Aussagenlogik
& Prädikatenlogik (FGdI II)
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

SoSe 2015/16
13. April 2016

Gruppenübung

Aufgabe G1.1 (Semantik der Aussagenlogik)
Betrachten Sie die folgenden Formeln aus AL($\{p,q,r\}$):

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= (\neg q \vee r) \rightarrow p,\\
\varphi_2 &:= (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\\
\varphi_3 &:= (q \vee (r \rightarrow p))\\
\varphi_4 &:= \varphi_1 \wedge \neg \varphi_3\\
\varphi_5 &:= (r \rightarrow p) \rightarrow \varphi_3
\end{aligned}$$

Welcher dieser Formeln sind erfüllbar? Welche sind allgemeingültig? Welche Implikationen $\varphi_i \models \varphi_j$ gelten?

Aufgabe G1.2 (Boolesche Junktoren)
Wie viele verschiedene zweistellige Boolesche Junktoren, d.h. Funktionen $*: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, gibt es? Welche davon sind

(a) monoton, d.h. wenn $p_1 \leq p_2$ und $q_1 \leq q_2$, dann auch $(p_1 * q_1) \leq (p_2 * q_2)$?

(b) kommutativ, d.h. $p * q = q * p$?

(c) einstimming, d.h. $p * p = p$ für $p \in \mathbb{B}$?

(d) Gruppen-Verknüpfungen, d.h. $(\mathbb{B}, *, e)$ ist eine Gruppe bei geeigneter Wahl von $e \in \mathbb{B}$?

(e) dual zueinander? Dabei sind $*_1$ und $*_2$ dual zueinander, wenn

$$\neg((\neg p) *_1 (\neg q)) = p *_2 q$$

für alle $p, q \in \mathbb{B}$ gilt.

(f) selbstdual, d.h. $\neg((\neg p) * (\neg q)) = p * q$.

Aufgabe G1.3 (Potenzmengenalgebren)
In der Vorlesung „Automaten, Formale Sprachen und Entscheidbarkeit" haben wir unter anderem Boolesche Algebren kennengelernt, also Strukturen $\mathcal{B} = (B, \cdot, +, ', 0, 1)$ mit zwei binären Operationen $\cdot$ und $+$ und einer unären Operation $'$, die folgenden Bedingungen genügen:

(i) $\cdot$ und $+$ sind assoziativ und kommutativ.

(ii) Es gelten die Distributivgesetze $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ für alle $a, b, c \in B$.

(iii) Für alle $b \in B$ gilt $b \cdot 1 = b + 0 = b$.

(iv) $1 \neq 0$ und für alle $b \in B$ gilt $b \cdot b' = 0$ und $b + b' = 1$.

Als Beispiele für Boolesche Algebren haben wir Potenzmengenalgebren kennengelernt:
Für eine Menge $M \neq \emptyset$ ist $\mathcal{P}(M) := (\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \bar{\ }, \emptyset, M)$ eine Boolesche Algebra.
Ein weiteres Beispiel ist die Boolesche Algebra der Aussagenlogik $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass für $|M| = 1$ die Booleschen Algebren $\mathcal{P}(M)$ und $\mathbb{B}$ isomorph sind.

(b) Sei $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ eine endliche Menge mit n Elementen. Zeigen Sie, dass die Booleschen Algebren $\mathcal{P}(M)$ und $\mathbb{B}^n$ isomorph sind. *Hinweis:* Die folgende Abbildung ist ein natürlicher Isomorphismus:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(M) &\to \mathbb{B}^n \\ X &\mapsto (p_1, \ldots, p_n), \text{wobei } p_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } m_i \notin X \\ 1 & \text{falls } m_i \in X. \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Benutzen Sie die Isomorphie aus (b), um die de Morgan'schen Regeln $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ und $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ für $X, Y \subseteq M$ in $\mathcal{P}(M)$ für endliche M zu beweisen.

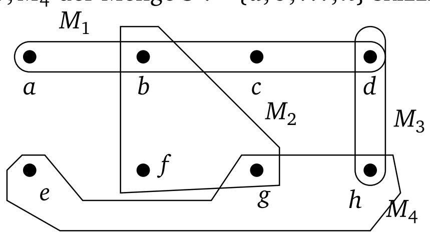
Hausübung

Hinweise zur Hausübung

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu dieser Hausübung in der **Übung am 27.04.2016** ab (**Name, Nummer der Übungsgruppe und Matrikelnummer** nicht vergessen). Wir unterstützen ausdrücklich das gemeinsame Arbeiten und Diskutieren in Gruppen, die gefundenen Lösungen sollte aber jeder selbst ausformulieren. Es darf also pro Abgabe nur ein Name auf dem Blatt stehen.

Aufgabe H1.1 (Mengen) (12 Punkte)

Im folgenden sind vier Teilmengen $M_1, \dots, M_4$ der Menge $S := \{a, b, \dots, h\}$ skizziert:



(a) Stellen Sie die Menge $\{b, g, h\}$ durch $\cap, \cup, \bar{\ }$ aus den Mengen M_1 bis M_4 dar.

(b) Geben Sie eine Menge $X \subseteq S$ an, die nicht aus M_1 bis M_4 dargestellt werden kann. Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass $X \subseteq S$ dargestellt werden kann.

(c) Wie viele verschiedene Mengen $X \subseteq \{a, \dots, h\}$ lassen sich aus M_1 bis M_4 darstellen? Wie lassen sich diese systematisch darstellen?

Aufgabe H1.2 (Boolesche Algebren) (12 Punkte)

Sei $\mathcal{V}$ eine Variablenmenge. Wir ordnen jeder aussagenlogischen Formel $\varphi \in \mathrm{AL}(\mathcal{V})$ wie folgt einen Term $[\varphi]$ in der Signatur der Booleschen Algebren mit $\cdot$, $+$, $'$, 0 und 1 zu:

$$\begin{aligned}
[0] &:= 0, \\
[1] &:= 1, \\
[p] &:= p \text{ für } p \in \mathcal{V}, \\
[(\varphi \vee \psi)] &:= ([\varphi] + [\psi]), \\
[(\varphi \wedge \psi)] &:= ([\varphi] \cdot [\psi]), \text{ und} \\
[\neg\varphi] &:= [\varphi]'.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass für zwei Formeln $\varphi, \psi \in AL(\mathcal{V})$ gilt:

$$\varphi \equiv \psi \quad \Longleftrightarrow \quad [\varphi] = [\psi] \text{ in } \mathbb{B} \text{ für alle Belegungen } \mathfrak{I} : \mathcal{V} \to \mathbb{B} \tag{1}$$

(*Hinweis:* Hier und im Folgenden ist mit „$[\varphi] = [\psi]$ in $\mathbb{B}$ für alle Belegungen $\mathfrak{I}$" nicht gemeint, dass $[\varphi]$ und $[\psi]$ als Terme syntaktisch gleich sind, sondern dass die durch sie definierten Funktionen $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ identisch sind, wobei n die Anzahl der in $[\varphi]$ und $[\psi]$ vorkommenden Variablen ist.)

(b) Tatsächlich lässt sich (1) verallgemeinern zu

$$\varphi \equiv \psi \quad \Longleftrightarrow \quad [\varphi] = [\psi] \text{ in } \textit{allen} \text{ Booleschen Algebren } \mathcal{B} \text{ für alle } \mathfrak{I} : \mathcal{V} \to \mathcal{B}.$$

Zeigen Sie dies für alle Potenzmengenalgebren endlicher Mengen.

Hinweis: Sie können das Ergebnis aus G1.3(b) benutzen.

(c) Welche Relation zwischen aussagenlogischen Formeln entspricht der Teilmengenrelation $\subseteq$ in Potenzmengenalgebren?

Aufgabe H1.3 (Vollständige Systeme von Junktoren) (12 Punkte)

Führen Sie die in der Gruppenübung G2 begonnene Untersuchung der zweistelligen Booleschen Junktoren wie folgt fort:

(a) Zeigen Sie, dass wenn $\{*\}$ für einen zweistelligen Booleschen Junktor $*$ ein vollständiges System von Junktoren bildet, dann auch $\{\bar{*}\}$, wobei $\bar{*}$ wie in G1.2(e) der zu $*$ duale Junktor ist (sowohl mit Konstanten 0, 1 als auch ohne).

(b) Welche der folgenden Junktoren bilden

i. mit Konstanten $0, 1$ bzw.

ii. auch ohne $0, 1$

ein vollständiges System von Junktoren? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

p	q	$p *_1 q$	$p *_2 q$	$p *_3 q$	$p *_4 q$	$p *_5 q$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0