Klausur „Formale Grundlagen der Informatik 2"

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

SS 2013

30.08.2013

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Drittversuch? Bitte gegebenenfalls ankreuzen ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	10	18	14	18	20	80	
erreichte Punktzahl							

Bitte lesen Sie das Folgende sorgfältig durch.

- Klausurdauer: **90 Min.**
- Die Klausur besteht aus **10 Seiten** (5 Aufgaben). Bitte überprüfen Sie sie auf ihre Vollständigkeit.
- Zur Bearbeitung der Klausur dürfen Sie **alle schriftlichen Unterlagen** verwenden.
- Sie dürfen zusätzliche Blätter als Schmierpapier verwenden, aber schreiben Sie die Lösungen **direkt auf die Klausur**.
  Falls Sie mehr Platz für die Lösungen brauchen, als gegeben ist, **tackern Sie** die zusätzlichen Blätter selbst an die Klausur oder überlassen dies den Aufsichten.
- Versehen Sie **alle** zu bewertenden Blätter mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründung Wert gelegt.

1. Aufgabe (Multiple-Choice) (10 Punkte)

Lösen Sie die folgende Multiple-Choice-Aufgabe. Jede Teilaufgabe hat genau eine richtige Antwort. Diese wird mit 1 Punkt bewertet, eine falsche Antwort mit 0 Punkten und keine Antwort mit 0,5 Punkten.

Es reicht, wenn Sie die richtige Antwort ankreuzen; eine Begründung wird in dieser Aufgabe **nicht** verlangt.

Erinnerung: AL steht für „Aussagenlogik". FO steht für „Logik erster Stufe" (first-order).

(a) Zwei AL-Formeln φ und ψ sind logisch äquivalent genau dann, wenn die Formel $\varphi \longleftrightarrow \psi$ ist

☐ erfüllbar ☐ unerfüllbar ☐ allgemeingültig ☐ nicht allgemeingültig

(b) Mit Resolutionskalkül ist die leere Klausel aus einer Klauselmenge K ableitbar genau dann, wenn gilt: K ist

☐ erfüllbar ☐ unerfüllbar ☐ allgemeingültig ☐ nicht allgemeingültig

(c) Wie viele paarweise nichtäquivalente n-stellige Junktoren gibt es?

☐ n ☐ $2n$ ☐ n^2 ☐ 2^n ☐ $2^{(2^n)}$

(d) Die kleinste mögliche Anzahl der Junktoren, die ein vollständiges System bilden, ist:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ unendlich

(e) Kennzeichen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Jede AL-Formel ist auch eine FO-Formel. ☐ wahr ☐ falsch
- Jede FO-Formel ist äquivalent zu einer Formel in pränexer Normalform. ☐ wahr ☐ falsch
- Jede erfüllbare FO-Formel besitzt ein Modell. ☐ wahr ☐ falsch
- Jede allgemeingültige FO-Formel besitzt ein Modell. ☐ wahr ☐ falsch

(f) Betrachte die FO-Formel $\exists c \,.\, \forall x \,.\, (x = c)$. Was sind alle möglichen Trägermengen ihrer Modelle?

☐ alle endlichen Mengen

☐ alle einelementigen Mengen

☐ die Menge $\{c\}$

☐ die Menge aller Worte über $\{c\}$, d.h. $\{c\}^*$

☐ die Formel hat keine Modelle

(g) Welche Aussage gilt im Kontext von AL, aber nicht im Kontext von FO?

☐ Sequenzenkalkül ist korrekt.

☐ Sequenzenkalkül ist vollständig.

☐ Erfüllbarkeit ist entscheidbar.

☐ Allgemeingültigkeit ist semientscheidbar.

☐ Kompaktheitssatz gilt.

Name:	Matrikelnummer:

2. Aufgabe (Wahrheitstafeln) (18 Punkte)

Sei die Boolesche Funktion f gegeben durch die folgende Wahrheitstafel:

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(a) Geben Sie die DNF und KNF für f an. Schreiben Sie die Antwort in folgende Kästchen.

$\mathrm{DNF}(f) =$

$\mathrm{KNF}(f) =$

(b) Geben Sie eine zu f entsprechende Formel φ mit möglichst wenig Junktoren an (Sie können dafür alle folgenden bekannten Junktoren verwenden: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, \uparrow, \downarrow$). Für volle Punktzahl nutzen Sie nur zwei Junktoren (und beliebig viele Klammern).

Hinweis: Wir zählen die Wiederholungen der Junktoren. Beispielsweise verwendet die Formel $(p \wedge q) \wedge (q \vee r)$ drei Junktoren, obwohl nur zwei davon verschieden sind.

(c) Ist die Formel φ erfüllbar? Ist sie allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Aufgabe (AL-Formeln) (14 Punkte)

(a) Betrachte die folgende Formel:

$$\varphi := \Big(\bigvee_{1\leq k\leq n} p_k\Big) \wedge \bigwedge_{1\leq i<j\leq n} (\neg p_i \vee \neg p_j)$$

Sei f die zu φ zugehörige Boolsche Funktion. Füllen Sie das Kästchen in der folgenden Definition von f mit einem Satz in natürlicher Sprache aus.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \boxed{\text{wenn} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Beweisen Sie erst

$$\models ((p \to q) \to p) \to p$$

semantisch und leiten Sie dann

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

im Sequenzenkalkül ab.

Name:	Matrikelnummer:

4. Aufgabe (FO und Binärbäume) (18 Punkte)

In dieser Aufgabe benutzen wir die Logik erster Stufe mit Gleichheit, um Binärbäume zu formalisieren. Demnach betrachten wir

- die Signatur $\{\texttt{empty}, \texttt{join}, \texttt{left}, \texttt{right}\}$, wobei `empty` ein Konstantensymbol, `join` ein zweistelliges Funktionssymbol und `left`, `right` einstellige Funktionssymbole sind,
- das Modell $\mathscr{B} = (B, \texttt{empty}^{\mathscr{B}}, \texttt{join}^{\mathscr{B}}, \texttt{left}^{\mathscr{B}}, \texttt{right}^{\mathscr{B}})$, wobei die Trägermenge B die Menge der Binärbäume ist und die Symbole wie folgt interpretiert sind:

Interpretation	Bedeutung
$\texttt{empty}^{\mathscr{B}}$	der leere Baum
$\texttt{join}^{\mathscr{B}}(l,r)$	der Baum mit der Wurzel, deren linker Nachfolger l und rechter Nachfolger r ist
$\texttt{left}^{\mathscr{B}}(t)$	der linke Nachfolger der Wurzel des Baums t
$\texttt{right}^{\mathscr{B}}(t)$	der rechte Nachfolger der Wurzel des Baums t

(a) Binärbäume sind ein Beispiel einer induktiv gegebenen Menge, ähnlich wie natürliche Zahlen. Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$, die erste natürliche Zahl mit 0 und die Nachfolgerfunktion mit s. In der folgenden Tabelle stehen links einige Formeln, die für natürliche Zahlen gelten. Schreiben Sie die analogen Formeln für Binärbäume rechts. (Die erste Zeile dient als Beispiel.)

Formel für natürliche Zahlen	Analoge Formel für Binärbäume
$\forall x . \forall y . (x = y \to s(x) = s(y))$	$\forall x . \forall x' . \forall y . \forall y' . ((x = y \land x' = y') \to \texttt{join}(x, x') = \texttt{join}(y, y'))$
$\forall x . (x = 0 \lor \exists y . x = s(y))$	
$\forall x . (\neg(s(x) = 0))$	
$\forall x . \forall y . (s(x) = s(y) \to x = y)$	

Hinweis: `empty` entspricht 0 und `join` entspricht s.

(b) Geben Sie eine formale Definition der Funktionen $\texttt{left}^{\mathscr{B}}$ und $\texttt{right}^{\mathscr{B}}$ im folgenden Kästchen an.

Angabe von $\texttt{left}^{\mathscr{B}}$	Angabe von $\texttt{right}^{\mathscr{B}}$

Hinweis: Per zweiter und dritter Formel in Teilaufage (a) ist jeder Baum entweder leer oder Verknüpfung von zwei Bäumen. Somit kann man eine Funktion mit dem Definitionsbereich B für diese zwei Fälle definieren.

Name:	Matrikelnummer:

(c) Geben Sie eine FO-Formel, die sagt „x ist ein endlicher Baum“, oder zeigen Sie, dass keine solche FO-Formel existiert.

5. Aufgabe (Skolemisierung und Modelle) (20 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Sätze:

(i) $\forall x . \exists y . K(x,y)$

(ii) $\neg \exists x . \exists y . (K(x,y) \wedge K(y,x))$

(iii) $\forall x . \forall y . (K(x,y) \rightarrow \forall z . (K(x,z) \vee K(z,y)))$

(iv) $\forall x . \forall y . (K(x,y) \rightarrow \exists z . (K(x,z) \wedge K(z,y)))$

(a) Geben Sie die Skolem-Normalform der Sätze (i)–(iv) im folgenden Kästchen an.

Satz	**Skolem-Normalform**
(i)	
(ii)	
(iii)	
(iv)	

(b) Um zu zeigen, dass die Sätze (i)–(iv) gemeinsam erfüllbar sind, geben Sie ein Modell für sie an, indem Sie das folgende Kästchen ausfüllen.

Signatur:
Trägermenge:
Interpretation der Konstantensymbole:
Interpretation der Funktionssymbole:
Interpretation der Relationssymbole:

(c) Beweisen Sie, dass die Sätze (i)–(iv) kein endliches Modell besitzen.