Aussagenlogik
& Prädikatenlogik (FGdI II)
6. Übungsblatt

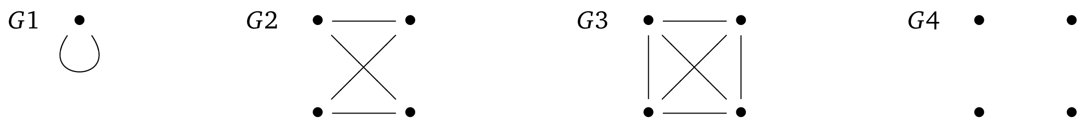
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

SoSe 2016
29. Juni 2016

Gruppenübung

Aufgabe G6.1 (Warm-up)

(a) Betrachten Sie die folgenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$:



In welchen dieser Graphen gelten welche der nachfolgenden FO-Sätze?

(i) $\forall x \forall y \left(\neg x = y \leftrightarrow Exy\right)$

(ii) $\exists x \exists y \exists z \left(\neg x = y \wedge \neg y = z \wedge \neg x = z \wedge Exy \wedge Eyz \wedge \neg Ezx\right)$

(iii) $\exists x \exists y \left(\neg x = y\right) \wedge \forall x \forall y \left(\neg x = y \to \neg Exy\right)$

(iv) $\exists x \forall y \left(x = y\right)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Für jede im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ ableitbare Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ gilt $\Gamma \models \delta$ für jedes $\delta \in \Delta$.

(ii) Für jede im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ ableitbare Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ gilt $\Gamma \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$.

(iii) Für jede im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ ableitbare Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ gilt $\Gamma \models \bigvee \Delta$.

(iv) Falls $\Phi \models \varphi$ für eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$ und eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$ gilt, dann ist die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ für jedes endliche $\Gamma \subseteq \Phi$ in $\mathcal{SK}$ ableitbar.

(v) Falls $\Phi \vdash \varphi$ in $\mathcal{SK}$ für eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$ und einen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$ ableitbar ist, dann gilt $\Phi \models \varphi$.

Aufgabe G6.2 (Sequenzenkalkül)

(a) Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Regel ($\forall$R):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall \varphi(x)}$$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

Zeigen Sie anhand von Beispielen, warum diese Regel nicht mehr korrekt ist, falls c in Γ, Δ oder $\varphi(x)$ vorkommen darf.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy}$$

(c) Im Sequenzenkalkül der Aussagenlogik liefert jeder Ableitungsbaum, in dem ein Blatt mit einer nicht allgemeingültigen Sequenz beschriftet ist, bereits einen Nachweis, dass die Sequenz in der Wurzel nicht allgemeingültig ist. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft für den Sequenzenkalkül der Logik erster Stufe nicht gilt.

Aufgabe G6.3 (Ableitungen)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen in $\mathcal{SK}$ ab.

(a) $\forall x \forall y fx = fy \vdash \exists x fx = x$

(b) $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \wedge \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y (Rxy \to \neg Ryx)$

Könnte man die entsprechenden Folgerungsbeziehungen auch mittels GI-Resolution nachweisen? Wenn ja, wie?

Hausübung

Hinweise zur Hausübung

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu dieser Hausübung in der **Übung am 13.07.2016** ab (**Name, Nummer der Übungsgruppe und Matrikelnummer** nicht vergessen). Wir unterstützen ausdrücklich das gemeinsame Arbeiten und Diskutieren in Gruppen, die gefundenen Lösungen sollte aber jeder selbst ausformulieren. Es darf also pro Abgabe nur ein Name auf dem Blatt stehen.

Aufgabe H6.1 (Ableitungen) (12 Punkte)
Leiten Sie die folgenden Sequenzen in $\mathcal{SK}$ ab:

(a) $\forall x fxx = x \vdash \forall x(Px \vee \neg Pfxx)$.

(b) $\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy$.

(c) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \text{frei}(\psi)$.

Aufgabe H6.2 (Regeln) (12 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln für den Sequenzenkalkül der Logik erster Stufe:

(a)
$$\frac{\Gamma, \exists x\varphi(x) \vdash \Delta, \exists x\psi(x) \qquad \Gamma, \exists x\psi(x) \vdash \Delta, \vartheta}{\Gamma, \varphi(c) \vdash \Delta, \vartheta}$$

(b)
$$\frac{\Gamma, \exists x\psi(x) \vdash c = d \qquad \Gamma, \psi(c) \vdash \vartheta}{\Gamma \vdash \neg\psi(d), \vartheta}$$

(c)
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\psi(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \psi(c)}$$

Aufgabe H6.3 (Kompaktheit) (12 Punkte)
Zeigen Sie, dass es über der Signatur $\{<\}$ keine Satzmenge $\Phi \subseteq \text{FO}_0(\{<\})$ gibt, für die gilt

$$\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}}) \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \text{ ist isomorph zu } (\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}),$$

wobei $<^{\mathbb{N}}$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist.
Extra: Diskutieren Sie, was dies für die Beweisbarkeit von FO-Aussagen $\varphi(n)$ über natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion bedeuten könnte.