

# Mathematik IV f. Elektrotechnik

# Mathematik III f. Informatik

## 6. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Stefan Ulbrich  
Dipl.-Math. Hannes Meinlschmidt  
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2013  
28. Mai 2013

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1 (Lagrange-Interpolation)

Gesucht ist ein Polynom  $p_4$  vom Grad  $n \leq 4$ , das folgender Interpolationsbedingung genügt:

$$p_4(k) = 1, \quad k = 0, \dots, 4.$$

- (a) Bestimmen Sie  $p_4$ . Die Vorgehensweise bleibt Ihnen dabei selbst überlassen. (Sinnvollerweise sollten Sie ein anderes Verfahren als in (b) wählen.)
- (b) Bestimmen Sie  $p_4$  mit Hilfe der Interpolationsformel von Lagrange.

#### Aufgabe G2 (Hinzunahme von Stützstellen)

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ .

- (a) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom  $p_2$  vom Höchstgrad 2, welches  $f$  an den Stellen  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -1$ , und  $x_2 = 1$  interpoliert, d.h. folgender Interpolationsbedingung genügt:

$$p_2(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

- (b) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom  $p_3$  vom Höchstgrad 3, welches  $f$  an den Stellen  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  und  $x_3 = 2$  interpoliert.
- (c) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom  $p_5$  vom Höchstgrad 5, welches  $f$  an den Stellen  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 1.5$  und  $x_5 = 20$  interpoliert.

#### Aufgabe G3 (Inverse Interpolation)

Es soll eine Näherung für die **Inverse Funktion** zu

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln(x)$$

bestimmt werden.

- (a) Begründen Sie, warum  $f$  invertierbar ist.
- (b) Die Funktion  $f$  wird an folgenden Stützstellen ausgewertet:  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = e$ ,  $x_2 = e^2$ . ( $e$  beschreibt hier die Eulersche Zahl, also  $\exp(1)$ .) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Auswertungen eine Näherung  $p_2$  für  $f^{-1}$ . Dabei soll  $p_2$  ein Polynom vom Höchstgrad 2 sein.
- (c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus (b) um eine näherungsweise Lösung  $\tilde{x}$  der Gleichung  $f(x) = -1$  zu erhalten. Vergleichen Sie ihr Ergebnis  $\tilde{x}$  mit der tatsächlichen Lösung  $\bar{x}$ .

---

## Hausübung

---

### Aufgabe H1 (Lagrangesches Interpolationspolynom)

Es seien folgende Daten gegeben:

$k$	0	1	2	3
$x_k$	1	2	3	4
$y_k$	-6	0	2	6

(1)

- (a) Bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom  $p_3$  vom Grad  $n \leq 3$ , das die Interpolationsbedingungen für (1) erfüllt.
- (b) Zeichnen Sie das Interpolationspolynom und die Interpolationspunkte.

### Aufgabe H2 (Lagrangesches Interpolationspolynom)

Die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  soll mit Hilfe des Lagrange-Interpolationspolynoms  $p_2$  zwischen den Stützstellen  $x_0 = \frac{1}{4}$ ,  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 4$  interpoliert werden. Vergleichen Sie die Punktauswertungen von  $f$  und  $p$  in den Punkten  $\tilde{x} = \frac{1}{2}$  und  $\hat{x} = 2$  und skizzieren Sie die Graphen von  $f$  und  $p$ .

### Aufgabe H3 (Inverse Interpolation)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \left[-1, \frac{3}{4}\right] : x \mapsto x^2 - \frac{1}{4^x}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  eine Umkehrfunktion besitzt.
- (b) Berechnen Sie ein Newtonsches Interpolationspolynom vom Grad 2 zur *Umkehrfunktion* von  $f$ . Verwenden Sie dabei die Stützstellen  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$  und  $x_2 = 1$  (von  $f$ ).