Resolutionsalgorithmus

breadth-first-search, Breitensuche

Eingabe: K	[Klauselmenge, endlich]
$R := K$	
WHILE $\big(\mathrm{Res}(R) \neq R$ and $\Box \notin R\big)$ DO $R := \mathrm{Res}(R)$ OD	
IF $\Box \in R$ THEN output "unerfüllbar"	
ELSE output "erfüllbar"	

Beweis im Resolutionskakül

Ableitungsbaum für $\Box$:
– Knoten mit Klauseln beschriftet
– $\Box$ an der Wurzel
– Resolventen an binären Verzweigungen
– Klauseln aus K an den Blättern

Hornklauseln

→ Abschnitt 5.4

- interessanter Spezialfall für KI Anwendungen,
- AL-HORN-SAT-Problem effizient entscheidbar
- logische Programmierung (Prolog: FO Horn-Formeln)

Hornklausel:
Klausel mit *höchstens einem positiven* Literal
z.B. $C = \{\neg q_1, \dots, \neg q_r, q\} \equiv \big(q_1 \wedge \dots \wedge q_r\big) \rightarrow q$;
auch $\Box$ ist Hornklausel.

Spezialfälle: C besteht nur aus positivem Literal: *positiv*.
C ohne positive Literale: *negativ*.

Beobachtungen:

Mengen von negativen Hornklauseln trivial erfüllbar ($p_i \mapsto 0$).
Mengen von nicht-negativen Hornklauseln besitzen eindeutige *minimale* erfüllende Interpretationen.

Hornklauseln

Effizienter Horn-Erfüllbarkeitstest: Grundidee

H Hornklauselmenge; $H^- \subseteq H$ negative Klauseln in H
$H_0 := H \setminus H^-$ nicht negative Klauseln

1. Schritt: Berechne minimale Interpretation $\mathfrak{I}_0 \models H_0$.

2. Schritt: Prüfe, ob $\mathfrak{I}_0 \models H^-$.

Korrektheit

$\mathfrak{I}_0 \models H^- \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{I}_0 \models H$.

$\mathfrak{I} \models H \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{I} \models H_0$, also $\mathfrak{I}_0 \leqslant \mathfrak{I}$.
$\mathfrak{I} \models H^- \;\Rightarrow\; \mathfrak{I}_0 \models H^-$ (und $\mathfrak{I}_0 \models H$).

Sequenzenkalkül allgemeiner Beweiskalkül

Sequenzen

$\Gamma \vdash \Delta$ $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$, endlich
auch: $\Gamma; \Delta$ oder Γ, Δ
Γ, Δ als ungeordnete Listen ...

$\Gamma \vdash \Delta$ *allgemeingültig* gdw. $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

wichtig: links Konjunktion (der Voraussetzungen)
rechts Disjunktion (möglicher Konsequenzen)

Bsp.: $\varphi \vdash \psi$ allgemeingültig gdw. $\varphi \models \psi$.
$\emptyset \vdash \psi$ allgemeingültig gdw. ψ allgemeingültig.
$\varphi \vdash \emptyset$ allgemeingültig gdw. φ unerfüllbar.

Sequenzenkalkül

Regeln zur Erzeugung aller allgemeingültigen Sequenzen.

AL Sequenzenkalkül

→ Abschnitt 6.2

Erzeugung allgemeingültiger Sequenzen durch Sequenzenregeln

Sequenzenregeln

neue Sequenzen aus bereits abgeleiteten Sequenzen

Format: $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Beispiele: $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}$ oder $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$

Korrektheit

des Kalküls: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

einer Regel: sind die Prämissen allgemeingültig,
so auch die Konklusion.

AL Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$

(Ax) $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}$

(0-Ax) $\dfrac{}{\Gamma, 0 \vdash \Delta}$ (1-Ax) $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, 1}$

$(\neg \mathrm{L})$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$ $(\neg \mathrm{R})$ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$

$(\vee \mathrm{L})$ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$ $(\vee \mathrm{R})$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\wedge \mathrm{L})$ $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$ $(\wedge \mathrm{R})$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$

Korrektheit nachprüfen!

sogar rückwärts (ohne Informationsverlust!)

Beispiel

Ableitung der allgemeingültigen Sequenz $p \vdash (p \wedge q) \vee \neg q$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, \neg q}\,(\text{Ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash q}\,(\text{Ax})}{p \vdash q, \neg q}\,(\neg\text{R})}{p \vdash (p \wedge q), \neg q}\,(\wedge\text{R})}{p \vdash (p \wedge q) \vee \neg q}\,(\vee\text{R})
$$

Vollständigkeit

→ Abschnitt 6.3

Jede allgemeingültige Sequenz ist ableitbar.
Beweisidee: systematische Beweissuche rückwärts

> zu jeder Formel in einer Konklusions-Sequenz existiert (genau) eine Regel mit Prämissen, in der diese Formel abgebaut ist.

in rückwärts von der Zielsequenz generiertem Beweisbaum gilt:

Zielsequenz allgemeingültig $\Leftrightarrow$ alle Sequenzen an den Blättern sind allgemeingültig

eine Sequenz aus Variablen ist allgemeingültig $\Leftrightarrow$ Instanz von (Ax), Axiom

Beispiel Beweissuche

für eine *nicht* allgemeingültige Sequenz

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \mathbf{p} \vdash \mathbf{q}}{p \vdash p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\mathbf{q} \vdash \mathbf{p} \qquad \dfrac{}{q \vdash q}\,(\mathrm{Ax})}{q \vdash p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R})}{p \vee q \vdash p \wedge q}\,(\vee\mathrm{L})
$$

Man liest ab, dass z.B. die Interpretation $p \mapsto 1\,;\ q \mapsto 0$ ein Gegenbeispiel liefert.

Satz

Der AL Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig für die Ableitung aller allgemeingültigen AL Sequenzen.

Schnittregeln, von $\mathcal{SK}$ zu $\mathcal{SK}^+$

Hinzunahme weiterer *korrekter* Regeln erhält Korrektheit und Vollständigkeit

Schnittregel erlaubt direkte Nachbildung von $\left\{\begin{array}{l}\textbf{Kettenschlüssen}\\ \textbf{indirektem Beweis}\end{array}\right.$

- Kettenschluss: aus $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow C)$ gewinne $(A \Rightarrow C)$ klassische Schlussfigur des "modus ponens"
- indirekter Beweis: aus $(\neg A \Rightarrow \bot)$ gewinne A

$$
\boxed{(\text{modus ponens}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}}
$$

korrekt (nachprüfen!)

Bem.: Anwendung von modus ponens 'schluckt' Hilfsformel φ; problematisch für (rückwärtsgerichtete) Beweissuche

Schnittregeln, von $\mathcal{SK}$ zu $\mathcal{SK}^+$ $\rightarrow$ Abschnitt 6.4

(modus ponens) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$

Widerspruchsregel:

(Kontradiktion) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$

jede konkrete Instanz von modus ponens oder Kontradiktion ist in $\mathcal{SK}$ eliminierbar (warum?)

Kontradiktion lässt sich direkt in $\mathcal{SK}$ + modus ponens herleiten

ebenso z.B. für die Schlussfigur des indirekten Beweises:

(Widerspruch) $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \varphi}$

Teil 2: Logik erster Stufe (Prädikatenlogik), FO

Gegenstandsbereich:

S-Strukturen
mit Belegungen für Element-Variablen

Ausdrucksmöglichkeiten:

atomare Aussagen über Terme
Funktionen, Konstanten, Variablen

$\wedge, \vee, \neg$ (wie in AL)

Quantifizierung $\forall, \exists$ über Elemente

wesentliche Charakteristika von FO

- höheres Ausdrucksniveau
- strukturierte Formalisierung komplexerer Eigenschaften
- modulare Semantik
- korrekte und vollständige Beweiskalküle
- Kompaktheit
- nicht mehr entscheidbar

Strukturen zu Signatur S $\rightarrow$ Abschnitt 1.1

Symbole:	$x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$	Variablensymbole
	$c, d, e, \ldots$	Konstantensymbole
	$f, g, \ldots$	Funktionssymbole
	$P, Q, R, \ldots$	Relationssymbole

Signatur S:

Auswahl von Konstanten-, $\underbrace{\text{Funktions- und Relationssymbolen}}_{\text{mit spezifizierten Stelligkeiten}}$

S-Struktur:

$$\mathcal{A} = (A, c^{\mathcal{A}}, \ldots, f^{\mathcal{A}}, \ldots, R^{\mathcal{A}}, \ldots)$$

besteht aus: Trägermenge $A \neq \emptyset$
für $c \in S$: ausgezeichnetes Element $c^{\mathcal{A}} \in A$.
für n-st. $f \in S$: n-st. Funktion $f^{\mathcal{A}} \colon A^n \rightarrow A$.
für n-st. $R \in S$: n-st. Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.

Beispiel: $\mathcal{N} = \big(\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\big)$ zu $S = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$

Beispiele von Strukturtypen

unter vielen anderen

Wortstrukturen zu $S = \{<\} \cup \{P_a \colon a \in \Sigma\}$

$$w = a_1 \dots a_n \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathcal{W} = \big(\{1,\dots,n\}, <^{\mathcal{W}}, (P_a^{\mathcal{W}})_{a\in\Sigma}\big), \\ <^{\mathcal{W}} = \{(i,j) \colon 1 \leqslant i < j \leqslant n\}, \\ P_a^{\mathcal{W}} = \{i \colon a_i = a\}. \end{array}$$

Graphen zu $S = \{E\}$

$$u \xrightarrow{(u,v)\in E^{\mathcal{G}}} v$$

$\mathcal{G} = \big(V, E^{\mathcal{G}}\big)$,
mit Knotenmenge V
Kantenrelation $E^{\mathcal{G}} \subseteq V \times V$.

Transitionssysteme zu $S = \{E_a \colon a \in \Sigma\}$

$$(\Sigma, Q, \Delta) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathcal{A} = \big(Q, (E_a^{\mathcal{A}})_{a\in\Sigma}\big), \\ E_a^{\mathcal{A}} = \{(q,q') \colon (q,a,q') \in \Delta\}. \end{array}$$

Relationale Datenbanken, ...

Terme

→ Abschnitt 1.2

Variablen aus $\mathcal{V} := \{x_1, x_2, \dots\}$ bzw. $\mathcal{V}_n := \{x_1, \dots, x_n\}$

S-Terme

$T(S)$ (über Variablen aus $\mathcal{V}$) induktiv erzeugt durch:

$$\begin{array}{ll} x \in T(S) & \text{für } x \in \mathcal{V}. \\ c \in T(S) & \text{für } c \in S. \\ ft_1 \dots t_n \in T(S) & \text{für } f \in S \ (n\text{-st.}),\ t_1, \dots, t_n \in T(S). \end{array}$$

$T_n(S) \subseteq T(S)$: S-Terme über Variablen aus $\mathcal{V}_n$.

Beispiele wohlgeformter S-Terme

$S = \{f, c\}$, f 2-st.: c, $ffccc$, $fcfcc$, $\dots$, x_{17}, fx_1c, ffx_5cx_2, $\dots$

$S = \{+, \cdot, 0, 1\}$, $+, \cdot$ 2-st.: $\cdot + 11 + +111$,
$+ \cdot + + 111\, x_3\, x_1$, $\dots$

Konvention: Funktionsterme mit Klammern, 2-st. auch infix
$\big(((1+1)+1)\cdot x_3 + x_1\big)$ statt $+\cdot++111x_3x_1$

Belegungen: → Abschnitt 1.3

weisen den Variablensymbolen Elemente einer S-Struktur zu

Belegung
über S-Struktur $\mathcal{A} = (A, c^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}}, \dots)$:

$$\begin{array}{rcl} \beta\colon \mathcal{V} & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & \beta(x) \end{array}$$

Idee: eine Belegung liefert *Interpretation* der Variablensymbole in S-Struktur

diese Interpretation läßt sich natürlich auf alle S-Terme erweitern (wie?)

$\longrightarrow$ **die Semantik von Termen**

Semantik von S-Termen → Abschnitt 1.2/3

in **S-Interpretation:** S-Struktur + Belegung $\mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta)$

Semantik von Termen

induktiv über $T(S)$ für gegebene S-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta)$:

Interpretation von $t \in T(S)$: $t^{\mathfrak{I}} \in A$ induktiv geg. durch

- $t = x$ ($x \in \mathcal{V}$ Variable) : $t^{\mathfrak{I}} := \beta(x)$.
- $t = c$ ($c \in S$ Konstante) : $t^{\mathfrak{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- $t = ft_1 \dots t_n$ ($f \in S$, n-st.) : $t^{\mathfrak{I}} := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathfrak{I}}, \dots, t_n^{\mathfrak{I}})$.

beachte Format dieser Interpretation als Abbildung

$$\boxed{\begin{array}{rcl} T(S) & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & t^{\mathfrak{I}} \end{array}}$$

und Abhängigkeit von S-Struktur $\mathcal{A}$ *und* Belegung β.