Formale Grundlagen der Informatik II
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
10. 06. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Sheffer- und Pierce-Operator)
Definiere die folgenden Junktoren: sei der *Sheffer-Operator* (auch: NAND) gegeben durch

$$p \uparrow q := \neg(p \wedge q) \quad \text{(äquivalent: } \neg p \vee \neg q\text{)}$$

und der *Pierce-Operator* (auch: NOR) durch

$$p \downarrow q := \neg(p \vee q) \quad \text{(äquivalent: } \neg p \wedge \neg q\text{).}$$

Beachte: Man kann $p \downarrow q$ lesen als „weder p noch q".

(a) Geben Sie die Wahrheitstafeln für $\uparrow$ und $\downarrow$ an.

(b) Beweisen Sie $p \uparrow q \equiv \big((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big) \downarrow \big((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big)$ (also kann man $\uparrow$ durch $\downarrow$ ausdrücken).

(c) Drücken Sie $\downarrow$ durch $\uparrow$ aus.

Lösung:

(a)

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

(b) Beachte, dass $a \downarrow a \equiv \neg a$, also $\big((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big) \downarrow \big((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big) \equiv \big(\neg p \downarrow \neg q\big) \downarrow \big(\neg p \downarrow \neg q\big) \equiv \neg(\neg p \downarrow \neg q) \equiv \neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$. Man kann natürlich die Teilaufgabe auch durch Vergleichen von Wahrheitstafeln lösen.

(c) Man zeigt wie oben, dass $p \downarrow q \equiv \big((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)\big) \uparrow \big((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)\big)$ gilt.

Aufgabe G5 (Disjunktive und konjunktive Normalform)
Geben Sie die DNF und KNF für die folgende Formel an:

$$(q \to p) \wedge (p \vee \neg r)$$

Lösung: Wir können die normalen Formen aus der Wahrheitstafel ablesen:

p	q	r	$q \to p$	$p \vee \neg r$	$(q \to p) \wedge (p \vee \neg r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

DNF: $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ (man kann das zu $(\neg q \wedge \neg r) \vee p$ vereinfachen).

KNF: $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$ (man kann das zu $(p \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q)$ vereinfachen).

Viel schneller bekommen wir das Ergebnis mit direkter Umformung:

$$(q \to p) \wedge (p \vee \neg r) \equiv \underbrace{(p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r)}_{\text{KNF}} \equiv \underbrace{p \vee (\neg q \wedge \neg r)}_{\text{DNF}}.$$

Aufgabe G6 (DNF vs. KNF)
Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_i \leftrightarrow q_i)$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat (welche?);

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) Geben Sie eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF an. Wie lange ist diese Formel ausgeschrieben, asymptotisch in n?

Lösung:

(a) Für jedes $i \leq n$ muss genau eine der Variablen p_i und q_i wahr sein. Das heißt, dass man die Wahrheitswerte der p_i frei wählen kann und die Werte der q_i durch diese Wahl festgelegt sind. Also gibt es genau so viele Modelle, wie es Funktionen $\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{B}$ gibt (solche Funktion $b = (b_1, \ldots, b_n)$ entspricht dem Modell $(b_1, 1 - b_1, b_2, 1 - b_2, \ldots, b_n, 1 - b_n)$). Dies sind 2^n.

(b) $\varphi_n \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \Big((\neg p_i \vee \neg q_i) \wedge (p_i \vee q_i) \Big)$, da $\neg(a \leftrightarrow b) \equiv (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)$.

(c) Mithilfe (a) können wir eine DNF schreiben, die ein Disjunktionsglied für jedes Modell von φ_n hat. Um sie leichter zu schreiben, führen wir die folgende Notation ein: $\neg^k \varphi$ bedeutet k-mal negiertes φ, also $\underbrace{\neg\neg \ldots \neg}_{k-\text{mal}} \varphi$; insbesondere $\neg^0 \varphi = \varphi$ und $\neg^1 \varphi = \neg \varphi$. Dann

$$\varphi_n \equiv \bigvee_{b \in \mathbb{B}^n} \bigwedge_{i=1}^{n} \neg^{b_i} p_i \wedge \neg^{1-b_i} q_i.$$

Diese DNF hat 2^n Disjunktionsglieder mit $2n$ Konjunktionsglieder je.

Bemerkung: Diese Formel ist auch auf Vorlesungsfolien (Seite 24) in anderer Notation gegeben. Man kann zeigen, dass diese Formel die kürzeste DNF für φ_n ist.

Hausübung

Aufgabe H4 (Kommutativität und Assoziativität) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\oplus$ (für die Definition siehe **Aufgabe H1**) kommutativ und assoziativ ist, das heißt, $p \oplus q \equiv q \oplus p$ und $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$ gelten.

Bemerkung: Das bedeutet, dass man in Ausdrücken, wo $\oplus$ der einzige Junktor ist, die Aussagen in beliebiger Reihenfolge und ohne Klammern schreiben kann. (Dasselbe gilt natürlich auch für $\wedge$ und $\vee$.)

Lösung: Wahrheitstafeln:

$\boxed{\text{1 P.}}$

p	q	$p \oplus q$	$q \oplus p$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\boxed{\text{1 P.}}$

p	q	r	$p \oplus q$	$(p \oplus q) \oplus r$	$q \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Direkte Umformung funktioniert auch.

Aufgabe H5 (Disjunktive und konjunktive Normalform) (3 Punkte)
Gegeben sei die Boolesche Funktion

$$f(x, y, u, v) := \begin{cases} 1 & \text{wenn genau ein oder genau drei von } x, y, u, v \text{ gleich 1 sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Geben Sie DNF für $f(x, y, u, v)$ an.

(b) Geben Sie KNF für $f(x, y, u, v)$ an.

(c) Geben Sie eine Formel φ, sodass $f = f_\varphi$ und φ nur den Junktor $\oplus$ benutzt.

Lösung:

(a) $\boxed{\text{1 P.}}$ $(x \wedge \neg y \wedge \neg u \wedge \neg v) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg u \wedge \neg v) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge u \wedge \neg v) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg u \wedge v) \vee$ $(\neg x \wedge y \wedge u \wedge v) \vee (x \wedge \neg y \wedge u \wedge v) \vee (x \wedge y \wedge \neg u \wedge v) \vee (x \wedge y \wedge u \wedge \neg v)$

(b) $\boxed{\text{1 P.}}$ $(x \vee y \vee u \vee v) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg u \vee \neg v) \wedge (x \vee y \vee \neg u \vee \neg v) \wedge (x \vee \neg y \vee u \vee \neg v) \wedge$ $(x \vee \neg y \vee \neg u \vee v) \wedge (\neg x \vee y \vee u \vee \neg v) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg u \vee v) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee u \vee v)$

(c) $\boxed{\text{1 P.}}$ $x \oplus y \oplus u \oplus v$ (Wir können die Klammern auslassen per **Aufgabe H4**.)

Aufgabe H6 (Vollständige Systeme von Junktoren) (5 Punkte)
Für jede der folgenden Junktorenmengen beweisen oder widerlegen Sie, dass sie vollständige Systeme von Junktoren sind.

(a) $\{\neg, \rightarrow\}$

(b) $\{\to, 0\}$

(c) $\{\uparrow\}$

(d) $\{\leftrightarrow\}$

(e) $\{\wedge, \vee\}$

Lösung:

(a) $\boxed{1\text{ P.}}$ Wir wissen $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \to \psi$. Also kann man mit den Junktoren $\to$ und $\neg$ die Junktoren $\neg$ und $\vee$ (die ein schon bekanntes vollständiges System bilden) ausdrücken, d.h. $\{\to, \neg\}$ ist vollständig.

(b) $\boxed{1\text{ P.}}$ Man beachtet $\neg\varphi \equiv \varphi \to 0$. Also wegen der obigen Teilaufgabe können wir mit den Junktoren $\to$ und 0 die Junktoren $\neg$ und $\vee$ ausdrücken, d.h. $\{\to, 0\}$ ist vollständig.

(c) $\boxed{1\text{ P.}}$ Man zeigt, dass $\varphi \uparrow \varphi \equiv \neg\varphi$, woraus folgt, dass $(\varphi \uparrow \varphi)\uparrow(\psi \uparrow \psi) \equiv \neg\neg\varphi \vee \neg\neg\psi \equiv \varphi \vee \psi$.

(d) $\boxed{1\text{ P.}}$ Zunächst zeigen wir durch Induktion, dass die Formeln, die nur den Junktor $\leftrightarrow$ benutzen, den Wahrheitswert 1 nehmen, für die Belegung $\mathfrak{I}\colon p \mapsto 1$, die jeder Variable den Wahrheitswert 1 belegt.

- Wenn $\varphi = p$, wobei p eine Variable ist, ist es klar.
- Nehmen wir an, dass $\varphi = \varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1$ und dass die Aussage für die kleineren Formeln φ_0 und φ_1 gilt. Dann ist der Wahrheitswert von φ auch 1 für die Belegung $\mathfrak{I}\colon p \mapsto 1$, die jeder Variable die Wahrheitswert 1 belegt.

Sei φ eine Formel, die nur den Junktor $\leftrightarrow$ benutzt. Sei $\mathfrak{I}\colon p \mapsto 1$, die jeder Variable die Wahrheitswert 1 belegt. Da $0^{\mathfrak{I}} = 0$ und $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$, ist φ nicht äquivalent zu der atomaren Formel 0. Die Menge $\{\leftrightarrow\}$ ist also nicht vollständig.

(e) $\boxed{1\text{ P.}}$ Diese Teilaufgabe wird durch ähnliche Methode wie für $\leftrightarrow$ gelöst.

Minitest

Aufgabe M4 (Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit)
Kreuzen Sie alle Aussagen an, die im Allgemeinen wahr sind.

(a) Seien φ, ψ zwei erfüllbare Formeln. Dann ist

$\neg\varphi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \wedge \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig.

(b) Seien φ, ψ zwei allgemeingültige Formeln. Dann ist

$\neg\varphi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \wedge \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig.

(c) Sei φ erfüllbar und ψ allgemeingültig. Dann ist

$\varphi \wedge \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig.

Lösung:

(a) Seien φ, ψ zwei erfüllbare Formeln. Dann ist

$\neg\varphi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \wedge \psi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☒ erfüllbar,	☐ allgemeingültig.

(b) Seien φ, ψ zwei allgemeingültige Formeln. Dann ist

$\neg\varphi$	☐ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \wedge \psi$	☒ erfüllbar,	☒ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☒ erfüllbar,	☒ allgemeingültig.

(c) Sei φ erfüllbar und ψ allgemeingültig. Dann ist

$\varphi \wedge \psi$	☒ erfüllbar,	☐ allgemeingültig,
$\varphi \vee \psi$	☒ erfüllbar,	☒ allgemeingültig.

Aufgabe M5 (Vollständige Systeme von Junktoren)
Kreuzen Sie die folgenden Mengen an, die vollständige Systeme von Junktoren sind.

☐ $\{\neg, \wedge, \vee\}$ ☐ $\{\neg, \wedge\}$ ☐ $\{\neg, \vee\}$ ☐ $\{\neg\}$ ☐ $\{0\}$ ☐ $\emptyset$

Lösung:

☒ $\{\neg, \wedge, \vee\}$ ☒ $\{\neg, \wedge\}$ ☒ $\{\neg, \vee\}$ ☐ $\{\neg\}$ ☐ $\{0\}$ ☐ $\emptyset$

Begründung: Für die ersten drei Mengen, siehe Skript, Abschnitt 3.3. Offensichtlich kann man nicht mit dem einstelligen Junktor $\neg$ oder nullstelligen 0 mehrstellige Junktoren ausdrücken. Die leere Menge funktioniert natürlich auch nicht; man braucht etwas, um die Junktoren auszudrücken.