Technische Universität Darmstadt
Fachgebiet Theoretische Informatik

Prof. Johannes Buchmann
Nabil Alkeilani Alkadri
Nina Bindel
Patrick Struck

Algorithmen und Datenstrukturen

SoSe 2018

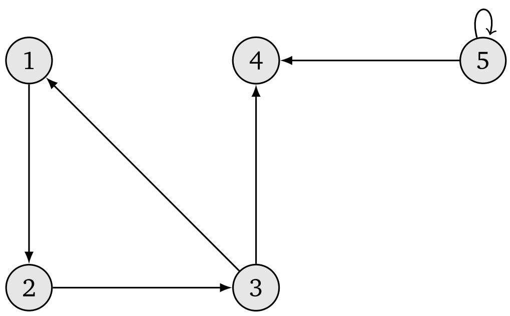
7. Lösungsblatt — 28.05.2018
v1.0

P1 Graphen

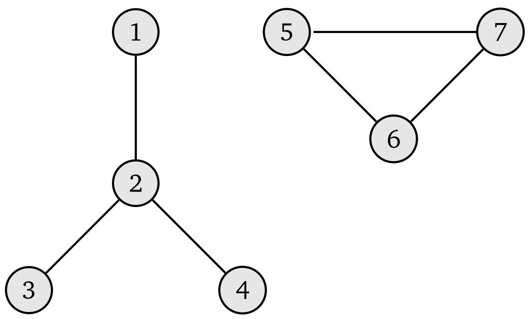
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Der Ausgangsgrad eines Knoten $u \in V$ ist die Anzahl der Knoten $v \in V$, so dass $(u, v) \in E$ ist. Analog ist der Eingangsgrad eines Knoten $u \in V$ die Anzahl der Knoten v, so dass $(v, u) \in E$ ist.

Gegeben sind ein gerichteter Graph G1 und ein ungerichteter Graph G2.

Gerichteter Graph G_1:



Ungerichteter Graph G_2:



(a) Bestimmen Sie den Eingangs- und Ausgangsgrad aller Knoten von G_1.

(a) Geben Sie die Darstellung der beiden Graphen als Adjazenzliste und als Adjazenzmatrix an.

(c) Ist G_2 ein Wald bzw. ein Baum? Wenn nicht, welche Kanten muss man hinzufügen oder entfernen, damit G_2 ein Wald bzw. Baum wird?

(d) Wie viele Kanten muss man mindestens aus G_2 entfernen, damit ein bipartiter Graph entsteht?

(e) Wie viele Kanten muss man zu G_2 hinzufügen. damit ein vollständiger Graph entsteht.

Lösung.

a) Knoten: (Eingangs-;Ausgangsgrad)
1: (1;1), 2: (1;1), 3: (1;2), 4: (2;0), 5: (1;2)

b) Adjazenzlisten:

G_1

1:	{2}
2:	{3}
3:	{1,4}
4:	{}
5:	{4,5}

G_2

1	{2}
2	{1,3,4}
3	{2}
4	{2}
5	{6,7}
6	{5,7}
7	{5,6}

Adjazenzmatrizen: $G_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad G_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

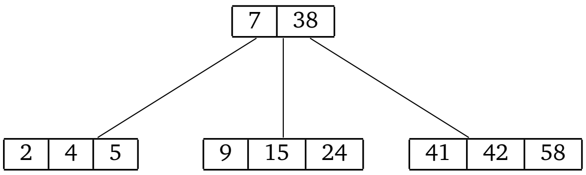
c) G_2 ist nicht azyklisch, also ist G_2 weder ein Wald noch ein Baum. Damit G_2 ein Wald wird, muss man eine Kante aus dem Zyklus (5,6,7) entfernen, z.B. die Kante 5, 6. Damit G2 zu einem Baum wird, muss man zusätzlich eine Kante hinzufügen, damit G2 zusammenhängend wird. Eine Möglichkeit hierfür ist die Kante 1, 5.

d) Da alle Wälder auch bipartit sind, muss man hierfür auch nur eine Kante aus dem Zyklus (5,6,7) entfernen, also bspw. die Kante 5,6. Somit hat man einen bipartiten Graphen.

e) Bei einem vollständigen ungerichteten Graphen ist jeder der $|V|$ Knoten mit den $|V|-1$ anderen Knoten durch eine Kante verbunden. Da eine Kante von u nach v und von v nach u dasselbe ist, teilen wir die gesamten Verbindungen noch durch 2. Damit ergeben sich insgesamt $|V| \cdot (|V|-1)/2$ Kanten. In unserem Fall haben wir 7 Knoten, also $|V| = 7$ und somit 21 Kanten insgesamt. Es fehlen also noch $21 - 6 = 15$ Kanten.

P2 B-Baum: Einfügen

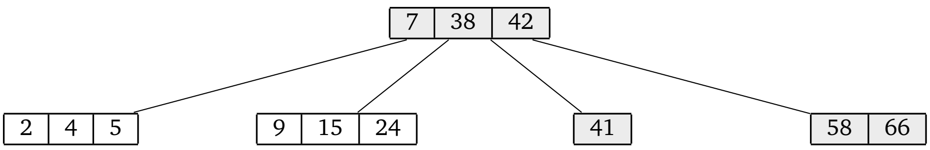
Es ist folgender B-Baum mit Minimalgrad $t = 2$ gegeben.



Fügen Sie folgende Schlüssel in gegebener Reihenfolge ein und zeichnen Sie jeweils den neuen Baum nach jeder dieser Einfügeoperationen: 66, 45, 53, 37.

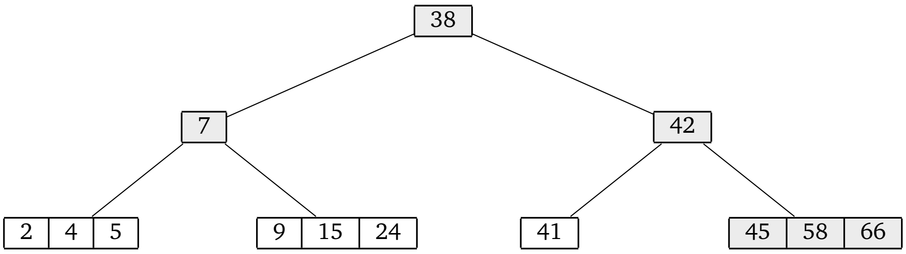
Lösung.

B-Baum nach Einfügen von 66:



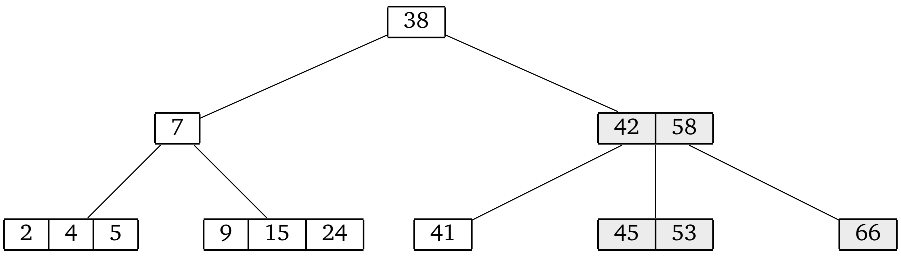
Wenn man den Schlüssel 66 einfügt, würde er in das rechteste Kindknoten der Wurzel kommen, welcher die Knoten 41, 42 und 58 enthält. Da dieser aber bereits $2t - 1 = 3$ Schlüssel enthält, passt da kein weiterer Schlüssel rein. Also wird dieser Knoten aufgeteilt und der mittlere Schlüssel des ursprünglichen Knotens (= 42) wird nach oben geschoben. Er ist nun Teil der Wurzel und es sind zwei neue Knoten entstanden die zunächst jeweils ein Schlüssel enthalten. Das ist das Kind, das sich links von der 42 befindet und das Kind rechts von der 41. Nun kann die 66 in dieses rechte Kind, rechts von der 58 eingefügt werden und kein Knoten hat mehr als $2t - 1 = 3$

B-Baum nach Einfügen von 45:



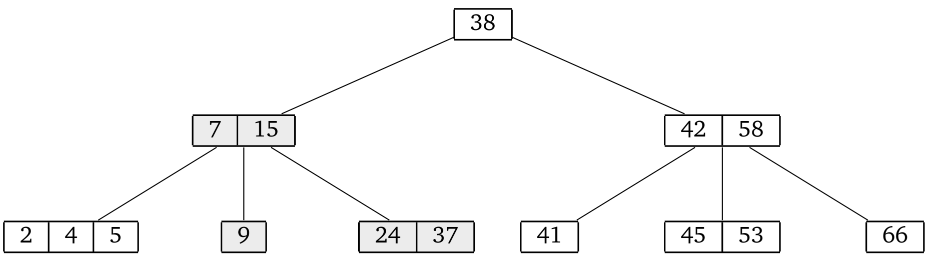
Der Schlüssel 45 wird in das rechteste Blatt eingefügt vor den Schlüssel 58. Vor dem Einfügen wird geprüft, ob die Wurzel bereits voll ist, also $2t-1=3$ Schlüssel enthält und da dies der Fall ist wird die Wurzel aufgeteilt. Der mittlere Schlüssel (= 38) wird die neue Wurzel des B-Baumes und die Höhe des Baums erhöht sich gleichzeitig um eins. Dieser Schritt erleichtert spätere Einfügeoperationen. Nun kann die 45 an genannter Stelle eingefügt werden.

B-Baum nach Einfügen von 53:



Schlüssel 53 würde nach einer Einfügeoperation in den rechtesten Blattknoten zwischen 45 und 58 kommen, da aber dieser Knoten bereits voll ist und $2t-1=3$ Schlüssel enthält, würde das zu einem nicht korrekten B-Baum führen. Also müssen wir nun diesen Blattknoten aufteilen und der mittlere Schlüssel wandert hoch in den Elterknoten dieses Blattes. Nun haben wir im Elter die Schlüssel 42 und 58 stehen und zwischen diesen bildet sich ein neuer Knoten der den linken Schlüssel des aufgeteilten Knotens enthält (= 45) und den neu eingefügten Schlüssel 53, der dessen Nachfolger ist. Im rechtesten Blatt befindet sich nun nur noch der Schlüssel 66.

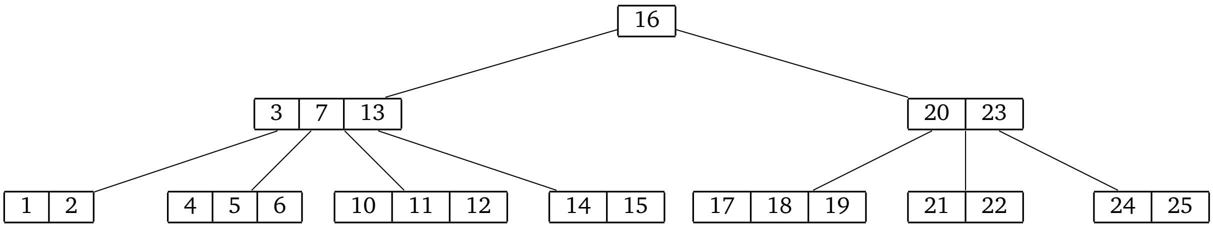
B-Baum nach Einfügen von 37:



Hier haben wir wieder denselben Fall wie in der Einfügeoperation davor. Der Schlüssel 37 müsste rechts von der 24 eingefügt werden, was dann aber dazu führt, dass der Knoten zu viele Schlüssel enthält. Daher wird vor dem Einfügen der Knoten aufgeteilt und die 15 wandert nach oben in den Elterknoten. Somit hat dieser Elter die Schlüssel 7 und 15 und ein neues Blatt entsteht zwischen diesen beiden Schlüsseln, welches die 9 enthält. Rechts von der 15 enthält das Blatt nun die 24 und den neu eingefügten Schlüssel 37.

P3 B-Baum: Löschen

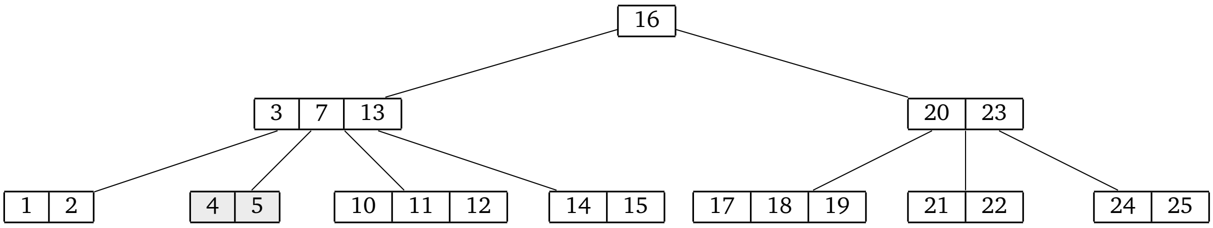
Es ist folgender B-Baum mit Minimalgrad $t=3$ gegeben.



Löschen Sie folgende Schlüssel in gegebener Reihenfolge ein und zeichnen Sie jeweils den neuen Baum nach jeder dieser Löschoperationen: 6, 13, 7, 4, 2.

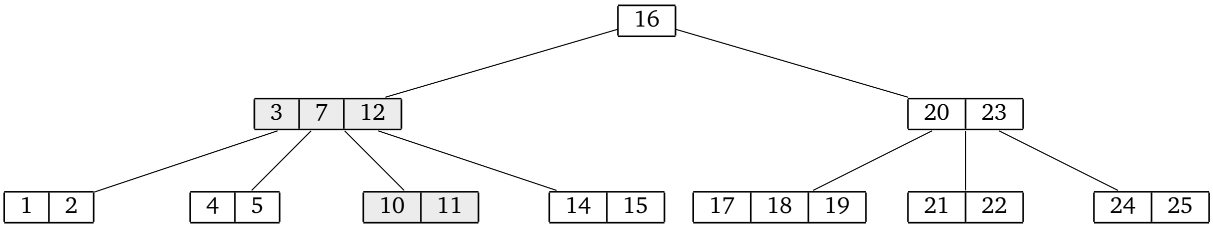
Lösung.

B-Baum nach dem Löschen von 6:



Hier tritt Fall 1 ein und der Schlüssel 6 kann einfach gelöscht werden. Es verbleiben $t-1=2$ Schlüssel im Blatt.

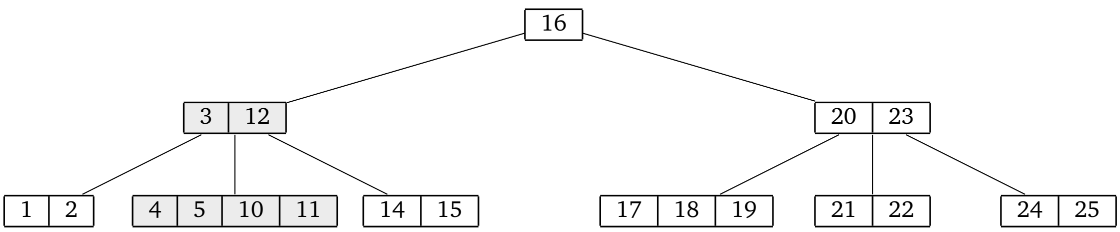
B-Baum nach dem Löschen von 13:



Hier tritt Fall 2a ein. Der Vorgänger von 13 im linken Teilbaum ist die 12. Schlüssel 12 wird nach oben geschoben und nimmt den Platz von 13 ein nachdem 13 gelöscht wird. Das funktioniert nur wenn das Blatt des Vorgängers mindestens $t=3$ Schlüssel hat damit nach dem Hochschieben eines Schlüssels noch $t-1=2$ Schlüssel verbleiben und wir somit einen korrekten B-Baum erhalten.

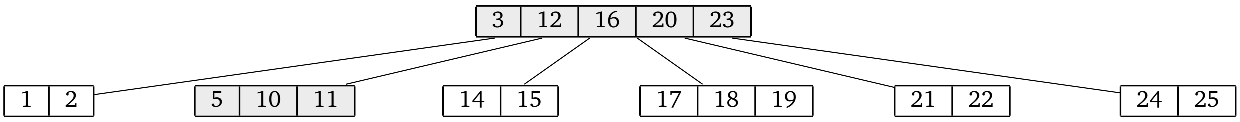
(Falls der Vorgängerknoten von 13 weniger als $t=3$ Schlüssel hätte, würden wir analog prüfen, ob der Nachfolgerknoten genügend Schlüssel hat (auch $t=3$) um den direkten Nachfolger von 13 hochschieben zu können und dass noch mindestens $t-1=2$ Schlüssel in diesen Knoten verbleiben. Da aber bereits Fall 2a eingetreten ist, muss dieser Fall in dem Beispiel nicht betrachtet werden.)

B-Baum nach dem Löschen von 7:



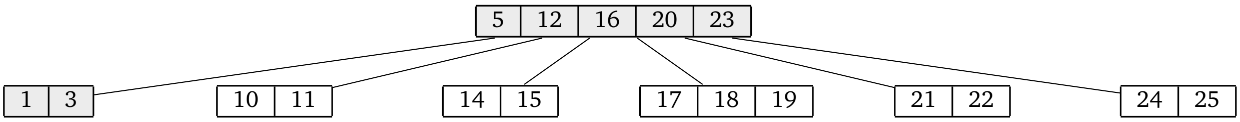
Hier tritt Fall 2c auf, da sowohl das Blatt des Vorgängers als auch das Blatt des Nachfolgers von 7 nur $t-1=2$ Schlüssel besitzen. In diesem Fall werden die beiden Blätter miteinander verschmolzen und die 7 kann gelöscht werden.

B-Baum nach dem Löschen von 4:



Hier handelt es sich um Fall 3b, da der Schlüssel 4 in einem Blatt liegt und beim rekursiven Durchlauf des Baums zu 4 wird über den inneren Knoten gelaufen der 3, 12 enthält. Dieser Knoten hat nur $t-1=2$ Schlüssel und es wird vorsorglich erweitert. Da seine Geschwister ebenfalls nur $t-1=2$ Schlüssel haben, kann nichts verschoben werden und die beiden Geschwister werden zusammen mit der Wurzel zu einer neuen Wurzel verschmolzen.

B-Baum nach dem Löschen von 2:



Hier tritt nun der Fall 3a ein, da das Blatt in dem die 2 ist nur $t-1=2$ Schlüssel hat und somit nach dem Löschen die B-Baum Eigenschaft verletzen würde. Ein direkter Geschwister von diesem Blatt, nämlich der rechte, hat jedoch $t=3$ Schlüssel und es findet eine Verschiebung statt. Die 5 vom Geschwister-Blatt wandert hoch in das Elter-Blatt und die 5 aus dem Elter-Blatt wandert runter und nimmt die Position von 2 ein, womit die 2 sicher entfernt werden kann.

H1 Graphentheorie: Bäume

Beweisen Sie folgende Aussage:

Ein Baum mit n Knoten hat immer genau $n-1$ Kanten.

(Hinweis: Vollständige Induktion)

Lösung.

Induktionsanfang: $n=1$:

Der Baum für $n=1$ hat nur einen Knoten und somit keine Kanten, also $0=1-1=n-1$ Kanten.

Induktionsvoraussetzung: Jeder Baum mit $m=n$ Knoten hat genau $m-1$ Kanten.

Induktionsbehauptung:

$m \to m+1$: Ein Baum mit $m+1$ Knoten hat genau m Kanten.

Beweis der Induktionsbehauptung:

Es sei $G=(V,E)$ ein beliebiger Baum mit $m+1$ Knoten.

Man wählt nun eine beliebige Kante $e \in E$ und bezeichnet $G' = (V, E \backslash \{e\})$ als den Graphen G ohne die Kante e.

Da G ein Baum ist besteht G' somit aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, die wir im Folgenden als Z_1 und Z_2 bezeichnen. Jeder dieser beiden Zusammenhangskomponenten ist für sich alleine ein Baum mit höchstens m Kanten, da durch das Entfernen von e in beiden Zusammenhangskomponenten jeweils mindestens ein Knoten liegt.

Wir definieren nun die Anzahl der Knoten in diesen beiden Teilbäumen wie folgt: $m_1 :=$ Anzahl Knoten in Z_1 und $m_2 :=$ Anzahl Knoten in Z_2.

Da jeder Knoten von G in genau einem der beiden Zusammenhangskomponenten liegt gilt: $m_1 + m_2 = m + 1$.

Mit Anwendung der Induktionsvoraussetzung gilt: Z_1 hat $m_1 - 1$ Kanten und Z_2 hat $m_2 - 1$ Kanten.

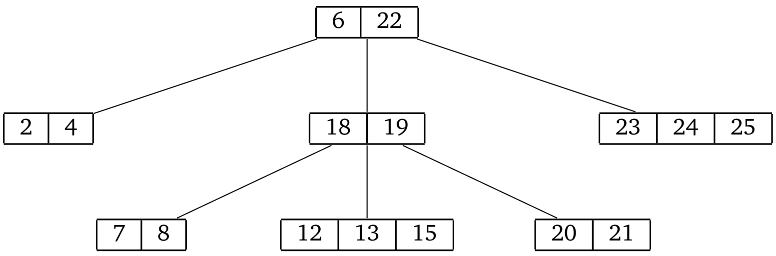
Für die Gesamtzahl der Kanten addieren wir die Anzahl der beiden Zusammenhangskomponenten Z_1 und Z_2 und die der Kante e $(= 1)$ und erhalten also:

$$\begin{aligned}|E| &= (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + 1\\ &= m_1 + m_2 - 1\\ &= m + 1 - 1\\ &= m\end{aligned}$$

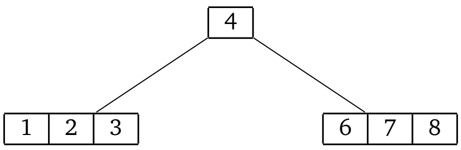
H2 B-Baum Bedingung

Welche der folgenden fünf Bäume i) - v) sind korrekte B-Bäume für den Minimalgrad $t = 3$? Falls eine B-Baum-Bedingung verletzt wird, erklären Sie kurz in 1-2 Sätzen welche Eigenschaft nicht erfüllt wird, die dazu führt, dass kein korrekter B-Baum dargestellt ist.

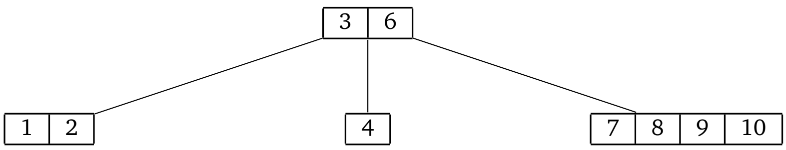
i)



ii)



iii)

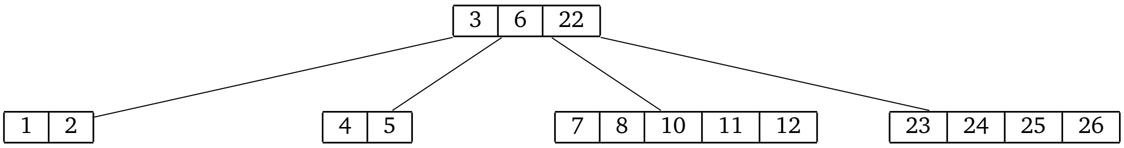


Lösung.

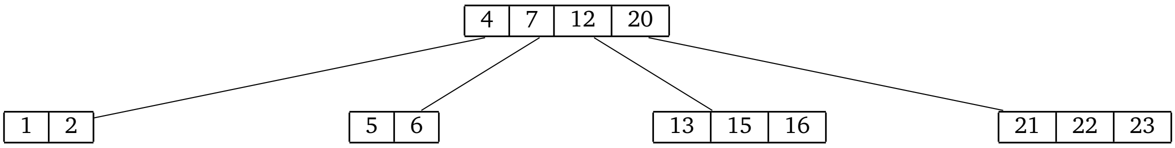
i) Kein erlaubter B-Baum, da er bezüglich der Höhe nicht balanciert ist. Alle Blätter müssen dieselbe Tiefe besitzen, was nicht der Fall ist (bspw.: Blatt 2,4 und Blatt 7,8 haben unterschiedliche Höhe).

ii) Das ist ein korrekter B-Baum. Die Wurzel darf als einziger Knoten nur ein Element enthalten.

iv)



v)



iii) Kein korrekter B-Baum, da das Blatt mit dem Schlüssel 4 nur dieses eine Element enthält, also weniger als die Mindestanzahl von 2.

iv) Dieser B-Baum ist korrekt und so erlaubt.

v) Kein korrekter B-Baum, da es kein Blatt gibt, auf das verwiesen wird von dem Elternpaar 7,12.