Hausübung

Aufgabe H5.1 (Kompaktheit) (12 Punkte)
Zeigen Sie, dass es über der leeren Signatur $\sigma = \emptyset$ keine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(\emptyset)$ gibt, für die

$$\mathcal{A} \models \Phi \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist endlich.}$$

Lösung: Wir setzen

$$\varphi_{\geq k} := \exists x_1 \dots \exists x_k \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$$

für $k \geq 1$. Damit gilt für eine Struktur $\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A} \models \varphi_{\geq k}$ genau dann, wenn $|A| \geq k$. Die Menge

$$\Phi \cup \{\varphi_k : k \geq 1\}$$

ist somit unerfüllbar, und aufgrund des Kompaktheitssatzes gibt es bereits eine endlich Teilmenge dieser Menge, die ebenfalls unerfüllbar ist. Diese kann aber nur endlich viele der $\varphi_{\geq k}$ enthalten und ist damit eine Teilmenge von

$$\Phi \cup \{\varphi_{\geq 1}, \dots, \varphi_{\geq n}\}$$

für ein $n \geq 1$. Die Menge $\{1, \dots, n+1\}$, aufgefasst als $\emptyset$-Struktur, ist jedoch ein Modell dieser Formelmenge.

Aufgabe H5.2 (Resolutionskalkül, typische Klausuraufgabe) (12 Punkte)
Im Folgenden seien Q, R und S Relationssymbole und f ein Funktionssymbol passender Stelligkeit.

(i) Wir betrachten die Formelmenge $\Phi_1 := \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, wobei

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y \forall z (Rxy \lor Rxz \lor Ryz),\\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z ((Rxy \land Ryz) \to Rxz),\\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y (Rxy \to Rfxfy) \text{ und}\\
\varphi_4 &:= \forall x \neg Rxffx.
\end{aligned}$$

Machen Sie sich klar, dass und warum Φ_1 unerfüllbar ist. Weisen Sie dann ausgehend von Ihren Überlegungen mittels Grundinstanzen-Resolution formal nach, dass Φ_1 unerfüllbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\Phi_2 := \{\forall x \forall y ((Qy \land Rxy) \to Sy), \forall x \forall y ((Sx \land Rxy) \to \neg Qy), \forall x \exists y (Rxy \land Qy)\}$$

Lösung:

(i) (2 Punkte) Wir betrachten die Terme c, fc und ffc. Wegen φ_1 muss mindestens eins der Paare (c, fc), (fc, ffc) und (c, ffc) in $R^{\mathcal{H}}$ sein. Wegen φ_4 is (c, ffc) nicht in $R^{\mathcal{H}}$. Mit φ_3 folgt, dass $(fc, ffc) \in R^{\mathcal{H}}$, und (wieder mit φ_3) auch $(ffc, fffc) \in R^{\mathcal{H}}$. Mit φ_2 folgt nun $(fc, fffc) \in R^{\mathcal{H}}$, im Widerspruch zu φ_4.
(4 Punkte) Als GI-Resolution ergibt sich:

$$\begin{tikzcd}
 & \{Rcfc, Rcffc, Rfcffc\} \arrow[dr] & \{\neg Rcffc\} \arrow[d] \\
 & \{\neg Rcfc, Rfcffc\} \arrow[dr] & \{Rcfc, Rfcffc\} \arrow[d] \\
 & \{\neg Rfcffc, Rffcfffc\} \arrow[d] & \{Rfcffc\} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
\{\neg Rfcffc, \neg Rffcfffc, Rfcfffc\} \arrow[dr] & \{Rffcfffc\} \arrow[d] & \\
 & \{\neg Rfcffc, Rfcfffc\} \arrow[dr] & \\
 & \{\neg Rfcfffc\} \arrow[dr] & \{Rfcfffc\} \arrow[d] \\
 & & \square
\end{tikzcd}$$

(ii) (2 Punkte) Wir führen eine Zeugenfunktion f für den Existenzquantor in der dritten Formel ein und erhalten $\forall x\,(Rxfx \wedge Qfx)$. Damit erhalten wir folgende Klauseln:

$$\{\neg Qy, \neg Rxy, Sy\}, \{\neg Sx, \neg Rxy, \neg Qy\}, \{Rxfx\}, \{Qfx\}$$

(4 Punkte) Als GI-Resolution ergibt sich nun:

$$\begin{tikzcd}
\{Qfc\} \arrow[dr] & \{\neg Qfc, \neg Rcfc, Sfc\} \arrow[d] \\
\{Rcfc\} \arrow[dr] & \{\neg Rcfc, Sfc\} \arrow[d] \\
\{\neg Sfc, \neg Rfcffc, \neg Qffc\} \arrow[dr] & \{Sfc\} \arrow[d] \\
\{Qffc\} \arrow[dr] & \{\neg Rfcffc, \neg Qffc\} \arrow[d] \\
\{Rfcffc\} \arrow[dr] & \{\neg Rfcffc\} \arrow[d] \\
 & \square
\end{tikzcd}$$

Aufgabe H5.3 (Sequenzenkalkül, alte Klausuraufgabe) (12 Punkte)
Sei $\varphi = \varphi(x)$ eine beliebige FO-Formel (mit x als einziger freier Variable) und P ein einstelliges Relationssymbol.

(a) Weisen Sie nach, dass (unabhängig von φ) die folgende Sequenz nicht allgemeingültig ist:

$$\forall x\,\big(Px \to \varphi(x)\big) \vdash \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)$$

(Hier und im Folgenden ist das Symbol „$\to$" wie üblich zu eliminieren.)

(b) Argumentieren Sie *semantisch*, dass die folgende Sequenz allgemeingültig ist:

$$\forall x\,\big(Px \to \varphi(x)\big) \vdash \forall x\,\neg Px,\ \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)$$

(c) Welche der folgenden „Varianten" der Sequenz aus (b) sind allgemeingültig, welche nicht? Es ist keine Begründung verlangt.

			allg.-gültig	nicht allg.-gültig
$\neg Pc \vee \varphi[c/x]$	$\vdash$	$\forall x\,\neg Px,\ \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)$	□	□
$\neg Pc \vee \varphi[c/x]$	$\vdash$	$\neg Pc,\ \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)$	□	□
$\neg Pc \vee \varphi[c/x]$	$\vdash$	$\forall x\,\neg Px,\ \ Pc \wedge \varphi[c/x]$	□	□
$\forall x\,\big(\neg Px \vee \phi(x)\big)$	$\vdash$	$\neg Pc,\ \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)$	□	□

(d) Leiten Sie die Sequenz aus (b) im Sequenzenkalkül ab.

Lösung:

(a) (2 Punkte) Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, in der $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$ gilt. Dann gilt, unabhängig von der gewählten Formel $\varphi(x)$, dass

$$\mathcal{A} \models \forall x\,\big(Px \to \varphi(x)\big) \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \not\models \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big),$$

die Sequenz ist also nicht allgemeingültig.

(b) (2 Punkte) Sei $\mathcal{A}$ ein Modell der Formel auf der linken Seite der Sequenz, also $\mathcal{A} \models \forall x\,\big(Px \to \varphi(x)\big)$. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{A}$ mindestens eine der beiden Formeln auf der rechten Seite erfüllt. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle: Falls $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$, dann gilt $\mathcal{A} \models \forall x\,\neg Px$. Anderenfalls gibt es ein $a \in P^{\mathcal{A}}$, und wegen $\mathcal{A} \models \forall x\,\big(Px \to \varphi(x)\big)$ gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi[a].$$

Damit gilt auch $\mathcal{A} \models \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)$.

(c) (4 Punkte)

	allg.-gültig	nicht allg.-gültig
$\neg Pc \vee \varphi[c/x] \;\vdash\; \forall x\, \neg Px,\; \exists x\, \big(Px \wedge \varphi(x)\big)$	☐	☒
$\neg Pc \vee \varphi[c/x] \;\vdash\; \neg Pc,\; \exists x\, \big(Px \wedge \varphi(x)\big)$	☒	☐
$\neg Pc \vee \varphi[c/x] \;\vdash\; \forall x\, \neg Px,\; Pc \wedge \varphi[c/x]$	☐	☒
$\forall x\, \big(\neg Px \vee \phi(x)\big) \;\vdash\; \neg Pc,\; \exists x\, \big(Px \wedge \varphi(x)\big)$	☒	☐

(d) (4 Punkte)

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\neg Pc \vdash \neg Pc, \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)}\,\text{Ax}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{}{\varphi[c/x], Pc \vdash Pc}\,\text{Ax}
          \quad
          \dfrac{}{\varphi[c/x], Pc \vdash \varphi[c/x]}\,\text{Ax}
        }{\varphi[c/x], Pc \vdash Pc \wedge \varphi[c/x]}\,\wedge\text{R}
      }{\varphi[c/x], Pc \vdash \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)}\,\exists\text{R}
    }{\varphi[c/x] \vdash \neg Pc, \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)}\,\neg\text{R}
  }{
    \dfrac{\neg Pc \vee \varphi[c/x] \vdash \neg Pc, \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)}{\forall x\,\big(\neg Px \vee \varphi(x)\big) \vdash \neg Pc, \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)}\,\forall\text{L}
  }\,\forall\text{L}
}{\forall x\,\big(\neg Px \vee \varphi(x)\big) \vdash \forall x\,\neg Px, \exists x\,\big(Px \wedge \varphi(x)\big)}\,\forall\text{R}
$$