Formale Grundlagen der Informatik II 1. Hausübung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2015**
Prof. Dr. Martin Otto **3. Juni 2015**
Julian Bitterlich, Felix Canavoi, Kord Eickmeyer, Daniel Günzel

Aufgabe H1 (AL-Spezifikationen) (12 Punkte)

(a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n, z_0, \dots, z_n)$, die genau dann wahr ist, wenn die Summe der in $\bar{x}$ und $\bar{y}$ kodierten Binärzahlen gleich der in $\bar{z}$ kodierten Binärzahl ist. Dabei kodiere $\bar{x}$ die Zahl $\sum_i x_i 2^i$.

(*Hinweis:* Für ein transparentes Vorgehen per Induktion über n überlege man sich zunächst geeignete Hilfsformeln.)

(b) Gibt es — möglicherweise unendliche — aussagenlogische Formelmengen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \subseteq AL(\mathcal{V})$ mit $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots\}$ derart, dass für Belegungen $\mathfrak{I}$ gilt

i. $\mathfrak{I} \models \Phi_1$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ höchstens zwei Variablen mit 1 belegt,

ii. $\mathfrak{I} \models \Phi_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ genau zwei Variablen mit 1 belegt, und

iii. $\mathfrak{I} \models \Phi_3$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ mindestens zwei Variablen mit 1 belegt.

Lösung:

(a) Wir benutzen geeignete Hilfsformeln φ_n^c und φ_n^p. Die von φ_n^c genutzten Variablen sind $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$ und φ_n^c soll genau dann wahr sein, wenn die Addition von den von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ kodierten Zahlen einen Übertrag in der höchsten Stelle hat, d.h.,

$$\varphi_n^c = 1 \text{ gdw. } \sum_{i=0}^{n} x_i 2^i + \sum_{i=0}^{n} y_i 2^i \geq 2^{n+1}.$$

Die von φ_n^p genutzten Variablen sind $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n, z_0, \dots, z_n$ und φ_n^p soll genau dann wahr sein, wenn die Addition von den von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ kodierten Zahlen gleich der von $\bar{z}$ kodierten Zahl ist, sofern der Übertrag in der höchsten Stelle ignoriert wird, d.h.,

$$\varphi_n^p = 1 \text{ gdw. } \sum_{i=0}^{n} x_i 2^i + \sum_{i=0}^{n} y_i 2^i = \sum_{i=0}^{n} z_i 2^i \mod 2^{n+1}.$$

Wenn wir diese Formeln definiert haben, können wir $\varphi_n = \neg\varphi_n^C(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \varphi_n^P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ setzen, da $\sum_{i=0}^{n} z_i 2^i \leq 2^{n+1} - 1$. Nun zur Induktiven Definition von φ_n^C und φ_n^P:

$$\begin{aligned}
\varphi_0^c &= x_0 \wedge y_0 \\
\varphi_{n+1}^c &= (\neg\varphi_n^c \to (x_{n+1} \wedge y_{n+1})) \wedge (\varphi_n^c \to (x_{n+1} \vee y_{n+1})) \\
\varphi_0^p &= \neg(x_0 \oplus y_0 \oplus z_0) \\
\varphi_{n+1}^p &= \varphi_n^p \wedge \neg(x_{n+1} \oplus y_{n+1} \oplus \varphi_n^c \oplus z_{n+1})
\end{aligned}$$

Die Operateion $\oplus$ wurde in der zweiten Aufgabe des zweiten Übungsblattes definiert. Zur Argumentation der Richtigkeit von φ_n^p ist zu sagen, dass $\oplus$ die Addition modulo 2 beschreibt. Somit haben wir für φ_0^p:

$$\varphi_0^p = 1 \Leftrightarrow x_0 + y_0 + z_0 \neq 1 \mod 2 \Leftrightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 0 \mod 2 \Leftrightarrow x_0 + y_0 = z_0 \mod 2.$$

Und für φ^p_{n+1}:

$$\begin{aligned}
\varphi^p_{n+1} = 1 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} x_i 2^i + \sum_{i=0}^{n} y_i 2^i = \sum_{i=0}^{n} z_i 2^i \mod 2^{n+1} \;\&\; x_{n+1} \oplus y_{n+1} \oplus \varphi^c_n \oplus z_{n+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} x_i 2^i + \sum_{i=0}^{n} y_i 2^i = \sum_{i=0}^{n} z_i 2^i + c2^{n+1} \;\&\; x_{n+1} + y_{n+1} = c + z_{n+1} \mod 2 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} x_i 2^i + \sum_{i=0}^{n} y_i 2^i = \sum_{i=0}^{n} z_i 2^i + c2^{n+1} \;\&\; 2^{n+1} x_{n+1} + 2^{n+1} y_{n+1} = 2^{n+1} c + 2^{n+1} z_{n+1} \mod 2^{n+2} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} x_i 2^i + \sum_{i=0}^{n+1} y_i 2^i = \sum_{i=0}^{n+1} z_i 2^i \mod 2^{n+2}.
\end{aligned}$$

Man überlege sich jede Äquivalenz im Detail.

(b) i. Setze $\Phi_1 := \{\neg(p_i \wedge p_k \wedge p_\ell) : i, k, \ell \in \mathbb{N}, i \neq k, i \neq \ell, k \neq \ell\}$, dann hat Φ die gewünschte Eigenschaft.

ii. Angenommen es gäbe eine Formelmenge Φ_2 wie in (ii) beschrieben. Sei $\mathfrak{I}_0$ die konstante 0-Interpretation. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{I}_0 \not\models \Phi_2$ gilt, gibt es eine Formel φ in Φ_2 mit $\mathfrak{I}_0 \not\models \varphi$. Da φ nur endlich viele Variablen enthält, gibt voneinander verschiedene k und ℓ, so dass die Variablen p_k und p_ℓ nicht in der Variablenmenge von φ sind. Ist $\mathfrak{I}$ nun eine Belegung gemäß $\mathfrak{I}(p_i) = 1 :\Leftrightarrow i = k$ oder $i = \ell$, dann muss nach Voraussetzung $\mathfrak{I} \models \varphi$ gelten, aber auch, da $\varphi^{\mathfrak{I}_0} = \varphi^{\mathfrak{I}}$, $\mathfrak{I} \not\models \varphi$ gelten. Widerspruch.

iii. Angenommen es gäbe eine Formelmenge Φ_3 mit der Eigenschaft aus (iii), dann hätte $\Phi_1 \cup \Phi_3$ die Eigenschaft aus (ii). Widerspruch.

Aufgabe H2 (Vollständige Systeme von Junktoren) (12 Punkte)

Für jede der folgenden Junktorenmengen beweisen oder widerlegen Sie, dass sie vollständige Systeme von Junktoren sind.

(a) $\{\neg, \rightarrow\}$

(b) $\{\rightarrow, 0\}$

(c) $\{\leftrightarrow\}$

(d) $\{\wedge, \vee\}$

Lösung:

(a) Wir wissen $\phi \vee \psi \equiv \neg\phi \rightarrow \psi$. Also kann man mit den Junktoren $\rightarrow$ und $\neg$ die Junktoren $\neg$ und $\vee$ (die ein schon bekanntes vollständiges System bilden) ausdrücken, d.h. $\{\rightarrow, \neg\}$ ist vollständig.

(b) Man beachtet $\neg\phi \equiv \phi \rightarrow 0$. Also wegen der obigen Teilaufgabe können wir mit den Junktoren $\rightarrow$ und 0 die Junktoren $\neg$ und $\vee$ ausdrücken, d.h. $\{\rightarrow, 0\}$ ist vollständig.

(c) Sei $\mathfrak{I}_1$ die Belegung, die jeder Variable den Wahrheitswert 1 zuordnet. Wir zeigen durch Induktion, dass Formeln, die nur den Junktor $\leftrightarrow$ benutzen unter $\mathfrak{I}_1$ zu 1 auswerten.
- Wenn $\phi = p$, wobei p eine Variable ist, ist es klar.
- Nehmen wir an, dass $\phi = \phi_0 \leftrightarrow \phi_1$ und dass die Aussage für die kleineren Formeln ϕ_0 und ϕ_1 gilt. Dann ist $\mathfrak{I}_1(\phi_0) = 1 = \mathfrak{I}_1(\phi_1)$ und somit der Wahrheitswert von ϕ auch 1 für $\mathfrak{I}_1$.

Also gilt für alle Formeln ϕ, die nur den Junktor $\leftrightarrow$ benutzt, $\mathfrak{I}_1(\phi) = 1$, insbesondere ist ϕ nicht äquivalent zu der atomaren Formel 0. Die Menge $\{\leftrightarrow\}$ ist also nicht vollständig.

(d) Auch $\{\wedge, \vee\}$ ist nicht vollständig. Dies kann man zeigen wie in (c).

Aufgabe H3 (Resolution) (12 Punkte)

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(q \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \wedge (r \vee s) \wedge ((p \wedge s) \rightarrow r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

(b) Weisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode die folgende Folgerungsbeziehung nach:

$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \models (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \rightarrow 0)$$

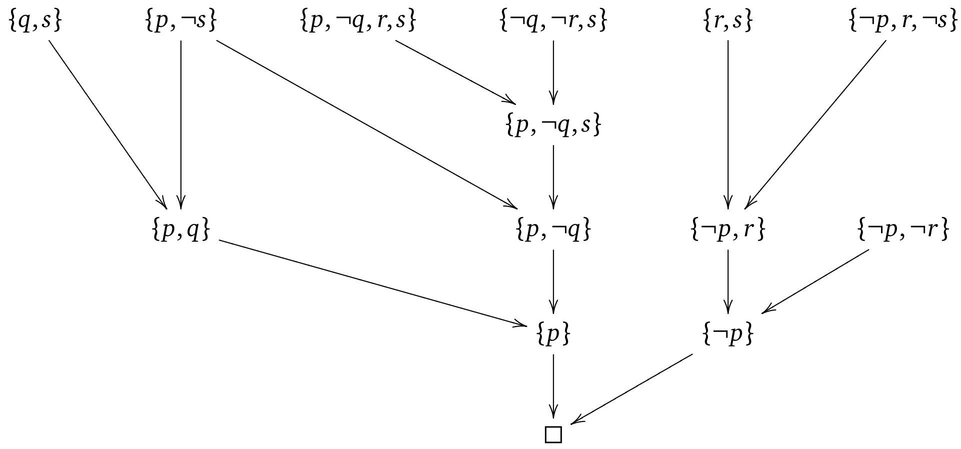
(c) Bestimmen Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$H_0 = \{(p \wedge t) \rightarrow s, \quad r, \quad (q \wedge r) \rightarrow s, \quad t \rightarrow p, \quad t\}$$

Lösung:

(a) Klauseln:

$$\{q,s\},\ \{p,\neg s\},\ \{p,\neg q,r,s\},\ \{\neg q,\neg r,s\},\ \{r,s\},\ \{\neg p,r,\neg s\},\ \{\neg p,\neg r\}$$

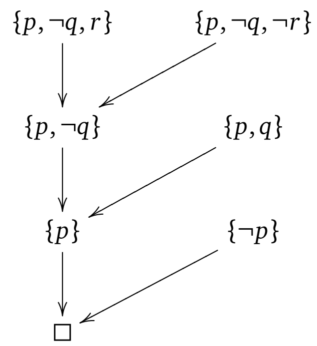


Da □ aus den Klauseln ableitbar ist, ist die Formel unerfüllbar.

(b) Wir zeigen die Unerfüllbarkeit von $\big((p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)\big) \wedge \neg\big((\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee p\big)$. Die Umwandlung dieser Formel in KNF ergibt die folgenden Klauseln:

$$\{p,\neg q,r\},\ \{\neg p,q,r\},\ \{p,\neg q,\neg r\},\ \{p,q\},\ \{\neg p\}$$

Wir zeigen jetzt die Unerfüllbarkeit durch Ableitung von □:



(c) Die Hornklauselmenge H_0 enthält keine negativen Hornklauseln, daher gibt es nach Lemma 5.12 (FGdI Skript zur Aussagenlogik) ein minimales Modell $\mathfrak{I}_0$ der Variablen in H_0. Wir verfahren wie im (konstruktiven) Beweis des Lemmas, konstruieren also schrittweise die Mengen $\mathcal{X}_i$:

$$\mathcal{X}_0 = \emptyset, \quad \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0 \cup \{r,t\}, \quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \cup \{p\}, \quad \mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_2 \cup \{s\}.$$

Das minimale Modell $\mathfrak{I}_0$ ist demnach geben durch

$$\mathfrak{I}_0(r) = \mathfrak{I}_0(t) = \mathfrak{I}_0(p) = \mathfrak{I}_0(s) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}_0(q) = 0.$$

Aufgabe H4 (Untere Schranken für Formelgrößen) (12 Punkte)
Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1,\dots,p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat;

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(a) jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder hat.

Lösung:

(a) Für jedes $i \leq n$, muss genau eine der Variablen p_{2i-1} und p_{2i} wahr sein. Es gibt also genau so viele Modelle, wie es Funktionen $\{1,\dots,n\} \to \{1,2\}$ gibt. Dies sind 2^n.

(b) $\varphi_n \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} [(\neg p_{2i-1} \vee \neg p_{2i}) \wedge (p_{2i-1} \vee p_{2i})]$

(c) Angenommen, es gibt eine Formel $\bigvee_{i=1}^{m} \psi_i$ in DNF mit $m < 2^n$ Disjunktionsgliedern. Für jedes Modell $\mathfrak{I}$ von φ_n muss es ein Disjunktionsglied ψ_k geben mit $\mathfrak{I} \models \psi_k$. Somit existiert mindestens ein Disjunktionsglied ψ_k mit mehr als einem Modell.

Da ψ_k mehr als ein Modell hat, gibt es mindestens eine Variable p_i, so daß weder p_i noch $\neg p_i$ in ψ_k vorkommen. Sei p_j der „Partner“ von p_i, d. h., $j = i+1$, wenn i ungerade ist, und $j = i-1$, falls i gerade ist.

Wir wählen ein Modell $\mathfrak{I}$ von ψ_k. Sei $\mathfrak{I}'$ die Interpretation mit $\mathfrak{I}'(p_i) = \mathfrak{I}(p_j)$ und $\mathfrak{I}'(p_l) = \mathfrak{I}(p_l)$, für alle $l \neq i$. Dann folgt, dass $\mathfrak{I}' \models \psi_k$ und somit $\mathfrak{I}' \models \varphi_n$. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{I}' \models p_i \leftrightarrow p_j$.

Aufgabe H5 (Folgerungen aus dem Kompaktheitssatz) (12 Punkte)

(a) Für — möglicherweise unendliche — Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jede Interpretation, die alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Sei $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Eine Interpretation $\mathfrak{I} : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als die unendliche Bit-Sequenz $\mathfrak{I}(p_1)\mathfrak{I}(p_2)\mathfrak{I}(p_3)\dots$

P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, so dass sowohl P als auch das Komplement $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$P = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Phi\}$$
$$\overline{P} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Psi\}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ jeweils schon durch eine einzelne AL-Formel spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

Lösung:

(a) Wenn $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ gilt, dann hat die Menge $\Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle, wobei $\neg\Psi = \{\neg\psi : \psi \in \Psi\}$. Der Kompaktheitssatz impliziert dann, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle hat. Setzen wir $\Phi_0 = \{\varphi \in \Phi : \varphi \in \Gamma_0\}$ und $\Psi_0 = \{\psi \in \Psi : \neg\psi \in \Gamma_0\}$, dann heißt das, dass $\Gamma_0 = \Phi_0 \cup \neg\Psi_0$ keine Modelle hat, also $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Da P und $\overline{P}$ disjunkt sind, gilt $\bigwedge \Phi \models \bigvee \neg\Psi$. Nach Aufgabenteil (a) gibt es also endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \neg\Psi_0$. Wir behaupten, dass $P = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0\}$. $P \subseteq \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0\}$ ist klar nach Definition von P, also zeigen wir die andere Richtung: $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0 \Rightarrow \mathfrak{I} \models \bigvee \neg\Psi_0 \Rightarrow \exists \psi \in \Psi\ \mathfrak{I} \models \neg\psi \Rightarrow \mathfrak{I} \notin \overline{P} \Rightarrow \mathfrak{I} \in P$.

Ein analoges Argument mit vertauschten Rollen von Φ uns Ψ liefert eine Formel $\bigwedge \Psi_0$, die $\overline{P}$ definiert.

Aufgabe H6 (Sequenzenkalkül) (12 Punkte)
Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Lösung:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,p \vdash p,r}\,(\text{Ax}) \quad \dfrac{}{q,p \vdash q,r}\,(\text{Ax})}{q,p \vdash p \wedge q, r}\,(\wedge\text{R}) \quad \dfrac{}{r,p \vdash p \wedge q, r}\,(\text{Ax})}{q \vee r, p \vdash p \wedge q, r}\,(\vee\text{L})}{q \vee r \vdash p \wedge q, r, \neg p}\,(\neg\text{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r, \neg p}\,(\neg\text{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r \vee \neg p}\,(\vee\text{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p}\,(\vee\text{R})}{\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p}\,(\vee\text{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,q \vdash p, p \wedge r}\,(\text{Ax}) \quad \dfrac{}{p,q \vdash q, p \wedge r}\,(\text{Ax})}{p,q \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\text{R}) \quad \dfrac{\dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, p}\,(\text{Ax}) \quad \dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, r}\,(\text{Ax})}{p,r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\text{R})}{p, q \vee r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\vee\text{L})}{p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}\,(\vee\text{R})$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vdash q,q \quad r \vdash q,p}{r \vdash q, p \wedge q}\,(\wedge\text{R}) \quad \dfrac{}{r \vdash r, p \wedge q}\,(\text{Ax})}{r \vdash q \wedge r, p \wedge q}\,(\wedge\text{R})}{\neg(p \wedge q), r \vdash q \wedge r}\,(\neg\text{L})}{\neg(p \wedge q) \wedge r \vdash q \wedge r}\,(\wedge\text{L})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r), q \wedge r}\,(\neg\text{R})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)}\,(\vee\text{R})$$

Eine nicht erfüllende Belegung ist z.B. $r \mapsto 1$ und $q, p \mapsto 0$.

Aufgabe H7 (Sequenzregeln) (12 Punkte)

Zeigen Sie semantisch, dass die folgenden Regeln korrekt sind.

(a) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$

(b) $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}$

(c) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}$

Lösung: Um zu zeigen, dass die drei Regeln korrekt sind, müssen wir nachweisen, dass sie Allgemeingültigkeit erhalten.

(a) Angenommen die Prämisse sei allgemeingültig. Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Gamma$. Im Fall $\mathfrak{I} \not\models \varphi$ folgt direkt $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta \vee \neg\varphi$ und wir sind fertig. Im Fall $\mathfrak{I} \models \varphi$ folgt, da die Prämisse allgemeingültig ist, $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$. Somit gilt in jedem Fall $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta \vee \neg\varphi$.

(b) Angenommen die Prämisse sei allgemeingültig. Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Gamma$. Im Fall $\mathfrak{I} \models \varphi$ sind wir sofort fertig. Im Fall $\mathfrak{I} \not\models \varphi$ gilt $\mathfrak{I} \models (\varphi \to \psi)$ und damit $\mathfrak{I} \not\models (\phi \to \psi) \to \phi$. Da die Prämisse allgemeingültig ist, folgt nun jedoch $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$. Somit gilt in jedem Fall $\mathfrak{I} \models \varphi \vee \bigvee \Delta$.

(c) Angenommen die Prämissen seien allgemeingültig. Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Gamma \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$. Mit der Allgemeingültigkeit der linken Prämisse folgt $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta \vee \varphi$. Im Fall $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$ sind wir fertig. Angenommen es gilt $\mathfrak{I} \not\models \bigvee \Delta$. Daraus folgt nun $\mathfrak{I} \models \varphi$, was aufgrund von $\mathfrak{I} \models \varphi \rightarrow \psi$ auch $\mathfrak{I} \models \psi$ impliziert. Da die rechte Prämisse allgemeingültig ist, folgt $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$, was jedoch im Widerspruch zur Annahme steht. Also muss $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$ gelten, womit gezeigt ist, dass die Konklusion allgemeingültig ist.