Formale Grundlagen der Informatik II
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
08. 07. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Normalformen)
Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln, wobei c ein Konstantensymbol, P ein einstelliges Relationssymbol und R ein zweistelliges Relationsymbol ist:

(1) $\forall x\,.\,\big(Pc \wedge \exists y\,.\,(Px \leftrightarrow \neg Py)\big)$
(2) $\forall x\,.(Px \vee \exists x\,.\neg Px)$
(3) $\forall x\,.\exists y\,.\big(Rxy \rightarrow \forall x\,.\exists y\,.Ryx\big)$

(a) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.
(b) Geben Sie für die Formel aus (1) ein Herbrand-Modell an.

Lösung:

(a) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

(1) Pränexe Normalform:

$$\forall x\,.\,\big(Pc \wedge \exists y\,.\,(Px \leftrightarrow \neg Py)\big) \;\equiv\; \forall x\,.\exists y\,.\,\big(Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg Py)\big)$$

Skolemnormalform: $\forall x\,.\big(Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg P f_y x)\big)$ für ein neues einstelliges Funktionssymbol f_y.

(2) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned}\forall x\,.(Px \vee \exists x\,.\neg Px) &\equiv \forall x\,.\,\big(Px \vee \exists y\,.\neg Py\big)\\ &\equiv \forall x\,.\exists y\,.\,\big(Px \vee \neg Py\big)\end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall x\,.\,\Big(Px \vee \neg P f_y(x)\Big)$ für ein neues einstelliges Funktionssymbol f_y.

(3) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned}\forall x\,.\exists y\,.\,\big(Rxy \rightarrow \forall x\,.\exists y\,.Ryx\big) &\equiv \forall x\,.\exists y\,.\,\big(Rxy \rightarrow \forall z\,.\exists t\,.Rtz\big)\\ &\equiv \forall x\,.\exists y\,.\,\big(\neg Rxy \vee \forall z\,.\exists t\,.Rtz\big)\\ &\equiv \forall x\,.\exists y\,.\forall z\,.\exists t\,.\,\big(\neg Rxy \vee Rtz\big)\\ &\equiv \forall x\,.\exists y\,.\forall z\,.\exists t\,.\,\big(Rxy \rightarrow Rtz\big)\end{aligned}$$

Achtung: Wenn man einen Quantor aus der Prämisse einer Implikation herauszieht, muss man ihn dualisieren! Wenn man ihn aus der Konklusion herauszieht bleibt der Quantor dagegen erhalten.

Skolemnormalform: $\forall x\,.\forall z\,.\,\Big(Rx f_y(x) \rightarrow R f_t(x,z) z\Big)$ für ein neues Konstantensymbol c und ein einstelliges Funktionssymbol f_t.

(b) Eine Herbrand-Struktur zur Signatur $S = (c, f_y, P)$ ist $\mathscr{H} = (\mathscr{T}_0(S), c^{\mathscr{H}}, f_y^{\mathscr{H}}, P^{\mathscr{H}})$, wobei $\mathscr{T}_0(S)$ die variablenfreien Terme über S sind, also die Elemente von der Form c, fc, ffc, usw., $c^{\mathscr{H}} = c$ und $f_y^{\mathscr{H}}(f^n c) = ff^n c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $P^{\mathscr{H}} \subseteq \mathscr{T}_0(S)$ muss so gewählt sein, dass $\forall x\,.\big(Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg P f_y x)\big)$ erfüllt wird. Die Formel besagt, dass $c \in P^{\mathscr{H}}$ gelten soll und dass jede Anwendung von f Elemente bezüglich $P^{\mathscr{H}}$ wie eine Negation wirkt, das heißt jeder zweite Term muss in $P^{\mathscr{H}}$ liegen. Wir setzen also $P^{\mathscr{H}} := \{f^n c \mid n \text{ ist gerade}\}$.

Aufgabe G18 (Semantikspiel)
Sei $\preceq$ ein zweistelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi := \forall x_1\,.\,\forall x_2\,.\,\exists x_3\,.\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\,.\,\big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3\big)\Big).$$

Sei $\mathscr{A} = (A, \preceq^{\mathscr{A}})$ mit $A = \{0,1,2,3\}$ und

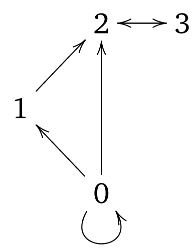
$$\preceq^{\mathscr{A}} = \big\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,2),(2,3),(3,2)\big\}.$$

Zeigen Sie $\mathscr{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3\big)\Big)\\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big(\neg(x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big)\Big)\\
&\equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big)\Big)}_{=:\varphi'}
\end{aligned}$$

Eine Menge mit einer zweistelligen Relation ist i.A. ein (gerichteter) Graph, also kann man $\mathscr{A}$ folgendermaßen darstellen



und $\varphi^{\mathscr{A}}$ bedeutet, dass es zu zwei Elementen x_1 und x_2 ein Element x_3 gibt, mit $x_3 \rightarrow x_1$ und $x_3 \rightarrow x_2$ und sodass es zu jedem x_4 mit $x_4 \rightarrow x_1$ und $x_4 \rightarrow x_2$ eine Kante $x_4 \rightarrow x_3$ gibt. Man überprüft leicht, dass für $x_1 \mapsto 2$ und $x_2 \mapsto 2$ kein x_3 mit der benötigten Eigenschaft existiert, also $\mathscr{A} \not\models \varphi$.

Wir zeigen nun, dass für beliebige $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ der Falsifizierer in der Spielposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ *eine Gewinnstrategie hat*: Angenommen der Falsifizierer zieht von der Position

$$\Bigg(\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big)\Big), (a_1, a_2, a_3, a_4)\Bigg)$$

nach

$$\Bigg(\forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big)\Big), (2, a_2, a_3, a_4)\Bigg)$$

und von dort nach

$$\Bigg(\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big)\Big), (2, 2, a_3, a_4)\Bigg)$$

dann hat der Verifizierer vier Möglichkeiten zu ziehen:

$a_3 \mapsto 2$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\,((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3), (2,2,2,a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (2,2,2,a_4)\Big)$$

und

$$\Big(x_3 \preceq x_1, (2,2,2,a_4)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathscr{A} \not\models 2 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 3$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\,((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3), (2,2,3,a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4\,((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3), (2,2,3,a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2,2,3,1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 3$ und $\mathscr{A} \models 1 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 1$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\,((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3), (2,2,1,a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4\,((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3), (2,2,1,a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2,2,1,1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathscr{A} \models 1 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 0$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\,((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3), (2,2,0,a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4\,((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3), (2,2,0,a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2,2,0,1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 0$ und $\mathscr{A} \models 1 \preceq 2$.

Also hat der Falsifizierer eine Gewinnstrategie, und es gilt $\mathscr{A} \not\models \varphi$.

Aufgabe G19 (Herbrand-Struktur)
Betrachten Sie die folgenden universellen, gleichheitsfreien Sätze für 1-stellige Funktionssymbole h und v:

(1) $\forall x, y, z \,.\, \big(x \sim x \wedge (x \sim y \to y \sim x) \wedge (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)\big)$

(2) $\forall x \,.\big(h(v(x)) \sim v(h(x))\big)$

(3) $\forall x, y \,.\, \big(x \sim y \to (h(x) \sim h(y) \wedge v(x) \sim v(y)\big)$

(a) Sei $\mathscr{H} = (\mathscr{T}, h^{\mathscr{H}}, v^{\mathscr{H}}, \sim^{\mathscr{H}})$ eine Herbrand-Struktur. Beschreiben Sie die Trägermenge $\mathscr{T}$.

(b) Man kann die Teilmenge $\sim^{\mathscr{H}} \subseteq \mathscr{T} \times \mathscr{T}$ so wählen, dass die Herbrand-Struktur $\mathscr{H}$ ein Modell von (1)–(3) wird. Geben Sie die minimale und die maximale Lösung an. Gibt es auch noch andere Möglichkeiten?

Lösung:

(a) Da die Signatur keine Konstanten enthält, nehmen wir ein Konstantensymbol c zu $h, v, \sim$ hinzu. Die Trägermenge ist $\mathscr{T} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{i+1} = \big\{h(t), v(t) \,\big|\, t \in T_i\big\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (d.h. einen Baum, wobei jeder Knoten genau zwei Nachfolger hat).

(b) Die Relation $\sim$ kann z.B. durch $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ (die maximale Lösung) oder wie folgt interpretiert werden:

$$s \sim t \iff \text{sowohl } v \text{ als } h \text{ kommen in } s \text{ und } t \text{ gleich oft vor}$$

(die minimale Lösung). Es gibt noch viele andere Lösungen, z.B.:

$$s \sim t \iff v \text{ kommt in } s \text{ und } t \text{ gleich oft vor}$$

Hausübung

Aufgabe H15 (Herbrand-Struktur) (6 Punkte)
Betrachten Sie folgende Formelmenge, wobei P ein einstelliges Relations-, sowie R und S zweistellige Relationssymbole seien:

(1) $\exists x . Px$

(2) $\forall x . \exists y . Rxy$

(3) $\forall x . \exists y . Sxy$

(4) $\forall x . \forall y . \big((Px \wedge Rxy) \rightarrow Py\big)$

(5) $\forall x . \forall y . \big(Sxy \rightarrow Rxy\big)$

(a) Geben Sie die Skolem-Normalform der Sätze (1)–(5) an.

(b) Zeigen Sie, dass die Sätze (1)–(5) erfüllbar sind, indem sie ein Herbrandmodell angeben.

(c) Zeigen Sie, dass die Formelmenge unerfüllbar wird, wenn (1) durch die Formel

$$(1') \quad \exists x . \big(Px \wedge \forall y . \big(Sxy \rightarrow \neg Py\big)\big)$$

ersetzt wird. Zeigen Sie, dass die neue Formelmenge nicht erfüllbar ist.

Hinweis: Argumentieren Sie, dass es kein Herbrandmodell für die neue Formelmenge geben kann. Beachte, dass sich die Trägermenge des Herbrandmodells durch das Ersetzen von (1) durch (1′) *nicht* ändert (wenn wir dieselbe Skolemkonstante „c“ verwenden).

Lösung:

(a) (1) Pc $\boxed{0{,}5\text{ P.}}$

(2) $\forall x . Rxf(x)$ $\boxed{0{,}5\text{ P.}}$

(3) $\forall x . Sxg(x)$ $\boxed{0{,}5\text{ P.}}$

(4), (5) Diese Sätze sind schon in Skolem-Normalform. $\boxed{0{,}25\text{ P.}}$ je

(b) $\boxed{2\text{ P.}}$ Sei $T_0 := \{c\}$ und $T_{n+1} := \big\{f(t), g(t) \,\big|\, t \in T_n\big\}$. Dann ist $\mathcal{T} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ die Trägermenge der Sätze aus (a). Das Herbrandmodell $\mathcal{H} := (\mathcal{T}, R^{\mathcal{H}}, S^{\mathcal{H}}, P^{\mathcal{H}})$ mit $R^{\mathcal{H}} = S^{\mathcal{H}} = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ und $P^{\mathcal{H}} = \mathcal{T}$ erfüllt dann die Sätze.

(c) $\boxed{2\text{ P.}}$ Wir betrachten die Elemente c, $g(c)$ der Trägermenge. Mit (3′) gilt Pc und mit (2) $Scg(c)$. Damit folgt aus (3′) $\neg Pg(c)$ aber mit (4)+(5) $Pg(c)$. Also sind die Sätze nicht erfüllbar.

Aufgabe H16 (Semantikspiel) (4 Punkte)
Wir übernehmen die Bezeichnungen aus der **Aufgabe G18**.

(a) Geben Sie eine zu

$$\exists x_3 . \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 . \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3\big)\Big)$$

äquivalente Formel in Negationsnormalform an. (Man nenne diese Formel ψ.)

(b) Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$\big(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4)\big)$$

eine Gewinnstrategie?

Lösung:

(a) $\psi := \exists x_3.\forall x_4.\,\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big)$ $\boxed{\text{0,5 P.}}$

(b) Wir zeigen, dass der Verifizierer für alle $(a_1', a_2') \in (A\setminus\{3\})^2 \setminus \{(2,2)\}$ eine Gewinnstrategie hat $\boxed{\text{2 P.}}$:
Der Verifizierer zieht von $(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$ nach

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4\,\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (a_1', a_2', 0, a_4)\Big)$$

Der Falsifizierer hat nun zwei Zugmöglichkeiten:

i. Er zieht nach

$$\big(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (a_1', a_2', 0, a_4)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathscr{A} \models 0 \preceq x$ für alle $x \in A\setminus\{3\}$.

ii. Er zieht nach

$$\big(\forall x_4\,\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\big), (a_1', a_2', 0, a_4)\big)$$

dann hat der Falsifizierer im nächsten Zug vier Möglichkeiten:

i. Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 0)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathscr{A} \models 0 \preceq 0$

ii. Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 1)\big)$$

oder

$$\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 2)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer in zwei Zügen, da a_1' oder a_2' ungleich 2 ist und $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathscr{A} \not\models 1 \preceq 0$ bzw. $\mathscr{A} \not\models 2 \preceq 1$ und $\mathscr{A} \not\models 2 \preceq 0$ gelten.

iii. Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 3)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\neg 3 \preceq a_1'$ oder $\neg 3 \preceq a_2'$.

Wir zeigen jetzt, dass der Falsifizierer für alle $(a_1', a_2') \in (\{3\} \times A) \cup (A \times \{3\})$ eine Gewinnstrategie hat (da es schon in **G18** gezeigt wurde für $(a_1', a_2') = (2,2)$) $\boxed{\text{1,5 P.}}$:

- Wenn $(a_1', a_2') = (3,3)$, muss der Verifizierer der einzige $x \preceq 3$ spielen, d.h. 2, aber $2 \not\preceq 2$.
- Wenn a_1' oder a_2' nicht gleich 3 ist, gibt es kein a_3', sodass $a_3' \preceq a_1' \wedge a_3' \preceq a_2'$.

Minitest

Aufgabe M12 (Termmenge)
Sei $S = (c, f, P)$ und $F = \forall x . \forall y . Pxfcy$ eine geschlossene Formel (d.h. ein Satz) in Skolem-Normalform; f sei dabei ein zweistelliges Funktions- und P ein zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie die Menge $T_0(S)$ aller variablenfreien Terme über S zur Formel F an.

- ☐ $M_1 := \emptyset$
- ☐ $M_2 := \{c, x, y, Pxfcy\}$
- ☐ $M_3 := \{c, Pcc, PPccc, PcPcc, \ldots\}$
- ☐ $M_4 := \{c, fcc, ffccc, fcfcc, \ldots\}$
- ☐ $M_5 := \{f, fc, fcc, fccc, \ldots\}$

Lösung:

- ☐ $M_1 := \emptyset$
- ☐ $M_2 := \{c, x, y, Pxfcy\}$
- ☐ $M_3 := \{c, Pcc, PPccc, PcPcc, \ldots\}$
- ☒ $M_4 := \{c, fcc, ffccc, fcfcc, \ldots\}$
- ☐ $M_5 := \{c, fc, fcc, fccc, \ldots\}$

Begründung: c ist eine Konstante, f ein Funktionssysmbol gemäß Vereinbarung des Skripts und der Vorlesung. $T_0(S) \neq M_1$, da $c \in T_0(S)$. $T_0(S) \neq M_2$, da $T_0(S)$ u.a. variablenfrei ist. $T_0(S) \neq M_3$, da P eine Relation ist. $T_0(S) = M_4$ nach Definition 1.3 im FO-Skript. $T_0(S) \neq M_5$, weil ihre Elemente (außer fcc) keine Terme sind (f ist zweistellig).

Aufgabe M13 (FO-Formeln)
Wahr oder falsch?

(a) In der FO mit Gleichheit gibt es Formeln, die nur in Strukturen, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten, erfüllbar sind.

☐ wahr ☐ falsch

(b) Jede PNF-Formel (pränexe Normalform) ist auch in SKNF (Skolem-Normalform).

☐ wahr ☐ falsch

(c) Jede SKNF-Formel ist auch in PNF.

☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

(a) In der FO mit Gleichheit gibt es Formeln, die nur in Strukturen, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten, erfüllbar sind.

☒ wahr ☐ falsch

Begründung: Die Formel $\forall x . \forall y . \forall z . \big((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z)\big)$ ist nur in Strukturen erfüllbar, deren Trägermengen höchstens zwei Elemente enthalten.

(b) Jede PNF-Formel (pränexe Normalform) ist auch in SKNF (Skolem-Normalform).

☐ wahr ☒ falsch

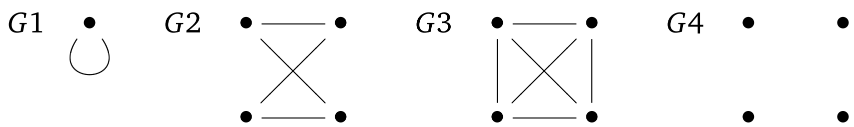
Begründung: Gegenbeispiel: $\exists x . Px$ ist nicht in SKNF, da sie nicht ausschliesslich All-Quantoren enthält.

(c) Jede SKNF-Formel ist auch in PNF.

☒ wahr ☐ falsch

Begründung: Nach Definition ist jede SKNF-Formel eine PNF-Formel ohne Existenz-Quantoren.

Aufgabe M14 (Graphen und FO)
Gegeben seien die folgenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$:



In welchem der obigen Graphen gilt welcher der nachfolgenden FO-Sätze?

$G\square$: $\forall x . \forall y . \big(\neg(x = y) \leftrightarrow Exy\big)$

$G\square$: $\exists x . \exists y . \exists z . \big(\neg(x = y) \land \neg(y = z) \land Exy \land Eyz \land \neg Ezx\big)$

$G\square$: $\exists x . \exists y . \neg(x = y) \land \forall x . \forall y . \big(\neg(x = y) \to \neg Exy\big)$

$G\square$: $\exists x . \forall y . \big(x = y\big)$

Lösung:

$G3$: $\forall x . \forall y . \big(\neg(x = y) \leftrightarrow Exy\big)$

$G2$: $\exists x . \exists y . \exists z . \big(\neg(x = y) \land \neg(y = z) \land Exy \land Eyz \land \neg Ezx\big)$

$G4$: $\exists x . \exists y . \neg(x = y) \land \forall x . \forall y . \big(\neg(x = y) \to \neg Exy\big)$

$G1$: $\exists x . \forall y . \big(x = y\big)$

Begründung: Die angegebenen FO-Sätze haben folgende Bedeutung:

(a) Je zwei verschiedene Knoten sind miteinander verbunden.

(b) Es gibt drei Knoten, die keinen Kreis bilden.

(c) Der Graph enthält keine Kante, aber mindestens zwei Knoten.

(d) Der Graph besteht aus nur einem Knoten.