Formale Grundlagen der Informatik II
3. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik **SS 2012**
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

Gruppenübung

Aufgabe G1

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Lösungsskizze:

(a)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$q, p \vdash p, r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$q, p \vdash q, r$}
\RightLabel{($\wedge$R)}
\BinaryInfC{$q, p \vdash p \wedge q, r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$r, p \vdash p \wedge q, r$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$q \vee r, p \vdash p \wedge q, r$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$q \vee r \vdash p \wedge q, r, \neg p$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r, \neg p$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r \vee \neg p$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$}
\end{prooftree}
$$

(b)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, q \vdash p, p \wedge r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, q \vdash q, p \wedge r$}
\RightLabel{($\wedge$R)}
\BinaryInfC{$p, q \vdash p \wedge q, p \wedge r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, r \vdash p \wedge q, p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, r \vdash p \wedge q, r$}
\RightLabel{($\wedge$R)}
\BinaryInfC{$p, r \vdash p \wedge q, p \wedge r$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$p, q \vee r \vdash p \wedge q, p \wedge r$}
\RightLabel{($\vee$R)}
\UnaryInfC{$p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$}
\end{prooftree}
$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vdash q, q \qquad r \vdash q, p}{r \vdash q, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{}{r \vdash r, p \wedge q}\,(\mathrm{Ax})}{r \vdash q \wedge r, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R})}{\neg(p \wedge q), r \vdash q \wedge r}\,(\neg\mathrm{L})}{\neg(p \wedge q) \wedge r \vdash q \wedge r}\,(\wedge\mathrm{L})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r), q \wedge r}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

Eine nicht erfüllende Belegung ist z.B. $r \mapsto 1$ und $q, p \mapsto 0$.

Aufgabe G2

(a) Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}}, 0, 1)$. Eine Formel $\varphi(x, y)$ definiert in $\mathcal{R}$ die Relation

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{R}} := \{\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \mathcal{R} \models \varphi[a, b] \,\}.$$

Geben Sie Formeln an, die die folgenden Relationen in $\mathbb{R}^2$ definieren:

i. Einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

ii. Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $2/3$.

iii. Die Strecke, welche vom Punkt $(1, 2)$ bis zum Kreis aus (i) führt und senkrecht auf diesem steht.

(b) Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass

$$\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi \quad \not\equiv \quad \exists x\, (\varphi \wedge \psi).$$

Überlegen Sie sich anhand des Semantikspiels warum Ihr Gegenbeispiel zeigt, dass die Formeln nicht äquivalent sind.

Lösungsskizze:

(a) i. $\varphi(x, y) := x \cdot x + y \cdot y = t_4$, wobei wir t_n als eine Abkürzung für $\underbrace{1 + 1 + \ldots 1}_{n-\mathrm{mal}}$ betrachten.

ii. $\varphi(x, y) := x + x = y + y + y$ oder $\varphi(x, y) := t_2 \cdot x = t_3 \cdot y$.

iii. $\varphi(x, y) := (y + y = x) \;\wedge\; (x < 1 \;\vee\; x = 1) \;\wedge\; (0 < y)$
$\wedge\; (t_4 < x \cdot x + y \cdot y \;\vee\; t_4 = x \cdot x + y \cdot y)$

(b) Man nimmt z.B. die Struktur $(\mathbb{B} = \{0, 1\}, 0, 1)$ zur Signatur $S = \{0, 1\}$ mit zwei Konstantensymbolen 0 und 1, und Formeln $\varphi(x) := x = 0$ und $\psi(x) := x = 1$.

V gewinnt das Spiel zur Formel $\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$, da sie die folgende Gewinnstrategie hat: sie wartet ab welches Konjunktsglied von **F** gewählt wird. Falls **F** das Konjunktionsglied $\exists x\, \varphi$ wählt, wählt sie $x = 0$; falls **F** das Konjunktionsglied $\exists x\, \psi$ wählt, wählt sie $x = 1$. In beiden Fällen gewinnt sie, also ist die Formel $\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$ wahr in diesem Modell.

Andererseits gewinnt **F** das Spiel zur Formel $\exists x\, (\varphi \wedge \psi)$, da er die folgende Gewinnstrategie hat: er wartet ab welches Element $x \in \mathbb{B}$ von **V** gewählt wird. Falls **V** den Wert $x = 0$ wählt, wählt er die Teilformel ψ; falls **V** den Wert $x = 1$ wählt, wählt er das Konjunktionsglied φ. In beiden Fällen gewinnt er, also ist die Formel $\exists x\, (\varphi \wedge \psi)$ unwahr in diesem Modell.

Aufgabe G3

$\preceq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \rightarrow x_4 \preceq x_3 \big) \Big).$$

Sei $\mathcal{A} = (A, \preceq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2\}$ und $\preceq^{\mathcal{A}} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.

(a) Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.
Hinweis:
   i. Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie SF(φ').
   ii. Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.
   iii. Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big)$$

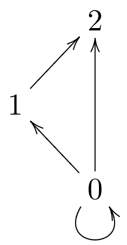
äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

Lösungsskizze:

(a) Eine Menge mit einer zweistelligen Relation ist i.A. ein (gerichteter) Graph, also kann man $\mathcal{A}$ folgendermaßen darstellen



und $\varphi^{\mathcal{A}}$ bedeutet, dass es zu zwei Elementen x_1 und x_2 ein Element x_3 gibt, mit $x_3 \to x_1$ und $x_3 \to x_2$ und sodass es zu jedem x_4 mit $x_4 \to x_1$ und $x_4 \to x_2$ eine Kante $x_4 \to x_3$ gibt. Man überprüft leicht, dass für $x_1 \mapsto 2$ und $x_2 \mapsto 2$ kein x_3 mit der benötigten Eigenschaft existiert, also $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
Als nächstes formen wir φ in Negationsnormalform um:

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big(\neg(x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big)}_{=:\varphi'}
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für beliebige $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ der Falsifizierer in der Spielposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ *eine Gewinnstrategie hat*: Angenommen der Falsifizierer zieht von der Position

$$\Big(\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big), (a_1, a_2, a_3, a_4) \Big)$$

nach

$$\left(\forall x_2 \exists x_3 \left((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right)\right), (2, a_2, a_3, a_4)\right)$$

und von dort nach

$$\left(\exists x_3 \left((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right)\right), (2, 2, a_3, a_4)\right)$$

dann hat der Verifizierer drei Möglichkeiten zu ziehen:

$a_3 \mapsto 2$:

$$\left((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 2, a_4)\right)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\left(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (2, 2, 2, a_4)\right)$$

und

$$\left(x_3 \preceq x_1, (2, 2, 2, a_4)\right)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 1$:

$$\left((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 1, a_4)\right)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\left(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 1, a_4)\right)$$

und

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2, 2, 1, 1)\right)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \models 1 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 0$:

$$\left((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 0, a_4)\right)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\left(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2, 2, 0, a_4)\right)$$

und

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2, 2, 0, 1)\right)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 0$ und $\mathcal{A} \models 1 \preceq 2$.

Also hat der Falsifizierer eine Gewinnstrategie, und es gilt $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(b) Wir zeigen, dass der Verifizierer für alle $(a'_1, a'_2) \in A \times A \setminus \{(2,2)\}$ eine Gewinnstrategie hat:
Der Verifizierer zieht von $(\psi, (a'_1, a'_2, a_3, a_4))$ nach

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (a'_1, a'_2, 0, a_4)\Big)$$

Der Falsifizierer hat nun zwei Zugmöglichkeiten:

i. Er zieht nach

$$\left(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (a'_1, a'_2, 0, a_4)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preceq x$ für alle $x \in A$.

ii. Er zieht nach

$$\left(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (a'_1, a'_2, 0, a_4)\right)$$

dann hat der Falsifizierer im nächsten Zug drei Möglichkeiten:

i. Er zieht nach

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a'_1, a'_2, 0, 0)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preceq 0$

ii. Er zieht nach

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a'_1, a'_2, 0, 1)\right)$$

oder

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a'_1, a'_2, 0, 2)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer in zwei Zügen, da a'_1 oder a'_2 ungleich 2 ist und $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 0$ bzw. $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 0$ gelten.

Hausübung

Aufgabe H1 (3 Punkte)

Geben Sie eine Ableitung der folgende AL-Sequenz in $\mathcal{SK}$ an.

$$(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$$

Lösungsskizze:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash p, r}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{}{p, q \vdash q, r}\,(\mathrm{Ax})}{p, q \vdash p \wedge q, r}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{}{r, p, q \vdash r}\,(\mathrm{Ax})}{(p \wedge q) \to r, p, q \vdash r}\,(\to\mathrm{L})}{(p \wedge q) \to r, p \vdash q \to r}\,(\to\mathrm{R})}{(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)}\,(\to\mathrm{R})$$

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $S = (E, P)$, wobei E ein 2-stelliges und P ein 1-stelliges Relationssymbol ist. Wir modellieren in dieser Signatur ein Netzwerk/Graph. Exy steht für die Aussage, das der Knoten x ist *direkt* mit y verbunden, Px steht für die Aussage, dass x aktiv ist.
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO:

(a) Jeder Knoten, der aktiv ist, ist mit jedem anderen aktiven Knoten direkt verbunden.

(b) Jeder Knoten, der aktiv ist, ist mit jedem anderen aktiven Knoten über maximal 2 andere aktive Knoten erreichbar.

(c) Weder alle Knoten sind aktiv noch alle inaktiv.

(d) Jeder Knoten ist mit mindestens 3 anderen direkt verbunden.

Lösungsskizze:

(a) $\forall x \forall y \, (\neg(x = y) \land Px \land Py \to Exy)$

(b)

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \exists a \exists b \Big(& \neg(x = y) \land Px \land Py \\ \to \big[& Exy \lor (Pa \land Exa \land Eay) \lor (Pa \land Pb \land Exa \land Eab \land Eby) \big] \Big) \end{aligned}$$

(c) $\exists x \neg Px \land \exists x Px$

(d) $\forall x_0 \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \left(\bigwedge_{i \neq j} \neg[x_i = x_j] \land \bigwedge_{i=1}^{3} Ex_0 x_i \right)$