Aussagenlogik
& Prädikatenlogik (FGdI II)
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

WiSe 2015/16
1. Juni 2016

Gruppenübung

Aufgabe G4.1 (Modellierung)
Ein Meteorologe versucht die zeitliche Entwicklung des Wetters an einem bestimmten Ort mit folgender Signatur in FO zu beschreiben:

$$S = \{0, N, <, P_S, P_R\}.$$

0	Konstante für den Starttag
N	1-stelliges Funktionssymbol für den nächsten Tag
$<$	2-stelliges Relationssymbol für die zeitliche Ordnung der Tage
P_S, P_R	1-stellige Relationssymbole für Sonne und Regen

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO(S):

(a) Auf Regen folgt (irgendwann) Sonnenschein.

(b) Jeden zweiten Tag scheint die Sonne.

(c) Wenn an einem Tag die Sonne scheint, gibt es innerhalb von drei Tagen wieder Regen.

Hinweis: Beachten Sie, dass diese Beschreibungen nicht eindeutig sind.

Aufgabe G4.2 (Mächtigkeiten)
Betrachten Sie FO-Formeln zur Signatur $\{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist.

(a) Geben Sie eine FO-Formel an, die besagt, dass die Trägermenge genau n Elemente enthält.

(b) Geben Sie jeweils eine FO-Formel an, die genau dann von einer Struktur erfüllt wird, wenn die Interpretation von f
   i. injektiv ist.
   ii. surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine FO-Formel an, die erfüllbar ist, aber nur unendliche Modelle hat.

Aufgabe G4.3 (Spielsemantik)
Sei $\preccurlyeq$ ein zweistelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preccurlyeq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \rightarrow x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big).$$

Sei $\mathcal{A} = (A, \preccurlyeq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0,1,2,3,4\}$ und
$\preccurlyeq^{\mathcal{A}} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$.
Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.
Hinweis:

(a) Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.

(b) Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.

(c) Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

Hausübung

Hinweise zur Hausübung

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu dieser Hausübung in der **Übung am 15.06.2016** ab (**Name, Nummer der Übungsgruppe und Matrikelnummer** nicht vergessen). Wir unterstützen ausdrücklich das gemeinsame Arbeiten und Diskutieren in Gruppen, die gefundenen Lösungen sollte aber jeder selbst ausformulieren. Es darf also pro Abgabe nur ein Name auf dem Blatt stehen.

Aufgabe H4.1 (Wörter und Sprachen) (12 Punkte)
Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit Hilfe der Prädikatenlogik definieren. Wie im Skript, S. 3, definieren wir zu einem nichtleeren Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^+$ eine *Wortstruktur*

$$\mathcal{W}(w) = \big(\{1, \dots, n\}, <^{\mathcal{W}}, P_a^{\mathcal{W}}, P_b^{\mathcal{W}}\big)$$

wobei

$$P_a^{\mathcal{W}} := \{\, i \in \{1, \dots, n\} : a_i = a \,\} \quad \text{und} \quad P_b^{\mathcal{W}} := \{\, i \in \{1, \dots, n\} : a_i = b \,\}.$$

(Wir schließen das leere Wort aus, da es keine leeren Strukturen gibt.) Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(<, P_a, P_b)$ definiert dann die Sprache $L(\varphi) := \{ w \in \Sigma^+ \mid \mathcal{W}(w) \models \varphi \}$.

(a) Welche Sprachen definieren die folgenden Formeln?
  i. $\forall x \forall y (x < y \rightarrow ((P_b x \rightarrow P_b y) \wedge (P_a y \rightarrow P_a x)))$
  ii. $\forall x \forall y ((x < y \wedge P_a x \wedge P_a y) \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y \wedge P_b z))$

(b) Geben Sie zu den folgenden Sprachen Formeln an, welche sie definieren.
  i. $L((a + b)^* bb (a + b)^* a)$
  ii. $L((ba)^+)$

Aufgabe H4.2 (Modellierung von Speicherzellen) (12 Punkte)
Betrachten Sie die Signatur $S = \{0, \leq, L\}$, wobei 0 eine Konstante, $\leq$ ein 2-stelliges und L ein 1-stelliges Relationssymbol ist. Wir modellieren in dieser Signatur einen Datenspeicher. Die Trägermenge für die Speicherzellen sei die Menge der natürlichen Zahlen mit der gewöhnlichen Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$, die Konstante 0 steht für die Adresse der ersten Speicherzelle und Lx steht dafür, dass die Speicherzelle mit der Adresse x gesperrt ist.
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO:

(i) Höchstens eine Speicherzelle ist gesperrt.
(ii) Es sind genau 3 Speicherzellen gesperrt.
(iii) Ein Anfangsstück des Speichers ist gesperrt, jedoch nicht der gesamte Speicher.
(iv) Es gibt höchstens zwei getrennte zusammenhängende Abschnitte von gesperrten Speicherzellen.
(v) Nur endlich viele Speicherzellen sind gesperrt.
(vi) Abschnitte von gesperrten und ungesperrten Speicherzellen wechseln sich unendlich häufig ab.

Aufgabe H4.3 (Normalformen) (12 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln, wobei c ein Konstantensymbol, P ein einstelliges Relationssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol ist:

(i) $Pc \wedge \forall x \, \big(\exists y \, \big(Px \leftrightarrow \neg Py\big)\big)$
(ii) $\forall x \, (Px \vee \exists x \, \neg Px)$
(iii) $Rcc \wedge \forall x \, \exists y \, \big(Rxy \rightarrow \exists y \, Ryx\big)$

(a) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln eine äquivalente Formel in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.
(b) Geben Sie für jede dieser Formeln ein Herbrand-Modell an.