Formale Grundlagen der Informatik II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wir betrachten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x[\exists y(Rxy \wedge \neg\exists x Ryx) \vee \forall y \exists z(Rxz \wedge Rzy)] \\
\varphi_2 &:= \exists x[\forall y \neg Rxy \to \exists y \forall z(Rxy \wedge Rzy)] \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y[Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy \wedge \neg\exists x(Rzx \wedge Rxz))]
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie äquivalente Formeln in Pränex-Normalform an.

(b) Wandeln Sie ihre Ergebnisse aus (a) in Skolem-Normalform um.

(c) Betrachten Sie die Formel $\varphi := \forall x \exists y Rxy$ und die Skolem-Normalform $\psi := \forall x Rxsx$.
  i. Beweisen Sie, daß $\psi \models \varphi$ gilt.
  ii. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass $\varphi \not\models \psi$.

Lösungsskizze:

(a)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x \exists y \forall u \forall v \exists z[(Rxy \wedge \neg Ryu) \vee (Rxz \wedge Rzv)] \\
\varphi_2 &\equiv \exists x \exists y \exists u \forall z[\neg Rxy \to (Rxu \wedge Rzu)] \\
\varphi_3 &\equiv \forall x \forall y \exists z \forall u[Rxy \to (Rxz \wedge Rzy \wedge \neg(Rzu \wedge Ruz))]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \forall x \forall u \forall v[(Rxfx \wedge \neg Rfxu) \vee (Rxgxuv \wedge Rgxuvv)] \\
\varphi_2 &: \forall z[\neg Rcd \to (Rce \wedge Rze)] \\
\varphi_3 &: \forall x \forall y \forall u[Rxy \to (Rxfxy \wedge Rfxyy \wedge \neg(Rfxyu \wedge Rufxy))]
\end{aligned}$$

(c) i. Angenommen $(\mathcal{A}, \beta) \models \psi$. Um zu zeigen, daß $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ betrachten wir ein beliebiges Element $a \in A$. Nach Annahme gilt $(a, s^{\mathcal{A}}(a)) \in R^{\mathcal{A}}$. Insbesondere gibt es also ein Element b (nämlich $b = s^{\mathcal{A}}(a)$) mit $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$. Wir haben gezeigt, daß $(\mathcal{A}, \beta) \models \forall x \exists y Rxy$.

ii. Sei $\mathcal{A} = (A, s^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$ die Struktur mit

$$A = \{0, 1\}, \quad s^{\mathcal{A}}(a) := 0, \quad R^{\mathcal{A}} := \{(0, 1), (1, 1)\}.$$

Dann gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ aber $\mathcal{A} \not\models \psi$.

Aufgabe G2

(a) Geben Sie für folgende FO-Formeln jeweils eine Skolem-Normalform an:

i. $\forall x \exists y Rxy$

ii. $\forall x(\forall y Ryy \to \exists y Ryf(x))$

(b) Geben Sie einige verschiedene Herbrandmodelle für die Skolem-Normalformen aus (a) an.

Lösungsskizze:

(a) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

i. $\forall x Rxs(x)$

ii. $\forall x(\forall y Ryy \to \exists y Ryf(x)) \equiv \forall x \exists z \exists y(Rzz \to Ryf(x))$,
Skolem-Normalform: $\forall x(Rs(x)s(x) \to Rs'(x)f(x))$

(b) In beiden Fällen geben wir noch ein Konstantensymbol c zur Signatur hinzu. Dann erhalten wir für (i) die Trägermenge $T = \{s^i(c) : i \in \mathbb{N}\}$, wobei s^i für das i-malige Anwenden von s steht (d.h. T ist isomorph zur Menge der natürlichen Zahlen). Die Relation R kann z.B. durch $\{(s^i(c), s^{i+1}(c)) : i \in \mathbb{N}\}$ bzw. jeder Obermenge davon interpretiert werden.

In Fall (ii) erhalten wir die Termstruktur $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{i+1} = \{s(t), s'(t), f(t) : t \in T_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (d.h. einen Baum, wobei jeder Knoten genau drei Nachfolger hat). Die Relation R kann z.B. durch $\emptyset$ oder $T \times T$ interpretiert werden.

Aufgabe G3

Zeigen Sie, dass wenn T_1 und T_2 zwei Theorien sind, so dass $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, es ein Satz σ gibt, so dass $T_1 \models \sigma$ und $T_2 \models \neg\sigma$.

Lösungsskizze: Wenn $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, gibt es, nach dem Kompaktheitssatz, schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq T_1 \cup T_2$ die keine Modelle hat. Sei $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \in T_1\}$, $\Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \in T_2\}$ und $\sigma = \bigwedge \Gamma_1$. Klar ist, dass $T_1 \models \sigma$, also haben wir nur noch zu beweisen, dass $T_2 \models \neg\sigma$.
Nehmen wir an, dass $T_2 \not\models \neg\sigma$, also dass es ein Modell M gibt, so dass $M \models T_2$ und $M \models \sigma$. Dann $M \models \Gamma_2$, weil $\Gamma_2 \subseteq T_2$ und $M \models T_2$, und $M \models \Gamma_1$, weil $M \models \sigma$ und $\sigma = \bigwedge \Gamma_1$. Das widerspricht, dass $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ keine Modelle hat. Also $T_2 \models \neg\sigma$.

Aufgabe G4

Ein Pfad in einem Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Sequenz $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ von Knoten, so dass

$$x_i E x_{i+1}$$

für alle $i < n$. Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paaren von Knoten (x, y) einen Pfad $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ gibt, mit $x = x_0$ und $y = x_n$.
Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, so dass $\mathcal{G} \models \Gamma$ genau dann wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.

Lösungsskizze:
Wir verwenden, dass man eine Formel $\varphi_n(x, y)$ definieren kann, die aussagt, dass es einen Pfad der Länge n vom Startzustand nach y gibt:

$$\varphi_n(y) = \exists x_0 \ldots \exists x_n \,(\, x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \bigwedge_{i<n} x_i E x_{i+1} \,).$$

Nehmen wir an, dass es eine Formelmenge Γ gibt in der Sprache der Graphen, so dass ein Graph $\mathcal{G}$ ein Modell von Γ ist, genau dann wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist. Wir erweiteren die Signatur mit zwei Konstanten c und d und betrachten die folgende Formelmenge in der erweiterten Sprache:

$$\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\neg\varphi_n(c, d) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Formelmenge Γ_∞ is unerfüllbar, da man in einem Modell $\mathcal{G}$ die Konstanten c und d nicht widerspruchsfrei interpreteren kann: einerseits soll der Zustand $d^{\mathcal{G}}$ von $c^{\mathcal{G}}$ aus erreichbar sein, da Γ erfüllt ist und der Graph $\mathcal{G}$ deshalb zusammenhängend sein muss; andererseits kann $d^{\mathcal{G}}$ nicht von $c^{\mathcal{G}}$ aus erreichbar sein: dann würde es einen Pfad von $c^{\mathcal{G}}$ nach $d^{\mathcal{G}}$ geben; dieser Pfad hat eine bestimmte Länge n, was unmöglich ist, da $\mathcal{G} \models \neg\varphi_n(c,d)$.
Also ist schon eine endliche Teilmenge von Γ_∞ unerfüllbar und insbesondere ist schon eine Teilmenge von der Form

$$\Gamma_n = \Gamma \cup \{\varphi_k(c,d) \,:\, k < n\}$$

unerfüllbar (da jede endliche Teilmenge in einer Γ_n enthalten ist). Aber jedes Γ_n hat ein Modell, wobei es einen Pfad von $c^{\mathcal{G}}$ nach $d^{\mathcal{G}}$ gibt, aber keinen mit einer Länge kürzer als n. (Ein Modell könnte so aussehen:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\ ,$$

wobei wir c als der 0-Knoten und d als der n-Knoten interpretieren.)
Also haben wir einen Widerspruch und schliessen, dass es keine Formel Γ geben kann, die die Zusammenhang eines Graphen ausdrückt.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Betrachte Sätze φ der Form $\varphi := \forall x_1,\ldots,x_n \exists y_1,\ldots,y_m\, \varphi_{\mathrm{qf}}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots y_m)$, wobei φ_{qf} keine Quantoren und kein „=” und keine Funktionssymbole enthält. Geben Sie ein Entscheidungsverfahren für „$\models \varphi$” an.
Gibt es ein Entscheidungsverfahren auch wenn φ_{qf} Funktionssymbole enthält?

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Betrache das Axiom $\Gamma := \forall x(S(x) \neq 0)$ in einer Sprache mit zwei 1-stelligen Funktionssymbolen S und f und einem Konstantensymbol 0.
a) Zeigen Sie (informell): $\Gamma \models \exists x(f(S(f(x))) \neq x)$.
b) Konstruieren Sie aus Ihrem Beweis von a) endliche viele nur aus $0, S, f$ aufgebaute geschlossene Terme $t_1,\ldots,t_n$ mit $\Gamma \models \bigvee_{i=1}^{n}(f(S(f(t_i))) \neq t_i)$.

Hinweis
Man betrachte, ob f injektiv oder nicht-injektiv sein muss.