Formale Grundlagen der Informatik II
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \to (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p,q,r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchstens eine der Variablen p,q,r wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p,q,r,s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

Lösungsskizze:

(a) Wahrheitstafel:

p	q	r	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee (\neg q \wedge r)$	φ
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Die Formel ist also erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(b) Eine mögliche Lösung in DNF ist $\varphi := (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

(c) Eine mögliche Lösung ist $\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$.

(d) Eine mögliche Lösung ist

$$\begin{aligned}\varphi := {} & (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \\ & \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s).\end{aligned}$$

Aufgabe G2

(a) Wir versuchen, ein verteiltes System in der Aussagenlogik zu modellieren. Angenommen wir wollen n Prozesse für s Zeiteinheiten beobachten. Jeder Prozess kann sich an jedem Zeitpunkt im Zustand p, q oder r befinden. Wir führen Aussagenvariablen p_t^i, q_t^i und r_t^i ein, die auf wahr gesetzt werden, wenn Prozess i zur Zeit t im entsprechenden Zustand ist. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in AL:

- Zu jedem Zeitpunkt ist höchstens ein Prozess in Zustand q.
- Es sind immer mindestens zwei Prozesse in Zustand p.
- Wenn sich ein Prozess in Zustand q befindet, dann wechselt er nach spätestens 3 Zeiteinheiten in den Zustand r.

(b) Konstruieren Sie induktiv über n aussagenlogische Formeln

$$\varphi_n(x_n, \dots, x_0, y_n, \dots, y_0)\,,$$

welche genau dann wahr sind, wenn die in $x_n \dots x_0$ kodierte Binärzahl $\sum_i x_i 2^i$ kleiner ist als die in $y_n \dots y_0$ kodierte.

Lösungsskizze:

(a) i. $\displaystyle\bigwedge_{t \le s} \bigwedge_{i \ne k} \neg(q_t^i \wedge q_t^k)$

ii. $\displaystyle\bigwedge_{t \le s} \bigvee_{i \ne k} (p_t^i \wedge p_t^k)$

iii. $\displaystyle\bigwedge_{i \le n} \left(\bigwedge_{t \le s-3} [q_t^i \to (r_{t+1}^i \vee r_{t+2}^i \vee r_{t+3}^i)] \wedge [q_{s-2}^i \to (r_{s-1}^i \vee r_s^i)] \wedge [q_{s-1}^i \to r_s^i] \right)$

(b)

$$\begin{aligned}\varphi_0(x_0, y_0) &:= \neg x_0 \wedge y_0\,, \\ \varphi_n(x_n, \dots, x_0, y_n, \dots, y_0) &:= [\neg x_n \wedge y_n] \\ &\quad \vee [(x_n \leftrightarrow y_n) \wedge \varphi_{n-1}(x_{n-1}, \dots, x_0, y_{n-1}, \dots, y_0)]\,.\end{aligned}$$

Aufgabe G3

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \to \psi$.

(ii) Wenn $\varphi \models \psi$ und φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iii) Wenn $\varphi \models \psi$ und ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iv) $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen.

i. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

ii. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

iii. $\{\neg\psi, \psi \to \varphi\} \models \neg\varphi$

iv. $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \models \neg\psi$

Lösungsskizze:

(a) (i) Richtig.

$\Rightarrow$: Ist $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, dann gilt entweder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$. In dem ersten Fall, gilt $(\varphi \to \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$, also $\mathfrak{I} \models \varphi \to \psi$. In dem zweiten Fall, gilt auch $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, da $\varphi \models \psi$ bedeutet, dass jede Interpretation die φ wahr macht auch ψ wahr macht. Also auch in diesem Fall $(\varphi \to \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$.

$\Leftarrow$: Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \varphi$, also mit $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$. Da auch $\mathfrak{I} \models \varphi \to \psi$, muss auch gelten $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, also $\mathfrak{I} \models \psi$. Damit ist $\varphi \models \psi$ gezeigt.

(ii) Richtig. $\varphi \models \psi$ heißt, dass jede Interpretation, die φ wahr macht, auch ψ wahr macht. Machen alle Interpretationen φ wahr, dann gilt das also auch für ψ; gibt es eine Interpretation die φ wahr macht, dann ist dieselbe Interpretation ein Modell von ψ.

(iii) Falsch (in beiden Fällen). $0 \models 1$, aber es gibt keine Modelle für 0, und alle Modelle machen 1 wahr.

(iv) Falsch. Ein Gegenbeispiel: $\varphi = p, \psi = \neg p, \vartheta = 0$. Ein weiteres Gegenbeispiel ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\vartheta = p \wedge q$.

(b) i. Richtig, da für jede Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \neg(\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow \neg(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\
&\Leftrightarrow (\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{I}} = 0 \quad \text{und} \quad \psi^{\mathfrak{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1 \quad \text{und} \quad (\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \neg\varphi \wedge \neg\psi.
\end{aligned}$$

ii. Falsch. Ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I}(p) = 1$ und $\mathfrak{I}(q) = 0$, dann gilt $(\neg(\varphi \vee \psi))^{\mathfrak{I}} = 0$ und $(\neg\varphi \vee \neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$.

iii. Falsch. Ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I}(p) = 1$ und $\mathfrak{I}(q) = 0$, dann gilt $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$, $(\psi \to \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 0$.

iv. Richtig. Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \{\neg\varphi, \psi \to \varphi\}$, also $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\psi \to \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Es folgt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$. Da $(\neg\psi \vee \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$, folgt $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ wie gewünscht.

Aufgabe G4

Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \ldots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat;

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder hat.

Lösungsskizze:

(a) Für jedes $i \leq n$ muss genau eine der Variablen p_{2i-1} und p_{2i} wahr sein. Das heißt, dass man die Wahrheitswerte der p_{2i} frei wählen kann und die Werte der p_{2i-1} durch diese Wahl festgelegt sind. Also gibt es genau so viele Modelle, wie es Funktionen $\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{B}$ gibt. Dies sind 2^n.

(b) $\varphi_n \equiv \bigwedge_{i=1}^{n}[(\neg p_{2i-1} \vee \neg p_{2i}) \wedge (p_{2i-1} \vee p_{2i})]$, da $\neg(q \leftrightarrow r) \equiv (\neg q \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$.

(c) Angenommen, es gibt eine zu φ_n äquivalente Formel $\bigvee_{i=1}^{m} \psi_i$ in DNF mit $m < 2^n$ Disjunktionsgliedern. Für jedes Modell $\mathfrak{I}$ von φ_n muss es ein Disjunktionsglied ψ_k geben mit $\mathfrak{I} \models \psi_k$. Da es weniger Disjunktionsglieder als Modelle von φ_n gibt, muss es also ein Disjunktionsglied ψ_k geben, das von mindestens zwei Modellen von φ_n wahrgemacht wird.

Da ψ_k eine Konjuktion von Literalen ist und mindestens zwei Modelle hat, gibt es mindestens eine Variable p_i, so dass weder p_i noch $\neg p_i$ in ψ_k vorkommen. Wir wählen ein Modell $\mathfrak{I}$ von ψ_k. Sei $\mathfrak{I}'$ jetzt die Interpretation, die überall mit $\mathfrak{I}$ übereinstimmt, aber nur auf p_i einen anderen Wert annimmt. Dann ist $\mathfrak{I}'$ auch ein Modell von ψ_k und damit von φ_n. Aber φ_n kann nicht zwei Modelle haben, die sich nur an einer Stelle unterscheiden. Widerspruch! Also hat jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder.