Mathematik II für Informatik
1. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Alexander Dietz, Anton Freund
Lucas Schöbel-Kröhn

SoSe 2018

Übung: 12./13. April 2018
Abgabe: 19./20. April 2018

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie für die folgenden vier Aussagen jeweils, ob sie allgemein gültig sind. Geben Sie jeweils einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(d) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Lösungshinweise:

(a) *Behauptung:* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent $\Longrightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Beweis:

Annahme: $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist auch die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Das bedeutet aber nach Annahme, dass die Folge $(a_n + b_n + (-a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sein.

(b) Die Aussage ist *falsch*.

Gegenbeispiel: Wir setzen $a_0 = b_0 = 1$, und $a_n = 1/n$ und $b_n = n$ für $n \geq 1$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekanntermaßen konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, denn diese Folge ist offensichtlich nicht beschränkt. Wir erhalten dann als Produktfolge $a_n \cdot b_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also offensichtlich eine konvergente Folge.

(c) Die Aussage ist *falsch*.

Gegenbeispiel: Wir setzen $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekanntermaßen divergent und für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man Divergenz in gleicher Weise wie für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aber es ist

$$a_n + b_n = (-1)^n + (-1)\cdot(-1)^n = (-1)^n - (-1)^n = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(d) Die Aussage ist *falsch*.

Gegenbeispiel: Wir setzen dieses Mal $a_n = b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, aber es ist $a_n \cdot b_n = (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe G2

(a) Geben Sie zu jeder Kombination der Eigenschaften *konvergent*, *monoton*, *beschränkt* eine reelle Folge an, welche genau diese Kombination an Eigenschaften trägt. Falls eine Kombination nicht möglich sein sollte, begründen Sie, warum dem so ist.

(b) Gibt es konvergente Folgen mit mehreren Häufungspunkten oder divergente Folgen ohne Häufungspunkte?

(c) Gibt es konvergente Folgen ohne Häufungspunkte oder divergente Folgen mit genau einem Häufungspunkt?

(d) Geben Sie eine Folge an, die alle natürlichen Zahlen bis 100 als Häufungspunkte hat. Konvergiert sie?

Lösungshinweise:

(a) Konvergente Folgen sind beschränkt. Folgen, die monoton und beschränkt sind, müssen auch konvergent sein. Es bleiben also noch fünf mögliche Fälle:

konvergent, monoton, beschränkt: $a_n = 0$

konvergent, nicht monoton, beschränkt: $b_n = (-1)^n/n$

divergent, monoton, unbeschränkt: $c_n = n$

divergent, nicht monoton, beschränkt: $d_n = (-1)^n$

divergent, nicht monoton, unbeschränkt: $e_n = (-1)^n \cdot n$

(b) Konvergente Folgen haben genau einen Häufungspunkt, können also nicht mehrere haben. Ein Beispiel für eine divergente Folge ohne Häufungspunkte ist $c_n = n$.

(c) Konvergente Folgen müssen genau ihren Grenzwert als Häufungspunkt haben. Divergente Folgen mit genau einem Häufungspunkt sind möglich, etwa $f_n = (1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, \ldots)$ mit dem Häufungspunkt 1.

(d) Wir nehmen zum Beispiel

$$g_n = (0, 1, 2, \ldots, 100, 0, 1, 2, \ldots, 100, 0, 1, 2 \ldots\ldots) \quad \text{bzw. } g_n = n \mod 101.$$

In (b) haben wir gezeigt, dass eine Folge mit mehr als einem Häufungspunkt nicht konvergieren kann.

Aufgabe G3

Wir betrachten den Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, wobei $\|(x,y)^T\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}$ die euklidische Norm bezeichne, sowie die Folgen

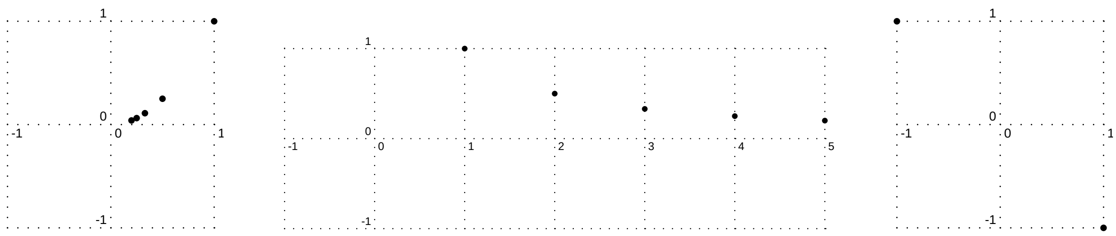
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} n^{-1} \\ n^{-2} \end{pmatrix}, \qquad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} n \\ n^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die ersten fünf Folgenglieder.

(b) Welche der Folgen sind konvergent, welche divergent? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

(c) Wir betrachten die gleichen Folgen, aber im Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, wobei $\|(x,y)^T\|_\infty := \max(|x|, |y|)$ die Maximumsnorm bezeichne. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folgen erneut.

Lösungshinweise:



(a) $(a_n)_{1\le n\le 5}$ $(b_n)_{1\le n\le 5}$ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

(b) Die erste Folge konvergiert nach dem Sandwichsatz gegen $(0,0)^T$, da

$$0 \leq \|a_n - (0,0)^T\|_2 = \sqrt{n^{-2} + n^{-4}} \leq \sqrt{n^{-2} + n^{-2}} = \sqrt{2}n^{-1} \to 0$$

gilt.

Die zweite Folge konvergiert nicht, da

$$\|b_n\|_2 = \sqrt{n^2 + n^{-2}} \geq \sqrt{n^2} = n$$

über alle Grenzen wächst.

Die dritte Folge konvergiert nicht, da die beiden Teilfolgen

$$c_{2n} = (1, -1)^T \qquad \text{und} \qquad c_{2n+1} = (-1, 1)^T$$

konstant sind und damit gegen die beiden unterschiedlichen Genzwerte $(1, -1)^T$ und $(-1, 1)^T$ konvergieren.

(c) Es ist $\|a_n\|_\infty = n^{-1}$, somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da sie nur einen Häufungspunkt besitzt, konvergiert sie nach Aufgabe G2. Da $\|b_n\|_\infty = n$ ist, ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und damit divergent. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen $\|c_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zwar beschränkt, allerdings besitzt sie zwei Häufungspunkte (vgl. Aufgabenteil (b)) und kann somit nicht konvergieren, wie wir in Aufgabe G2 gesehen haben.

Aufgabe G4

Seien $x > 0$ und $a_0 > 0$ reelle Zahlen. Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

(a) Zeigen Sie induktiv, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiv, d.h. $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt: $a_n \geq \sqrt{x}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiv ist und monoton fällt.

(d) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Lösungshinweise:

(a) Nach Voraussetzung ist $a_0 > 0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen es ist $a_n > 0$. Da $x > 0$ nach Voraussetzung positiv ist, gilt auch $\frac{x}{a_n} > 0$. Die Summe zweier positiver Elemente ist wieder positiv, ebenso das Produkt zweier positiver Zahlen. Somit gilt:

$$a_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{a_n}_{>0} + \underbrace{\frac{x}{a_n}}_{>0}\right)}_{>0} > 0.$$

(b) Diese Aussage folgt aus der Gleichung

$$\begin{aligned} a_n^2 - x &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right)^2 - x \\ &= \frac{1}{4}(a_{n-1}^2 + 2x + (\frac{x}{a_{n-1}})^2) - x \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{x}{a_{n-1}}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Da a_n nach (a) positiv ist, ist dies ist äquivalent zu $a_n \geq \sqrt{x}$.

(c) Positivität haben wir bereits in (a) gezeigt. Um die Monotonie zu zeigen, nutzen wir Aufgabenteil (b). Denn damit folgt die Monotonie aus der Gleichung

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x) \geq 0,$$

also $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Nach Teil (b) und (c) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge, welche durch $\sqrt{x}$ nach unten beschränkt ist, also ist sie konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert mit a, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Nach Definition bedeutet dies, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n > n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Insbesondere ist dann aber auch $n + 1 > n > n_0$, also gilt auch für alle $n > n_0$:

$$|a_{n+1} - a| < \varepsilon,$$

also konvergiert auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.
Um nun den Grenzwert a zu berechnen, nutzen wir die Rekursionformel und die Tatsache, dass $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert wie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat. Mit den Grenzwertsätzen für Folgen erhalten wir also die Gleichung

$$a = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a}) \iff a^2 = x.$$

Da $a > 0$ gilt folgt also $a = \sqrt{x}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (12 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-3}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie (wenn möglich) den Grenzwert.
Hinweis: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1}.$$

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$b_n = \frac{2}{(x^2)^n + 2}$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$.

(c) Untersuchen Sie die Folge

$$c_n = n^{-2} + \frac{10}{n} + n^{-3n} + \frac{n}{100}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie (wenn möglich) den Grenzwert.

(d) Beweisen Sie den Hinweis aus (a).

Aufgabe H2 (12 Punkte)

Die Folge x_n sei rekursiv definiert durch

$$x_0 = 0 \text{ und } x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechnen Sie x_3.

(b) Sei $n > 2$. Geben Sie eine Formel für x_n an, die lediglich von x_{n-2} abhängt.

(c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $0 < n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$x_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(d) Untersuchen Sie die Folge x_n auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe H3 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n := \left(\begin{pmatrix} \frac{n}{n^2+1} \\ \frac{8n}{2n^2+2} \\ \frac{5}{n^3+n} \end{pmatrix} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

in $V = \mathbb{R}^3$ mit der 1-Norm eine Nullfolge ist.
Gilt diese Aussage ebenfalls bezüglich der 2-Norm?

(b) Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie folgende Grenzwertsätze im $\mathbb{R}^n$:

i. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|$.

ii. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

iii. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha a$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.