# Aussagenlogik
# und Prädikatenlogik
# 5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach**
Anton Freund, Jonathan Weinberger

**SoSe 2018**
**Übung: 13.06.2018**
**Abgabe: 27.06.2018**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Logische Äquivalenzen)
Sei $\varphi$ eine Formel, in der $x$ nicht frei vorkommt. Beweisen Sie die Äquivalenzen

(a) $\varphi \to \exists x \psi(x) \equiv \exists x(\varphi \to \psi(x))$,

(b) $\varphi \to \forall x \psi(x) \equiv \forall x(\varphi \to \psi(x))$,

(c) $\exists x \psi(x) \to \varphi \equiv \forall x(\psi(x) \to \varphi)$,

(d) $\forall x \psi(x) \to \varphi \equiv \exists x(\psi(x) \to \varphi)$.

**Lösung:** Der zentrale Punkt ist bei allen Teilaufgaben derselbe: Da $x$ nicht frei in $\varphi$ vorkommt, hängt der Wahrheitswert von $\varphi$ nicht von der Belegung der Variablen $x$ ab. Insbesondere gilt $\varphi^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} = \varphi^{\mathscr{I}}$ für jede Interpretation $\mathscr{I}$ und jedes Element $a$ des zugehörigen Gegenstandsbereichs $A$. Die vollständige Lösung kann man auf (mindestens) zwei verschiedene Arten aufschreiben. Wir wählen die eine Möglichkeit für Teilaufgaben (a) und (b), die andere für Teilaufgaben (c) und (d).

(a) Mit obiger Vorbemerkung gilt

$$\begin{aligned}(\varphi \to \exists x \psi(x))^{\mathscr{I}} &= \max(1-\varphi^{\mathscr{I}}, (\exists x\psi(x))^{\mathscr{I}}) = \max(1-\varphi^{\mathscr{I}}, \max\{\psi(x)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} \mid a \in A\}) = \\ &= \max\{\max(1-\varphi^{\mathscr{I}}, \psi(x)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}) \mid a \in A\} = \max\{\max(1-\varphi^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}, \psi(x)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}) \mid a \in A\} = \\ &= \max\{(\varphi \to \psi(x))^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}) \mid a \in A\} = (\exists x(\varphi \to \psi(x)))^{\mathscr{I}}.\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}(\varphi \to \forall x \psi(x))^{\mathscr{I}} &= \max(1-\varphi^{\mathscr{I}}, (\forall x\psi(x))^{\mathscr{I}}) = \max(1-\varphi^{\mathscr{I}}, \min\{\psi(x)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} \mid a \in A\}) = \\ &= \min\{\max(1-\varphi^{\mathscr{I}}, \psi(x)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}) \mid a \in A\} = \min\{\max(1-\varphi^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}, \psi(x)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}) \mid a \in A\} = \\ &= \min\{(\varphi \to \psi(x))^{\mathscr{I}[x\mapsto a]}) \mid a \in A\} = (\forall x(\varphi \to \psi(x)))^{\mathscr{I}}.\end{aligned}$$

(c) Wir nehmen zunächst $\varphi^{\mathscr{I}} = 1$ an. Dann gilt $(\exists x\psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}} = 1$. Weil $x$ nicht frei in $\varphi$ vorkommt, gilt auch $\varphi^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} = 1$ für beliebiges $a \in A$. Somit hat man $(\psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} = 1$ für beliebiges $a \in A$. Dies bedeutet gerade $(\forall x(\psi(x) \to \varphi))^{\mathscr{I}} = 1$. Nun nehmen wir $\varphi^{\mathscr{I}} = \varphi^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} = 0$ an. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\exists x\psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists x\psi(x))^{\mathscr{I}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt kein } a \in A \text{ mit } \psi(x)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \psi(x)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } a \in A \text{ gilt } (\psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}[x\mapsto a]} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall x(\psi(x) \to \varphi))^{\mathscr{I}} = 1.\end{aligned}$$

In jedem Fall hat man also $(\exists x\psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}} = (\forall x(\psi(x) \to \varphi))^{\mathscr{I}}$.

(d) Wir nehmen zunächst $\varphi^{\mathscr{I}} = 1$ an. Dann gilt $(\forall x \psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}} = 1$. Wähle nun ein Element $a \in A$. Weil $x$ nicht frei in $\varphi$ vorkommt, gilt auch $\varphi^{\mathscr{I}[x \mapsto a]} = 1$. Somit hat man $(\psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}[x \mapsto a]} = 1$ für das zuvor gewählte $a \in A$. Dies ergibt $(\exists x(\psi(x) \to \varphi))^{\mathscr{I}} = 1$. Nun nehmen wir $\varphi^{\mathscr{I}} = \varphi^{\mathscr{I}[x \mapsto a]} = 0$ an, wobei $a \in A$ beliebig ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\forall x \psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \psi(x))^{\mathscr{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{nicht für alle } a \in A \text{ gilt } \psi(x)^{\mathscr{I}[x \mapsto a]} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } \psi(x)^{\mathscr{I}[x \mapsto a]} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } (\psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}[x \mapsto a]} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists x(\psi(x) \to \varphi))^{\mathscr{I}} = 1.
\end{aligned}$$

In jedem Fall hat man also $(\forall x \psi(x) \to \varphi)^{\mathscr{I}} = (\exists x(\psi(x) \to \varphi))^{\mathscr{I}}$.

**Aufgabe G2** (Skolemnormalform I)
Betrachten Sie die Signatur $\{R, P\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol $R$ und einem einstelligen Relationssymbol $P$, sowie die Sätze

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \exists x\, Px \\
\varphi_2 &:= \forall x \big(Px \to \exists y\, (Rxy \land Py)\big), \\
\varphi_3 &:= \forall x \big(Px \to \exists y\, (Rxy \land \neg Py)\big).
\end{aligned}$$

Diese drei Sätze sind gemeinsam erfüllbar. Ein mögliches Modell ist

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} := a \arrow[loop above] \arrow[r] & b \end{tikzcd} ,$$

wobei Pfeile für Tupel in der Relation $R$ stehen und der Kreis um $a$ bedeutet, dass $a$ in der Relation $P$ enthalten ist.

(a) Finden Sie für die Sätze $\varphi_1$, $\varphi_2$ und $\varphi_3$ jeweils eine Skolem-Normalform $\varphi_1^S$, $\varphi_2^S$ bzw. $\varphi_3^S$.

(b) Der Satz über die Skolem-Normalform besagt, dass das Modell $\mathscr{A}$ von $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ zu einem Modell $\mathscr{A}^S$ von $\{\varphi_1^S, \varphi_2^S, \varphi_3^S\}$ erweitert werden kann. Geben Sie eine solche Erweiterung an.

(c) Der Satz über Herbrand-Modelle besagt, dass die Formelmenge $\{\varphi_1^S, \varphi_2^S, \varphi_3^S\}$ auch ein Herbrand-Modell $\mathscr{H}$ besitzt. Geben Sie ein solches Modell an, indem Sie die Konstruktion aus dem Beweis des Satzes ausführen.

**Lösung:**

(a) Wir bestimmen zunächst pränexe Normalformen der Sätze $\varphi_2$ und $\varphi_3$: Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &\equiv \forall x \exists y \big(\neg Px \lor (Rxy \land Py)\big), \\
\varphi_3 &\equiv \forall x \exists y \big(\neg Px \lor (Rxy \land \neg Py)\big).
\end{aligned}$$

Wir führen nun ein Konstantensymbol und zwei Funktionssymbole für die existentiell quantifizierten Variablen ein: So erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi_1^S &:= Pc, \\
\varphi_2^S &:= \forall x \big(\neg Px \lor (Rxfx \land Pfx)\big), \\
\varphi_3^S &:= \forall x \big(\neg Px \lor (Rxgx \land \neg Pgx)\big).
\end{aligned}$$

(b) Um ein Modell $\mathscr{A}^S$ für $\{\varphi_1^S, \varphi_2^S, \varphi_3^S\}$ zu erhalten, müssen das Konstantensymbol $c$ und die Funktionssymbole $f$ und $g$ durch geeignete Auswahlfunktionen interpretiert werden. Man kann sich überzeugen, dass durch

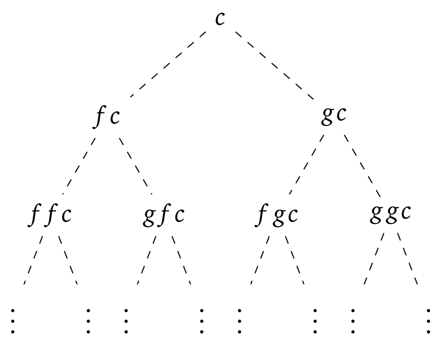
$$c^{\mathscr{A}^S} = a,\ f^{\mathscr{A}^S}(a) = a,\ f^{\mathscr{A}^S}(b) = b,\ g(a)^{\mathscr{A}^S} = b \text{ und } g^{\mathscr{A}^S}(b) = b$$

eine Lösung gegeben ist. Auch die Variante $f^{\mathscr{A}^S}(b) = g^{\mathscr{A}^S}(b) = a$ ist eine mögliche Lösung.

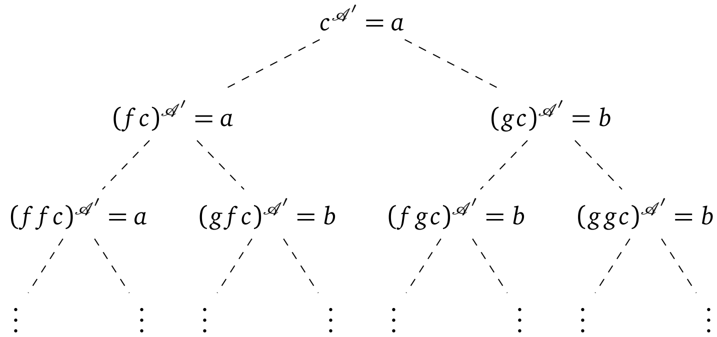
(c) Um ein Herbrand-Modell $\mathscr{H}$ für $\{\varphi_1^S, \varphi_2^S, \varphi_3^S\}$ zu erhalten, bilden wir die Menge $T_0(S)$ der variablenfreien Terme über der Signatur $S = \{c, f, g, P, R\}$, also die Menge

$$T_0(S) = \{c, fc, gc, ffc, gfc, fgc, ggc, fffc, \ldots\}.$$

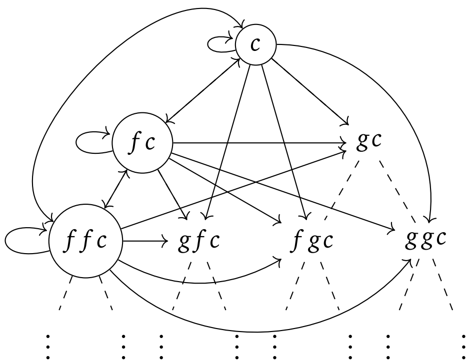
Wir können diese durch den folgenden Baum veranschaulichen:




Die Interpretation der Konstante $c$ sowie der Funktionssymbole $f$ und $g$ ergibt sich direkt aus dem Aufbau der Terme. Um eine Interpretation der Relationssymbole $R$ und $P$ zu finden, für die $\mathscr{H}$ ein Modell von $\{\varphi_1^S, \varphi_2^S, \varphi_3^S\}$ ist, betrachten wir die Interpretationen der Terme aus $T_0(S)$ in $\mathscr{A}^S$:




Damit ergibt sich für unser Herbrand-Modell $\mathscr{H}$ das folgende Bild:




Die Relation $P^{\mathscr{H}}$ enthält also genau die Terme $c, fc, ffc, fffc, \ldots$; außerdem gilt $R^{\mathscr{H}} = P^{\mathscr{H}} \times T_0(S)$.

**Aufgabe G3** (Satz von Herbrand I, nach Ulrich Berger)
Seien $c$ ein Konstantensymbol und $S, f$ jeweils einstellige Funktionssymbole (Sie können an die natürlichen Zahlen mit $c = 0$ und $Sx = x + 1$ denken). In der erststufigen Logik mit Gleichheit betrachten wir die Theorie $T = \{\forall x(Sx \neq c)\}$ und die Formel $\varphi = \exists x \psi(x) = \exists x(f(S(f(x))) \neq x)$.

(a) Studieren Sie den folgenden Beweis von $T \vDash \varphi$ (Sie müssen dazu nichts aufschreiben): Wir leiten einen Widerspruch aus der Annahme $\neg\varphi = \forall x(f(S(f(x))) = x)$ her. Unter dieser Annahme ist $f$ injektiv, da $f(x) = f(y)$ schon $x = f(S(f(x))) = f(S(f(y))) = y$ impliziert. Dann hat $f$ eine Linksinverse, also eine Funktion $g$ mit $g(f(x)) = x$. Zusammen mit der Widerspruchsannahme erhält man $S(f(x)) = g(f(S(f(x)))) = g(x)$. Da die Linksinverse einer Funktion immer surjektiv ist, gibt es ein $y$ mit $g(y) = c$. Hieraus folgt $S(f(y)) = c$, im Widerspruch zum Axiom $\forall x(Sx \neq c)$ der Theorie $T$.

(b) Was sagt der Satz von Herbrand in dieser Situation voraus?

(c) Geben Sie Terme $t_1, t_2$ und $t_3$ an, sodass $T \vDash \psi(t_1) \vee \psi(t_2) \vee \psi(t_3)$ gilt. (Hinweis: Schauen Sie sich den in Teilaufgabe (a) angegebenen Beweis genau an.)

**Lösung:**

(a) Siehe Aufgabenstellung.

(b) Die Theorie $T$ ist offen und $\varphi$ ist ein reiner $\exists$-Satz. Nach dem Satz von Herbrand (Folie 92) gibt es also Terme $t_1, \dots, t_k$, gebildet aus der Konstanten $c$ und den Funktionssymbolen $S, f$, sodass $T \vDash \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_k)$ gilt.

(c) Der angegebene Beweis leitet aus der Annahme $\neg\varphi = \forall x \neg\psi(x)$ den Widerspruch $\exists x(S(x) = c)$ her. Um nun $T \vDash \psi(t_1) \vee \psi(t_2) \vee \psi(t_3)$ zu erhalten, genügt es, denselben Widerspruch aus $\neg\psi(t_1) \wedge \neg\psi(t_2) \wedge \neg\psi(t_3)$ herzuleiten. Anders ausgedrückt müssen wir herausfinden, welche Instanzen der Widerspruchsannahme wirklich benötigt werden. Wir analysieren dazu, wie wir auf den Widerspruch $\exists x(S(x) = c)$ gekommen sind: Der Zeuge für den Existenzquantor war von der Form $x = f(y)$. Entscheidend war hierbei $g(y) = c$. Um die Existenz eines solchen $y$ nachzuweisen, haben wir verwendet, dass $f$ injektiv und $g$ eine Linksinverse von $f$ ist. Dann gilt nämlich $g(f(c)) = c$ und wir können $y = f(c)$ nehmen. Der Widerspruch $\exists x(S(x) = c)$ konkretisiert sich somit zu $S(f(f(c))) = c$. Um auf diese Instanz des Widerspruchs zu schließen, haben wir die Gleichungen

$$S(f(f(c))) = g(f(S(f(f(c))))), \tag{1}$$
$$f(S(f(f(c)))) = f(c), \tag{2}$$
$$g(f(c)) = c \tag{3}$$

verwendet. Gleichung (2) ist gerade die Instanz $\neg\psi(f(c))$ der Widerspruchsannahme. Wir halten also zunächst $t_1 = f(c)$ fest. Nun beobachten wir, dass die Gleichungen (1) und (3) gar nicht unbedingt benötigt werden: Um aus (2) auf den Widerspruch $S(f(f(c))) = c$ zu schließen, genügt schon die Instanz

$$f(S(f(f(c)))) = f(c) \rightarrow S(f(f(c))) = c$$

der Injektivität von $f$. Diese beruhte im angegebenen Beweis auf den Gleichungen

$$S(f(f(c))) = f(S(f(S(f(f(c)))))), \tag{4}$$
$$f(S(f(c))) = c. \tag{5}$$

Letztere entsprechen gerade den Instanzen $t_2 = S(f(f(c)))$ und $t_3 = c$ der Widerspruchsannahme. Somit gilt also

$$T \vDash \psi(t_1) \vee \psi(t_2) \vee \psi(t_3).$$

Als Übung können Sie noch einmal direkt verifizieren, dass $T \vDash \psi(t_1) \vee \psi(t_2) \vee \psi(t_3)$ gilt. Dazu müssen Sie das obige Argument "rückwärts" aufschreiben. Wenn man die geeigneten Terme $t_1, t_2$ und $t_3$ schon kennt, ist das nicht mehr ganz so schwer.

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Trennung von Quantoren) (12 Punkte)
Durch die Schreibweise $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ drücken wir im Folgenden aus, dass in der Formel $\varphi$ höchstens die Variablen $x_1, \dots, x_k$ frei vorkommen. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Es gilt $\forall x \exists y \varphi(x, y) \equiv \exists y \forall x \varphi(x, y)$

(a) für jede Formel der Form $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y)$,

(b) für jede Formel der Form $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x) \vee \varphi_2(y)) \wedge (\psi_1(x) \vee \psi_2(y))$.

**Lösung:**

(a) In diesem Fall gilt die Äquivalenz: Mit den Umformungsregeln für die Pränexnormalform (vgl. Übung 3.3 im Skript von Herrn Professor Otto) erhält man

$$\begin{aligned}
\forall x \exists y \left(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y)\right) &\equiv \forall x \left(\varphi_1(x) \wedge \exists y\, \varphi_2(y)\right) \\
&\equiv \left(\forall x\, \varphi_1(x)\right) \wedge \left(\exists y\, \varphi_2(y)\right) \\
&\equiv \exists y \left(\forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y)\right) \\
&\equiv \exists y \forall x \left(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y)\right).
\end{aligned}$$

(b) In diesem Fall gilt die Äquivalenz nicht: Ein Gegenbeispiel ist

$$\forall x \exists y\, (Px \leftrightarrow \neg Py) \not\equiv \exists y \forall x\, (Px \leftrightarrow \neg Py),$$

wobei wir $Px \leftrightarrow \neg Py$ als $(Px \vee Py) \wedge (\neg Px \vee \neg Py)$ schreiben können. Um zu sehen, dass die angegebene Äquivalenz nicht gilt, betrachten wir etwa das Modell

$$\mathscr{A} = (A, P^{\mathscr{A}}) = (\{0,1\}, \{0\}).$$

Dann gilt $\mathscr{A} \vDash P0 \leftrightarrow \neg P1$ und $\mathscr{A} \vDash P1 \leftrightarrow \neg P0$, also $\mathscr{A} \vDash \forall x \exists y\, (Px \leftrightarrow \neg Py)$. Andererseits gilt $\mathscr{A} \nvDash P0 \leftrightarrow \neg P0$ und $\mathscr{A} \nvDash P1 \leftrightarrow \neg P1$, also $\mathscr{A} \nvDash \exists y \forall x\, (Px \leftrightarrow \neg Py)$.

**Aufgabe H2** (Skolemnormalform II) (12 Punkte)
Wir betrachten die Formeln

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x[\exists y(Rxy \wedge \neg\exists x Ryx) \vee \forall y \exists z(Rxz \wedge Rzy)],\\ \varphi_2 &:= \exists x[\forall y \neg Rxy \rightarrow \exists y \forall z(Rxy \wedge Rzy)],\\ \varphi_3 &:= \forall x \forall y[Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy \wedge \neg\exists x(Rzx \wedge Rxz))].\end{aligned}$$

(a) Geben Sie äquivalente Formeln in Pränex-Normalform an.

(b) Wandeln Sie ihre Ergebnisse aus (a) in Skolem-Normalform um.

(c) Betrachten Sie die Formel $\varphi = \forall x \exists y Rxy$ und die Skolem-Normalform $\varphi^S = \forall x Rxf(x)$.
   i. Beweisen Sie, dass $\varphi^S \models \varphi$ gilt.
   ii. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches $\varphi \not\models \varphi^S$ zeigt.

**Lösung:**

(a) Um Konflikte zu vermeiden, muss man Variablen geeignet umbenennen. Dann erhält man etwa

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv \forall x \exists y \forall u \forall v \exists z[(Rxy \wedge \neg Ryu) \vee (Rxz \wedge Rzv)],\\ \varphi_2 &\equiv \exists x \exists y \exists u \forall z[\neg Rxy \rightarrow (Rxu \wedge Rzu)],\\ \varphi_3 &\equiv \forall x \forall y \exists z \forall u[Rxy \rightarrow (Rxz \wedge Rzy \wedge \neg(Rzu \wedge Ruz))].\end{aligned}$$

(b) Man erhält die Skolem-Normalformen

$$\begin{aligned}\varphi_1^S &= \forall x \forall u \forall v[(Rxfx \wedge \neg Rfxu) \vee (Rxgxuv \wedge Rgxuvv)] && (f \text{ einstellig, } g \text{ dreistellig}),\\ \varphi_2^S &= \forall z[\neg Rcd \rightarrow (Rce \wedge Rze)] && (c, d, e \text{ Konstantensymbole}),\\ \varphi_3^S &= \forall x \forall y \forall u[Rxy \rightarrow (Rxfxy \wedge Rfxyy \wedge \neg(Rfxyu \wedge Rufxy))] && (f \text{ zweistellig}).\end{aligned}$$

(c) i. Angenommen $(\mathscr{A}, \beta) \models \varphi^S$. Um zu zeigen, dass $(\mathscr{A}, \beta) \models \varphi$ gilt, betrachten wir ein beliebiges Element $a \in A$. Nach Annahme gilt $(a, f^{\mathscr{A}}(a)) \in R^{\mathscr{A}}$. Insbesondere gibt es also ein $b$ (nämlich $b = f^{\mathscr{A}}(a)$) mit $(a, b) \in R^{\mathscr{A}}$. Wir haben gezeigt, dass $(\mathscr{A}, \beta) \models \forall x \exists y Rxy$.
   ii. Sei $\mathscr{A} = (A, f^{\mathscr{A}}, R^{\mathscr{A}})$ die Struktur mit

$$A = \{0, 1\}, \quad f^{\mathscr{A}}(0) := f^{\mathscr{A}}(1) := 0, \quad R^{\mathscr{A}} := \{(0, 1), (1, 1)\}.$$

   Dann gilt $\mathscr{A} \models \varphi$ aber $\mathscr{A} \not\models \varphi^S$.

**Aufgabe H3** (Satz von Herbrand II) (12 Punkte)
Seien $c$ ein Konstantensymbol, $f$ ein zweistelliges Funktionssymbol und $R$ ein einstelliges Relationssymbol. In der erststufigen Logik ohne Gleichheit betrachten wir die Theorie $T = \{\neg Rc, Rf(f(c, c), c)\}$ und die Formel

$$\varphi = \exists x \exists y \psi(x, y) = \exists x \exists y(\neg Rx \wedge \neg Ry \wedge Rf(x, y)\}.$$

(a) Zeigen Sie $T \vDash \varphi$.

(b) Was sagt der Satz von Herbrand in dieser Situation voraus?

(c) Geben Sie Terme $t_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq 2$ an, sodass $T \vDash \psi(t_{11}, t_{12}) \vee \psi(t_{21}, t_{22})$ gilt.

(d) Zeigen Sie: Es gibt keine Terme $t_{11}, t_{12}$ mit $T \vDash \psi(t_{11}, t_{12})$.

(e) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse über der Struktur

$$\mathscr{A} = (A, c^{\mathscr{A}}, f^{\mathscr{A}}, R^{\mathscr{A}}) = (\mathbb{R}, \sqrt{2}, (x, y) \mapsto x^y, \{x \in \mathbb{R} \mid \text{“}x \text{ is rational”}\}).$$

**Lösung:**

(a) Sei $\mathscr{A}$ eine beliebige Struktur, welche $T$ erfüllt. Nehme zunächst an, dass $\mathscr{A} \vDash Rf(c, c)$ gilt. Weil $\neg Rc$ ein Axiom von $T$ ist, gilt auch $\mathscr{A} \vDash \neg Rc$ und somit $\mathscr{A} \vDash \neg Rc \wedge \neg Rc \wedge Rf(c, c)$. Mit $x = y = c$ erhält man also $\mathscr{A} \vDash \varphi$. Nehme nun an, dass $\mathscr{A} \vDash \neg Rf(c, c)$ gilt. Weil $\mathscr{A}$ ein Modell von $T$ ist, erhält man $\mathscr{A} \vDash \neg Rf(c, c) \wedge \neg Rc \wedge Rf(f(c, c), c)$ Also gilt wieder $\mathscr{A} \vDash \varphi$, diesmal mit $x = f(c, c)$ und $y = c$.

(b) Die Theorie $T$ ist offen und $\varphi$ ist eine reine $\exists$-Formel. Nach dem Satz von Herbrand gibt es eine Zahl $k$ und Terme $t_{ij}$ mit $1 \leq i \leq k$ und $j = 1, 2$, sodass

$$T \vDash \psi(t_{11}, t_{12}) \vee \cdots \vee \psi(t_{k1}, t_{k2})$$

gilt.

(c) Aus dem Beweis in (a) liest man die Terme $t_{11} = t_{12} = c$ sowie $t_{21} = f(c, c)$ und $t_{22} = c$ ab.

(d) Man schließt zunächst den Fall $t_{11} = t_{12} = c$ aus: Hier betrachtet man das durch $t \in R^{\mathcal{T}} \iff t = f(f(c, c), c)$ definierte Termmodell $\mathcal{T}$. Dieses ist ein Modell von $T$, aber es gilt $\mathcal{T} \nvDash Rf(c, c)$, also $\mathcal{T} \nvDash \psi(t_{11}, t_{12})$. Nun betrachtet man den Fall, in dem $t_{11} \neq c$ oder $t_{12} \neq c$ gilt. Hier betrachtet man das Termmodell $\mathcal{T}$ mit $t \in R^{\mathcal{T}} \iff t \neq c$. Dies ist wieder ein Modell von $T$, aber es gilt $\mathcal{T} \vDash Rt_{1j}$ für $t_{1j} \neq c$. Man schließt $\mathcal{T} \nvDash \neg Rt_{1j}$ und daher $\mathcal{T} \nvDash \psi(t_{11}, t_{12})$.

(e) Bekanntermaßen ist $c^{\mathscr{A}} = \sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. Andererseits ist

$$(f(f(c, c), c))^{\mathscr{A}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

rational. Daher ist $\mathscr{A}$ ein Modell von $T$. Teilaufgabe (a) zeigt dann, dass es zwei irrationale Zahlen $x$ und $y$ gibt, sodass die Potenz $x^y$ rational ist. Teilaufgabe (c) zeigt, dass dies entweder für $x = y = \sqrt{2}$ gelten muss (falls nämlich $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist), oder für $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$ (falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist). Welche der beiden Möglichkeiten zutrifft, lässt sich nicht leicht sagen. Teilaufgabe (d) zeigt gerade, dass es hierfür kein allgemeines Argument gibt, sondern dass man sich das jeweilige Modell genau anschauen muss. Aus dem schwierigen Satz von Gelfand-Schneider folgt, dass tatsächlich $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist. Letzteres war aber hier nicht gefragt.