Hausübung

Aufgabe H5.1 (Kompaktheit)

(12 Punkte)

Zeigen Sie, dass es über der leeren Signatur $\sigma=\varnothing$ keine Satzmenge $\Phi\subseteq FO_0(\varnothing)$ gibt, für die

$$\mathcal{A} \models \Phi \Leftrightarrow A \text{ ist endlich.}$$

Lösung: Wir setzen

$$\varphi_{\geq k} := \exists x_1 \dots \exists x_k \bigwedge_{i \neq j} \neg (x_i = x_j)$$

für $k \geq 1$. Damit gilt für eine Struktur \mathcal{A} , dass $\mathcal{A} \models \varphi_{\geq k}$ genau dann, wenn $|A| \geq k$. Die Menge

$$\Phi \cup \{\varphi_k : k \ge 1\}$$

ist somit unerfüllbar, und aufgrund des Kompaktheitssatzes gibt es bereits eine endlich Teilmenge dieser Menge, die ebenfalls unerfüllbar ist. Diese kann aber nur endlich viele der $\varphi_{>k}$ enthalten und ist damit eine Teilmenge von

$$\Phi \cup \{\varphi_{\geq 1}, \ldots, \varphi_{\geq n}\}$$

für ein $n \ge 1$. Die Menge $\{1, \dots, n+1\}$, aufgefasst als \emptyset -Struktur, ist jedoch ein Modell dieser Formelmenge.

Aufgabe H5.2 (Resolutionskalkül, typische Klausuraufgabe)

(12 Punkte)

Im Folgenden seien Q, R und S Relationssymbole und f ein Funktionssymbol passender Stelligkeit.

(i) Wir betrachten die Formelmenge $\Phi_1 := \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \}$, wobei

$$\varphi_1 := \forall x \forall y \forall z (Rxy \vee Rxz \vee Ryz),$$

$$\varphi_2 := \forall x \forall y \forall z ((Rxy \land Ryz) \rightarrow Rxz),$$

$$\varphi_3 := \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Rfxfy) \text{ und}$$

$$\varphi_4 := \forall x \neg Rxffx.$$

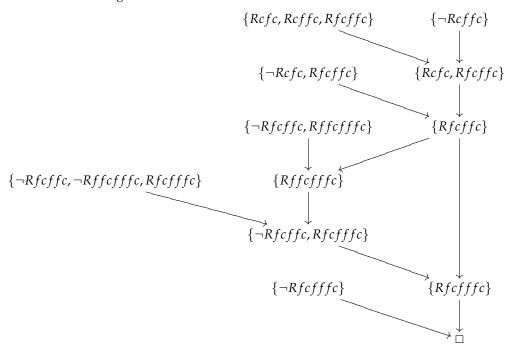
Machen Sie sich klar, dass und warum Φ_1 unerfüllbar ist. Weisen Sie dann ausgehend von Ihren Überlegungen mittels Grundinstanzen-Resolution formal nach, dass Φ_1 unerfüllbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\Phi_2 := \{ \forall x \forall y ((Qy \land Rxy) \rightarrow Sy), \forall x \forall y ((Sx \land Rxy) \rightarrow \neg Qy), \forall x \exists y (Rxy \land Qy) \}$$

Lösung:

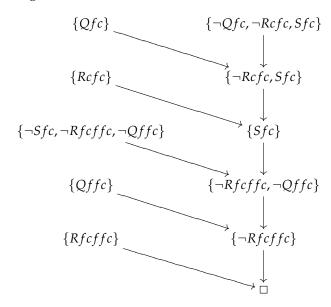
(i) (2 Punkte) Wir betrachten die Terme c, fc und ffc. Wegen φ_1 muss mindestens eins der Paare (c, fc), (fc, ffc) und (c, ffc) in $R^{\mathcal{H}}$ sein. Wegen φ_4 is (c, ffc) nicht in $R^{\mathcal{H}}$. Mit φ_3 folgt, dass $(fc, ffc) \in R^{\mathcal{H}}$, und (wieder mit φ_3) auch $(ffc, fffc) \in R^{\mathcal{H}}$. Mit φ_2 folgt nun $(fc, fffc) \in R^{\mathcal{H}}$, im Widerspruch zu φ_4 . (4 Punkte) Als GI-Resolution ergibt sich:



(ii) (2 Punkte) Wir führen eine Zeugenfunktion f für den Existenzquantor in der dritten Formel ein und erhalten $\forall x (Rxfx \land Qfx)$. Damit erhalten wir folgende Klauseln:

$$\{\neg Qy, \neg Rxy, Sy\}, \{\neg Sx, \neg Rxy, \neg Qy\}, \{Rxfx\}, \{Qfx\}$$

(4 Punkte) Als GI-Resolution ergibt sich nun:



Aufgabe H5.3 (Sequenzenkalkül, alte Klausuraufgabe)

(12 Punkte)

Sei $\varphi = \varphi(x)$ eine beliebige FO-Formel (mit x als einziger freier Variable) und P ein einstelliges Relationssymbol.

(a) Weisen Sie nach, dass (unabhängig von φ) die folgende Sequenz nicht allgemeingültig ist:

$$\forall x (Px \to \varphi(x)) \vdash \exists x (Px \land \varphi(x))$$

(Hier und im Folgenden ist das Symbol " \rightarrow " wie üblich zu eliminieren.)

(b) Argumentieren Sie semantisch, dass die folgende Sequenz allgemeingültig ist:

$$\forall x (Px \to \varphi(x)) \vdash \forall x \neg Px, \exists x (Px \land \varphi(x))$$

(c) Welche der folgenden "Varianten" der Sequenz aus (b) sind allgemeingültig, welche nicht? Es ist keine Begründung verlangt.

			allggültig	nicht allggültig
		$\forall x \neg Px, \ \exists x \ (Px \land \varphi(x))$		
$\neg Pc \lor \varphi[c/x]$	\vdash	$\neg Pc$, $\exists x (Px \land \varphi(x))$		
$\neg Pc \lor \varphi[c/x]$	\vdash	$\forall x \neg Px$, $Pc \wedge \varphi[c/x]$		
$\forall x (\neg Px \lor \phi(x))$	\vdash	$\neg Pc$, $\exists x (Px \land \varphi(x))$		

(d) Leiten Sie die Sequenz aus (b) im Sequenzenkalkül ab.

Lösung:

(a) (2 Punkte) Sei \mathcal{A} eine Struktur, in der $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$ gilt. Dann gilt, unabhängig von der gewählten Formel $\varphi(x)$, dass

$$A \models \forall x (Px \rightarrow \varphi(x)) \text{ und } A \not\models \exists x (Px \land \varphi(x)),$$

die Sequenz ist also nicht allgemeingültig.

(b) (2 Punkte) Sei \mathcal{A} ein Modell der Formel auf der linken Seite der Sequenz, also $\mathcal{A} \models \forall x \left(Px \to \varphi(x) \right)$. Wir müssen zeigen, dass \mathcal{A} mindestens eine der beiden Formeln auf der rechten Seite erfüllt. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle: Falls $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$, dann gilt $\mathcal{A} \models \forall x \neg Px$. Anderenfalls gibt es ein $a \in P^{\mathcal{A}}$, und wegen $\mathcal{A} \models \forall x \left(Px \to \varphi(x) \right)$ gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi[a].$$

Damit gilt auch $\mathcal{A} \models \exists x (Px \land \varphi(x)).$

(c) (4 Punkte)

			allggültig	nicht allggültig
		$\forall x \neg Px, \ \exists x \ (Px \land \varphi(x))$		
$\neg Pc \lor \varphi[c/x]$	\vdash	$\neg Pc$, $\exists x (Px \land \varphi(x))$		
$\neg Pc \lor \varphi[c/x]$	\vdash	$\forall x \neg Px$, $Pc \wedge \varphi[c/x]$		
$\forall x (\neg Px \lor \phi(x))$	\vdash	$\neg Pc$, $\exists x (Px \land \varphi(x))$		

(d) (4 Punkte)

$$\frac{\frac{\varphi[c/x], Pc \vdash Pc}{Ax} \frac{Ax}{\varphi[c/x], Pc \vdash \varphi[c/x]} Ax}{\frac{\varphi[c/x], Pc \vdash Pc \land \varphi[c/x]}{\varphi[c/x], Pc \vdash Bx (Px \land \varphi(x))}}{\frac{\varphi[c/x], Pc \vdash Bx (Px \land \varphi(x))}{\varphi[c/x] \vdash \neg Pc, \exists x (Px \land \varphi(x))}} \frac{\exists R}{\neg R}}{\frac{\neg Pc \lor \varphi[c/x] \vdash \neg Pc, \exists x (Px \land \varphi(x))}{\forall x (\neg Px \lor \varphi(x)) \vdash \neg Pc, \exists x (Px \land \varphi(x))}}{\forall x (\neg Px \lor \varphi(x)) \vdash \forall x \neg Px, \exists x (Px \land \varphi(x))}} \forall L}$$