

# Formale Grundlagen der Informatik II

## 7. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Martin Ziegler  
Davorin Lešnik, Ph.D.  
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013  
15. 07. 2013

### Gruppenübung

#### Aufgabe G20 (Graphen und FO)

Ein Pfad in einem Graph  $\mathcal{G} = (V, E)$  ist eine Sequenz  $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  von Knoten, so dass

$$x_i E x_{i+1}$$

für alle  $i < n$ . Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paaren von Knoten  $(x, y)$  einen Pfad  $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  gibt, mit  $x = x_0$  und  $y = x_n$ .

Zeigen Sie, dass es keine Formelmengende  $\Gamma$  in der Sprache der Graphen gibt, so dass  $\mathcal{G} \models \Gamma$  genau dann wenn  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist.

#### Aufgabe G21 (Sequenzkalkül)

Zeigen Sie, dass die drei folgenden Quantorenregeln semantisch korrekt sind.

$$\frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta} (\forall L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)} (\forall R) \quad \text{falls } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta, \varphi(x)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t = t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta} (\text{Sub-L})$$

Hier bezeichnen  $\Gamma, \Delta \subseteq \text{FO}_0(S)$  beliebige Satzmengen,  $\varphi(x) \in \text{FO}(S)$  beliebige Formel, in der allenfalls  $x$  frei ist,  $t, t' \in T_0(S)$  beliebige Terme und  $c \in S$  beliebige Konstante.

#### Aufgabe G22 (Erfüllbarkeit in endlichen Modellen)

Sei  $S$  eine endliche Signatur. Zeigen Sie, dass  $\text{FINSAT}(\text{FO}(S))$  semientscheidbar, aber nicht entscheidbar, ist.

*Hinweis:* Traktenbrot Satz.

---

## Minitest

---

### Aufgabe M15 ((Semi-)Entscheidbarkeit)

Entscheiden Sie für die folgenden Mengen, ob sie (semi-)entscheidbar sind:

- (a)  $\text{SAT(AL)} := \{\varphi \in \text{AL} \mid \varphi \text{ erfüllbar}\}$   
☐ entscheidbar      ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar      ☐ nicht semientscheidbar
- (b)  $\{(\varphi, \psi) \in \text{AL} \mid \varphi \models \psi\}$   
☐ entscheidbar      ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar      ☐ nicht semientscheidbar
- (c)  $\text{SAT(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} \mid \varphi \text{ erfüllbar}\}$   
☐ entscheidbar      ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar      ☐ nicht semientscheidbar
- (d)  $\text{VAL(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} \mid \varphi \text{ allgemeingültig}\}$   
☐ entscheidbar      ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar      ☐ nicht semientscheidbar
- (e)  $\text{UNSAT(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} \mid \varphi \text{ unerfüllbar}\}$   
☐ entscheidbar      ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar      ☐ nicht semientscheidbar
- (f)  $\text{FINSAT(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} \mid \varphi \text{ hat ein endliches Modell}\}$   
☐ entscheidbar      ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar      ☐ nicht semientscheidbar
- (g)  $\text{INF(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} \mid \varphi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$   
☐ entscheidbar      ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar      ☐ nicht semientscheidbar