Formale Grundlagen der Informatik II
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
15. 07. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Graphen und FO)
Ein Pfad in einem Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Sequenz $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ von Knoten, so dass

$$x_i E x_{i+1}$$

für alle $i < n$. Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paaren von Knoten (x, y) einen Pfad $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ gibt, mit $x = x_0$ und $y = x_n$.

Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, so dass $\mathcal{G} \models \Gamma$ genau dann wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.

Lösung: Wir verwenden, dass man eine Formel $\varphi_n(x, y)$ definieren kann, die aussagt, dass es einen Pfad der Länge n vom Startzustand nach y gibt:

$$\varphi_n(x, y) = \exists\, x_0, \dots, x_n \,.\Big((x_0 = x) \wedge (x_n = y) \wedge \bigwedge_{i<n} x_i E x_{i+1}\Big).$$

Nehmen wir an, dass es eine Formelmenge Γ gibt in der Sprache der Graphen, so dass ein Graph $\mathcal{G}$ ein Modell von Γ ist, genau dann wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist. Wir erweiteren die Signatur mit zwei Konstanten c und d und betrachten die folgende Formelmenge in der erweiterten Sprache:

$$\Gamma_\infty = \Gamma \cup \left\{\neg\varphi_n(c, d) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Die Formelmenge Γ_∞ is unerfüllbar, da man in einem Modell $\mathcal{G}$ die Konstanten c und d nicht widerspruchsfrei interpreteren kann: einerseits soll der Zustand $d^{\mathcal{G}}$ von $c^{\mathcal{G}}$ aus erreichbar sein, da Γ erfüllt ist und der Graph $\mathcal{G}$ deshalb zusammenhängend sein muss; andererseits kann $d^{\mathcal{G}}$ nicht von $c^{\mathcal{G}}$ aus erreichbar sein: dann würde es einen Pfad von $c^{\mathcal{G}}$ nach $d^{\mathcal{G}}$ geben; dieser Pfad hat eine bestimmte Länge n, was unmöglich ist, da $\mathcal{G} \models \neg\varphi_n(c, d)$.

Also ist schon eine endliche Teilmenge von Γ_∞ unerfüllbar und insbesondere ist schon eine Teilmenge von der Form

$$\Gamma_n = \Gamma \cup \left\{\neg\varphi_k(c, d) \;\middle|\; k < n\right\}$$

unerfüllbar (da jede endliche Teilmenge in einer Γ_n enthalten ist). Aber jedes Γ_n hat ein Modell, wobei es einen Pfad von $c^{\mathcal{G}}$ nach $d^{\mathcal{G}}$ gibt, aber keinen mit einer Länge kürzer als n. (Ein Modell könnte so aussehen:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\,,$$

wobei wir c als der 0-Knoten und d als der n-Knoten interpretieren.)

Also haben wir einen Widerspruch und schliessen, dass es keine Formel Γ geben kann, die die Zusammenhang eines Graphen ausdrückt.

Aufgabe G21 (Sequenzenkalkül)
Zeigen Sie, dass die drei folgenden Quantorenregeln semantisch korrekt sind.

$$\frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\,.\,\varphi(x) \vdash \Delta}\ (\forall \mathrm{L})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\,.\,\varphi(x)}\ (\forall \mathrm{R}) \qquad \text{falls } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta, \varphi(x)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t = t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta}\ (\text{Sub-L})$$

Hier bezeichnen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$ beliebige Satzmengen, $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S)$ beliebige Formel, in der allenfalls x frei ist, $t, t' \in T_0(S)$ beliebige Terme und $c \in S$ beliebige Konstante.

Lösung: Siehe Skript, S. 28.

Aufgabe G22 (Erfüllbarkeit in endlichen Modellen)
Sei S eine endliche Signatur. Zeigen Sie, dass FINSAT(FO(S)) semientscheidbar, aber nicht entscheidbar, ist.

Hinweis: Traktenbrot Satz.

Lösung: Die Menge FINSAT(FO(S)) ist semientscheidbar, da man algorithmisch alle (bis zum Isomorphismus aufzählbar vielen) endlichen Modelle angeben kann. Nach dem Satz von Traktenbrot (S. 37 im Skript) ist diese Menge aber nicht entscheidbar.

Minitest

Aufgabe M15 ((Semi-)Entscheidbarkeit)
Entscheiden Sie für die folgenden Mengen, ob sie (semi-)entscheidbar sind:

(a) $\mathrm{SAT(AL)} := \{\varphi \in \mathrm{AL} \mid \varphi \text{ erfüllbar}\}$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(b) $\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL} \mid \varphi \models \psi\}$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(c) $\mathrm{SAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ erfüllbar}\}$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(d) $\mathrm{VAL(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ allgemeingültig}\}$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(e) $\mathrm{UNSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ unerfüllbar}\}$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(f) $\mathrm{FINSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ hat ein endliches Modell}\}$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

(g) $\mathrm{INF(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$
☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

Lösung:

(a) $\mathrm{SAT(AL)} := \{\varphi \in \mathrm{AL} \mid \varphi \text{ erfüllbar}\}$

⊠ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

Begründung: Zugehörigkeit zu dieser Menge kann man mit Wahrheitstafeln entscheiden.

(b) $\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL} \mid \varphi \models \psi\}$

⊠ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

Begründung: Zugehörigkeit zu dieser Menge kann man mit Wahrheitstafeln entscheiden.

(c) $\mathrm{SAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ erfüllbar}\}$

☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ⊠ nicht semientscheidbar

Begründung: Diese Menge ist nicht entscheidbar (Satz von Church und Turing, S. 37 im Skript). $L \setminus \mathrm{SAT(FO)}$ besteht aus den Sätzen φ, die nicht erfüllbar sind, oder, anders gesagt, aus den Sätzen φ, für die $\neg\varphi$ allgemeingültig ist. Das Komplement von SAT(FO) ist also wegen des Vollständigkeitssatzes rekursiv aufzählbar. Da eine rekursiv aufzählbare Menge, deren Komplement auch rekursiv aufzählbar ist, sogar entscheidbar ist, kann SAT(FO) also nicht rekursiv aufzählbar sein.

(d) $\mathrm{VAL(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ allgemeingültig}\}$

☐ entscheidbar ⊠ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

Begründung: Wegen des Kompaktheitssatzes ist diese Menge rekursiv aufzählbar. Sie ist nicht entscheidbar, da eine Formel φ erfüllbar ist, genau dann wenn $\neg\varphi$ nicht allgemeingültig ist. Erfüllbarkeit ist für FO aber nicht entscheidbar.

(e) $\mathrm{UNSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

☐ entscheidbar ⊠ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

Begründung: Diese Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar. (Eine Formel φ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\neg\varphi$ allgemeingültig ist, also ist diese Menge nach (d) rekursiv aufzählbar. Sie ist nach (c) nicht entscheidbar, da eine Formel unerfüllbar ist, genau dann wenn sie nicht erfüllbar ist.)

(f) $\mathrm{FINSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ hat ein endliches Modell}\}$

☐ entscheidbar ⊠ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ☐ nicht semientscheidbar

Begründung: Diese Menge rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar. (Sie ist rekursiv aufzählbar, da man systematisch alle endlichen Modelle durchsuchen kann. Nach dem Satz von Traktenbrot (S. 37 im Skript) ist diese Menge aber nicht entscheidbar.)

(g) $\mathrm{INF(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \varphi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$

☐ entscheidbar ☐ semientscheidbar, aber nicht entscheidbar ⊠ nicht semientscheidbar

Begründung: Diese Menge ist nicht rekursiv aufzählbar und damit auch nicht entscheidbar. (Wäre Sie rekursiv aufzählbar, dann wäre $\mathrm{SAT(FO)} = \mathrm{FINSAT(FO)} \cup \mathrm{INF(FO)}$ das auch.) (Das Komplement dieser Menge besteht aus den Sätzen φ, die entweder gar keine Modelle haben oder ein endliches Modell haben: also ist das Komplement nach (e) und (f) rekursiv aufzählbar.)