Aussagenlogik und Prädikatenlogik 7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Anton Freund, Jonathan Weinberger

SoSe 2018
Übung: 11.07.2018
Abgabe: keine

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Quiz zu Entscheidbarkeit und Gödelschen Sätzen)
Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar? Welche sind semi-entscheidbar?

(a) $\{(\varphi, \psi) \in \mathbf{AL} \times \mathbf{AL} \,|\, \varphi \models \psi\}$

(b) $\{(\varphi, \psi) \in \mathbf{FO} \times \mathbf{FO} \,|\, \varphi \models \psi\}$

(c) $\{\varphi \in \mathbf{FO} \,|\, \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

(d) $\{\varphi \in \mathbf{FO} \,|\, \varphi \text{ hat ein endliches Modell}\}$

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

(e) Die Theorie $\mathrm{Th}(\mathscr{N}) = \{\varphi \in \mathscr{L}(\mathbf{PA}) \,|\, \mathscr{N} \models \varphi\}$ ist nicht rekursiv axiomatisierbar.

(f) Jede rekursiv axiomatisierbare Theorie, die die Konsistenz der Peano-Arithmetik beweist, ist inkonsistent.

Überlegen Sie sich jeweils eine kurze Begründung für Ihre Entscheidung.

Lösung:

(a) Die Menge ist entscheidbar, weil man $\varphi \models \psi$ explizit mittels Wahrheitstafeln überprüfen kann.

(b) Die Menge ist unentscheidbar: Es gilt nämlich

$$\varphi \text{ erfüllbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \not\models 0.$$

Wenn man nun $\varphi \models \psi$ für beliebige Formeln φ und ψ entscheiden könnte, dann könnte man also entscheiden, ob φ erfüllbar ist. Dies widerspricht aber dem Satz von Church und Turing. Die gegebene Menge ist aber semi-entscheidbar: Hierzu geht man explizit alle Beweise im Sequenzenkalkül durch. Hat man einen Beweis von $\varphi \vdash \psi$ gefunden, so gilt $\varphi \models \psi$. Weil der Sequenzenkalkül vollständig ist, findet man dabei alle Paare (φ, ψ) mit $\varphi \models \psi$.

(c) Die gegebene Menge ist nicht entscheidbar: Sonst wäre auch ihr Komplement entscheidbar. Dieses besteht aber gerade aus den erfüllbaren **FO**-Formeln und ist nach dem Satz von Church und Turing unentscheidbar. Die Menge ist aber semi-entscheidbar: Hierzu verwendet man wieder ein vollständiges Beweiskalkül und sucht nach Beweisen von $\neg\varphi$. Hierdurch werden alle Formeln φ aufgezählt, für die $\neg\varphi$ allgemeingültig und somit φ unerfüllbar ist.

(d) Die Menge ist nach dem Satz von Traktenbrot unentscheidbar. Sie ist aber semi-entscheidbar: Hierzu geht man alle Paare $(\mathscr{M}, \varphi)$ aus endlichem Modell und **FO**-Formel durch. Für jedes Paar kann man explizit nachprüfen, ob $\mathscr{M} \models \varphi$ gilt. Wenn dies der Fall ist, dann behält man die Formel φ, die somit ein endliches Modell hat.

(e) Die Behauptung ist wahr: Wegen der Definition von $\mathrm{Th}(\mathscr{N})$ gilt

$$\mathscr{N} \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Th}(\mathscr{N}) \vdash \varphi.$$

Also muss eine der Voraussetzungen des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes verletzt sein. Da $\mathrm{Th}(\mathscr{N})$ eine Erweiterung der Peano-Arithmetik um $\mathscr{N}$-wahre Axiome ist, bleibt als einzige Möglichkeit, dass $\mathrm{Th}(\mathscr{N})$ nicht rekursiv axiomatisierbar ist.

(f) Die Behauptung ist falsch: Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz sagt lediglich, dass eine ausreichend starke konsistente Theorie nicht *ihre eigene* Konsistenz beweisen kann. Insbesondere kann die Konsistenz der Peano-Arithmetik nicht in der Peano-Arithmetik bewiesen werden. Sie kann aber sehr wohl in einer stärkeren Theorie bewiesen werden, z. B. in der Theorie

$$\mathscr{T} = \mathbf{PA} + \text{“}\mathbf{PA}\text{ ist konsistent”}.$$

Diese Theorie ist konsistent, weil alle ihre Axiome in $\mathscr{N}$ gelten.

Aufgabe G2 (Ein entscheidbares Fragment von **FO**)
Eine Klasse **L** von **FO**-Sätzen hat die endliches-Modell-Eigenschaft, wenn folgendes gilt: Jeder Satz in **L** ist genau dann erfüllbar, wenn er ein endliches Modell hat.

(a) Zeigen Sie: Wenn **L** die endliches-Modell-Eigenschaft hat, dann ist Erfüllbarkeit für Sätze in **L** entscheidbar.

(b) In einer Sprache ohne Gleichheit und Funktionssymbole betrachten wir die Formelmengen

$$\forall^* = \{\forall y_1 \dots \forall y_k \varphi \mid \varphi \text{ quantorenfrei}\},$$
$$\exists^*\forall^* = \{\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y_1 \dots \forall y_k \varphi \mid \varphi \text{ quantorenfrei}\}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\forall^*$ die endliches-Modell-Eigenschaft hat. Folgern Sie, dass die Erfüllbarkeit für Formeln in $\exists^*\forall^*$ entscheidbar ist.

Lösung:

(a) Wie in Aufgabe G1(d) gesehen, gibt es einen Algorithmus, der alle Formeln mit endlichem Modell aufzählt. Nach Aufgabe G1(c) sind auch die unerfüllbaren Formeln aufzählbar. Für eine gegebene Formel $\varphi \in \mathbf{L}$ führen wir beide Algorithmen gleichzeitig aus. Wenn die Formel φ erfüllbar ist, dann hat sie nach Annahme schon ein endliches Modell. Also findet der erste Algorithmus die richtige Antwort. Wenn φ unerfüllbar ist, dann hält der zweite Algorithmus mit der richtigen Antwort an.

(b) Eine Formel aus der Menge $\forall^*$ ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrandmodell hat. Da die Signatur keine Funktionssymbole enthält, sind die einzigen relevanten Terme die Konstanten, welche in einer gegebenen Formel vorkommen. Somit hat die Menge $\forall^*$ die endliches-Modell-Eigenschaft. Nach Teilaufgabe (a) ist die Erfüllbarkeit für Formeln aus $\forall^*$ entscheidbar. Die Erfüllbarkeit für Formeln in $\exists^*\forall^*$ kann auf diejenige für Formeln in $\forall^*$ reduziert werden: Jede Formel in $\exists^*\forall^*$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu ihrer Skolemnormalform. Letztere liegt in der Menge $\forall^*$ und enthält zusätzliche Konstanten, aber im vorliegenden Fall keine Funktionssymbole.

Aufgabe G3 (Intuitionistische Logik)
Leiten Sie die folgenden Sequenzen im intuitionistischen Sequenzenkalkül (Folien 169-171) ab:

(a) $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$,

(b) $\forall x\ \neg\varphi \vdash \neg\exists x\ \varphi$.

Hinweis: Sowohl 0 als auch $\bot$ sind Symbole für Falschheit. Wir verwenden $\neg\varphi$ als Abkürzung für $\varphi \to \bot$. Das Axiom $\Gamma, p \vdash p$ ist nur für Variablen formuliert. Sie können aber frei die daraus ableitbare Regel $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ für beliebige Formeln verwenden.

Lösung:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \varphi \to \bot \vdash \varphi}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{\varphi, \bot \vdash \bot}\,(\mathrm{Ax})}{\varphi, \varphi \to \bot \vdash \bot}\,(\to \mathrm{L})}{\varphi \vdash (\varphi \to \bot) \to \bot}\,(\to \mathrm{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x(\varphi \to \bot), \varphi(y/x) \to \bot, \varphi(y/x) \vdash \varphi(y/x)}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{\forall x(\varphi \to \bot), \bot, \varphi(y/x) \vdash \bot}\,(\mathrm{Ax})}{\forall x(\varphi \to \bot), \varphi(y/x) \to \bot, \varphi(y/x) \vdash \bot}\,(\to \mathrm{L})}{\forall x(\varphi \to \bot), \varphi(y/x) \vdash \bot}\,(\forall \mathrm{L})}{\forall x(\varphi \to \bot), \exists x\ \varphi \vdash \bot}\,(\exists \mathrm{L})}{\forall x(\varphi \to \bot) \vdash \big(\exists x\ \varphi\big) \to \bot}\,(\to \mathrm{R})$$

Hierbei ist y eine Variable, die in φ nicht vorkommt.