Satz von Herbrand (Satz 3.10)

Satz von Herbrand

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$ Menge von *universellen, gleichheitsfreien* Sätzen; S habe mindestens ein Konstantensymbol.

Dann gilt: $\boxed{\Phi \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow \text{es existiert ein Herbrand-Modell } \mathcal{H} = \big(\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R\in S}\big) \models \Phi.}$

Beweis

"$\Leftarrow$": offensichtlich.

"$\Rightarrow$": geeignete Interpretationen $R^{\mathcal{H}}$ aus geg. Modell $\mathcal{A} \models \Phi$.

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL → Abschnitt 3.5

Reduktions-Idee: $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(S)$ (bel. Formelmenge)

erf.-äquiv.

$\Phi' \subseteq \mathrm{FO}_0(S_1)$ (Satzmenge)

erf.-äquiv.

$\Phi'' \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S_2)$ (gleichheitsfrei)

erf.-äquiv.

$\Phi''' \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S_3)$ (universell(-pränex))

$\boxed{\Phi \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow \Phi''' \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow \Phi''' \text{ in Herbrand-Modell erfüllbar}}$

und Bedingungen an Herbrand-Modell lassen sich in AL kodieren!

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL

für universell-pränexes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$ über S mit Konstanten

Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Φ hat ein Herbrand-Modell $\mathcal{H} = \big(\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R \in S}\big) \models \Phi$

$\Leftrightarrow$ für alle $R \in S$ (n-st.) existieren $R^{\mathcal{H}} \subseteq T_0(S)^n$, sodass $\mathcal{H} = \big(\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R \in S}\big) \models \Phi$

$\mathcal{V} := \big\{ p_\alpha \colon \alpha \text{ relationales Atom über } T_0(S) \big\}$

$\alpha = \mathtt{R}\mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_n$; $R \in S$; $t_1, \ldots, t_n \in T_0(S)$, $R \in S$ (n-stellig)

$\mathcal{V}$-Interpretationen $\mathfrak{I}$ beschreiben dann mögliche $\mathcal{H}$:
bijektive Korrepondenz $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathfrak{I}$:

von $\mathfrak{I}$ zu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathfrak{I})$: $R^{\mathcal{H}} = \big\{(t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n \colon \mathfrak{I}(p_{\mathtt{R}\mathtt{t}_1 \ldots \mathtt{t}_n}) = 1\big\}$

von $\mathcal{H}$ zu $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathcal{H})$:

$$\mathfrak{I} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{B}, \quad p_\alpha \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{H} \models \alpha, \\ 0 & \text{falls } \mathcal{H} \models \neg\alpha. \end{cases}$$

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL

für $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \xi(x_1, \ldots, x_n) = \forall \mathbf{x}\, \xi(\mathbf{x})$, ξ quantorenfrei
und $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathfrak{I})$ gilt:

$\mathcal{H} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{H} \models \xi[\mathbf{t}]$ für alle $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n$

gdw. $\mathfrak{I} \models \xi(\mathbf{t})^{\mathrm{AL}}$ für alle $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n$

dabei erhält man $\xi(\mathbf{t})^{\mathrm{AL}} \in \mathrm{AL}(\mathcal{V})$ aus $\xi(\mathbf{t})$
durch Ersetzen von Atomen $\alpha = \mathtt{R}\ldots$
durch AL-Variablen p_α

für $[\![\Phi]\!]^{\mathrm{AL}} := \bigcup_{\forall \mathbf{x} \xi \in \Phi} \{\xi(\mathbf{t})^{\mathrm{AL}} \colon \mathbf{t} \text{ in } T_0(S)\}$ gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi} \textbf{ erfüllbar gdw. } [\![\boldsymbol{\Phi}]\!]^{\mathrm{AL}} \textbf{ erfüllbar}}$$

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL

Beispiel $\xi(\mathbf{t})^{\mathrm{AL}} \in \mathrm{AL}(\mathcal{V})$

$$\left.\begin{array}{r} \xi = Rxfy \vee (Ufx \rightarrow Wxyfz) \\ \mathbf{t} = (c, fc, d) \text{ für } (x, y, z) \end{array}\right\} \text{ liefert}$$

$$\xi(c, fc, d)^{\mathrm{AL}} = p_{\mathtt{Rcffc}} \vee (p_{\mathtt{Ufc}} \rightarrow p_{\mathtt{Wcfcfd}})$$

$$\left.\begin{array}{r} \xi = Rxy \rightarrow (Qx \leftrightarrow \neg Qy) \\ \mathbf{t} = (f^n c, f^m c) \text{ für } (x, y) \end{array}\right\} \text{ liefert}$$

$$\xi(f^n c, f^m c)^{\mathrm{AL}} = p_{\mathtt{Rf^nf^mc}} \rightarrow (p_{\mathtt{Qf^nc}} \leftrightarrow \neg p_{\mathtt{Qf^mc}})$$

Beispiel

$S = \{R, Q, f\}$ R (2-st.), Q (1-st.), Relationssymbole
f (1-st.), Funktionssymbol

Behauptung: $\Phi : \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = \forall x \forall y \big(Rxy \rightarrow (Qx \leftrightarrow \neg Qy)\big) \\ \varphi_2 = \forall x (Rxfx \vee Rfxx) \\ \varphi_3 = \forall x \forall y \big(\neg Rxy \rightarrow Rxffy\big) \end{array}\right.$

ist unerfüllbar

$S_c := S \cup \{c\}$ $T_0(S_c) = \{c, fc, ffc, fffc, \ldots\} = \{f^n c \colon n \in \mathbb{N}\}$

AL-Variablen für die Reduktion:

q_n $(= p_{\mathtt{Qf^nc}})$ für die Atome $Qf^n c$, $(n \in \mathbb{N})$,
$r_{\ell,m}$ $(= p_{\mathtt{Rf^\ell cf^mc}})$ für die Atome $Rf^\ell cf^m c$, $(\ell, m \in \mathbb{N})$.

wir erhalten z.B. für φ_1 die AL-Formelmenge

$$[\![\varphi_1]\!]^{\mathrm{AL}} = \big\{ r_{\ell,m} \rightarrow (q_\ell \leftrightarrow \neg q_m) \, : \, \ell, m \in \mathbb{N} \big\}$$

Beispiel (fortges.)

zugeh. AL-Formelmenegen zu $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\begin{cases} [\![\varphi_1]\!]^{\mathrm{AL}} = \{r_{\ell,m} \rightarrow (q_\ell \leftrightarrow \neg q_m) : \ell, m \in \mathbb{N}\} \\ [\![\varphi_2]\!]^{\mathrm{AL}} = \{r_{\ell,\ell+1} \vee r_{\ell+1,\ell} : \ell \in \mathbb{N}\} \\ [\![\varphi_3]\!]^{\mathrm{AL}} = \{\neg r_{\ell,m} \rightarrow r_{\ell,m+2} : \ell, m \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

Unerfüllbarkeit von Φ folgt daher z.B. aus AL-Unerfüllbarkeit von

$$\underbrace{\begin{array}{l} r_{0,0} \rightarrow (q_0 \leftrightarrow \neg q_0), \\ r_{0,1} \rightarrow (q_0 \leftrightarrow \neg q_1), \\ r_{1,0} \rightarrow (q_1 \leftrightarrow \neg q_0), \\ r_{0,2} \rightarrow (q_0 \leftrightarrow \neg q_2), \\ r_{1,2} \rightarrow (q_1 \leftrightarrow \neg q_2), \\ r_{2,1} \rightarrow (q_2 \leftrightarrow \neg q_1), \end{array}}_{\in [\![\varphi_1]\!]^{\mathrm{AL}}} \quad \underbrace{\begin{array}{l} r_{0,1} \vee r_{1,0}, \\ r_{1,2} \vee r_{2,1}, \end{array}}_{\in [\![\varphi_2]\!]^{\mathrm{AL}}} \quad \underbrace{\neg r_{0,0} \rightarrow r_{0,2}}_{\in [\![\varphi_3]\!]^{\mathrm{AL}}}$$

FO Kompaktheit (Satz 4.1)

Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz)

Version 1: (Erfüllbarkeit)

Für $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar.

(ii) Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar.

Version 2: (Folgerungsbeziehung)

Für $\Phi \subseteq \mathrm{FO}, \varphi \in \mathrm{FO}$ sind äquivalent:

(i) $\Phi \models \varphi$.

(ii) $\Phi_0 \models \varphi$ für eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Version 1 $\Leftrightarrow$ Version 2 (zur Übung!)

Version 1 für universell-pränexes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}$: Reduktion auf AL

FO Kompaktheit

→ Abschnitt 4

Konsequenzen: die Stärken des Endlichkeitssatzes
die Schwächen von FO

mit Kompaktheit findet man:

beliebig große endliche Modelle ⇒ unendliche Modelle

zu Φ betrachte $\Phi \cup \{\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i = x_j \colon n \geqslant 1\}$

unendliche Modelle ⇒ beliebig große unendliche Modelle

zu Φ betrachte $\Phi \cup \{\neg c_i = c_j \colon i \neq j; i, j \in I\}$
für neue Konstanten $(c_i)_{i \in I}$

⇒ *keine* unendliche Struktur in FO
bis auf Isomorphie charakterisierbar

FO Kompaktheit

Konsequenzen: die Stärken des Endlichkeitssatzes
die Schwächen von FO

mit Kompaktheitsargumenten findet man:

Nichtstandardmodelle

von (unendlichen) Standardmodellen
in FO ununterscheidbare Strukturen

z.B. $\mathcal{N}^*$ zu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$
Nichtstandardmodell der Arithmetik mit
'unendlich großen natürlichen Zahlen'

zur vollständigen FO-Theorie von $\mathcal{N}$, $\Phi := \{\varphi \in \mathrm{FO} \colon \mathcal{N} \models \varphi\}$

betrachte $\Phi \cup \{\underbrace{1 + \dots + 1}_{n} < c \colon n \geqslant 2\}$ für neue Konstante c

Logik-Kalküle

syntaktische Beweiskalküle

Beweise der	Unerfüllbarkeit	bzw. der	Allgemeingültigkeit
	Resolution		Sequenzenkalkül

vergleiche Kalküle für AL

Resolution

Widerlegungskalkül: Unerfüllbarkeitsbeweise

wir behandeln: **Grundinstanzen-Resolution (GI-Resolution)**

Gegenstand: $\mathrm{FO}^{\neq}$-Klauselmengen K
(universelle $\mathrm{FO}^{\neq}$-Satzmengen Φ)

Beweisziel: Ableitung der (unerfüllbaren) leeren Klausel $\Box$

Korrektheit: $\Box$ ableitbar aus $K \Rightarrow K$ unerfüllbar.

Vollständigkeit: K unerfüllbar $\Rightarrow \Box$ ableitbar aus K.

FO-Klauselmengen

→ Abschnitt 5.1

universelle (skolemisierte) $\mathrm{FO}^{\neq}$-Sätze in Klauselform:

$$\forall x_1 \dots \forall x_k \, \xi \;\equiv\; \forall x_1 \dots \forall x_k \underbrace{\bigwedge_{C \in K} \bigvee C}_{\text{q-fr. Kern in KNF}}$$

$\xi \equiv K$ für endliche Klauselmenge K über $\mathrm{FO}^{\neq}$-Literalen

Terminologie

$\mathrm{FO}^{\neq}$-**Literale:**
relationale Atome oder negierte relationale Atome λ, $\overline{\lambda} \equiv \neg\lambda$

$\mathrm{FO}^{\neq}$-**Klauseln:**
endliche Mengen C von $\mathrm{FO}^{\neq}$-Literalen

für $C = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$: $C \equiv \bigvee C = \bigvee_{i=1,\dots,k} \lambda_i$

$\mathrm{FO}^{\neq}$-**Klauselmengen:**
Mengen K von $\mathrm{FO}^{\neq}$-Klauseln

Klauselmengen und universell-pränexe Sätze

semantisch identifiziere Klauselmenge mit Satzmenge:

$$K \quad \equiv \quad \{\underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_n}_{\text{alle Variablen in } C} \bigvee C : C \in K\}$$

$$(\quad \equiv \quad \underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_n}_{\text{alle Variablen in } K} \bigwedge_{C \in K} \bigvee C \qquad \text{für endliches } K \;)$$

Korrespondenzen:

endliche $\mathrm{FO}^{\neq}$ Klauselmengen $\quad \leftrightsquigarrow \quad$ universell-pränexe $\mathrm{FO}^{\neq}$-Sätze

$\mathrm{FO}^{\neq}$ Klauselmengen $\quad \leftrightsquigarrow \quad$ universell-pränexe $\mathrm{FO}^{\neq}$-Satzmengen

Übersetzungs-Beispiel

$\varphi = \forall x \forall y \big(Rxy \rightarrow (Qx \leftrightarrow \neg Qy)\big)$
relevante Atome: $\quad \alpha = Rxy$, $\beta_1 = Qx$ und $\beta_2 = Qy$

$\varphi = \forall x \forall y \big(\alpha \rightarrow (\beta_1 \leftrightarrow \neg\beta_2)\big)$

Kern von φ in KNF (z.B.):

$$\underbrace{(\neg\alpha \vee \beta_1 \vee \neg\beta_1)}_{\equiv 1} \;\wedge\; (\neg\alpha \vee \beta_1 \vee \beta_2)$$

$$\wedge\; (\neg\alpha \vee \neg\beta_2 \vee \neg\beta_1) \;\wedge\; \underbrace{(\neg\alpha \vee \neg\beta_2 \vee \beta_2)}_{\equiv 1}$$

liefert $\quad K = \big\{\{\neg\alpha, \beta_1, \beta_2\}, \{\neg\alpha, \neg\beta_1, \neg\beta_2\}\big\}$

$$= \big\{\{\neg Rxy, Qx, Qy\}, \{\neg Rxy, \neg Qy, \neg Qx\}\big\}$$

Grundinstanzen-Resolution (GI) → Abschnitt 5.2

Idee: Übertragung von AL-Resolution gemäß Reduktionsansatz ähnlich wie schon für andere Erfüllbarkeitsargumente

Grundinstanzen einer Klausel C über Literalen $\lambda \in \mathrm{FO}^{\neq}_n$:

$$C(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n) := \{\lambda(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$$

mit $t_i \in T_0(S)$

Grundinstanzenmenge einer Klauselmenge K:

$$\mathrm{GI}(K) := \big\{C(t_1/x_1, \dots) \colon C \in K, t_i \in T_0(S)\big\}$$

- es gilt $K \models \mathrm{GI}(K)$.

und aus dem Satz von Herbrand:

- K und $\mathrm{GI}(K)$ *erfüllbarkeitsäquivalent*.

GI-Resolution: Resolventen

C_1, C_2, C Klauseln von variablenfreien $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$-Literalen

C ist *Resolvente* von C_1 und C_2
(bezüglich des Literals λ), wenn

$$\lambda \in C_1, \quad \overline{\lambda} \in C_2, \quad \text{und } C = (C_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{\lambda}\})$$

$$\begin{tikzcd}
C_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \underline{\lambda}\} \arrow[dr] & & C_2 = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_\ell, \underline{\overline{\lambda}}\} \arrow[dl] \\
& C = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda'_1, \dots, \lambda'_\ell\} &
\end{tikzcd}$$

zu Klauselmenge K über variablenfreien $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$-Literalen:

$$\mathrm{Res}^*(K) = \text{Abschluß von } K \text{ unter Resolventenbildung}$$

Beispiel

über Grundinstanzen von

$\{\neg Rxy, Qx, Qy\}$, $\{\neg Rxy, \neg Qx, \neg Qy\}$ und $\{Rxx, Rxffx\}$:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg Rcc, \underline{Qc}\} \arrow[dr] & & \{\neg Rcc, \underline{\neg Qc}\} \arrow[dl] & \\
& \{\underline{\neg Rcc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Rcc}, Rcffc\} \arrow[dl] \\
& & \{Rcffc\} &
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \forall y \big(\neg Rxy \vee Qx \vee Qy\big) \\ \forall x \forall y \big(\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy\big) \\ \forall x \big(Rxx \vee Rxffx\big) \end{array}\right\} \models Rcffc$$

GI-Resolution: Resolutionssatz (Satz 5.7)

Korrektheit und *Vollständigkeit* von GI-Resolution
für die Unerfüllbarkeit von universell-pränexen $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$-Satzmengen
in Klauselform

Resolutionssatz

Für $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$-Klauselmengen K sind äquivalent:

(i) K unerfüllbar.

(ii) $\mathrm{GI}(K)$ unerfüllbar.

(iii) $\Box \in \mathrm{Res}^*(\mathrm{GI}(K))$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $C \in \mathrm{Res}^*(\mathrm{GI}(K))$ impliziert, dass $K \models C$
$\Box \equiv 0$ unerfüllbar.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Erfüllbarkeitsäquivalenz (Herbrand).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vollständigkeit von AL Resolution + Reduktion.

allgemeinere Resolution → Abschnitt 5.3

Idee: nicht notwendig zu Grundinstanzen absteigen
Resolution nach Substitution von Termen mit Variablen

Substitutionsinstanz zu $\sigma = (t_1, \dots, t_n) \in T(S)^n$:
$C^\sigma = \{\lambda^\sigma \colon \lambda \in C\} = \{\lambda(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$

Resolution von C_1 und C_2 zu C falls für geeignete σ_1 und σ_2:
$\lambda \in C_1^{\sigma_1}, \overline{\lambda} \in C_2^{\sigma_2}, C = (C_1^{\sigma_1} \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2^{\sigma_2} \setminus \{\overline{\lambda}\})$

allgemeinere Resolution: Beispiel

$$
\begin{tikzcd}
\{\neg Rxy, Qx, Qy\} \arrow[d, "y \mapsto x"] & & \{\neg Rxy, \neg Qx, \neg Qy\} \arrow[d, "y \mapsto x"] & \{Rxx, Rxffx\} \arrow[dd] \\
\{\neg Rxx, \underline{Qx}\} \arrow[dr] & & \{\neg Rxx, \underline{\neg Qx}\} \arrow[dl] & \\
& \{\underline{\neg Rxx}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Rxx}, Rxffx\} \arrow[dl] \\
& & \{Rxffx\} &
\end{tikzcd}
$$

$\forall x \forall y(\neg Rxy \vee Qx \vee Qy), \forall x \forall y(\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy), \forall x(Rxx \vee Rxffx)$
$\models \forall x Rxffx$

Sequenzenkalküle

→ Abschnitt 6.1

vgl. AL Sequenzenkalkül

Allgemeingültigkeitsbeweise (für bel. FO-Formeln/Sätze)

Gegenstand: FO-*Sequenzen* $\Gamma \vdash \Delta$
für endliche $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$

$\Gamma \vdash \Delta$ *allgemeingültig* wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

Beweisziel: Ableitung allgemeingültiger Sequenzen

Ableitungsschritte: Anwendung von *Regeln*
(zur Erzeugung von Sequenzen)

Korrektheit: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

Vollständigkeit: jede allgemeingültige Sequenz ist ableitbar.
(schwache Form, wird später verschärft)

Sequenzenkalkül: Regeln und Korrektheit

Format von *Sequenzenregeln* (wie in AL): $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Konklusionen von Regeln ohne Prämisssen: *Axiome*

ableitbare Sequenzen:
ausgehend von Axiomen (in endlich vielen Schritten) durch Anwendung von Sequenzenregeln erzeugte Sequenzen

Korrektheit: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig

folgt aus der Korrektheit der einzelnen Regeln:

- die Axiome sind allgemeingültige Sequenzen;
- für Regeln mit Prämissen:
  Prämissen allgemeingültig $\Rightarrow$ Konklusion allgemeingültig.

Sequenzenkalkül: Regeln

FO Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$, drei Gruppen von Regeln:

- *AL Regeln* (analog zum AL-Sequenzenkalkül).
- *Quantorenregeln*: Einführung von $\forall$ oder $\exists$ links/rechts.
  $(\forall \mathrm{L})$, $(\forall \mathrm{R})$, $(\exists \mathrm{L})$, $(\exists \mathrm{R})$.
- *Gleichheitsregeln*: Umgang mit Term-Gleichheiten.
  $(=)$, (Sub-L), (Sub-R).

$\boxed{\mathrm{AL} + \text{Quantorenregeln: vollständiger Beweiskalkül } \mathcal{SK}^{\neq} \text{ für } \mathrm{FO}^{\neq}}$

$\boxed{\mathcal{SK}^{\neq} + \text{Gleichheitsregeln: vollständiger Beweiskalkül } \mathcal{SK} \text{ für } \mathrm{FO}}$

Zusätzlich (nicht notwendig aber natürlich) in $\mathcal{SK}^{+}$:

- *Schnittregeln*: Kettenschlüsse und Beweise durch Widerspruch.

Sequenzenkalkül: Quantorenregeln

$$(\forall \mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta} \qquad\qquad (\forall \mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)}$$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

$$(\exists \mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta} \qquad\qquad (\exists \mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)}$$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

Korrektheit prüfen!

Sequenzenkalkül: Gleichheitsregeln

(=) $\dfrac{\Gamma, t = t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$

(Sub-L) $\dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t = t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta}$ (Sub-R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma, t = t' \vdash \Delta, \varphi(t'/x)}$

und analoge Regeln mit $t' = t$ statt $t = t'$

Korrektheit prüfen!

Sequenzenkalkül: Schnittregeln (optional)

(modus ponens) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$

(Kontradiktion) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$

Korrektheit prüfen!

Bem.: Kontradiktionsregel (lokal) mit modus ponens simulierbar

beide Regeln lassen sich (nicht lokal) eliminieren

(vgl. AL-Sequenzenkalkül)

unterscheide *schnittfreie* Kalküle wie $\mathcal{SK}$
von solchen mit Schnittregeln wir $\mathcal{SK}^+$

Ziel: Vollständigkeit → Abschnitt 6.3

Definitionen:

Ableitbarkeit aus Theorie $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0$:

φ **ableitbar aus** $\boldsymbol{\Phi}$ $[\Phi \vdash \varphi]$ gdw.

für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$ (Voraussetzungen) ist $\Gamma_0 \vdash \varphi$ ableitbar.

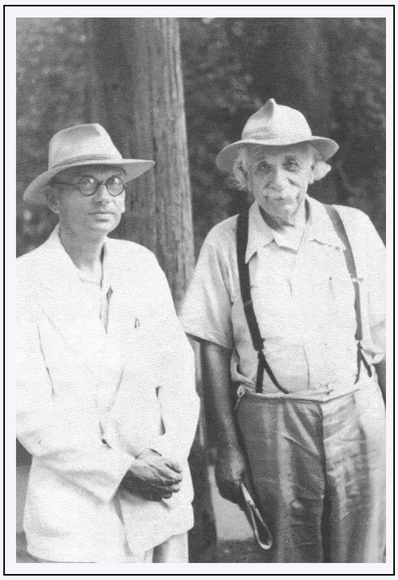
$\boldsymbol{\Phi}$ **konsistent** (widerspruchsfrei) gdw. *nicht* $\Phi \vdash \emptyset$.

Vollständigkeit (starke Form) $\cdots$ **Korrektheit**

$\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$	$\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \models \varphi$
Φ konsistent $\Rightarrow$ Φ erfüllbar	Φ erfüllbar $\Rightarrow$ Φ konsistent

alles, was wahr ist, ist ableitbar	alles, was ableitbar ist, ist wahr

Kurt Gödel (1906–1978)



mit Albert Einstein

der Logiker des 20. Jahrhunderts