Aussagenlogik & Prädikatenlogik (FGdI II) 2. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Felix Canavoi, Kord Eickmeyer

WiSe 2015/16
27. April 2016

Gruppenübung

Aufgabe G2.1 (Warm-up)
Betrachten Sie die folgenden fünf Aussagen über Gedichte.

(a) Kein interessantes Gedicht ist unbeliebt unter Leuten mit gutem Geschmack.

(b) Kein modernes Gedicht ist ungekünstelt.

(c) Alle Deine Gedichte handeln von Seifenblasen.

(d) Kein gekünsteltes Gedicht ist beliebt unter Leuten mit gutem Geschmack.

(e) Kein antikes Gedicht handelt von Seifenblasen.

Formalisieren Sie diese fünf Aussagen in der Aussagenlogik und leiten Sie eine weitere Aussage über "Deine Gedichte" ab, indem Sie alle fünf obigen Aussagen nutzen.
[Aus *Symbolic Logic* von Lewis Carroll]

Aufgabe G2.2 (AL-Kompaktheit)

(a) Beweisen Sie den Kompaktheitssatz für AL($\mathcal{V}$) mit abzählbarer Variablenmenge $\mathcal{V}$ direkt als Anwendung von Königs Lemma.

Anleitung: Sei $\Phi = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $\Phi_n = \{\varphi_i : i < n\}$ erfüllbar. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{var}_n = \mathrm{var}(\Phi_n)$, wobei $\mathrm{var}(\Phi)$ die Menge der Variablen beschreibt, die in Φ vorkommen.

Wir definieren einen Baum $\mathcal{T} = (V, E, \lambda)$ wie folgt. V enthält alle Tupel der Form $(\mathfrak{I}, n)$, wobei $\mathfrak{I}$ eine erfüllende var_n-Belegung von Φ_n ist. Die Kantenrelation E verbindet einen Knoten der Form $(\mathfrak{I}, n)$ mit einem Knoten der Form $(\mathfrak{I}', n+1)$, wenn $\mathfrak{I}$ die Einschränkung von $\mathfrak{I}'$ auf var_n ist. Setzen Sie $\lambda = (0, \mathfrak{I}_0)$, wobei $\mathfrak{I}_0$ die leere Belegung ist.

Zeigen Sie, dass

i. $\mathcal{T}$ tatsächlich ein Baum ist.

ii. $\mathcal{T}$ endlich verzweigt ist.

iii. $\mathcal{T}$ unendlich viele Knoten besitzt.

Wenden Sie Königs Lemma an, um eine erfüllende Belegung für Φ zu gewinnen.

(b) Beweisen Sie Königs Lemma als direkte Anwendung des AL-Kompaktheitssatzes. Wie in der Vorlesung erläutert, beschreibt man dazu die möglichen Auswahlen von Knoten längs eines unendlichen Pfades im vorgelegten Baum so durch eine unendliche Menge von AL-Bedingungen, dass jede endliche Teilmenge erfüllbar ist und aus der Erfüllbarkeit der gesamten Menge die Existenz eines unendlichen Pfades folgt.

Hinweis: Nehmen Sie eine boolesche Variable für jede Entscheidung, einen Knoten aufzunehmen oder nicht; und geeignete Bedingungen, die Sackgassen verbieten.

Aufgabe G2.3 (Kompaktheitssatz für Parkettierungen)
Ein Parkettierungs-System $\mathcal{D} = (D, H, V)$ ist gegeben durch eine endliche Menge D von Kacheltypen und zwei Relationen $H, V \subseteq D \times D$, die beschreiben, wann zwei Kacheltypen horizontal bzw. vertikal nebeneinanderpassen, d.h. $(d, e) \in H$ gdw. e rechts neben d passt und $(d, e) \in V$ gdw. e über d passt.
Eine gegebene Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ besitzt eine Pakettierung, wenn sie korrekt mit Kacheln belegt werden kann, d.h. benachbarte Kacheln passen in ihrem Typ gemäß H und V zusammen. (Wir gehen davon aus, dass wir unbegrenzt viele Kacheln jedes Typs haben)
Weisen Sie nach, dass für ein endliches Parkettierungs-System $\mathcal{D} = (D, H, V)$ stets äquivalent sind:

(a) Es existiert eine Parkettierung auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) Es existiert eine Parkettierung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(c) Es existieren Parkettierungen auf $(n \times n)$-Quadraten für beliebig große $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Benutzen Sie AL-Variablen p_{dij} für $d \in D, i, j \in \mathbb{Z}$, die besagen dass in Position (i, j) eine Kachel vom Typ d liegt. Die Bedingungen an $\mathcal{D}$-Parkettierungen lassen sich dann in geeigneter Weise als AL-Formelmengen beschreiben.

Hausübung

Hinweise zur Hausübung

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu dieser Hausübung in der **Übung am 11.05.2016** ab (**Name, Nummer der Übungsgruppe und Matrikelnummer** nicht vergessen). Wir unterstützen ausdrücklich das gemeinsame Arbeiten und Diskutieren in Gruppen, die gefundenen Lösungen sollte aber jeder selbst ausformulieren. Es darf also pro Abgabe nur ein Name auf dem Blatt stehen.

Aufgabe H2.1 (Folgerungen aus dem Kompaktheitssatz) (12 Punkte)

(a) Für — möglicherweise unendliche — Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jede Interpretation, die alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Phi$ und $\psi_1, \ldots, \psi_\ell \in \Psi$ gibt, so dass

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \models \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_\ell.$$

(b) Sei $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Eine Interpretation $\mathfrak{I} : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als die unendliche Bit-Sequenz $\mathfrak{I}(p_1)\mathfrak{I}(p_2)\mathfrak{I}(p_3)\ldots$

P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, so dass sowohl P als auch das Komplement $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$P = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Phi\}$$
$$\overline{P} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Psi\}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ jeweils schon durch eine einzelne AL-Formel spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

(c)* *Bonusaufgabe:* Sei wieder $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ und seien P_1 und P_2 die folgenden Mengen von Belegungen:

$$P_1 = \{\mathfrak{I} : \text{für alle } i \geq 1 \text{ gilt } \mathfrak{I}(p_i) = 1 \Rightarrow \mathfrak{I}(p_{i+1}) = 0\}$$
$$P_2 = \{\mathfrak{I} : \text{für alle } i \geq 1 \text{ gibt es ein } j > i \text{ mit } \mathfrak{I}(p_j) = \neg\mathfrak{I}(p_i)\}$$

Welche der Mengen P_1, $\overline{P}_1$, P_2, $\overline{P}_2$ lassen sich durch AL-Formelmengen spezifizieren? Begründen Sie Ihre Antwort im Fall von P_1 und $\overline{P}_1$.

Aufgabe H2.2 (Constraint Satisfaction Problem) (12 Punkte)

Ein bekanntes Problem der Graphentheorie ist Frage, ob ein gegebener Graph 3-färbbar ist. Ein Graph ist 3-färbbar, wenn man seine Knoten mit 3 Farben so färben kann, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben. Dieses Problem lässt sich als Homomorphie-Problem umformulieren. Ein Graph G ist nämlich genau dann 3-färbbar, wenn es einen Homomorphismus von G in eine 3-Clique gibt (Warum?). Wir betrachten folgende Verallgemeinerung dieses Problems: Sei $H = (V^H, E^H)$ ein fester endlicher Graph. Ein Graph $G = (V^G, E^G)$ heißt *H-färbbar*, wenn es einen Homomorphismus von G nach H gibt.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik, dass ein Graph genau dann H-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph H-färbbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aussagenvariablen p_{gh} für $g \in V^G$ und $h \in V^H$. Identifizieren Sie geeignete Interpretationen $\mathfrak{I}(p_{gh}) = 1$ mit einem Homomorphismus $f : G \to H$ mit $f(g) = h$.

Aufgabe H2.3 (Resolution) (12 Punkte)

(a) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(p \vee s) \wedge (q \vee \neg s \vee p) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg p)$$

(b) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(\neg p \wedge s) \vee q \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$$

(c) Beweisen Sie die folgende semantische Folgerung mit Hilfe der Resolutionsmethode:

$$(\neg q \vee p) \wedge (s \vee q \vee p \vee \neg u) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (s \vee p \vee u) \models p \wedge r$$