**Fachbereich Mathematik**
Prof. U. Kohlenbach
Dr. B. van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 04.09.2009

# Formale Grundlagen der Informatik II

Bsc Inf, JBA Inf

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Nachname: [redacted]
Vorname: [redacted]
Matrikelnummer: [redacted]

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Gesamt | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mögl. Punktzahl | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 48+12 | |
| err. Punktzahl | | | | | | | |

vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben, die alle mit 12 Punkten bewertet sind. Um die maximale Punktzahl zu erreichen, brauchen Sie insgesamt 48 Punkte. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

**Aufgabe 1 (12 Punkte)**

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := p_1 \rightarrow ((p_2 \vee p_3) \wedge p_4)$$

(b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\varphi$ in $p_1, p_2, p_3$ an, die die folgende Wahrheitstafel hat:

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(c) Bringen Sie

$$\varphi := (p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_1 \wedge (p_3 \vee \neg p_2))$$

auf disjunktiver Normalform.

**Aufgabe 2 (12 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Hornformel-Algorithmus die minimale Belegung für die folgende Menge von Hornklauseln:

$$\begin{aligned} p \wedge t &\rightarrow u \\ q \wedge r &\rightarrow t \\ s &\rightarrow q \\ & \phantom{\rightarrow} s \\ p \wedge s &\rightarrow q \\ q &\rightarrow r \end{aligned}$$

Wieviele erfüllende Belegungen gibt es insgesamt?

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von aussagenlogischer Resolution, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\{s \rightarrow (p \wedge q), \quad s \vee t, \quad t \rightarrow (\neg p \wedge q), \quad q \rightarrow (s \wedge t)\}.$$

Hinweis: Leiten Sie erst $\{q\}$ ab.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe von Grundinstanzenresolution, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ unerfüllbar ist, wobei:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow (P(x) \leftrightarrow Q(y))), \\ \varphi_2 &:= \forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y)), \\ \varphi_3 &:= \exists x (\neg P(x) \wedge \forall y (Q(y) \wedge P(y) \rightarrow R(x,y))). \end{aligned}$$

### Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Geben Sie einen semantischen Beweis der folgenden prädikatlogisch wahren Formel:

$$\varphi := \exists x \forall y \forall z (P(x) \rightarrow P(y) \wedge P(z)).$$

(b) Bestimmen Sie die Herbrand-Normalform $\varphi^H$ von $\varphi$ und geben Sie eine tautologische Herbranddisjunktion von $\varphi$ an.

(c) Wie (b), aber mit

$$\varphi := \forall y \forall z \exists x (P(x) \rightarrow P(y) \wedge P(z)).$$

### Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y (R(x,y) \wedge P(x) \rightarrow \neg Q(y)) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \\
\varphi_3 &:= \forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x,y) \wedge \neg P(y))) \\
\varphi_4 &:= \forall x (\neg P(x) \rightarrow \exists y (R(x,y) \wedge P(y) \wedge Q(y)))
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für mindestens drei der vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

### Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) Formalisieren Sie das $n$-fache Schubfachprinzip $S_n$:

> Falls $n+1$ Bücher auf $n$ Schubladen verteilt werden, so gibt es eine Schublade, in der mindestens zwei Bücher liegen.

Hinweis: Verwenden Sie aussagenlogische Variablen $p_{i,j}$ ($1 \leqslant i \leqslant n+1, 1 \leqslant j \leqslant n$) für die Aussage "Buch $i$ liegt in Schublade $j$."

(b) Wir nennen $\mathcal{A} = (A, <)$ einen Baum, falls die folgende vier Eigenschaften gelten:

(i) $\forall x \neg(x < x)$

(ii) $\forall x \forall y \forall z\, (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$

(iii) $\exists x \forall y (x < y \vee x = y)$ (es gibt ein kleinstes Element)

(iv) für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist die Menge $\{x \in \mathcal{A} : x < a\}$ linear geordnet

$$\forall x \forall y (x < a \wedge y < a \rightarrow x < y \vee x = y \vee y < x)$$

und endlich.

Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge $\Gamma$ in der Sprache $\{<\}$ gibt, so dass $\mathcal{A} \models \Gamma$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{A}$ ein Baum ist.