Mathematik II für Informatik
13. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 13./14. Juli 2017

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Differentialgleichungen 1. Ordnung)
Welche der folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung sind *linear*, welche *nichtlinear*? Unterscheiden Sie dabei die linearen Differentialgleichungen nach *homogenen* und *inhomogenen* linearen Differentialgleichungen. Untersuchen Sie auch, welche Differentialgleichungen *autonom* sind.

(a) $y'(t) = ty(t)$
(b) $t^5y' - y(t) = 2ty(t)^2$
(c) $y'(t) - 2y(t) = \sin(t)$
(d) $y'(t)\cos(t) - y(t)\sin(t) = 1$
(e) $y'(t) = \sqrt{y(t)}$
(f) $y'(t) - t(1 + y(t)^2) = 0$
(g) $ty'(t) + y(t) = \ln(t)$
(h) $y'(t)\sqrt{y(t)} - t = 0$
(i) $y'(t) = 5t^4(y(t) + 1)$

Lösungshinweise: Es gilt:

	linear	nichtlinear	homogen	inhomogen	autonom
(a)	X		X		
(b)		X			
(c)	X			X	
(d)	X			X	
(e)		X			X
(f)		X			
(g)	X			X	
(h)		X			
(i)	X			X	

Aufgabe G2 (Fundamentalsysteme)
Kann $\left\{\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ ein Fundamentalsystem zu einem linearen System 1. Ordnung sein? Wenn ja, zu welchem?

Lösungshinweise: Nein. Denn nach Satz 7.3.5 müsste dann für alle $t \in \mathbb{R}$ lineare Unabhängigkeit gelten. Dies ist jedoch nicht der Fall, da bspw. für $t = 0$ gilt:

$$\begin{pmatrix}\sin(0) & 0\\ \cos(0) & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (System linerarer Differentialgleichungen I)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) + y_3(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) &= y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

durch Bestimmung der Eigenwerte und –vektoren der zugehörigen Matrix.

(b) Bestimmen Sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Lösungshinweise:

(a) Wir schreiben dies zunächst in Matrixform:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Ay(t).$$

Nun bestimmen wir das charakteristische Polynom der Matrix: $-\lambda^3 + 3\lambda + 2$, was als Nullstellen -1, -1 und 2 hat. Die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten sind $(1, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 1)$. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

(b) Wir setzen den Anfangswert in die allgemeine Lösung ein und erhalten

$$y(0) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 \\ -C_2 + C_3 \\ -C_1 + C_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Addieren der ersten und dritten Gleichung liefert $C_2 + 2C_3 = 1$, Subtrahieren der zweiten Gleichung schließlich $C_3 = \frac{5}{3}$. Damit ist $C_2 = -\frac{7}{3}$ und $C_1 = \frac{2}{3}$. Die Lösung, die diese Anfangsbedingung erfüllt, ist also

$$y(t) = \frac{2}{3} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{7}{3} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4 (System linearer Differentialgleichungen II)

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem sowie die Lösung von

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot y(t), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise: Zunächst ermitteln wir die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (1-\lambda)^3 + 4(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda + 5\right] \end{aligned}$$

Die Eigenwerte lauten daher

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + 2i \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 1 - 2i.$$

Als nächstes berechnen wir die Eigenvektoren und erhalten: $v_1 = (2, -3, 2)^t$, $v_2 = (0, 1, -i)^t$, $v_3 = \overline{v_2}$. Die komplexen Lösungen lauten also

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad y_2(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad y_3(t) = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Somit ist nach Satz 7.3.15 ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch

$$y_1(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ y_2(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix},\ y_3(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Lösen des Gleichungssystems $y_0 = C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) + C_3 y_3(0)$,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ergibt $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = -1$ und somit ist

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G5 (Transformation auf ein System 1. Ordnung)
Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - 3y''(t) - y'(t) + 3y(t) = 0$$

Transformieren Sie die Differentialgleichung in ein System 1. Ordnung und berechnen Sie die allgemeine Lösung der transformierten und der ursprünglichen Differentialgleichung.

Lösungshinweise: Für die Funktion

$$u(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

lautet die Differentialgleichung

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} u(t).$$

Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung

$$u(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3\,.$$

Die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung lässt sich direkt ablesen, es ist die erste Zeile von $u(t)$:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{3t}\,.$$

Aufgabe G6 (Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y^{(3)}(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = 0$.

(b) $y^{(4)}(t) - 2y^{(3)}(t) + y''(t) = 0$.

Lösungshinweise: Wir setzen in allen Fällen mit dem charakteristischen Polynom an.

(a) Hier ist das charakteristische Polynom

$$P_2(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2\,.$$

Nun ist $\lambda = 1$ eine zweifache, $\lambda = 2$ eine einfache Nullstelle. Folglich ist also e^t, te^t, e^{2t} ein Fundamentalsystem und

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t}, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3\,.$$

die allgemeine Lösung.

(b) Diese Gleichung liefert

$$P_3(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$$

und damit die Funktionen $1, t, e^t, te^t$ (man beachte $e^{0\cdot t} = 1$!) als Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung ist hier

$$y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 t e^t, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, 4\,.$$