Formale Grundlagen der Informatik II 7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wir betrachten ungerichtete Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$. Welche der folgenden Aussagen lassen sich durch eine Menge von FO-Formeln ausdrücken? Geben Sie eine entsprechende Formelmenge an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Der Abstand zwischen den Knoten x und y ist gerade oder unendlich.

(b) $\mathcal{G}$ enthält keinen Kreis.

(c) $\mathcal{G}$ enthält einen Kreis.

(d) Jeder Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

(e) Kein Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

Lösungsskizze:

(a) Wir definieren zunächst eine Formel $\varphi_n(x, y)$, die besagt, dass es einen Pfad der Länge höchstens n von x nach y gibt:

$$\varphi_0(x, y) := x = y\,, \qquad \varphi_{n+1}(x, y) := \varphi_n(x, y) \vee \exists z(Exz \wedge \varphi_n(z, y))\,.$$

Eine Wahl für die gesuchte Formelmenge ist:

$$\{\varphi_{2n+1}(x, y) \to \varphi_{2n}(x, y) \;:\; n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Die Menge der Sätze der folgenden Form leistet das Gewünschte:

$$\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \Big(\bigwedge_{i<k\leq n} x_i \neq x_k \wedge Ex_1x_2 \wedge \cdots \wedge Ex_{n-1}x_n \wedge Ex_nx_1 \Big)\,, \quad \text{für } n > 2\,.$$

(c) Diese Aussage lässt sich nicht durch eine Menge Φ von FO-Formeln ausdrücken. Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Dann ist die Menge

$$\Psi := \Phi \cup \{\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \big(\bigwedge_{i<k\leq n} x_i \neq x_k \wedge Ex_1x_2 \wedge \cdots \wedge Ex_{n-1}x_n \wedge Ex_nx_1\big) \;:\; n > 2\}$$

unerfüllbar. Andererseits folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Ψ doch erfüllbar ist. (Jede endliche Teilmenge ist in einem hinreichend großen Kreis erfüllt.) Widerspruch.

(d) Die Menge der Sätze der folgenden Form leistet das Gewünschte:

$$\forall x \exists y_1 \cdots \exists y_n \Big(\bigwedge_{i<k\leq n} y_i \neq y_n \wedge Exy_1 \wedge \cdots \wedge Exy_n \Big) , \quad \text{für } n > 2 \, .$$

(e) Diese Aussage lässt sich nicht durch eine Menge Φ von FO-Formeln ausdrücken. Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Dann ist die Menge

$$\Psi := \Phi \cup \{ \forall x \exists y_1 \cdots \exists y_n \big(\textstyle\bigwedge_{i<k\leq n} y_i \neq y_k \wedge Exy_1 \wedge \cdots \wedge Exy_n \big) \; : \; n > 2 \}$$

unerfüllbar. (Alternativ kann man auch eine neue Konstante c einführen und die Satzmenge

$$\Psi := \Phi \cup \{ \exists y_1 \cdots \exists y_n \big(\textstyle\bigwedge_{i<k\leq n} y_i \neq y_k \wedge Ecy_1 \wedge \cdots \wedge Ecy_n \big) \; : \; n > 2 \}$$

betrachten.) Andererseits folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Ψ doch erfüllbar ist. (Jede endliche Teilmenge ist in einem Baum von hinreichend großem Verzweigunsgrad erfüllt.) Widerspruch.

Aufgabe G2

(a) Geben Sie eine passende Signatur an, und drücken Sie darüber die folgenden „Tatsachen“ durch Sätze der Logik erster Stufe aus:

   i. Ein Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.
   ii. Grüne Drachen können fliegen.
   iii. Ein Drache ist grün, wenn einer seiner Elterndrachen grün ist.
   iv. Alle grünen Drachen sind glücklich.

   Hinweis: Überlegen Sie sich u. a., was Sie in der Signatur benötigen, um „ist Kind von“ ausdrücken zu können.

(b) Leiten sie argumentativ die vierte Aussage aus den ersten drei her.

(c) Zeigen Sie mittels dem Resolutionsverfahren, dass die vierte Aussage aus den ersten drei folgt.

   Hinweis: Beachten Sie, dass man auf eine Skolemfunktion geführt wird, die ggf. „nicht fliegende Kinder“ liefert.

Lösungsskizze:

(a) Eine mögliche Signatur ist $S = (G, F, L, C)$, wobei G (green), F (can fly) und H (happy) einstellige Relationssymbole sind, und C (child of) ein zweistelliges Relationssymbol ist.
   Obige Aussagen entsprechen folgenden FO(S)-Sätzen:

   i. $\varphi_1 := \forall x(\forall y(Cyx \to Fy) \to Hx)$
   ii. $\varphi_2 := \forall x(Gx \to Fx)$
   iii. $\varphi_3 := \forall x(\exists y(Cxy \wedge Gy) \to Gx)$
   iv. $\varphi_4 := \forall x(Gx \to Hx)$

(b) Angenommen g ist ein grüner Drache, und c ist ein Kind von g. Dann ist c grün (wegen (iii)) und kann damit auch fliegen (wegen (ii)). Also können alle Kinder von g fliegen, also ist g (wegen (i)) glücklich.

(c) Wir wollen zeigen, dass die Satzmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ unerfüllbar ist. Dazu bringen wir diese Sätze in Skolennormalform:

   i. $\forall x(\forall y(Cyx \to Fy) \to Hx) \equiv \forall x \exists y((Cyx \to Fy) \to Hx)$
      Skolemnormalform: $\forall x((Cfxx \to Ffx) \to Hx)$.
   ii. Ist bereits in Skolemnormalform: $\forall x(Gx \to Fx)$
   iii. $\forall x(\exists y(Cxy \wedge Gy) \to Gx) \equiv \forall x \forall y((Cxy \wedge Gy) \to Gx)$
      Skolemnormalform: $\forall x \forall y((Cxy \wedge Gy) \to Gx)$.

iv. $\neg\forall x(Gx \to Hx) \equiv \exists x(Gx \wedge \neg Hx)$
Skolemnormalform: $Gc \wedge \neg Hc$.

Es ergibt sich die folgende Klauselmenge:

$$\begin{array}{cl}
\{Cfxx, Hx\}, \{\neg Ffx, Hx\} & \text{von (i)} \\
\{\neg Gx, Fx\} & \text{von (ii)} \\
\{\neg Cxy, \neg Gy, Gx\} & \text{von (iii)} \\
\{Gc\}, \{\neg Hc\} & \text{von (iv)}
\end{array}$$

Damit lässt sich zum Beispiel wie folgt die leer Klausel ableiten:

$$\begin{tikzcd}
\{Cfcc, Hc\} \arrow[dr] & \{\neg Hc\} \arrow[d] & & & \\
\{\neg Cfcc, \neg Gc, Gfc\} \arrow[dr] & \{Cfcc\} \arrow[d] & & \{\neg Ffc, Hc\} \arrow[d] & \{\neg Hc\} \arrow[dl] \\
\{Gc\} \arrow[dr] & \{\neg Gc, Gfc\} \arrow[d] & & \{\neg Ffc\} \arrow[d] & \{\neg Gfc, Ffc\} \arrow[dl] \\
& \{Gfc\} \arrow[dr] & & \{\neg Gfc\} \arrow[dl] & \\
& & \Box & &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe G3
Beweisen Sie die gegebene Folgerungsbeziehung sowohl im Sequenzenkalkül als auch durch Resolution.

$$\forall x \neg P(x), \neg\forall x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \models \exists x Q(x)$$

Lösungsskizze:
Die Folgerungsbeziehung gilt gdw. wenn sich die Sequenz $\forall x\neg Px, \neg\forall x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash \exists x Qx$ im Sequenzenkalkül ableiten lässt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg Pc \vdash \neg Pc, Qc}\,(\text{Ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg Pc, Qc \vdash Qc}\,(\text{Ax})}{\neg Pc \vdash \neg Qc, Qc}\,(\neg\text{R})}{\neg Pc \vdash \neg Pc \wedge \neg Qc, Qc}\,(\wedge\text{R})}{\forall x\neg Px \vdash \neg Pc \wedge \neg Qc, Qc}\,(\forall\text{L})}{\forall x\neg Px \vdash \neg Pc \wedge \neg Qc, \exists x Qx}\,(\exists\text{R})}{\forall x\neg Px \vdash \forall x(\neg Px \wedge \neg Qx), \exists x Qx}\,(\forall\text{R})}{\forall x\neg Px, \neg\forall x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash \exists x Qx}\,(\neg\text{L})$$

Die Folgerungsbeziegung gilt, wenn

$$\forall x\neg Px, \neg\forall x(\neg Px \wedge \neg Qx), \neg\exists x Qx$$

nicht erfüllbar ist. Um das zu beweisen, reicht es die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

$$\{\neg Px\}, \{Pc, Qc\}, \{\neg Qx\}$$

zu zeigen, indem man daraus mit Resolution die leere Klausel ableitet:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg Pc\} \arrow[dr] & \{Pc, Qc\} \arrow[d] & \\
& \{Qc\} \arrow[dr] & \{\neg Qc\} \arrow[d] \\
& & \Box
\end{tikzcd}$$

Aufgabe G4

Sei S eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält und wofür die Menge der geschlossenen Termen $T_0(S)$ unendlich ist.

(a) Zeigen Sie, dass es keine Menge Φ von S-Sätzen gibt, so dass Φ genau dann wahr ist in einer S-Struktur $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A}$ ein Herbrandmodell ist.

Hinweis: Betrachten Sie erst den Spezialfall $S = (c, f)$ (eine Konstante c und ein einstelliges Funktionssymbol f).

(b) Folgern Sie aus (a), dass es keine S-Formel $\psi(x)$ geben kann, so dass

$$(\mathcal{A}, \beta[x \mapsto a]) \vDash \psi(x)$$

gilt, genau dann wenn a die Interpretation von einem variablenfreien Term ist.

Lösungsskizze:

(a) Nehmen wir an, dass es eine Satzmenge Φ gibt, so dass Φ genau durch die Herbrandmodelle erfüllt wird. Sei $\mathcal{H}$ ein Herbrandmodell für die Signatur S. Wir erweitern die Signatur S um einem neuen Konstantensymbol d und bekommen die Signatur S'. Betrachten Sie die S'-Menge:

$$\Psi = \Phi \cup \{\neg d = t \,:\, t \in T_0(S)\}.$$

Für jede endliche Teilmenge Ψ_0 von Ψ gibt es einen Term $t \in T_0(S)$, der nicht in Ψ_0 vorkommt: Ψ_0 enthält nur endliche viele Elemente aus $T_0(S)$ und $T_0(S)$ ist unendlich. Also wird Ψ_0 von $\mathcal{H}$ erfüllt, falls wir d als eine solche t interpretieren. Also ist jede endliche Teilmenge von Ψ erfüllbar und damit Ψ selbst auch (nach dem Kompaktheitssatz). Sei $\mathcal{A}$ also ein S'-Modell von Ψ: wenn wir die Interpretation von d "vergessen", können wir $\mathcal{A}$ auch als eine S-Struktur auffassen. Dann soll $\mathcal{A}$ einerseits ein Herbrandmodell sein, da es Ψ und deshalb auch Φ erfüllt; andererseits enthält $\mathcal{A}$ ein Element $d^{\mathcal{A}}$ verschieden von allen Interpretationen von geschlossenen S-Termen und ist damit kein Herbrandmodell. Widerspruch!

Wir schliessen, dass es eine solche Satzmenge Φ nicht geben kann.

(b) Wenn es eine Formel $\psi(x)$ gäbe, die genau von den Elementen wahr gemacht wird, die Interpretationen von geschlossenen Termen sind, dann würde

$$\Phi = \{\forall x \psi(x)\} \cup \{\neg s = t \,:\, s, t \in T_0(S), s \neq t\}$$

genau in den S-Strukturen gelten, die Herbrandmodelle sind. So etwas kann es aber nach (a) nicht geben, also existiert eine solche Formel $\psi(x)$ nicht.

Aufgabe G5

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \exists y (R(x,y) \wedge (P(x) \to Q(y)))\\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))\\
\varphi_3 &:= \exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \wedge Q(y) \to R(y,x))\\
\varphi_4 &:= \neg \exists x \exists y (R(x,y) \wedge P(x) \wedge P(y))
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Zeigen Sie jetzt mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(d) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies alle vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Lösungsskizze:

(a) Für φ_1 führen wir ein einstelliges Funktionssymbol f ein und für φ_3 ein Konstantensymbol c:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\rightsquigarrow \forall x(Rxfx \wedge (Px \to Qfx)) \\
\varphi_2 &\rightsquigarrow \forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx) \\
\varphi_3 &\rightsquigarrow \forall y(Pc \wedge ((\neg Py \wedge Qy) \to Ryc)) \\
\varphi_4 &\rightsquigarrow \forall x \forall y \neg(Rxy \wedge Px \wedge Py)
\end{aligned}$$

(b) Es genügt zu zeigen, dass die Skolem-Normalformen von φ_1 bis φ_4 nicht gleichzeitig erfüllbar sind.

Nehmen wir an, dass $\mathcal{A}$ ein Modell wäre. Es ist hilfreich $\mathcal{A}$ als einen Graph zu betrachten, wobei $R^{\mathcal{A}}$ die Kantenrelation ist und $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$ Eigenschaften der Knoten.

Da $c^{\mathcal{A}}$ nach φ_3 die Eigenschaft $P^{\mathcal{A}}$ hat und $\mathcal{A} \models Rcfc$ gilt (φ_1), muss $f^{\mathcal{A}}c^{\mathcal{A}}$ nach φ_1 die Eigenschaft $Q^{\mathcal{A}}$ haben, aber kann es (nach φ_4) nicht die Eigenschaft $P^{\mathcal{A}}$ haben. Dann gilt nach φ_3, dass $\mathcal{A} \models Rfcc$, was $\mathcal{A} \models Rcfc$ und φ_2 widerspricht.

Wir schliessen, dass es keine Modelle von $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ gibt.

(c) Wir haben folgende Klauselmenge:

$$\{Rxfx\}, \{\neg Px, Qfx\}, \{\neg Rxy, \neg Ryx\}, \{Pc\}, \{Py, \neg Qy, Ryc\}, \{\neg Rxy, \neg Px, \neg Py\}.$$

Damit kann mit z.B. wie folgt die leere Klausel ableiten:

$$\begin{tikzcd}
\{Pc\} \arrow[dr] & \{\neg Rcfc, \neg Pc, \neg Pfc\} \arrow[d] & & & \\
\{Rcfc\} \arrow[dr] & \{\neg Rcfc, \neg Pfc\} \arrow[d] & & & \\
\{Pfc, \neg Qfc, Rfcc\} \arrow[dr] & \{\neg Pfc\} \arrow[d] & \{\neg Pc, Qfc\} \arrow[d] & \{Pc\} \arrow[dl] & \\
& \{\neg Qfc, Rfcc\} \arrow[dr] & \{Qfc\} \arrow[d] & \{\neg Rcfc, \neg Rfcc\} \arrow[d] & \{Rcfc\} \arrow[dl] \\
& & \{Rfcc\} \arrow[dr] & \{\neg Rfcc\} \arrow[d] & \\
& & & \Box &
\end{tikzcd}$$

(d) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an.

- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n c \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n c, f^{n+1} c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = Q^{\mathcal{H}} = T$.
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n c, f^{n+1} c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = \{c\}$ und $Q^{\mathcal{H}} = T$.
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n c, f^{n+1} c) \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{f^n c, c) \,:\, n > 0\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = \{c\}$ und $Q^{\mathcal{H}} = T$.

- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{c\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \emptyset$.
  $P^{\mathcal{H}} = Q^{\mathcal{H}} = \{c\}$.

Aufgabe G6 (Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretation — Zusatzaufgabe)
Im folgenden bezeichnen φ und ψ quantorenfreie Formeln in FO. Beschreiben Sie informell mittels der Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretation die Bedeutung der folgenden Aussagen:

$$\neg\forall n\varphi(n)$$
$$\exists n\neg\varphi(n)$$
$$\varphi \vee \psi$$
$$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

Argumentieren Sie informell mittels der Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretation, welche der folgenden Aussagen intuitionistisch wahr bzw. im intuitionistischem Sinne falsch sind:

$$\exists n\neg\varphi(n) \to \neg\forall n\varphi(n)$$
$$\neg\forall n\varphi(n) \to \exists n\neg\varphi(n)$$
$$\varphi \vee \psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$
$$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \vee \psi$$

Lösungsskizze: Für den ersten Teil:

(a) Es gibt kein Programm $f(n)$, dass für jedes n eine Konstruktion von $\varphi(n)$ ausgibt.

(b) Es gibt ein n, so dass jede (hypothetische) Konstruktion von $\varphi(n)$ in eine Konstruktion von $\perp$ überführt werden kann.

(c) Es gibt ein Paar (n, q), so dass $n = 0$ folgt, dass q eine Konstruktion für φ ist, und sonst q eine Konstruktion für ψ ist.

(d) Ein Konstruktion für $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ ist ein Paar (q, r), so dass q, r jede Konstruktion für φ bzw. ψ in eine Konstruktion für $\perp$ umrechnet und r. Eine Konstruktion für diesen Satz ist eine Programm, dass aus dem Paar eine Konstruktion für $\perp$ berechnet.

Zweiter Teil:

- Der Satz erfüllt die BHK-Interpretation. Angenommen wir haben ein n, wie in (b). Dann können wir für jedes Programm f, wie in (a), aus $f(n)$ einen Konstruktion für $\perp$ bestimmen.
- Dieser Satz erfüllt die BHK-Interpretation nicht, weil die Prämisse keinen konstruktiven Inhalt hat und es deswegen keine Möglichkeit gibt ein n, so dass $\neg\varphi(n)$ gilt, zu berechnen. (Das ist kein Beweis!)
- Der Satz erfüllt die BHK-Interpretation. OBdA können wir annehmen, dass wir eine Konstruktion für φ haben. Damit können wir aus jeder Konstruktion für $\neg\varphi$ eine Konstruktion für $\perp$ berechnen. Daraus folgt, dass wir auch aus einer Konstruktion (q, r), wie in (d), eine Konstruktion für $\perp$ berechnen können.
- Dieser Satz erfüllt die BHK-Interpretation auch nicht, weil die Prämisse wieder keinen konstruktiven Inhalt hat. Damit kann nicht entschieden werden, ob φ oder ψ gelten muss.

Aufgabe G7 (Zusatzaufgabe)
Die Gödel-Genzen Negativübersetzung ordnet jeder FO-Formel φ eine FO-Formel φ^N zu. Die Formel φ^N ist induktiv durch folgende Regeln gegeben.

$$\begin{aligned}
\varphi^N &:= \neg\neg\varphi \qquad \text{falls } \varphi \text{ ein atomare Formel ist} \\
(\varphi \wedge \psi)^N &:= \varphi^N \wedge \psi^N \\
(\varphi \vee \psi)^N &:= \neg(\neg\varphi^N \wedge \neg\psi^N) \\
(\varphi \to \psi)^N &:= \varphi^N \to \psi^N \\
(\neg\varphi)^N &:= \neg\varphi^N \\
(\forall x\varphi)^N &:= \forall x\varphi^N \\
(\exists x\varphi)^N &:= \neg(\forall x\neg\varphi^N)
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle FO-Formel φ gilt $\models \varphi \leftrightarrow \varphi^N$.

(b) Zeigen Sie, dass φ^N nur aus doppelt negierten Atomen, $\wedge$, $\to$, $\forall$ und $\perp$ besteht.
($\neg\varphi$ wir als Abkürzung für $\varphi \to \perp$ gelesen.)

(c) Bemerken Sie, dass

$$\vdash_H \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{H_i} \varphi^N$$

Benutzen Sie dafür den Satz auf Folie 173.

Lösungsskizze:

(a) Strukturelle Induktion. Wir zeigen nur die ersten zwei Regeln:
- φ^N für φ atomar: Es gilt $\varphi^N = \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$.
- $(\varphi \wedge \psi)^N$: $(\varphi \wedge \psi)^N = \varphi^N \wedge \psi^N$ mit der Induktionshypothese gilt $\varphi^N \leftrightarrow \varphi$ und $\psi^N \leftrightarrow \psi$, und damit dass $\varphi^N \wedge \psi^N \leftrightarrow \varphi\psi$.

(b) Einfache strukturelle Induktion.

(c) $\Leftarrow$: Aus $\vdash_{H_i} \varphi^N$ folgt $\vdash_H \varphi^N$ und aus (a) (mit dem Vollständigkeitssatz) dann $\vdash_H \varphi$.
$\Rightarrow$: Aus $\vdash_H \varphi$ folgt (mit dem Vollständigkeitssatz) $\vdash_H \varphi^N$. Da φ^N nur noch aus doppelt negierten Atomen, $\wedge$, $\to$, $\forall$ und $\perp$ besteht, ist der Satz auf Folie 173 anwendbar und es folgt $\vdash_{H_i} \varphi^N$.

Aufgabe G8 (Zusatzaufgabe)

(a) Wir betrachten Wortmodelle $\mathcal{W} = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$ (siehe Skript – Seite 3) mit zwei Buchstaben. Bestimmen Sie durch Analyse von Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen den minimalen Quantorenrang einer Formel, mit deren Hilfe die beiden folgenden Wörter unterschieden werden können:

$$a\,b\,a\,b\,a \qquad a\,b\,b\,a\,b\,a$$

(b) Wir betrachten Strukturen $\mathcal{A} = (A, P, Q)$ mit zwei einstelligen Relationen P und Q. Zeigen Sie, dass es keine FO-Formel φ gibt, so dass gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ und } Q \text{ haben gleich viele Elemente.}$$

(c) Zeigen Sie, dass es für Wortstrukturen $\mathcal{W} = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$ keine FO-Formel φ gibt, so dass gilt

$$\mathcal{W} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{W} \text{ enthält gleich viele } a \text{ wie } b.$$

(Beachten Sie, dass die Aussage aus (b) hieraus folgt.)

Lösungsskizze:

(a) Der minimale Quantorenrang ist 2. Eine Gewinnstrategie für Spieler I sieht wie folgt aus. Im ersten Zug wählt er das mittlere b des zweiten Wortes. Spieler II muß mit einem b aus dem ersten Wort antworten. Wählt er das erste b dann markiert Spieler I im zweiten Zug das erste b des zweiten Worts. Spieler II müsste mit einer Position antworten, die vor dem im ersten Zug gewählten b liegt und ebenfalls mit einem b beschriftet ist. Da eine solche Position nicht existiert, gewinnt Spieler I. Wenn Spieler II stattdessen im ersten Zug mit dem zweiten b antwortet, dann kann Spieler I analog das letzte b des zweiten Worts markieren. Spieler II müsste im ersten Wort ein b finden, das hinter dem zweiten b liegt. Er verliert also auch in diesem Fall.

(b) Angenommen, es gäbe so eine Formel φ. Sei m ihr Quantorenrang. Wir betrachten die Strukturen $\mathcal{A} = (A, P, Q)$ und $\mathcal{A}' = (A', P', Q')$ mit

$$\begin{aligned} A &:= \{1, \dots, 2m\}\,, & P &:= \{1, \dots, m\}\,, & Q &:= \{m+1, \dots, 2m\}\,, \\ A' &:= \{1, \dots, 2m+1\}\,, & P' &:= \{1, \dots, m\}\,, & Q' &:= \{m+1, \dots, 2m+1\}\,. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{A}' \not\models \varphi\,.$$

Andererseits gewinnt offensichtlich Spieler II das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $\mathcal{G}^m(\mathcal{A}; \mathcal{A}')$ mit m Runden (da Spieler I höchstens m Elemente aus Q bzw. Q' auswählen kann). Also sind $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{A}'$. Widerspruch.

(c) Wir modifizieren den Beweis aus (b). Angenommen, es gäbe so eine Formel φ mit Quantorenrang m. Wir betrachten die Wortstrukturen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$ zu den Wörtern $a^{2^m} b^{2^m}$ und $a^{2^m} b^{2^m+1}$. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathcal{W} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{W}' \not\models \varphi\,.$$

Andererseits gilt wieder $\mathcal{W} \equiv_m \mathcal{W}'$, da Spieler II das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $\mathcal{G}^m(\mathcal{W}; \mathcal{W}')$ mit m Runden gewinnt (siehe Lemma 8.14 im Skript).