Man schreibt diese Regeln üblicherweise direkt neben den Ableitungsstrich. Das war hier technisch schwer zu realisieren.

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, x = fxx, x = fxx, Px, Pfxx \vdash Px}{\forall x\, x = fxx, x = fxx, Pfxx \vdash Px}}{\forall x\, x = fxx, Pfxx \vdash Px}}{\forall x\, x = fxx \vdash Px, \neg Pfxx}}{\forall x\, x = fxx \vdash Px \vee \neg Pfxx}}{\forall x\, x = fxx \vdash \forall x(Px \vee \neg Pfxx)}$$

Die verwendeten Regeln lauten (Ax), (Sub), ($\forall$L), ($\neg$R), ($\vee$R) und ($\forall$R). Für letztere muss man die Variablenbedingung prüfen: Die Variable x kommt in der Sequenz $\forall x\, x = fxx \vdash \forall x(Px \vee \neg Pfxx)$ nicht frei vor.

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x Rxy, Rxy \vdash Rxy, \exists y Rxy}{\forall x Rxy \vdash Rxy, \exists y Rxy}}{\forall x Rxy \vdash \exists y Rxy}}{\exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Rxy}}{\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy}$$

Die verwendeten Regeln lauten (Ax), ($\forall$L), ($\exists$R), ($\exists$L) mit Variablenbedingung (y nicht frei in $\exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Rxy$) und ($\forall$R) mit Variablenbedingung (x nicht frei in $\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy$).

(d) Sei y eine Variable, die in den gegebenen Formeln nicht frei vorkommt. Man beachte, dass $\psi(y/x) = \psi$ gilt, da x nicht frei in ψ vorkommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(y/x) \vdash \varphi(y/x), \psi \qquad \forall x(\varphi \vee \psi), \psi \vdash \varphi(y/x), \psi}{\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(y/x) \vee \psi \vdash \varphi(y/x), \psi}}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi(y/x), \psi}}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \psi}}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi}$$

Die verwendeten Regeln lauten (Ax)-(Ax), ($\vee$L), ($\forall$L), ($\forall$R) mit Variablenbedingung (y ist nicht frei in der Sequenz $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \psi$) und ($\vee$R).

Aufgabe H2 (Grundinstanzenresolution II) (12 Punkte)
Seien P, Q und S einstellige Relationssymbole, R ein zweistelliges Relationssymbol und Φ die Menge der Formeln

$$\forall x \forall y\, ((Q(x) \wedge R(x,y)) \rightarrow S(y)),$$
$$\forall x \forall y\, ((S(x) \wedge R(x,y)) \rightarrow \neg Q(y)),$$
$$\forall x \exists y\, (R(x,y) \wedge Q(y)).$$

(a) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um. (Hinweis: Zwei der gegebenen Formeln sind bereits in Skolemnormalform. Sie müssen also nur die dritte der Formeln umwandeln.)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist. (Tipp: Es kann hilfreich sein, wenn Sie sich zunächst überlegen, warum die Formelmenge Φ kein Herbrandmodell haben kann.)

Lösung:

(a) Die ersten beiden Formeln sind schon in Skolemnormalform. Eine Skolemnormalform für die letzte Formel ist

$$\forall x(R(x, f(x)) \wedge Q(f(x))).$$

(b) Die folgende Vorüberlegung war nicht gefordert, sie ist aber hilfreich: Wegen der Formel in Teilaufgabe (a) muss in jedem Herbrandmodell $Q(f^{n+1}c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten (hierbei ist c ein neues Konstantensymbol). Dieselbe Formel fordert außerdem $R(f^n c)(f^{n+1}c)$. Zusammen mit der ersten Formel aus Φ erhält man $S(f^{n+2}c)$. Mit der zweiten Formel aus Φ schließt man auf $\neg Q(f^{n+3}c)$, im Widerspruch zu $Q(f^{n+3}c)$. Nun können wir die eigentliche Aufgabe lösen: Die Formeln aus Φ entsprechen den Klauseln

$$\begin{array}{l} \{\neg Q(x), \neg R(x,y), S(y)\}, \\ \{\neg S(x), \neg R(x,y), \neg Q(y)\}, \\ \{R(x, f(x))\}, \quad \{Q(f(x))\}. \end{array}$$

Mit Grundinstanzen-Resolution leitet man dann ab:

$$\begin{tikzcd}
 & \{\underline{Rfcffc}\} \arrow[dr] & & \{\neg Qfc, \underline{\neg Rfcffc}, Sffc\} \arrow[dl] \\
\{\underline{Qfc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Qfc}, Sffc\} \arrow[dl] & \\
 & \{\underline{Sffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Sffc}, \neg Rffcfffc, \neg Qfffc\} \arrow[dl] \\
\{\underline{Rffcfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Rffcfffc}, \neg Qfffc\} \arrow[dl] & \\
 & \{\underline{\neg Qfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Qfffc}\} \arrow[dl] \\
 & & \square &
\end{tikzcd}$$