Ziel: Vollständigkeit → Abschnitt 6.3

Definitionen:

Ableitbarkeit aus Theorie $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0$:

φ **ableitbar aus** $\mathbf{\Phi}$ $[\Phi \vdash \varphi]$ gdw.

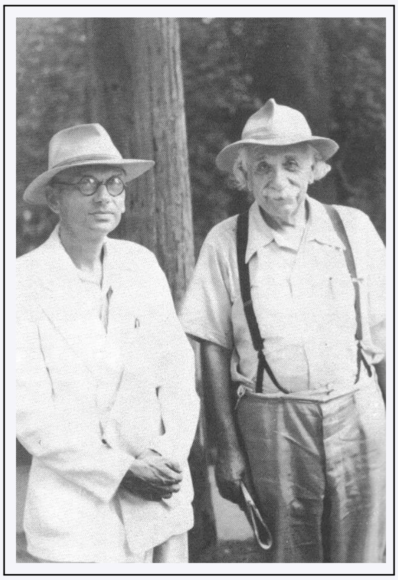
für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$ (Voraussetzungen) ist $\Gamma_0 \vdash \varphi$ ableitbar.

$\mathbf{\Phi}$ **konsistent** (widerspruchsfrei) gdw. *nicht* $\Phi \vdash \emptyset$.

Vollständigkeit (starke Form) ... **Korrektheit**

Vollständigkeit	Korrektheit
$\Phi \models \varphi \;\Rightarrow\; \Phi \vdash \varphi$	$\Phi \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Phi \models \varphi$
Φ konsistent $\Rightarrow$ Φ erfüllbar	Φ erfüllbar $\Rightarrow$ Φ konsistent
alles, was wahr ist, ist ableitbar	alles, was ableitbar ist, ist wahr

Kurt Gödel (1906–1978)



mit Albert Einstein

der Logiker des 20. Jahrhunderts

Gödelscher Vollständigkeitssatz (Satz 6.7)

(Vollständigkeit & Korrektheit des Sequenzenkalküls)

Für jede Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$
und jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$ gelten:

- $\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \vdash \varphi$.
- Φ erfüllbar gdw. Φ konsistent.

Zentrale Folgerungen

Kompaktheitssatz (wesentlich neuer Zugang)

Allgemeingültigkeit rekursiv aufzählbar
(später: nicht entscheidbar)

Vollständigkeitsbeweise → Abschnitt 6.3

zu zeigen: Konsistenz $\Rightarrow$ Erfüllbarkeit

$$\left.\begin{array}{r}\text{nicht-Ableitbarkeit}\\ \text{best. Sequenzen}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Existenz eines Modells}$$

dazu

Ableitbarkeit von Sequenzen aus einer Satzmenge

Ableitbarkeit unter gegebenen Voraussetzungen:

$\Gamma \vdash \Delta$ *ableitbar aus* Φ gdw. für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$
$\Gamma_0, \Gamma \vdash \Delta$ ableitbar ist.

Vollständigkeitsbeweise (Grundideen)

Hintikka-Konstruktion (Vollständigkeit von $\mathcal{SK}^{\neq}$ bzw. $\mathcal{SK}$)

zeige: $\Gamma \vdash \Delta$ *nicht* ableitbar aus $\Phi \;\Rightarrow\; \Phi \cup \Gamma \cup \Delta^{\neg}$ erfüllbar

Man findet Modell einer induktiv geeignet gewählten Obermenge von $\Phi \cup \Gamma \cup \Delta^{\neg}$ ($\rightarrow$ Hintikka-Menge).

Henkin-Konstruktion (Vollständigkeit von $\mathcal{SK}^{+}$, einfacher)

zeige: Φ *konsistent* $\;\Rightarrow\;$ Φ erfüllbar

Man findet Modell einer induktiv geeignet gewählten vollständigen Obermenge von Φ ($\rightarrow$ Henkin-Menge).
in beiden Fällen: Modelle (als Quotienten von) Herbrand-Strukturen

im Sequenzenkalkül mit Schnittregeln:

Satz

Für konsistentes Φ:
$\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent gdw. *nicht* $\Phi \vdash \varphi$.

Begründung:

(1) Falls $\Gamma \vdash \varphi$ ableitbar ist, so auch $\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset$ mit $(\neg L)$

(2) Falls $\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset$ ableitbar, so auch $\Gamma \vdash \varphi$:

$$\text{(mod. pon.)}\ \dfrac{(\neg R)\ \dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(Ax)}{\emptyset \vdash \neg\varphi, \varphi}\,(\neg R)}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}\,(\neg L)}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Bem: Ebenso auch $\Phi \cup \{\varphi\}$ konsistent gdw. *nicht* $\Phi \vdash \neg\varphi$.

Henkin-Mengen: vollständig mit Existenzbeispielen

$\hat{\Phi} \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$ *Henkin-Menge*, falls konsistent und:

- für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$: $\varphi \in \hat{\Phi} \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \hat{\Phi}$.
  (maximale Konsistenz; Vollständigkeit)
- für jedes $\psi(x) \in \mathrm{FO}(S)$ existiert $t \in T_0(S)$ mit
  $(\forall x \neg\psi(x) \vee \psi(t/x)) \in \hat{\Phi}$. (vgl. $\exists x\psi(x) \rightarrow \psi(t/x)$)
  (Existenzbeispiele, vgl. Skolemfunktionen)

Henkin-Methode:

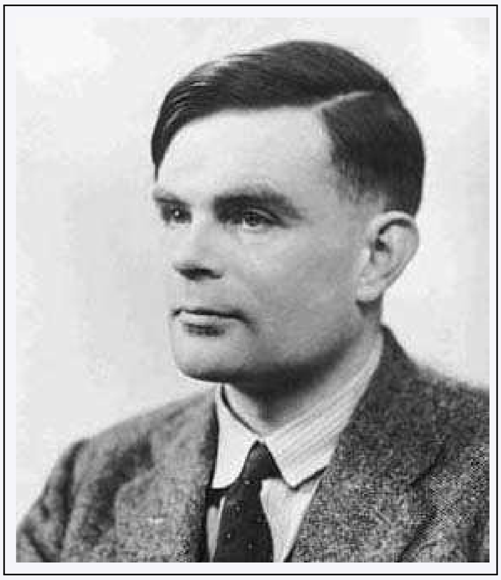
Zu konsistentem Φ finde Henkin-Menge $\hat{\Phi} \supseteq \Phi$

$\mathrm{FO}^{\neq}$ (*ohne Gleichheit*): Herbrand-Modell aus Henkin-Menge $\hat{\Phi}$.

FO (*mit Gleichheit*): Quotienten bzgl. der in $\hat{\Phi}$ postulierten Gleichheitsrelation auf $T_0(S)$.

Unentscheidbarkeit — Church–Turing

Church (1903–1995)



Turing (1912–1954)

Unentscheidbarkeit von SAT(FO) → Abschnitt 7.1

Satz von Church und Turing
$\mathrm{SAT(FO)}$ ist unentscheidbar.
genauer: nicht rekursiv aufzählbar.

Beweis: Reduktion des Halteproblems

FO ausreichend ausdrucksstark für Kodierung des Verhaltens von TM (in einzelnen Sätzen)

Finde berechenbare Zuordnung

$$\mathcal{M}, w \quad \longmapsto \quad \varphi_{\mathcal{M},w} \in \mathrm{FO}_0(S_{\mathcal{M}}),$$

$$\boxed{\varphi_{\mathcal{M},w} \text{ erfüllbar gdw. } w \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty}$$

Idee: $\varphi_{\mathcal{M},w}$ besagt, dass die Konfigurationenfolge in der Berechnung von $\mathcal{M}$ auf w nicht abbricht.

Reduktion des Halteproblems auf SAT(FO)

einfache Variante

zu $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, q^+, q^-)$
wähle als Signatur $S_{\mathcal{M}}$:

succ	Nachfolgerfunktion, 1-st.	(Schritt-/Positionszähler)
pred	Vorgängerfunktion, 1-st.	
0	Konstante	
R_a	2-st. Relation für $a \in \Sigma \cup \{\Box\}$	(Bandbeschriftung)
Z_q	1-st. Relation für $q \in Q$	(Zustände)
K	2-st. Relation	(Kopfpositionen)

---

intendierte Interpretation über $\mathbb{Z}$:

$(t, i) \in R_a$: in Konfiguration C_t steht ein a in Zelle i.
$t \in Z_q$: in Konfiguration C_t ist $\mathcal{M}$ im Zustand q.
$(t, i) \in K$: in Konfiguration C_t steht der Kopf bei Zelle i.

Reduktion: zu $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, q^+, q^-)$, $w = a_1 \dots a_n$

$$\varphi_{\mathcal{M},w} := \varphi_0 \wedge \varphi_{\text{start}} \wedge \varphi_\delta \wedge \varphi_\infty$$

$$\varphi_0 \quad := \quad \begin{cases} \forall x\, (\text{pred succ}\, x = x \;\wedge\; \text{succ pred}\, x = x) & \\ \forall t \forall y\, \neg(R_a ty \wedge R_{a'} ty) & \text{für } a \neq a' \\ \forall t\, \neg(Z_q t \wedge Z_{q'} t) & \text{für } q \neq q' \\ \forall t \forall y \forall y'\, ((Kty \wedge Kty') \to y = y') & \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{start}} \quad := \quad K00 \wedge Z_{q_0} 0 \wedge \begin{bmatrix} \bigwedge_{i=1}^n R_{a_i} 0\, \text{succ}^i\, 0 \\ \wedge \forall y\, ((\bigwedge_{i=1}^n \neg y = \text{succ}^i\, 0) \to R_\Box 0 y) \end{bmatrix}$$

$$\varphi_\delta \quad := \quad \forall t \forall t'\, (t' = \text{succ}\, t \to \psi(t, t'))$$

$\psi(t, t')$, z.B. Beitrag für $\delta(q, b) = (b', >, q')$:

$$\forall y\, ((Z_q t \wedge Kty \wedge R_b ty) \to (Z_{q'} t' \wedge Kt' \text{succ}\, y \wedge R_{b'} t' y))$$

$$\varphi_\infty \quad := \quad \forall t\, \neg(Z_{q^+} t \vee Z_{q^-} t)$$

- $w \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty \;\Rightarrow\; \varphi_{\mathcal{M},w}$ erfüllbar
- $w \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathrm{STOP} \;\Rightarrow\; \varphi_{\mathcal{M},w}$ unerfüllbar

weitere Unentscheidbarkeitsaussagen $\to$ Abschnitt 7.2

$\mathrm{FINSAT(FO)}$: Sätze, die in *endlichen* Modellen erfüllbar sind

beachte: $\mathrm{FINSAT(FO)}$ ist rekursiv aufzählbar (warum, wie?)

Variation der Reduktion aus Church/Turing liefert:

Satz von Traktenbrot
$\mathrm{FINSAT(FO)}$ ist unentscheidbar.

tiefliegender:

Satz von Tarski
$\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ist unentscheidbar,
nicht rekursiv axiomatisierbar.

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$, $\quad \mathrm{Th}(\mathcal{N}) := \{\varphi \in \mathrm{FO}_0 : \mathcal{N} \models \varphi\}$
die erststufige Theorie der Arithmetik