Mathematik II für Informatik
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Alexander Dietz, Anton Freund
Lucas Schöbel-Kröhn

SoSe 2018
Übung: 3./4. Mai 2018
Abgabe: 17./18. Mai 2018

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Variationen des ε-δ-Kriteriums)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Überprüfen Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen gleichbedeutend mit der Stetigkeit von f in x_0 sind. Falls dem nicht so ist, geben Sie anschaulich an, was das jeweilige Kriterium bedeutet. Finden Sie dann pro Aufgabenteil eine Funktion, die dieses Kriterium erfüllt und eine Funktion, die dieses Kriterium nicht erfüllt.

(a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $\delta > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ und für alle $\delta > 0$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$.

(c) Für alle $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

(d) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Aufgabe G2 (Zwischenwertsatz)

(a) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0,1]$ gibt mit $f(\xi) = \xi$.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) \cdot f(1) < 0$ und $f(0) + f(1) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0,1]$ gibt mit $f(\xi) = f(0) + f(1)$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) := \frac{f(x)}{f(0)+f(1)} - 1$, $x \in [0,1]$.

(c) Geben Sie eine reellwertige, stetige Funktion f auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, die kein Maximum und kein Minimum besitzt.

Aufgabe G3 (Grenzwerte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder weisen Sie deren Nichtexistenz nach:

(a)
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}$$

(b)
$$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2 - 1}$$

(c)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3 - x - 2}}{(x-2)(x+2)}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Grenzwerte und Monotonie) (12 Punkte)

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$\text{(i)} \lim_{x\to 4} \frac{|x-4|}{16-x^2}. \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}.$$

(b) Überprüfen Sie, ob

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{für } x \in [0,2], \\ x+17, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

(streng) monoton ist.

Aufgabe H2 (Stetigkeit) (12 Punkte)

(a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \frac{x+1}{x^2+1}.$$

i. Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in $x_0 = 1$ stetig ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $|x| \leq 1$ und für $|x| > 1$ separat, dass $\frac{|x|}{x^2+1} \leq 1$.

ii. Bestimmen Sie die Menge der Punkte, in denen f stetig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$ Lipschitz-stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Aufgabe H3 (Eigenschaften stetiger Funktionen) (12 Punkte)

(a) Sei $T : [0,360] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion **mit** $\boldsymbol{T(0) = T(360)}$, die für jeden Punkt x auf dem Äquator die dort vorherschende Temperatur $T(x)$ angibt. Wir bezeichnen mit x den Längengrad des entsprechenden Punktes auf dem Äquator. Zeigen Sie, dass es zwei Punkte auf dem Äquator gibt, die sich exakt gegenüberliegen und in denen die gleiche Temperatur herrscht.

(b) Welche der folgenden Funktionen besitzen ein Minimum oder ein Maximum (auf den angegebenen Intervallen)?

$$\text{(i) } f : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^6-2}{x^2+4} \qquad \text{(ii) } f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^4+1}.$$