Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Hannes Meinlschmidt
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2013
30. April 2013

ACHTUNG! Die Mittwochsübungen wurden diese Woche auf Freitag verlegt - nähere Informationen finden Sie auf dem Informationsblatt im Moodle.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)
An der TU Darmstadt studieren ca. 22 500 Personen. Davon sind 6 500 weiblich und 16 000 männlich. Dabei studieren 6.8% der Student**innen** und 4.8% der Student**en** Mathematik. Ein Student (m/w) werde zufällig ausgewählt. Sei A das Ereignis, dass die Person Mathematik studiert, und B, dass sie weiblich ist.

(a) Wie groß ist $P(A|B)$?

(b) Wie groß ist der relative Anteil der Mathematik-Studierenden an der TU Darmstadt?

(c) Wie groß ist $P(B|A)$?

(d) Was gibt die Größe $P(B|A)$ an?

(e) Sind A und B unabhängig?

Aufgabe G2 (Erwartungswert und Varianz, stetige Zufallsvariablen)
Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen X^2.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe G3
Der Kern eines Transformators besteht aus 25 Blechen mit je einer Isolierschicht (einseitig). Die Dicken der Bleche und der Isolierschichten seien durch Zufallsvariablen X_j bzw. Y_j, $j = 1, \ldots, 25$ beschrieben. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots X_{25}, Y_1, \ldots, Y_{25}$ seien unabhängig normalverteilt. Die Standardabweichung der Bleche betrage 0.04 mm, die *Standardabweichung* der Isolierschichten 0.03 mm. Es sei bekannt, dass die Erwartungswerte 0.8 mm bzw. 0.2 mm sind.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Blech zusammen mit einer Isolierschicht dicker als 1.04 mm ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kern dicker als die Spulenöffnung von 25.5 mm ist?

(c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis aus (b) mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung ab. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Wert.

Hinweis: Man kann zeigen, dass skalare Vielfache, sowie Summen von normalverteilten Zufallsvariablen selbst wieder normalverteilt sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (Binomialverteilung, Poissonverteilung, diskrete Zufallsvariable)

(a) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug eines Loses 0.7. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimmen Sie die Verteilung von X, sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht Nieten.

(b) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechnen Sie für diese Seite die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mehr als drei Abfragen innerhalb einer Minute gibt.

Aufgabe H2 (Normalverteilung)

(a) Wir gehen von einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen Y aus (kurz: $Y \sim N(0,1)$) und betrachten die Zufallsvariable $Z = 5 \cdot Y + 100$. Man kann beweisen, dass Z wieder normalverteilt ist. Zeigen Sie, dass $E(Z) = 100$ und $\mathrm{Var}(Z) = 25$ gilt.

(b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Größe (in mm) einer bestimmten Pflanze im Alter von 30 Tagen. Es wird angenommen, dass $X \sim N(100, 25)$ gilt, d.h. X ist normalverteilt mit Erwartungswert 100 und Varianz 25. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(90 \leq X \leq 110) \qquad \text{und} \qquad P(X > 107).$$

Nutzen Sie dabei die Ergebnisse aus (a).

Aufgabe H3 (Erwartungswert und Varianz)

Für die Zufallsvariable X gelte

$$P(X = x) = \begin{cases} 3c & \text{falls } x \in \{1,4\}, \\ 2c & \text{falls } x \in \{2,3\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit einer gewissen Konstanten c.

(a) Bestimmen Sie die Konstante c und die Verteilungsfunktion von X.

(b) Berechnen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Es sei $Y = 2X - 1$ und $Z = \frac{X-2}{\sqrt{5}}$. Berechnen Sie $E(Y)$, $E(Z)$, $\mathrm{Var}(Y)$ und $\mathrm{Var}(Z)$.