Mathematik II für Informatik
7. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 01./02. Juni 2017
Abgabe: 08./09. Juni 2017

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wissenscheck - Differenzierbarkeit)
Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) f ist stetig in $x \in \mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad$ f ist differenzierbar in x.

(b) f ist differenzierbar mit $f'(x) > 0$, für alle $x \in \mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad$ $h := \frac{1}{f}$ ist differenzierbar mit $h' = \frac{1}{f'}$.

(c) f ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R}$. $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ existiert.

(d) $f \cdot g$ ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow\quad$ f und g sind differenzierbar in x.

Lösungshinweise:

(a) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = |x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar in $x = 0$.

(b) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = e^x$. Dann ist $f' = f > 0$, aber für $h(x) := \frac{1}{f(x)} = e^{-x}$ ist

$$h'(x) = \left(e^{-x}\right)' = -e^{-x} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{f'(x)} = e^{-x}.$$

(c) Richtig. Dies entspricht gerade Bemerkung 6.1.2. Dies sieht man bspw. ein, indem man $k := -h$ definiert. Dann ergibt sich

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(x)}{k}.$$

(d) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = g(x) = |x|$. Nach Beispiel 6.1.3 sind f und g nicht differenzierbar in $x = 0$, aber $f(x) \cdot g(x) = x^2$ ist nach Beispiel 6.1.6 differenzierbar.

Aufgabe G2 (Potenzreihen und Differenzierbarkeit)

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und für alle x im Konvergenzbereich den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n.$$

(b) Ermitteln Sie den Konvergenzradius r und geben Sie den Wert $f(x)$ der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n$$

für $x \in (-r, r)$ an.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihe für die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$, wobei $|x| < r$.

Lösungshinweise:

(a) Wir verwenden Satz 6.1.15 aus der Vorlesung. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (x^n)'' \\
&= x^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n \right)'' \qquad \text{für alle} \quad |x| < 1 \quad \text{nach Satz 6.1.15} \\
&= x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - x \right)'' = x^2 \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x \right)'' = x^2 \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right)' = x^2 \frac{2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Also hat die Potenzreihe Konvergenzradius 1 nach Satz 6.1.15 und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

(b) Wir erhalten den Konvergenzradius direkt aus Aufgabe H2b) des 5. Übungsblattes, indem wir dort $c := 4$ wählen. Damit ergibt sich : $r = c^2 = 4^2 = 16$.
Alternativ rechnen wir nach:
Gegeben ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n.$$

Mit

$$a_n := \frac{(-1)^n}{4^{2n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{4^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{16}\right)^n} = \frac{1}{16},$$

womit sich mit dem *Wurzelkriterium* der *Konvergenzradius*

$$r = 16$$

ergibt.

Ist nun $x \in (-16, 16)$ beliebig gewählt, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{16}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{16}\right)} = \frac{16}{16+x}$$

(die zweite Reihe ist die uns schon bekannte *geometrische Reihe*) und somit ist

$$f(x) = \frac{16}{16+x}$$

der Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^n.$$

(c) Es sei erneut ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 16$ gewählt. Nach Satz 6.1.15 und Aufgabenteil (a) folgt:

$$f'(x) = \frac{-16}{(16+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(-1)^{n+1}}{16^{n+1}} x^n$$

und

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{(-1)^n}{4^{2n}} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \frac{(-1)^n}{16^{n+2}} x^n.$$

Aufgabe G3 (Produktregel)

(a) Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Beweisen Sie, dass $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar ist und zeigen Sie die Produktregel:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = a^{(x+5)^2}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^2+1} x^a,$$

wobei a eine positive reelle Zahl ist.

Lösungshinweise:

(a) Da die Funktionen f und g in x_0 differenzierbar sind, sind sie auch in x_0 stetig (Satz 6.1.4). Folglich gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ bzw. $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Wir betrachten nun den Grenzwert des Differenzenquotienten. Sofern dieser existiert entspricht er der Ableitung. Mit den Grenzwertsätzen folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}$$

(b) Mit Hilfe der Sätze 6.1.9 und 6.1.10 erhalten wir

$$f_1'(x) = (e^{(x+5)^2 \ln a})' = e^{(x+5)^2 \ln a} \cdot ((x+5)^2 \ln a)' = 2(x+5) \ln a \cdot a^{(x+5)^2},$$

$$f_2'(x) = \Big(\frac{1}{x^2+1}\Big)' x^a + \frac{1}{x^2+1} (x^a)' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} x^a + \frac{a}{x^2+1} x^{a-1}.$$

Aufgabe G4 (Ableitungen der hyperbolischen Funktionen)

Überprüfen Sie die folgenden Beziehungen für die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen:

$$\begin{aligned}
(\sinh(x))' &= \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\
(\cosh(x))' &= \sinh(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\
(\tanh(x))' &= 1 - \tanh^2(x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Verwenden Sie dazu nur die Definitionen des sinus hyperbolicus und cosinus hyperbolicus!

Lösungshinweise: Mit der Definition 5.10.22 sowie den Sätzen 6.1.9 und 6.1.10 erhalten wir

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x,$$
$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$
$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

Aufgabe G5 (Differenzierbarkeit)
Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot |x|$, und untersuchen Sie die Differenzierbarkeit von f auf $\mathbb{R}$.

Lösungshinweise: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x| = \begin{cases} x : & x > 0 \\ 0 : & x = 0 \\ -x : & x < 0 \end{cases},$$

und somit ist

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 : & x > 0 \\ 0 : & x = 0 \\ -x^2 : & x < 0 \end{cases}.$$

Auf dem Intervall $I_1 = (0, \infty)$ stimmt die Funktion f mit der Abbildung $g_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, die durch die Zuordnungsvorschrift $g_1(x) := x^2$ gegeben ist, überein und ist somit differenzierbar auf I_1. Bezüglich des Intervalls $I_2 = (-\infty, 0)$ stimmt f mit der Abbildung $g_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = -x^2$ überein und ist daher auf I_2 ebenfalls differenzierbar. Es bleibt nur noch die Stelle $x_0 = 0$ zu untersuchen.
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x_0$ ist der Differenzenquotient von f durch

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x \cdot |x| - 0}{x - 0} = |x|$$

gegeben, sodass sich aufgrund der Stetigkeit der Betragsfunktion die Differenzierbarkeit von f an der Stelle $x_0 = 0$ folgern läßt, da nunmehr der Grenzwert

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0$$

existiert. Somit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x : & x > 0 \\ 0 : & x = 0 \\ -2x : & x < 0 \end{cases}$$
$$= 2 \cdot |x|.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Differenzierbarkeit und Ableitungen) (12 Punkte)
Prüfen Sie die folgenden reellen Funktionen auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die Ableitung. Betrachten Sie dazu jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich. Bitte achten Sie darauf, dass die Rechenwege gut erkennbar sind.

(a) $f_1(x) = \sqrt{x} + x^2 - 2x + 9$.

(b) $f_2(x) = \frac{2x^2-8}{4x}$.

(c) $f_3(x) = \left(x^2 + 7x - 3\right)^{100}$.

(d) $f_4(x) = \sin(\ln(\cos(x) + 1))$.

(e) $f_5(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0 \\ x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{sonst.} \end{cases}$

(f) $f_6(x) = x^x$.

Lösungshinweise:

(a) Aufgrund der Wurzel ist f_1 nur auf $[0, \infty[$ definiert. Auf $]0, \infty[$ lautet die Ableitung

$$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x - 2.$$

Die Funktion ist allerdings in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} + x^2 - 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} + x - 2 = \infty.$$

(b) Der Definitionsbereich von f_2 ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit der Quotientenregel erhält man für die Ableitung

$$f_2'(x) = \frac{(2x^2-8)' \cdot 4x - (2x^2-8) \cdot (4x)'}{(4x)^2} = \frac{4x \cdot 4x - (2x^2-8) \cdot 4}{16x^2} = \frac{x^2+4}{2x^2}.$$

(c) f_3 ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Differenzierbarkeit folgt mit der Kettenregel und man erhält

$$(f_3(x))' = \left((x^2 + 7x - 3)^{100}\right)' = 100(x^2 + 7x - 3)^{99} \cdot (x^2 + 7x - 3)' = 100(x^2 + 7x - 3)^{99} \cdot (2x + 7)$$

(d) Der maximale Definitionsbereich für f_4 lautet $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Hier folgt die Differenzierbarkeit nach Kettenregel

$$f_4'(x) = -\cos(\ln(\cos(x) + 1)) \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}.$$

(e) Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f_5 nach Ketten- und Produktregel auch differenzierbar mit Ableitung

$$f_5'(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nun betrachten wir $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{f_5(x) - f_5(x_0)}{x - x_0} \right| = \lim_{x\to 0} \left| \frac{x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right| = \lim_{x\to 0} \left| x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \le \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Folglich ist $f_5'(0) = 0$.

(f) Der maximale Definitionsbereich von f_6 ist $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Wegen $f_6(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$ ist f_6 nach Ketten- und Produktregel differenzierbar.

$$f_6'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$$

Aufgabe H2 (konvexe Funktionen) (12 Punkte)
Wir nennen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Interval I *konvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

gilt.
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Interval I konvex, und seien $a, b \in I$ mit $a < b$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (a,b)$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

(c) Sei f auf dem Interval I zweimal differenzierbar. Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass auf I

$$f'' \geq 0$$

ist.
Bemerkung: Man beachtet, dass die entgegengesetzte Behauptung auch erfüllt ist. Tatsächlich ist f auf I konvex genau dann, wenn $f'' \geq 0$ auf I gilt.

Lösungshinweise:

(a) Aus $x \in [a,b]$ folgt, dass es ein $\lambda \in [0,1]$ gibt mit $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Daraus ergibt sich

$$\lambda = \frac{b-x}{b-a} \quad \text{und} \quad (1-\lambda) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Einsetzen in die Definition einer konvexen Funktion ergibt die Ungleichung

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{1}$$

(b) Durch Multiplikation von Ungleichung (1) erhält man

$$\begin{aligned}
& (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b) \\
\Leftrightarrow \quad & (b-a)f(x) \leq (b-a)f(a) + (x-a)(f(b)-f(a)) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a},
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
& (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b) \\
\Leftrightarrow \quad & (b-a)f(x) \leq (b-x)(f(a)-f(b)) + (b-a)f(b) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.
\end{aligned}$$

(c) Aus Aufgabenteil (b) folgt

$$f'(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \lim_{x\to b-} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(b).$$

Da a und b in I beliebig waren, ist f' auf I monoton wachsend. Sei nun $\xi \in I$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}.$$

Da f' monoton wachsend ist, sind die Vorzeichen von $f'(x)-f'(\xi)$ und $x-\xi$ stets gleich. Also ist $f''(\xi)$ positiv. Da ξ in I beliebig war, ist f'' auf I positiv.

Aufgabe H3 (Mittelwertsatz) (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ Lipschitz-stetig ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die folgende Ungleichungskette:

$$1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}, \quad -1 < x < \infty.$$

Lösungshinweise:

(a) Unter Verwendung des Mittelwertsatzes gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Abschätzung:

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\{|f'(t)|\}|x-y| \quad \text{mit } x < \xi < y.$$

Also ist f Lipschitz-stetig , falls $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{|f'(t)|\}$ existiert.

In unserem Fall ist $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, somit ist $|f'(x)| = 2\frac{|x|}{(1+x^2)^2} < 2\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} < 2$, und es gilt mittels obiger Abschätzung

$$|f(x)-f(y)| \leq 2|x-y|.$$

(b) Wir betrachten die Funktion $f: (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{1+x}$.
Laut Mittelwertsatz existiert eine Konstante $c \in (0,x)$, falls $x > 0$ ist, bzw. $c \in (x,0)$, falls $x < 0$ ist, sodass

$$f(x)-f(0) = f'(c)(x-0) = f'(c)x = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}x \quad \text{ist.}$$

Wir erhalten somit die folgende Abschätzung

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}x \geq \frac{1}{2\sqrt{1+x}}x.$$

Hieraus folgt die erste Ungleichung der Ungleichungskette. (Klar für $x > 0$. Falls $x < 0$ ist, gilt $\frac{1}{2\sqrt{1+c}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Durch Multiplikation mit $x < 0$ folgt dann die gewünschte Ungleichung.) Die zweite Ungleichung dieser Kette erhält man aus der Abschätzung

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}x \leq \frac{1}{2}x.$$