2 - Asymptotische Notation

Montag, 14. April 2014 10:14

Wir führen Notation für asymptotische Schreibweise ein.

Alle Funktionen sind

$$f, g, \dots : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

Eingabelänge $\qquad$ Zeit.

$$\Theta(g) = \{ f : \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0},\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$$

Beispiel:

$$f(n) = \frac{1}{2} n^2 - 3n$$

Beh: $\qquad f \in \Theta(n^2)$

Beweis: $\forall n \geq 20 : \frac{1}{4} n^2 \leq f(n) \leq n^2$

Beh: $\qquad 6n^3 \notin \Theta(n^2)$

Beweis: $\qquad c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

$\Longrightarrow$

$$c_1 \leq \frac{f(n)}{} \leq c$$

$_1 \le \qquad g(n) \qquad \le \;_2$

Aber $\lim\limits_{n\to\infty} 6n^3/n^2 = \lim 6n = \infty$.

$$O(g) = \{ f \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0} \; \forall n \geq n_0 \; f(n) \leq c\, g(n) \}$$

Beispiel

$$1000\, n^2 \in O(n^2 \log n)$$

Beweis: $n_0 = 1$, $c = 1000$

Beispiel $$g(n) = \begin{cases} n^3 & \text{für } n < 1000 \\ n^2 & \text{für } n \geq 1000 \end{cases}$$

$$g(n) \in O(n^2)$$

$$\Omega(g) = \{ f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: statt $f \in \Omega(g)$ schreibt man auch $f = \Omega(g)$.

<u>Satz</u> $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$

Notation

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

$$o(g) = \left\{ f : \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \right\}$$

$$\omega(g) = \left\{ f : \lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \right\}$$

Wir können zu den beschriebenen Funktionenmengen Relationen definieren:

$$f \,\Theta\, g \iff f = \Theta(g)$$

Diese Relationen haben folgende schaften:

$\Theta, O, o, \Omega, \omega$ sind transitiv

Θ, O, Ω sind reflexiv

Θ ist symmetrisch.

Die Mengen stehen auch folgendermaßen miteinander in Beziehung:

$$f = O(g) \iff g = o(f)$$

$$f = o(g) \iff g = \omega(f)$$

(streng) monoton fallend, wachsend

(streng) monoton fallend, wachsend

Hier noch einige Bezeichnungen für Funktionen in gewissen Mengen:

$\Theta(1)$ konstant
$\Theta(n)$ linear
$\Theta(n \lg n)$ quasilinear
$\Theta(n^2)$ quadratisch
$\Theta(n^3)$ kubisch
$\Theta(n^k)$ polynomiell
$\Theta(2^n)$ exponentiell

Einige weitere Beispiele.

$n^{\lg n} = \Omega(n)$, weil für $n \geq 2$
$\lg n \geq 1$ und darum $n^{\lg n} \geq n$. $(c = 1!)$

Übungen zur asymptotischen Notation

Zeigen Sie, dass $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$ ist

und dass $n! = O(n^n)$ ist.