Technische Universität Darmstadt
Fachgebiet Theoretische Informatik

Prof. Johannes Buchmann
Nabil Alkeilani Alkadri
Nina Bindel
Patrick Struck

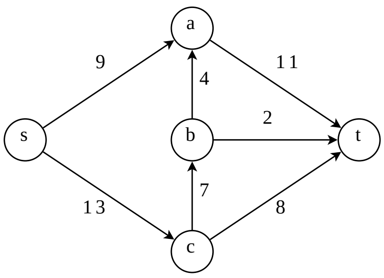
Algorithmen und Datenstrukturen

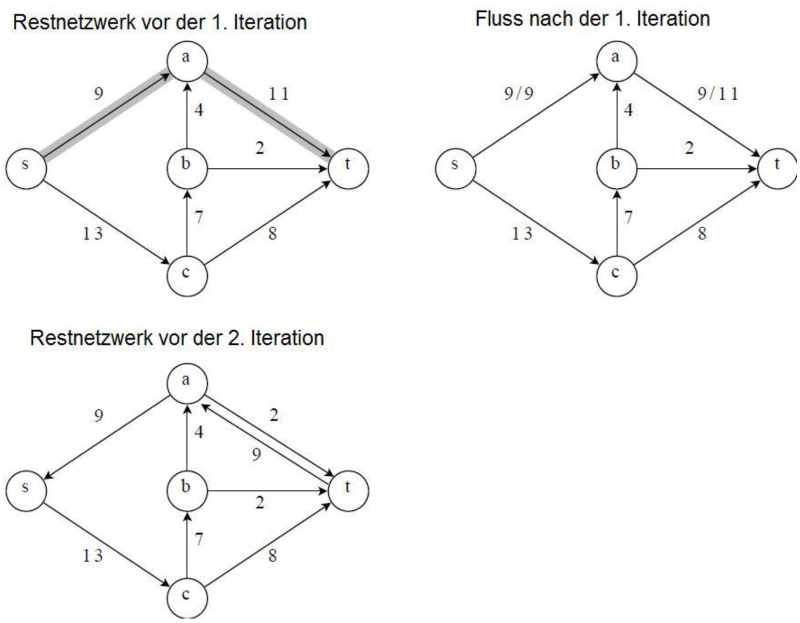
SoSe 2018

10. Lösungsblatt — 18.06.2018
v1.0

P1 Maximale Flüsse

Benutzen Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson, um den maximalen Fluss f für das folgende Flussnetzwerk (G, s, t, c) mit Quelle s, Senke t und Kapazitätsfunktion $c : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ zu bestimmen.
Skizzieren Sie, wie im unten stehenden Beispiel gezeigt, vor jeder Iteration der **while**-Schleife das von f induzierte Restnetzwerk sowie den jeweils gewählten ergänzenden Pfad p. Geben Sie für jede Kante im Restnetzwerk die Restkapazität $c_f(u, v)$ an. Skizzieren Sie außerdem nach jeder Iteration der while-Schleife den neuen Fluss f im Flussnetzwerk. Geben Sie für jede Kante den Fluss $f(u, v)$ an, falls dieser positiv ist. Geben Sie für jede Kante die Kapazität $c(u, v)$ an. Benutzen Sie die Notation $f(u, v)/c(u, v)$.



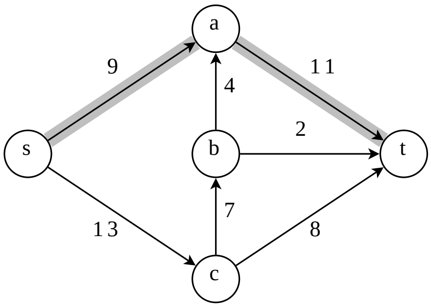


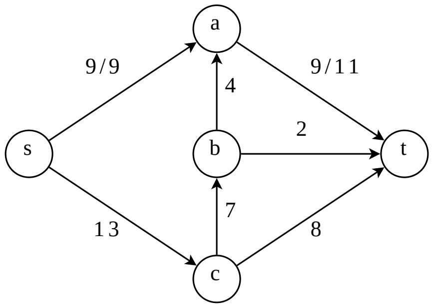
Lösung. Der Wert des maximalen Flusses ist $|f| = 21$. Wir wählen folgende ergänzende Pfade

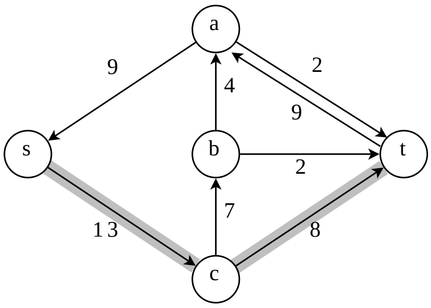
$$p_1 = \langle s, a, t \rangle \quad p_2 = \langle s, c, t \rangle \quad p_3 = \langle s, c, b, t \rangle \quad p_4 = \langle s, c, b, a, t \rangle$$

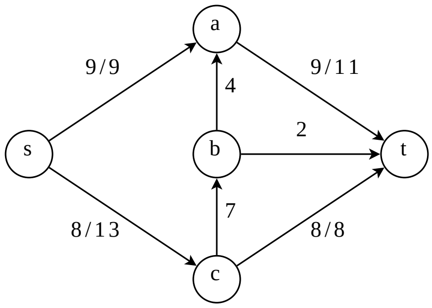
Diese Pfade erlauben die folgenden maximalen Flüsse:

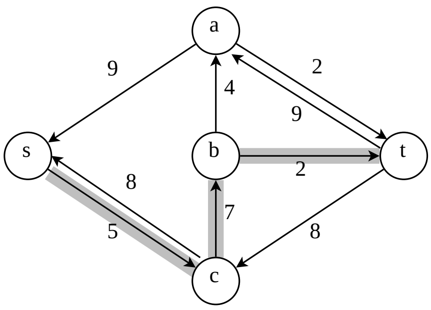
$$c_f(p_1) = 9 \quad c_f(p_2) = 8 \quad c_f(p_3) = 2 \quad c_f(p_4) = 2$$

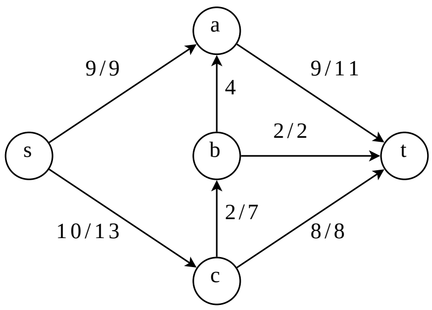


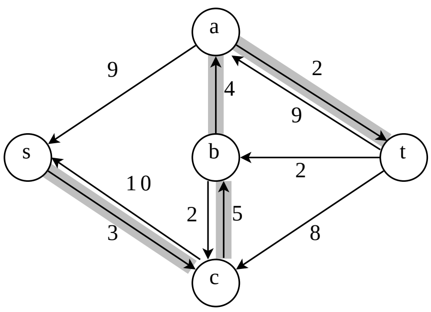


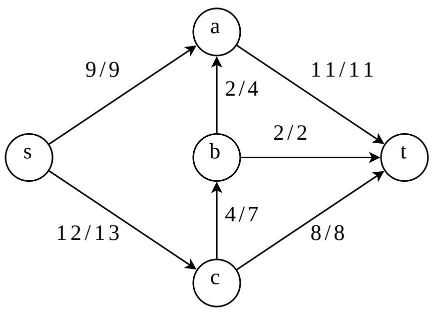


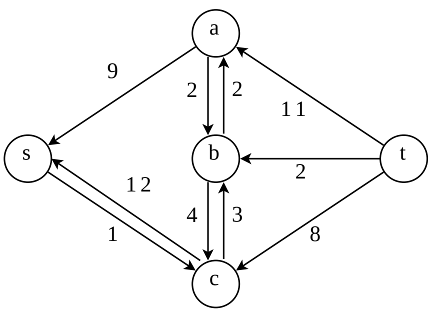






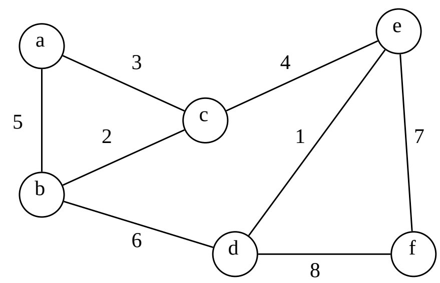






P2 Algorithmus von Kruskal

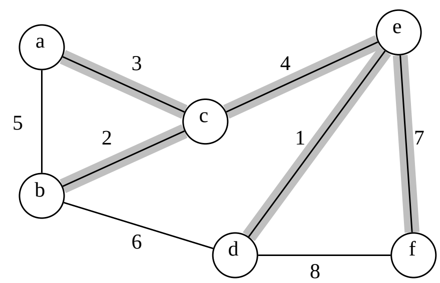
Finden Sie für den folgenden Graphen einen minimal aufspannenden Baum. Benutzen Sie den Algorithms von Kruskal. Geben Sie an, in welcher Reihenfolge die Kanten zum minimal aufspannenden Baum hinzugefügt werden.



Lösung. Die Kanten werden in folgender Reihenfolge dem minimalen aufspannenden Baum hinzugefügt:

$$\{d,e\},\{b,c\},\{a,c\},\{c,e\},\{e,f\}$$

Der minimale aufspannende Baum ist im folgenden Bild schattiert



P3 Flüsse

Sei $N = (G, s, t, c)$ ein Flussnetzwerk mit $G = (V, E)$, und f ein Fluss für N. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $E_f \subseteq \{(u,v) \in V^2 : (u,v) \in E \vee (v,u) \in E\}$
(b) $|f| = \sum_{v \in V} f(v,t)$

Lösung.

(a) Sei $(u,v) \in E_f$, also $c_f(u,v) > 0$. Wir haben $0 < c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$. Wir unterscheiden 2 Fälle.
   - 1. Fall ($f(u,v) < 0$): Dann ist wegen der Antisymmetrie des Flusses $0 < f(v,u)$ und wegen der Kapazitätsbeschränkung des Flusses ist $f(v,u) \leq c(v,u)$. Daraus folgt $0 < c(v,u)$. Nach der Definition von c ist $(v,u) \in E$.
   - 2. Fall ($f(u,v) \geq 0$): In diesem Fall ist $0 < c(u,v) - f(u,v) \leq c(u,v)$. Nach der Definition von c ist die Kante $(u,v) \in E$.

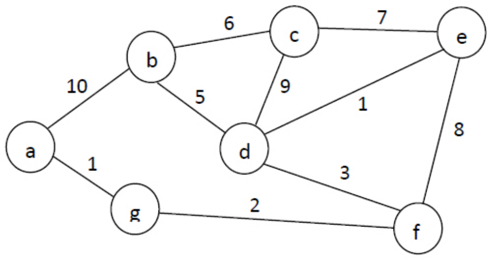
(b) Nach Definition gilt $|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$. Die Knotenmenge V lässt sich disjunkt aufteilen in die Mengen $\{s\}$, $\{t\}$, und $W = V - \{s,t\}$. Wegen der Flusserhaltung gilt $f(W,V) = 0$.

$$\underbrace{f(V,V)}_{=0} = \underbrace{f(\{s\},V)}_{=|f|} + f(\{t\},V) + \underbrace{f(W,V)}_{=0}$$

Damit ist $f(\{t\},V) = -|f|$ und wegen der Antisymmetrie $f(V,\{t\}) = |f|$.

H1 Algorithmus von Prim

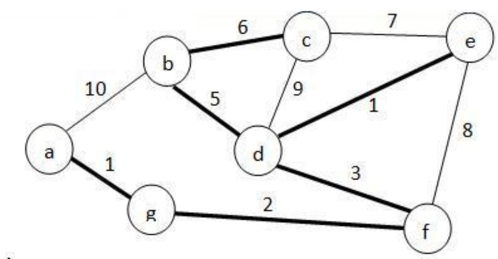
Finden Sie für den folgenden Graphen einen minimal aufspannenden Baum. Benutzen Sie den Algorithms von Prim. Benutzen Sie den Knoten a als Startknoten. Tragen Sie die Werte von $key[v]$, $\pi[v]$ (für alle Knoten v), Q und u MST-PRIM nach jedem Durchlauf der while Schleife in die folgende Tabelle ein. Geben Sie den minimal aufspannenden Baum an, indem Sie die entsprechenden Kanten im unten stehenden Graph markieren.



$key[a]$	$key[b]$	$key[c]$	$key[d]$	$key[e]$	$key[f]$	$key[g]$	$\pi[a]$	$\pi[b]$	$\pi[c]$	$\pi[d]$	$\pi[e]$	$\pi[f]$	$\pi[g]$	Q	u
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	$\{a,b,c,d,e,f,g\}$	$-$

Lösung.

$key[a]$	$key[b]$	$key[c]$	$key[d]$	$key[e]$	$key[f]$	$key[g]$	$\pi[a]$	$\pi[b]$	$\pi[c]$	$\pi[d]$	$\pi[e]$	$\pi[f]$	$\pi[g]$	Q	u
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	$\{a,b,c,d,e,f,g\}$	$-$
0	10	∞	∞	∞	∞	1	nil	a	nil	nil	nil	nil	a	$\{b,c,d,e,f,g\}$	a
0	10	∞	∞	∞	2	1	nil	a	nil	nil	nil	g	a	$\{b,c,d,e,f\}$	g
0	10	∞	3	8	2	1	nil	a	nil	f	f	g	a	$\{b,c,d,e\}$	f
0	5	9	3	1	2	1	nil	d	d	f	d	g	a	$\{b,c,e\}$	d
0	5	7	3	1	2	1	nil	d	e	f	d	g	a	$\{b,c\}$	e
0	5	6	3	1	2	1	nil	d	b	f	d	g	a	$\{c\}$	b
0	5	6	3	1	2	1	nil	d	b	f	d	g	a	$\emptyset$	c



H2 Flüsse

Sei $G = (V, E)$ ein Flussnetzwerk und sei f ein Fluss in G. Beweisen Sie folgendes:

(a) Für alle $X, Y \subset V$ gilt $f(X, Y) = -f(Y, X)$.

(a) Für alle $X \subset V$ gilt $f(X, X) = 0$.

(a) Für alle $X, Y, Z \subset V$ mit $X \cap Y = \emptyset$ gilt $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ und $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$.

Lösung. (a)

$$f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} -f(y, x) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} -f(y, x) = -f(X, Y).$$

b) Nach Teil (a) gilt $f(X, X) = -f(X, X)$. Damit ist $f(X, X) = 0$.

c)

$$\begin{aligned} f(X \cup Y, Z) &= \sum_{v \in X \cup Y} \sum_{z \in Z} f(v, z) \\ &= \sum_{v \in X} \left(\sum_{z \in Z} f(v, z) \right) + \sum_{v \in Y} \left(\sum_{z \in Z} f(v, z) \right) \ (da\ X \cap Y = \emptyset) \\ &= f(X, Z) + f(Y, Z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(Z, X \cup Y) &= \sum_{z \in Z} \sum_{v \in X \cup Y} f(z, v) \\ &= \sum_{z \in Z} \left(\sum_{v \in X} f(z, v) \right) + \sum_{z \in Z} \left(\sum_{v \in Y} f(z, v) \right) \ (da\ X \cap Y = \emptyset) \\ &= f(Z, X) + f(Z, Y). \end{aligned}$$