Formale Grundlagen der Informatik II
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik **SS 2012**
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchstens eine der Variablen p, q, r wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r, s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

Aufgabe G2

(a) Wir versuchen, ein verteiltes System in der Aussagenlogik zu modellieren. Angenommen wir wollen n Prozesse für s Zeiteinheiten beobachten. Jeder Prozess kann sich an jedem Zeitpunkt im Zustand p, q oder r befinden. Wir führen Aussagenvariablen p_t^i, q_t^i und r_t^i ein, die auf wahr gesetzt werden, wenn Prozess i zur Zeit t im entsprechenden Zustand ist. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in AL:

- Zu jedem Zeitpunkt ist höchstens ein Prozess in Zustand q.
- Es sind immer mindestens zwei Prozesse in Zustand p.
- Wenn sich ein Prozess in Zustand q befindet, dann wechselt er nach spätestens 3 Zeiteinheiten in den Zustand r.

(b) Konstruieren Sie induktiv über n aussagenlogische Formeln

$$\varphi_n(x_n, \ldots, x_0, y_n, \ldots, y_0),$$

welche genau dann wahr sind, wenn die in $x_n \ldots x_0$ kodierte Binärzahl $\sum_i x_i 2^i$ kleiner ist als die in $y_n \ldots y_0$ kodierte.

Aufgabe G3

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \to \psi$.

(ii) Wenn $\varphi \models \psi$ und φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iii) Wenn $\varphi \models \psi$ und ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iv) $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen.

i. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

ii. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

iii. $\{\neg\psi, \psi \to \varphi\} \models \neg\varphi$

iv. $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \models \neg\psi$

Aufgabe G4

Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \ldots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat;

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder hat.