19.04.2018

Donnerstag, 19. April 2018 07:49

1. Die Studienleistung bleibt gültig

2. Bitte: alle, die sich noch nicht in Übungen eingetragen haben, dieses in Moodle selbst tun.
   Danach: Tauschbörse.

Systematische Analyse von rekursiven Algorithmen

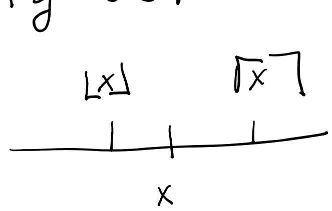
Merge Sort allgemeines n

$T(n)$ Laufzeit von Merge Sort für Folgen der Länge n

$$T(1) \leq c$$
$$T(n) \leq T(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + cn$$

$x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$



$\lceil x \rceil$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

$$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3 \qquad \lceil 3{,}1 \rceil = 4$$

$\lfloor -4{,}1 \rfloor = -5 \qquad \lceil -4{,}1 \rceil = -4$

Ziel: Eine obere Abschätzung $T(n) \leq g(n)$, wo $g(n)$ eine Funktion ist, die durch eine geschlossene Formel dargestellt werden kann.

Wir "raten":

$$T(n) \leq 4cn \lg n \qquad \lg = \log_2$$

Beweis durch Induktion

$n = 1 \quad T(1) \leq c \ \checkmark$

$n = 2 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rekursionsformel}}}{T(2) \leq} \underbrace{T(1)}_{\leq c} + \underbrace{T(1)}_{\leq c} + 2c$

$\leq 4c \leq 8c \ \checkmark$

$4cn \lg n = 4cn = 8c$

Induktionsschritt

Annahme: sei $n > 2$ und sei die Behauptung wahr für alle $n' < n$.

$$T(n) \leq T(\underbrace{\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor}_{<n}) + T(\underbrace{\lceil \tfrac{n}{2} \rceil}_{<n}) + cn$$

$$\underset{\substack{\text{Induktions-} \\ \text{annahme}}}{\leq} 4c \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \underbrace{\log \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor}_{\substack{\leq \\ \log \frac{n}{2} \leq \log \frac{2}{3} n}} + 4c \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \underbrace{\log \lceil \tfrac{n}{2} \rceil}_{\substack{\leq \\ \log \frac{2}{3} n}} + cn$$

Bel. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$

annahme $\log\frac{2}{3} < \log\frac{3}{2}$

$\log\frac{2}{3}n$

Beh 1 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lceil\frac{n}{2}\rceil = n$

Beh 2 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor \leq \frac{n}{2}$ **Beh 3** $\lceil\frac{n}{2}\rceil \leq \frac{2}{3}n, n \geq 3$

$$\leq 4c \log\left(\frac{2n}{3}\right)\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lceil\frac{n}{2}\rceil\right) + cn$$

$$\leq 4c \log\left(\frac{2}{3}n\right)\cdot n + c\cdot n$$

$(\log a\cdot b = \log a + \log b)$

$$\leq \underbrace{4cn\log n +}\; cn\left(1 - \underbrace{4\lg\frac{3}{2}}_{=4\log\frac{2}{3}}\right)$$

$2{,}34\ldots$

$$\leq 4cn\log n.$$ $\blacksquare$ ≤ 0

Master Theorem erlaubt eine asympt. Abschätzung

1) $\boxed{T(n) = 9\,T(n/3) + n}$ $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$

a, b, $f(n)$

$\log_b a = \log_3 9 = 2$

Fall 1 $n^{2-\varepsilon}$

Fall 2 n^2

Fall 3 $n^{2+\varepsilon}$

Fall 1 $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ wahr für $\varepsilon = 1$.

Master Theorem

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

2) $T(n) = T(2n/3) + 1$ $\quad a = 1$, $b = 3/2$, $f(n) = 1$

$\log_{3/2} 1 = 0$

$f(n)$ mit $n^0 = 1$ vergleichen

Fall 2 $\quad f(n) = \Theta(n^{\underbrace{\log_b a}_{1}})$, $f(n) = 1$

$$T(n) = \Theta(\underbrace{n^{\log_b a}}_{1} \log n) = \Theta(\log n)$$

3) $T(n) = 3\,T(n/4) + n \log n$

$a = 3,\ b = 4,\ f(n) = n \log n$

$f(n) \qquad n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$

$\leq n^{0{,}793}$

Fall 3 $\quad f(n) = n \log n \geq n \geq n^{0{,}793 + \underbrace{0{,}1}_{\varepsilon}}$

$a f(n/b) \leq c\, f(n)$

$3 f(n/4) = 3 (n/4) \log (n/4)$

$= \frac{3}{4} n \log \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n \log n$

Stimmt für $c = \frac{3}{4}$. ✓

Es folgt aus dem Master Theorem: $T(n) = \Theta(n \log n)$.

4) $T(n) = 2\,T(n/2) + n \log n$

$a = 2,\ b = 2,\ f(n) = n \log n$

Vergleiche $\underset{\underset{n \log n}{\parallel}}{f(n)}$ mit $n^{\log_b a} = n$

Gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit:

$$n \log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$$

nein.

$\varepsilon > 0$ $\qquad \lim_{n \to \infty} \frac{n^{1+\varepsilon}}{n \log n} = \infty$

Daher ist keiner der Fälle relevant.