Aussagenlogik
& Prädikatenlogik (FGdI II)
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

WiSe 2015/16
27. April 2016

Gruppenübung

Aufgabe G2.3 (Kompaktheitssatz für Parkettierungen)
Ein Parkettierungs-System $\mathcal{D} = (D, H, V)$ ist gegeben durch eine endliche Menge D von Kacheltypen und zwei Relationen $H, V \subseteq D \times D$, die beschreiben, wann zwei Kacheltypen horizontal bzw. vertikal nebeneinanderpassen, d.h. $(d, e) \in H$ gdw. e rechts neben d passt und $(d, e) \in V$ gdw. e über d passt.
Eine gegebene Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ besitzt eine Pakettierung, wenn sie korrekt mit Kacheln belegt werden kann, d.h. benachbarte Kacheln passen in ihrem Typ gemäß H und V zusammen. (Wir gehen davon aus, dass wir unbegrenzt viele Kacheln jedes Typs haben)
Weisen Sie nach, dass für ein endliches Parkettierungs-System $\mathcal{D} = (D, H, V)$ stets äquivalent sind:

(a) Es existiert eine Parkettierung auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) Es existiert eine Parkettierung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(c) Es existieren Parkettierungen auf $(n \times n)$-Quadraten für beliebig große $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Benutzen Sie AL-Variablen p_{dij} für $d \in D, i, j \in \mathbb{Z}$, die besagen dass in Position (i, j) eine Kachel vom Typ d liegt. Die Bedingungen an $\mathcal{D}$-Parkettierungen lassen sich dann in geeigneter Weise als AL-Formelmengen beschreiben.

Lösung: Die Implikationen (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) sind klar. Es bleibt nur die Implikation (c) $\Longrightarrow$ (a) zu beweisen. Zuerst geben wir eine Konstruktion einer Formelmenge $\Phi(S)$ an, die für gegebenes $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ genau dann erfüllbar ist, wenn es eine Parkettierung von S gibt. Dafür definieren wir den horizontalen Nachbarn $h(k, \ell) = (k+1, \ell)$ und vertikalen Nachbarn $v(k, \ell) = (k, \ell + 1)$ eines Elements $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und benutzen die Schreibweise p_{ds} für $p_{dk\ell}$, wobei $s = (k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nun können wir $\Phi(S)$ definieren als

$$\begin{aligned}
\Phi(S) :=& \bigwedge_{s \in S} \bigvee_{d \in D} p_{ds} && \text{(Auf jedem Feld liegt eine Kachel)} \\
\wedge & \bigwedge_{s \in S, d \neq d' \in D} p_{ds} \to \neg p_{d's} && \text{(Auf jedem Feld liegt höchstens eine Kachel)} \\
\wedge & \bigwedge_{d \in D, s, h(s) \in S} p_{ds} \to \bigvee_{(d,d') \in H} p_{d'h(s)} && \text{(Zwei horizontal benachbarte Kacheln passen nebeneinander)} \\
\wedge & \bigwedge_{d \in D, s, v(s) \in S} p_{ds} \to \bigvee_{(d,d') \in V} p_{d'v(s)}. && \text{(Zwei vertikal benachbarte Kacheln passen nebeneinander)}
\end{aligned}$$

Man überprüfe, dass man von einer Parkettierung von S eine erfüllende Belegung von $\Phi(S)$ erhält und andersherum.
Nehmen wir nun an, dass $\mathcal{D}$ die Eigenschaft aus (c) habe, dann müssen wir zeigen, dass $\Phi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ erfüllbar ist. Ist nun $\Phi_0 \subseteq \Phi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ eine endliche Teilmenge, dann gibt es ein Quadrat $S = \{n, \dots, -n\} \times \{n, \dots, -n\}$, so dass $\Phi_0 \subseteq \Phi(S)$ (Warum?). Nach Voraussetzung ist $\Phi(S)$ erfüllbar und damit auch Φ_0. Also haben wir gezeigt, dass jede endliche Teilmenge von $\Phi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ erfüllbar ist. Nach dem Kompaktheitssatz ist dann auch $\Phi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ erfüllbar und somit existiert eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Hausübung

Aufgabe H2.1 (Folgerungen aus dem Kompaktheitssatz) (12 Punkte)

(a) Für — möglicherweise unendliche — Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jede Interpretation, die alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Phi$ und $\psi_1, \ldots, \psi_\ell \in \Psi$ gibt, so dass

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \models \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_\ell.$$

(b) Sei $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Eine Interpretation $\mathfrak{I} : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als die unendliche Bit-Sequenz $\mathfrak{I}(p_1)\mathfrak{I}(p_2)\mathfrak{I}(p_3)\ldots$

P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, so dass sowohl P als auch das Komplement $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$P = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Phi\}$$
$$\overline{P} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Psi\}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ jeweils schon durch eine einzelne AL-Formel spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

(c)* *Bonusaufgabe:* Sei wieder $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ und seien P_1 und P_2 die folgenden Mengen von Belegungen:

$$P_1 = \{\mathfrak{I} : \text{für alle } i \geq 1 \text{ gilt } \mathfrak{I}(p_i) = 1 \Rightarrow \mathfrak{I}(p_{i+1}) = 0\}$$
$$P_2 = \{\mathfrak{I} : \text{für alle } i \geq 1 \text{ gibt es ein } j > i \text{ mit } \mathfrak{I}(p_j) = \neg\mathfrak{I}(p_i)\}$$

Welche der Mengen P_1, $\overline{P}_1$, P_2, $\overline{P}_2$ lassen sich durch AL-Formelmengen spezifizieren? Begründen Sie Ihre Antwort im Fall von P_1 und $\overline{P}_1$.

Lösung:

(a) Wenn $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ gilt, dann hat die Menge $\Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle, wobei $\neg\Psi = \{\neg\psi : \psi \in \Psi\}$. Der Kompaktheitssatz impliziert dann, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle hat. Setzen wir $\Phi_0 = \{\varphi \in \Phi : \varphi \in \Gamma_0\}$ und $\Psi_0 = \{\psi \in \Psi : \neg\psi \in \Gamma_0\}$, dann heißt das, dass $\Gamma_0 = \Phi_0 \cup \neg\Psi_0$ keine Modelle hat, also $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Da P und $\overline{P}$ disjunkt sind, gilt $\bigwedge \Phi \models \bigvee \neg\Psi$. Nach Aufgabenteil (a) gibt es also endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \neg\Psi_0$. Wir behaupten, dass $P = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0\}$. $P \subseteq \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0\}$ ist klar nach Definition von P, also zeigen wir die andere Richtung: $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0 \Rightarrow \mathfrak{I} \models \bigvee \neg\Psi_0 \Rightarrow \exists \psi \in \Psi\ \mathfrak{I} \models \neg\psi \Rightarrow \mathfrak{I} \notin \overline{P} \Rightarrow \mathfrak{I} \in P$.

Ein analoges Argument mit vertauschten Rollen von Φ uns Ψ liefert eine Formel $\bigwedge \Psi_0$, die $\overline{P}$ definiert.

(c) Die Formelmenge

$$\Phi_1 := \{p_i \to \neg p_{i+1} : i \geq 1\}$$

beschreibt die Menge P_1 (in dem Sinn, dass $\mathfrak{I} \models \Phi_1$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \in P_1$). Falls es auch eine Formelmenge Ψ_1 gäbe, die das Komplement von P_1 beschreibt, dann gäbe es nach dem Ergebnis aus Aufgabenteil (b) auch eine einzelne Formel, die P_1 beschreibt. Das kann aber offensichtlich nicht sein.

Weder P_2 noch das Komplement von P_2 sind durch AL-Formelmengen beschreibbar: Nehmen wir an, Φ_2 seine eine Menge von Formeln, die P_2 beschreibt. Wir setzen

$$\chi_k := p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k,$$

es gilt also $\mathfrak{I} \models \chi_k$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(p_1) = \mathfrak{I}(p_2) = \cdots = \mathfrak{I}(p_k) = 1$. Die Menge

$$\Phi_2 \cup \{\chi_k : k \geq 1\}$$

ist dann unerfüllbar, also gibt es aufgrund des Kompaktheitssatzes auch eine endliche Teilmenge, die bereits unerfüllbar ist. Da diese nur endlich viele der Formeln χ_k enthalten kann, muss es dann ein $n \geq 1$ geben, für das

$$\Phi_2 \cup \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$$

unerfüllbar ist. Diese Menge wird jedoch von der Interpretation $1^n010101\dots$ (als Bit-Sequenz aufgefasst) erfüllt. Sei Ψ_2 eine Menge, die $\overline{P_2}$ beschreibt. Die Formelmenge

$$\Theta = \{p_{2k-1} \wedge \neg p_{2k} : k \geq 1\}$$

beschreibt genau die Interpretation $101010\dots \notin \overline{P_2}$, also ist

$$\Psi_2 \cup \Theta$$

unerfüllbar. Wieder lässt sich leicht einsehen, dass jede endliche Teilmenge dieser Menge erfüllbar ist, daher kann es keine solche Menge Ψ_2 geben.

Aufgabe H2.2 (Constraint Satisfaction Problem) (12 Punkte)

Ein bekanntes Problem der Graphentheorie ist Frage, ob ein gegebener Graph 3-färbbar ist. Ein Graph ist 3-färbbar, wenn man seine Knoten mit 3 Farben so färben kann, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben. Dieses Problem lässt sich als Homomorphie-Problem umformulieren. Ein Graph G ist nämlich genau dann 3-färbbar, wenn es einen Homomorphismus von G in eine 3-Clique gibt (Warum?). Wir betrachten folgende Verallgemeinerung dieses Problems: Sei $H = (V^H, E^H)$ ein fester endlicher Graph. Ein Graph $G = (V^G, E^G)$ heißt *H-färbbar*, wenn es einen Homomorphismus von G nach H gibt.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik, dass ein Graph genau dann H-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph H-färbbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aussagenvariablen p_{gh} für $g \in V^G$ und $h \in V^H$. Identifizieren Sie geeignete Interpretationen $\mathfrak{I}(p_{gh}) = 1$ mit einem Homomorphismus $f : G \to H$ mit $f(g) = h$.

Lösung: Sei $G = (V^G, E^G)$ ein beliebiger Graph. Wir nehmen an, dass jeder endliche Teilgraph von G H-färbbar ist. Wir wollen zeigen, dass es dann auch einen Homomorphismus von G nach H gibt, d.h. ein Abbildung $f : V^G \to V^H$ mit $(v, w) \in E^G \Rightarrow (f(v), f(w)) \in E^H$. Sei $\mathcal{V} = \{p_{gh} : g \in V^G, h \in V^H\}$ eine Menge von AL-Variablen. Wir identifizieren eine Abbildung $f : V^G \to V^H$ mit einer Belegung $\mathfrak{I} : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$ durch $\mathfrak{I}(p_{gh}) = 1$ genau dann, wenn $f(g) = h$ gilt. Wir betrachten die Formelmenge

$$\begin{aligned}\Phi = &\{ \bigvee_{h \in V^H} p_{gh} : g \in V^G\} \cup \\ &\{\neg(p_{gh} \wedge p_{gh'}) : g \in V^G, h \neq h' \in V^H\} \cup \\ &\{\neg(p_{gh} \wedge p_{g'h'}) : (v, w) \in E^G, h, h' \in V^H, (h, h') \notin E^H\}.\end{aligned}$$

Die Formelmenge Φ ist genau dann erfüllbar, wenn G H-färbbar ist (Warum?). Nun argumentiert man mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass Φ erfüllbar ist, weil jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist (Warum?).

Aufgabe H2.3 (Resolution) (12 Punkte)

(a) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(p \vee s) \wedge (q \vee \neg s \vee p) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg p)$$

(b) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

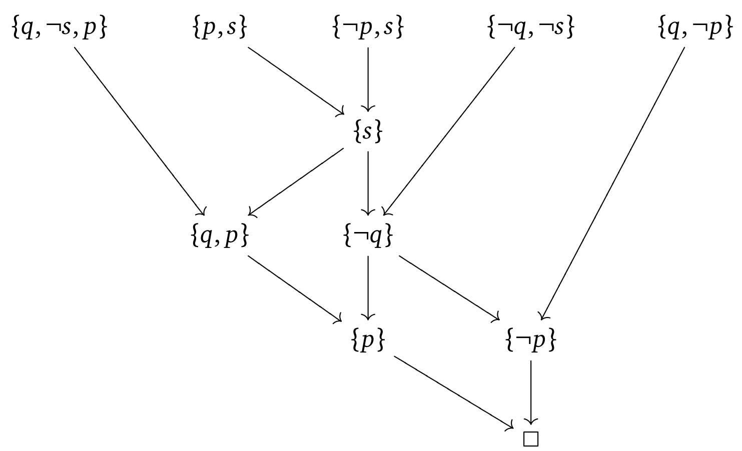
$$(\neg p \wedge s) \vee q \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$$

(c) Beweisen Sie die folgende semantische Folgerung mit Hilfe der Resolutionsmethode:

$$(\neg q \vee p) \wedge (s \vee q \vee p \vee \neg u) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (s \vee p \vee u) \models p \wedge r$$

Lösung:

(a)



(b) Wir zeigen, dass die Negation der angegebenen Formel unerfüllbar ist. Dazu bringen wir diese zunächst in konjunktive Normalform:

$$\neg\big((\neg p \wedge s) \vee q \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)\big) \quad \equiv \quad (p \vee \neg s) \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee r \vee q) \wedge (s \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

Ein möglicher Resolutionsbeweis sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p, \neg r\} \arrow[ddr] & \{\neg p, q, r\} \arrow[d] & \{\neg q\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \{q, s\} \arrow[d] & \{p, \neg s\} \arrow[ddl] \\
 & \{\neg p, r\} \arrow[d] & & \{s\} \arrow[d] & \\
 & \{\neg p\} \arrow[dr] & & \{p\} \arrow[dl] & \\
 & & \square & &
\end{tikzcd}$$

Die semantische Folgerung $\varphi \models \psi$ ist äquivalent zur Unerfüllbarkeit der Formel $\varphi \wedge \neg\psi$. Damit erhalten wir als möglichen Resolutionsbeweis:

$$\begin{tikzcd}
\{q, \neg s\} \arrow[dddrrr] & \{p, \neg q\} \arrow[ddrr] & \{\neg p, r\} \arrow[dr] & \{\neg p, \neg r\} \arrow[d] & \{p, s, u\} \arrow[d] & \{p, q, s, \neg u\} \arrow[dl] \\
 & & & \{\neg p\} \arrow[d] \arrow[dr] & \{p, q, s\} \arrow[d] & \\
 & & & \{\neg q\} \arrow[d] \arrow[dr] & \{q, s\} \arrow[d] & \\
 & & & \{\neg s\} \arrow[dr] & \{s\} \arrow[d] & \\
 & & & & \square &
\end{tikzcd}$$