Formale Grundlagen der Informatik II
4. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
24. 06. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Sequenzenkalkül)
Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül SK für folgende Sequenzen eine Herleitung.

(a) $\vdash p \vee q \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Lösung:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, q}\,(\mathrm{Ax})}{p \vdash p \vee q}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash p \vee q, \neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p \vee q \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash p, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p, q \vdash q, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax})}{p, q \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{\dfrac{}{p, r \vdash p \wedge q, p}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p, r \vdash p \wedge q, r}\,(\mathrm{Ax})}{p, r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R})}{p, q \vee r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\vee\mathrm{L})}{p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

Aufgabe G11 (Monotonie)
Wir definieren folgende partielle Ordnung auf aussagenlogischen V_n-Interpretationen:

$$\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}' \quad \text{:gdw.} \quad \mathfrak{I}(p) \leq \mathfrak{I}'(p) \text{ für alle Variablen } p \in V_n$$

Eine AL_n-Formel φ heißt *monoton*, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$ gilt $\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}'}$. Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass jede aussagenlogische Formel φ, in der kein Negationszeichen vorkommt, monoton ist.

Bemerkung: Umgekehrt kann man zeigen, dass jede monotone Formel äquivalent zu einer Formel ohne Negationszeichen ist.

Lösung: Angenommen φ ist eine aussagenlogische Formel, in der kein Negationszeichen vorkommt und $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}'$ sind Interpretationen mit $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$. Wir beweisen mit Induktion, dass $\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}'}$ gilt.

- $\varphi = 0$, $\varphi = 1$ sind klar.
- $\varphi = p \in V_n$: weil $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$, gilt $\mathfrak{I}(p) \leq \mathfrak{I}'(p)$, also $\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}'}$.
- $\varphi = \neg\psi$ kann nicht sein, da in φ kein Negationszeichen vorkommt.
- $\varphi = \psi \wedge \chi$: nach I.V. gilt $\psi^{\mathfrak{I}} \leq \psi^{\mathfrak{I}'}$ und $\chi^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}'}$. Also gilt $\min(\psi^{\mathfrak{I}}, \chi^{\mathfrak{I}}) \leq \min(\psi^{\mathfrak{I}'}, \chi^{\mathfrak{I}'})$, und es folgt $(\psi \wedge \chi)^{\mathfrak{I}} \leq (\psi \wedge \chi)^{\mathfrak{I}'}$.
- $\varphi = \psi \vee \chi$: nach I.V. gilt $\psi^{\mathfrak{I}} \leq \psi^{\mathfrak{I}'}$ und $\chi^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}'}$. Also gilt $\max(\psi^{\mathfrak{I}}, \chi^{\mathfrak{I}}) \leq \max(\psi^{\mathfrak{I}'}, \chi^{\mathfrak{I}'})$, und es folgt $(\psi \vee \chi)^{\mathfrak{I}} \leq (\psi \vee \chi)^{\mathfrak{I}'}$.

Aufgabe G12 (Simulation)

(a) Zeigen Sie semantisch, dass die folgende Regel korrekt ist.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}$$

(b) Leiten Sie die Regel in SK^+ ab.

(c) Kann man diese Regel in SK ableiten? Wie?

Lösung:

(a) Angenommen $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ ist allgemeingültig und $\mathfrak{I}$ eine (beliebige) Interpretation. Dann gilt $(\bigwedge \Gamma) \wedge (\varphi \vee \psi) \models \chi$, d.h. es gilt $((\bigwedge \Gamma) \wedge (\varphi \vee \psi))^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$. Also ist $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$ oder $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$. Falls $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$, dann folgt sofort $\min((\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}}, \varphi^{\mathfrak{I}}) = ((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$. Falls $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$, dann folgt wegen $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = \max(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$, dass $\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$, also $\min((\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}}, \varphi^{\mathfrak{I}}) = ((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$.
In beiden Fällen folgt $((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$, also ist $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ allgemeingültig.

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi, \psi}\,(\mathrm{Ax})}{\varphi \vdash \varphi \vee \psi}\,(\vee\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}\,(\text{modus ponens})$$

(c) Es kann gezeigt werden, dass es keinen SK Ableitungsbaum mit Wurzel $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ gibt, dessen Blätter nur mit Axiomen oder $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ beschriftet sind. Hier wird nur einen intuitiven Hinweis gegeben. In SK-Ableitungen kommen alle Formeln, die in einer Regel oben stehen im unteren Teil als ganzes oder Teilformel vor, demzufolge kann die Regel (da wir nicht wissen, wie Γ, φ, ψ und χ aussehen) nicht herleitbar sein.

Hausübung

Aufgabe H9 (Minimale Belegungen) (4 Punkte)

(a) Für die folgenden zwei Formeln finden Sie alle ihren minimalen Belegungen. Entscheiden Sie für beide Formeln, ob sie äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln sind. Wenn ja, welche? Begründen Sie alle Antworten.
   i. $\big(p \to (q \vee r)\big) \wedge (p \vee s)$
   ii. $(p \wedge q) \longleftrightarrow r$

(b) Geben Sie eine Formel mit vier Variablen an, für die Sie semantisch zeigen, dass ihre minimale Belegungen genau $(1,1,1,0)$ und $(0,0,1,1)$ sind. Ist diese Formel äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln?

Lösung:

(a) i. $\boxed{\text{1 P.}}$ Sei $\varphi := \big(p \to (q \vee r)\big) \wedge (p \vee s)$. Man bemerkt, dass die Belegungen $\big(\mathfrak{I}(p) = 0, \mathfrak{I}(q) = 0, \mathfrak{I}(r) = 0, \mathfrak{I}(s) = 1\big)$ ein Modell von $\big(p \to (q \vee r)\big) \wedge (p \vee s)$ ist, aber $(0,0,0,0)$ kein Modell ist. Sei nun $\mathfrak{I}$ ein Modell von φ, sodass $\mathfrak{I}(s) = 0$. Es folgt, dass $\mathfrak{I}(p) = 1$ wegen $p \vee s$, woraus $\mathfrak{I}(q) = 1$ oder $\mathfrak{I}(r) = 1$ auch folgt. Da die Belegungen $(1,1,0,0)$ und $(1,0,1,0)$ Modelle von φ sind, sind sie, mit $(0,0,0,1)$, die minimalen Modelle von φ.

ii. $\boxed{\text{1 P.}}$ $(p \wedge q) \longleftrightarrow r \equiv \big((p \wedge q) \to r\big) \wedge \big(r \to (p \wedge q)\big) \equiv \big((p \wedge q) \to r\big) \wedge (r \to p) \wedge (r \to q)$. Also ist $(p \wedge q) \longleftrightarrow r$ äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln. Die Belegung, die jede Variablen falsch macht, ist ein Modell für $(p \wedge q) \longleftrightarrow r$. Da es keine kleinere Belegung gibt, ist die das einzige minimale Modell.

Bemerkung: Das Ergebnis entspricht dem Satz aus der Vorlesung, dass jede Hornklauselnmenge genau ein minimales Modell besitzt.

(b) $\boxed{\text{2 P.}}$ Betrachte die Formel $\varphi := z \wedge \big((x \wedge y) \longleftrightarrow \neg t\big)$, wobei $x := p_1, y := p_2, z := p_3, t := p_4$. Sei $\mathfrak{I}$ ein Modell von φ; dann folgt $\mathfrak{I}(z) = 1$. Wenn $\mathfrak{I}(t) = 1$, dann $\mathfrak{I} \models \neg(x \wedge y)$. Die Belegungen $(0,0,1,1)$ und $(0,1,1,1)$ und $(1,0,1,1)$ sind also Modelle von φ. Wenn $\mathfrak{I}(t) = 0$, dann $\mathfrak{I} \models x \wedge y$. Die Belegung $(1,1,1,0)$ ist also auch ein Modell von φ. Durch Fallunterscheidung haben wir alle Fälle betrachtet, woraus folgt, dass die minimalen Modelle von φ genau $(1,1,1,0)$ und $(0,0,1,1)$ sind.

Aufgabe H10 (Sequenzenkalkül) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie semantisch, dass die folgende Regel korrekt ist.

$$\frac{\Gamma \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \text{(ex falso quodlibet)}$$

(b) Leiten Sie die folgenden Sequenzen und Regeln direkt aus dem Kalkül SK ab.

i. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

ii. $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$

iii. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \Delta}$

iv. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$

(c) Beweisen Sie durch Induktion über den Aufbau von ableitbaren Sequenzen, dass die folgende Regel korrekt ist, d.h. wenn $\Gamma \vdash \Delta$ ableitbar ist, dann ist auch $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ ableitbar:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}$$

Lösung:

(a) $\boxed{\text{1 P.}}$ Angenommen $\Gamma \vdash \emptyset$ ist allgemeingültig. Dann gilt $\bigwedge \Gamma \models 0$, d.h. es gilt $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} = 0$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$. Also ist $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}}$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, und es folgt, dass $\Gamma \vdash \varphi$ allgemeingültig ist.

(b) i. $\boxed{\text{1 P.}}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(\text{Ax})}{\varphi, \neg\varphi \vdash \emptyset}\,(\neg\text{L})}{\varphi \vdash \neg\neg\varphi}\,(\neg\text{R})$$

ii. $\boxed{1 \text{ P.}}$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \psi, \varphi}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{\psi \vdash \psi, \varphi}\,(\mathrm{Ax})}{\dfrac{\varphi \vee \psi \vdash \psi, \varphi}{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi}\,(\vee\mathrm{R})}\,(\vee\mathrm{L})$$

iii. $\boxed{1 \text{ P.}}$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \vdash \Delta, \neg\varphi}\,(\neg\mathrm{R})}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \Delta}\,(\neg\mathrm{L})$$

iv. $\boxed{1 \text{ P.}}$ Beachte, dass $\varphi \rightarrow \psi$ eine Notation für $\neg\varphi \vee \psi$ ist.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \psi}\,(\neg\mathrm{R})}{\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \psi}\,(\vee\mathrm{R})$$

(c) $\boxed{1 \text{ P.}}$

- Wenn $\Gamma \vdash \Delta$ durch die Regel Ax abgeleitet ist, existiert eine Formel ψ und Mengen von Formeln Γ' und Δ', sodass $\Gamma = \Gamma' \cup \{\psi\}$ und $\Delta = \Delta' \cup \{\psi\}$. Also $\Gamma', \psi \vdash \Delta', \psi$. Aus Ax folgt auch $\Gamma', \varphi, \psi \vdash \Delta', \psi$, d.h. $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$.
- Wenn $\Gamma \vdash \Delta$ durch die Regel $\neg$L ableitet ist, existiert eine Formel ψ und eine Menge von Formeln Γ', sodass $\Gamma = \Gamma' \cup \{\neg\psi\}$. Also sieht die letzte Ableitung so aus:

$$\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta, \psi}{\Gamma', \neg\psi \vdash \Delta}\,(\neg\mathrm{L})$$

  Wegen der Induktionshypothese gilt $\Gamma', \varphi \vdash \Delta, \psi$. Somit kann man wiederum durch die selbe Regel die Sequenz $\Gamma', \varphi, \neg\psi \vdash \Delta$, d.h. $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$, ableiten.
- Wenn $\Gamma \vdash \Delta$ durch die Regel $\wedge$R abgeleitet ist, existieren zwei Formeln ψ_1 und ψ_2 und eine Menge von Formeln Δ', sodass die Ableitung so aussieht:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta', \psi_1 \quad \Gamma \vdash \Delta', \psi_2}{\Gamma \vdash \Delta', \psi_1 \wedge \psi_2}\,(\wedge\mathrm{R})$$

  Wegen der Induktionshypothese gilt $\Gamma, \varphi \vdash \Delta', \psi_1$ und $\Gamma, \varphi \vdash \Delta', \psi_2$. Somit kann man wiederum durch die selbe Regel die Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \Delta', \psi_1 \wedge \psi_2$, d.h. $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$, ableiten.
- Die anderen Fälle sehen sehr ähnlich aus.

Minitest

Aufgabe M8 (Korrektheit und Vollständigkeit)
Kreuzen Sie die korrekten Antworte an.

(a) Der Sequenzenkalkül SK erfüllt die folgenden Eigenschaften:
☐ Korrektheit ☐ Vollständigkeit

(b) Der erweiterte Sequenzenkalkül SK^+ erfüllt die folgenden Eigenschaften:
☐ Korrektheit ☐ Vollständigkeit

Lösung:

(a) Der Sequenzenkalkül SK erfüllt die folgenden Eigenschaften:
☒ Korrektheit ☒ Vollständigkeit

(b) Der erweiterte Sequenzenkalkül SK^+ erfüllt die folgenden Eigenschaften:
☒ Korrektheit ☒ Vollständigkeit

Begründung: Siehe Skript, Abschnitt 6.3.

Aufgabe M9 (Strukturen)
Sei $R = (\mathbb{R}, +^R, -^R, \cdot^R, <^R, 0, 1)$. Eine Formel $\varphi(x, y)$ definiert in R die Relation $\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; R \models \varphi[a,b]\right\}$. Betrachte die folgenden Formeln.

1. $x \cdot x + y \cdot y = 1 + 1 + 1 + 1$
2. $x + x = y + y + y$
3. $((y + y = x) \wedge (x < 1 \vee x = 1) \wedge (0 < x))$
   $\vee\, (1 + 1 + 1 + 1 < x \cdot x + y \cdot y \vee 1 + 1 + 1 + 1 = x \cdot x + y \cdot y)$
4. $(x \cdot x + y \cdot y = \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{16\text{-mal}}) \vee (x \cdot x + y \cdot y = \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{9\text{-mal}} \wedge y < 0 - 1)$
   $\vee\, ((x - (1 + 1)) \cdot (x - (1 + 1)) + (y - 1) \cdot (y - 1) < 1)$
   $\vee\, ((x + (1 + 1)) \cdot (x + (1 + 1)) + (y - 1) \cdot (y - 1) < 1)$

Für jede Formel oben identifizieren Sie die induzierte Relation unten.

( ) Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 2/3.

( ) Die Strecke, welche vom Punkt (1, 2) bis zur Kreisscheibe mit Radius 2 um den Ursprung führt und senkrecht auf dieser steht.

( ) Ein Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

( ) Ein Smiley.

Lösung:

(2.) Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 2/3.

(3.) Die Strecke, welche vom Punkt (1, 2) bis zur Kreisscheibe mit Radius 2 um den Ursprung führt und senkrecht auf dieser steht.

(1.) Ein Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

(4.) Ein Smiley.