# Mathematik II für Informatik
# 10. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Thomas Streicher**
Albrun Knof
Moritz Schneider

**SoSe 2017**

Übung: 22./23. Juni 2017
Abgabe: 29./30. Juni 2017

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Differenzierbarkeit)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Fügen Sie Implikationspfeile ein, um zu zeigen, welche Eigenschaft eine andere impliziert bzw. wie die Aussagen zusammenhängen.

| | |
|---|---|
| $f$ ist (total) differenzierbar | $f$ ist stetig |
| die Jacobi-Matrix von $f$ existiert | $f$ ist stetig partiell differenzierbar |
| $f$ ist partiell differenzierbar | die Jacobi-Matrix von $f$ ist stetig |

**Lösungshinweise:** Siehe Satz 6.5.12.

| | | |
|---|---|---|
| $f$ ist (total) differenzierbar | $\Rightarrow$ | $f$ ist stetig |
| $\Downarrow$ | $\Nwarrow$ | $\Uparrow$ |
| die Jacobi-Matrix von $f$ existiert | $\Leftarrow$ | $f$ ist stetig partiell differenzierbar |
| $\Updownarrow$ | | $\Updownarrow$ |
| $f$ ist partiell differenzierbar | $\Leftarrow$ | die Jacobi-Matrix von $f$ ist stetig |

**Aufgabe G2** (Extremwertproblem)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \left(4x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+4y^2\right)}.$$

Bestimmen und charakterisieren Sie alle kritischen Punkte von $f$.

**Lösungshinweise:** Die notwendige Bedingung für einen kritischen Punkt lautet (Satz 6.6.2):

$$0 = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen:

$$\partial_1 f(x,y) = 8x e^{-(x^2+4y^2)} + (4x^2+y^2)e^{-(x^2+4y^2)}(-2x) = 2x e^{-(x^2+4y^2)}(4 - 4x^2 - y^2)$$
$$\partial_2 f(x,y) = 2y e^{-(x^2+4y^2)} + (4x^2+y^2)e^{-(x^2+4y^2)}(-8y) = 2y e^{-(x^2+4y^2)}(1 - 16x^2 - 4y^2).$$

Da $e^{-(x^2+4y^2)} \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= x(4-4x^2-y^2) \\ 0 &= y(1-16x^2-4y^2). \end{aligned}$$

Fall 1: $x = 0$. Dann bleibt $y(1-4y^2) = 0$ zu lösen. Dies liefert

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \pm\frac{1}{2}.$$

Fall 2: $y = 0$. Dann bleibt $x(4-4x^2) = 0$ zu lösen. Dies liefert

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm 1.$$

Fall 3: $x \neq 0 \neq y$. Wir kürzen die Faktoren $x$ bzw. $y$ aus den jeweiligen Zeilen des Gleichungssystems. Multiplizieren wir nun die erste Zeile mit 4 und ziehen die zweite davon ab, erhalten wir den Widerspruch $15 = 0$. Somit kann es keine weiteren Lösungen geben.
Wir erhalten als kritische Punkte:

$$(0,0), \quad \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{2}\right), \quad (1,0) \quad \text{und} \quad (-1,0).$$

Für die Charakterisierung verwenden wir Satz 6.6.3 und müssen zunächst die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x,y) & \partial_1\partial_2 f(x,y) \\ \partial_2\partial_1 f(x,y) & \partial_2\partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

berechnen. Es gilt (wobei wir den Satz von Schwarz für $\partial_1\partial_2 f(x,y) = \partial_2\partial_1 f(x,y)$ verwenden):

$$\begin{aligned} \partial_1\partial_1 f(x,y)(x,y) &= 2e^{-(x^2+4y^2)}(8x^4+2x^2y^2-20x^2-y^2+4) \\ \partial_1\partial_2 f(x,y) = \partial_2\partial_1 f(x,y) &= 4xye^{-(x^2+4y^2)}(16x^2+4y^2-17) \\ \partial_2\partial_2 f(x,y) &= 2e^{-(x^2+4y^2)}(32y^4+128x^2y^2-16x^2-20y^2+1). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die 5 kritischen Punkte:

| $x_0$ | $H_f(x_0)$ | Eigenwerte | Matrix $H_f(x_0)$ | Charakterisierung |
|---|---|---|---|---|
| $(0,0)$ | $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ | positiv | positiv definit | Minimum |
| $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ | $2e^{-1}\begin{pmatrix} \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ | positiv und negativ | indefinit | kein Extremum (Sattelpunkt) |
| $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ | $2e^{-1}\begin{pmatrix} \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ | positiv und negativ | indefinit | kein Extremum (Sattelpunkt) |
| $(1,0)$ | $2e^{-1}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$ | negativ | negativ definit | Maximum |
| $(-1,0)$ | $2e^{-1}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$ | negativ | negativ definit | Maximum |

**Aufgabe G3** (Taylorpolynom)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x - \cos(xy).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $f$ im Entwicklungspunkt $x_0 = (1,\pi)$.

**Lösungshinweise:** Wir bestimmen zunächst den Gradienten und die Hessematrix von $f$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + y\sin(xy) & x\sin(xy) \end{pmatrix}.$$
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\cos(xy) & \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ \sin(xy) + xy\cos(xy) & x^2\cos(xy) \end{pmatrix}.$$

Nun werten wir $f, \nabla f$ und $H_f$ an der Stelle $x_0 = (1,\pi)$ aus:

$$\begin{aligned} f(1,\pi) &= 1 - \cos(\pi) = 2, \\ \nabla f(1,\pi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_f(1,\pi) &= \begin{pmatrix} -\pi^2 & -\pi \\ -\pi & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der Formel aus Satz 6.5.22 erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_{2,f}(x;x_0) &= f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top H_f(x_0)(x - x_0) \\ &= 2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\pi \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y-\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\pi^2 & -\pi \\ -\pi & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\pi \end{pmatrix} \\ &= x + 1 - \frac{1}{2}(2\pi - \pi x - y)^2. \end{aligned}$$

**Aufgabe G4** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Die zweite Ableitung einer Funktion kann als Krümmung des Funktionsgraphen aufgefasst werden: Ist sie positiv, so durchläuft man eine Linkskurve, wenn man den Graphen für wachsendes $x$ abschreitet; ist sie dagegen negativ, so durchläuft man eine Rechtskurve.
Zeigen Sie, dass es für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, d.h. $f \in \mathcal{C}^2([0,3])$, mit

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{und} \quad f(3) = 3$$

eine Stelle $\xi \in (0,3)$ gibt, an der die Krümmung verschwindet, d.h. Null wird.
Dies bedeutet, dass man mindestens einmal einen Moment lang geradeaus gehen muss, wenn man drei Punkte, die auf einer Geraden liegen, mit einer „glatten“ Kurve verbinden will.

**Lösungshinweise:** Nach Voraussetzung ist $f$ stetig differenzierbar, also können wir den Mittelwertsatz der Differentialrechung (Satz 6.2.1) auf $f$ anwenden.
Für das Intervall $[0,1]$ folgt:

$$\text{es existiert ein } x_1 \in (0,1) \text{ mit } f'(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

Wendet man den Mittelwertsatz auf das Intervall $[1,3]$ an, so gilt

$$\text{es existiert ein } x_2 \in (1,3) \text{ mit } f'(x_2) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 1.$$

Da $f$ zweimal stetig differenzierbar ist, muss die erste Ableitung stetig differenzierbar sein. Wir können folglich den Mittelwertsatz auch auf $f'$ anwenden.
Für das Intervall $[x_1, x_2]$ ergibt sich:

$$\text{es existiert ein } \xi \in (x_1, x_2) \text{ mit } f''(\xi) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

Da $x_1 \in (0,1)$ und $x_2 \in (1,3)$ gilt, haben wir $x_2 - x_1 \neq 0$.

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Extremwerte) (12 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x.$$

Bestimmen und charakterisieren Sie alle kritischen Punkte von $f$.

**Lösungshinweise:** Die notwendige Bedingung für einen kritischen Punkt lautet:

$$\nabla f(x,y) = 0.$$

Wir haben:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y^2 - 12 & 12xy - 6y^2 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 6y^2 - 12 \\ 0 &= y(12x - 6y). \end{aligned}$$

Fall 1: $y = 0$. Es bleibt

$$3x^2 - 12 = 0$$

zu lösen und wir erhalten

$$x = \pm 2.$$

Fall 2: $y \neq 0$. Dann liefert die zweite Zeile

$$12x - 6y = 0 \iff x = \frac{1}{2}y.$$

Einsetzen in die erste Zeile und Umstellen nach $y$ ergibt

$$y^2 = \frac{16}{9} \implies y = \pm\frac{4}{3} \quad \text{und somit} \quad x = \pm\frac{2}{3}.$$

Die kritischen Punkte sind also

$$(2,0), \quad (-2,0), \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

Die Hessematrix von $f$ lautet:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 12y \\ 12y & 12x - 12y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x & 2y \\ 2y & 2x - 2y \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

| $x_0$ | $H_f(x_0)$ | Eigenwerte | Matrix $H_f(x_0)$ | Charakterisierung |
|---|---|---|---|---|
| $(2,0)$ | $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ | positiv $(12, 24)$ | positiv definit | Minimum |
| $(-2,0)$ | $\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$ | negativ $(-24, -12)$ | negativ definit | Maximum |
| $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ | $\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$ | positiv $(15)$ und negativ $(-19)$ | indefinit | kein Extremum (Sattelpunkt) |
| $(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ | $\begin{pmatrix} -4 & -16 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$ | positiv $(19)$ und negativ $(-15)$ | indefinit | kein Extremum (Sattelpunkt) |

**Aufgabe H2** (Taylorpolynom) (12 Punkte)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

im Entwicklungspunkt $x_0=(1,1)$.

**Lösungshinweise:**

Wir bestimmen zunächst den Gradienten und die Hessematrix von $f$.

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)&=\frac{1}{(x+y)^2}\begin{pmatrix}2y & -2x\end{pmatrix}.\\ H_f(x,y)&=\frac{1}{(x+y)^3}\begin{pmatrix}-4y & 2x-2y\\ 2x-2y & 4x\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}f(1,1)&=0,\\ \nabla f(1,1)&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\\ H_f(1,1)&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das Taylorpolynom zweiten Grades:

$$\begin{aligned}T_{2,f}(x;x_0)&=f(x_0)+\nabla f(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^\top H_f(x_0)(x-x_0)\\ &=0+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-1 & y-1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}(x-y)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}(y-1)^2\\ &=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2+x-y.\end{aligned}$$

**Aufgabe H3** (Nichtlineare Gleichungssysteme) (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\cos(v)&=u\,(\cos(u)+3)^2\\ \sin(u)&=v\,(\sin(v)+3)^2\end{aligned}$$

genau eine Lösung auf $\mathbb{R}^2$ hat.

*Hinweis:* Sie müssen die Lösung nicht bestimmen!

**Lösungshinweise:**

Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz (BFS) verwenden (vgl. Beispiel 6.5.19). Dazu muss das Gleichungssystem zunächst in eine Fixpunktgleichung der Form

$$F(x)=x$$

umgeschrieben werden. Es ist zu beachten, dass nun $x=(x_1,x_2)=(u,v)$ und $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ gilt. Wir sehen, dass $F$ wie folgt zu wählen ist:

$$F(x)=F(x_1,x_2):=\begin{pmatrix}\frac{\cos(x_2)}{(\cos(x_1)+3)^2}\\ \frac{\sin(x_1)}{(\sin(x_2)+3)^2}\end{pmatrix}.$$

Nun müssen die Voraussetzungen des BFS überprüft werden:

(1) $\mathbb{R}^2$ ist offensichtlich konvex (nicht für BFS nötig aber für den Schrankensatz 6.5.18!) und abgeschlossen.

(2) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist offensichtlich eine Selbstabbildung.

(3) Es bleibt die Kontraktionseigenschaft

$$||F(x) - F(y)||_2 \leq L||x-y||_2 \quad \text{mit} \quad L<1 \quad \text{für alle} \quad x,y \in \mathbb{R}^2$$

zu zeigen. Dazu nutzen wir den Schrankensatz 6.5.18.

Zunächst beobachten wir, dass mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$$

gilt:

$$||F(x)-F(y)||_2^2 = ||F_1(x)-F_1(y)||_2^2 + ||F_2(x)-F_2(y)||_2^2 = |F_1(x)-F_1(y)|^2 + |F_2(x)-F_2(y)|^2.$$

Nun besagt aber der Schrankensatz, dass für $i=1,2$

$$|F_i(x)-F_i(y)| \leq L_i||x-y||_2$$

gilt, falls

$$||\nabla F_i(x)||_2 \leq L_i.$$

Wir werden nun die Lipschitzkonstanten $L_i$ aus $||\nabla F_i(x)||_2 \leq L_i$ für $i=1,2$ bestimmen.

$$\nabla F_1(x) = \begin{pmatrix} 2\frac{\sin(x_1)\cos(x_2)}{(\cos(x_1)+3)^3} & -\frac{\sin(x_2)}{(\cos(x_1)+3)^2} \end{pmatrix}$$

$$||\nabla F_1(x)||_2^2 = 4\frac{\overbrace{\sin^2(x_1)}^{\leq 1}\overbrace{\cos^2(x_2)}^{\leq 1}}{\underbrace{(\cos(x_1)+3)^6}_{\geq 2}} + \frac{\overbrace{\sin^2(x_2)}^{\leq 1}}{\underbrace{(\cos(x_1)+3)^4}_{\geq 2}} \leq \frac{4}{2^6} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{8}$$

Also gilt

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

und insbesondere

$$|F_1(x)-F_1(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{8}}||x-y||_2 \quad \text{bzw.} \quad |F_1(x)-F_1(y)|^2 \leq \frac{1}{8}||x-y||_2^2.$$

$$\nabla F_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(x_1)}{(\sin(x_2)+3)^2} & -2\frac{\sin(x_1)\cos(x_2)}{(\sin(x_2)+3)^3} \end{pmatrix}$$

$$||\nabla F_2(x)||_2^2 = \frac{\overbrace{\cos^2(x_1)}^{\leq 1}}{\underbrace{(\sin(x_2)+3)^4}_{\geq 2}} + 4\frac{\overbrace{\sin^2(x_1)}^{\leq 1}\overbrace{\cos^2(x_2)}^{\leq 1}}{\underbrace{(\sin(x_2)+3)^6}_{\geq 2}} \leq \frac{4}{2^6} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{8}$$

Also gilt auch

$$L_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

und insbesondere

$$|F_2(x)-F_2(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{8}}||x-y||_2 \quad \text{bzw.} \quad |F_2(x)-F_2(y)|^2 \leq \frac{1}{8}||x-y||_2^2.$$

Damit erhalten wir:

$$||F(x)-F(y)||_2^2 = |F_1(x)-F_1(y)|^2 + |F_2(x)-F_2(y)|^2 \leq \frac{1}{8}||x-y||_2^2 + \frac{1}{8}||x-y||_2^2 = \frac{1}{4}||x-y||_2^2$$

und insbesondere

$$||F(x)-F(y)||_2 \leq \frac{1}{2}||x-y||_2.$$

Also ist $F$ eine Kontraktion. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun direkt, dass die Fixpunktgleichung – und somit auch das gegebene Gleichungssystem – genau eine Lösung auf $\mathbb{R}^2$ hat.