Mathematik II für Informatik
14. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 20./21. Juli 2017
keine Abgabe

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen)
Überprüfen Sie, ob für die folgenden Anfangswertprobleme Lösungen existieren. In welchen Fällen garantiert der Satz von Picard-Lindelöff die Eindeutigkeit der Lösung?
Es sei im Folgenden stets $t \in [-1, 1]$ und der Anfangswert $y(0) = 0$ gegeben.

(a) $y'(t) = 1 + t + y(t) + ty(t)$

(b) $y'(t) = t^4 y(t)$

(c) $y'(t) = t^2 y(t)^2$

(d) $y'(t) = t + |y(t)|$

(e) $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$

Lösungshinweise: Alle Differentialgleichungen sind von der Form $y'(t) = f(t, y(t))$, wobei $f : [-1, 1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ stetig (in beiden Argumenten) ist. Nach dem Satz von Peano (Satz 7.5.1) existiert also für jede der Differentialgleichungen eine Lösung des Anfangswertproblems ($t_0 = 0 \in [-1, 1]$).
Der Satz von Picard-Lindelöff (Satz 7.5.3) garantiert die Eindeutigkeit der Lösung, falls $f(t, y)$ Lipschitz-stetig im zweiten Argument (d.h. y) für alle t im Definitionsbereich, also $t \in [-1, 1]$, ist. Seien im Folgenden stets $t \in [-1, 1]$ und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(a) $f(t, y) = 1 + t + y + ty$

$$\implies |f(t, y_1)-f(t, y_2)| = |1+t+y_1+ty_1-1-t-y_2-ty_2| = |(1+t)(y_1-y_2)| = |1+t|\cdot|y_1-y_2| \leq 2|y_1-y_2|.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig.

(b) $f(t, y) = t^4 y$

$$\implies |f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t^4 y_1 - t^4 y_2| = |t^4(y_1 - y_2)| = |t^4| \cdot |y_1 - y_2| \leq 1 \cdot |y_1 - y_2|.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig.

(c) $f(t, y) = t^2 y^2$
Wir vermuten, dass $f(t, y) = t^2 y^2$ nicht Lipschitz-stetig für alle $t \in [-1, 1]$ und $y \in \mathbb{R}$ ist. Es genügt, dies für ein bestimmtes t zu zeigen. Sei also $t = 1$. Dann ist $f(1, y) = y^2$. Nun ist aber y^2 nicht Lipschitz-stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wir können somit den Satz von Picard-Lindelöff nicht anwenden.

(d) $f(t, y) = t + |y|$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t + |y_1| - t - |y_2|| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|.$$

Für die letzte Abschätzung haben wir eine Variante der umgekehrten Dreiecksungleichung verwendet. Man kann sich die Gültigkeit von $||y_1|-|y_2|| \leq |y_1-y_2|$ aber auch schnell über eine Fallunterscheidung überlegen. Also ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig.

(e) $f(t,y)=\sqrt{|y|}$
Wir erinnern uns, dass $f(t,y)=\sqrt{y}$ nicht Lipschitz-stetig auf $\{y\in\mathbb{R}: y\geq 0\}$ ist. Somit kann $f(t,y)=\sqrt{|y|}$ nicht Lipschitz-stetig auf ganz $\mathbb{R}$ sein. Daher lässt sich der Satz von Picard-Lindelöff nicht anwenden.

Aufgabe G2 (Picard-Iteration)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t)=t^2y(t),\quad y(0)=2,\quad t\in\mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie für das Anfangswertproblem die ersten drei Näherungslösungen der Picard-Iteration.

(b) Vergleichen Sie zusätzlich die gefundene Approximation mit der exakten Lösung.

Lösungshinweise:

(a) Die Iteration ist (mit $y_0=y(0)=2$) gegeben durch

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(t) &= y_0+\int_0^t f(s,u_n(s))\,\mathrm{d}s = y_0+\int_0^t s^2\cdot u_n(s)\,\mathrm{d}s\\
u_1(t) &= 2+\int_0^t 2s^2\,\mathrm{d}s = 2+\frac{2}{3}t^3\\
u_2(t) &= 2+\int_0^t s^2\cdot(2+\frac{2}{3}s^3)\,\mathrm{d}s = 2+\frac{2}{3}t^3+\frac{2}{18}t^6\\
u_3(t) &= 2+\int_0^t s^2\cdot(2+\frac{2}{3}s^3+\frac{2}{18}s^6)\,\mathrm{d}s = 2+\frac{2}{3}t^3+\frac{2}{18}t^6+\frac{2}{162}t^9.
\end{aligned}$$

(b) Die exakte Lösung ist durch $y(t)=2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3}$ gegeben (z.B. mit Trennung der Variablen) und die Näherungslösungen sind gerade die Partialsummen der Exponentialreihe der exakten Lösung

$$2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{3k}}{3^k k!}.$$

Aufgabe G3 (Matrixexponentialfunktion)
Berechnen Sie $\exp(A)$ für

$$A=\begin{pmatrix}5&0&-4\\0&-1&0\\-4&0&5\end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise:
Wir diagonalisieren zunächst die Matrix A. Das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda)=(-1-\lambda)(1-\lambda)(9-\lambda)$$

hat die Nullstellen $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ und $\lambda_3=9$. Wir berechnen jeweils einen normierten Eigenvektor (wir normieren, da dies das spätere Invertieren von S vereinfacht). Wir erhalten

$$v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Da die Transformationsmatrix S orthogonal ist, erhalten wir die Inverse S^{-1} durch Transponieren:

$$S^{-1}AS=D,\qquad\text{wobei}\qquad S=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad S^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&9\end{pmatrix}.$$

Nach Satz 7.3.10 und Beispiel 7.3.13 bestimmen wir die Exponentialabbildung zu

$$\exp(A)=S\exp(D)S^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-1}&0&0\\0&\mathrm{e}^{1}&0\\0&0&\mathrm{e}^{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}+\mathrm{e}^9&0&\mathrm{e}-\mathrm{e}^9\\0&2\mathrm{e}^{-1}&0\\\mathrm{e}-\mathrm{e}^9&0&\mathrm{e}+\mathrm{e}^9\end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4 (Autonome Differentialgleichungen)
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t)=f(y(t)), \quad t\in\mathbb{R}$$

entweder monoton wachsend oder monton fallend ist.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, es gäbe eine Lösung $y(t)$, die auf einem Intervall I nicht monoton ist. Als Lösung der Differentialgleichung mit *stetiger* rechter Seite ist die Lösung $y(t)$ sicher stetig differenzierbar.

Da nun aber $y(t)$ nicht-monoton ist, gibt es $a,b\in I$ mit $y'(a)>0$ und $y'(b)<0$.

Wir betrachten im Folgenden nur den Fall $a<b$ und $y(a)\le y(b)$. Alle anderen Fälle lassen sich analog zeigen.

Als stetige Funktion hat $y(t)$ auf der kompakten Menge $[a,b]$ eine globale Maximalstelle $\xi\in[a,b]$. Da $y'(b)<0$, gilt $y(\xi)\neq y(b)$ und somit insbesondere $y(\xi)>y(b)$.

Wir setzen nun $\eta:=\max\{x\in[a,\xi]:y(x)=y(b)\}$, d.h. $y(\eta)=y(b)$. Diese Menge ist nicht leer, da es nach dem Zwischenwertsatz wegen $y(\xi)>y(b)\ge y(a)$ mindestens einen Punkt in (a,b) geben muss, an dem y den Wert $y(b)$ annimmt. Da $y(b)\neq y(\xi)$ und $\eta\in[a,\xi]$ nach Konstruktion gilt, ist $\eta<\xi$.

Wir nehmen an, es gäbe $x\in(\eta,\xi)$ mit $y(x)\le y(b)$. Da aber $y(\xi)>y(b)$ gilt, würde in diesem Fall nach dem Zwischenwertsatz wieder ein $\tilde{x}\in[x,\xi)$ mit $y(\tilde{x})=y(b)$ existieren. Beachte, dass $\tilde{x}=\xi$ mit $y(\tilde{x})=y(b)$ ausgeschlossen ist, da wir $y(\xi)>y(b)$ bereits gezeigt haben. Die Existenz von $\tilde{x}\in[x,\xi)$ steht aber im Widerspruch zur Maximalität von η. Daher muss für alle $x\in(\eta,\xi)$ gelten: $y(x)>y(b)=y(\eta)$.

Wir betrachten nun alle $h>0$, für die $\eta+h<\xi$ ist. Damit gilt

$$\frac{y(\eta+h)-y(\eta)}{h}>0 \qquad \text{für alle } 0<h<\xi-\eta.$$

Der Grenzwert für $h\to 0$ liefert somit $y'(\eta)\ge 0$.

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt dann aber

$$0\le y'(\eta)=f(y(\eta))=f(y(b))=y'(b)<0.$$

Die Annahme, dass es eine Lösung gibt, die auf einem Intervall nicht monoton ist, ist also falsch. Also ist die Lösung monoton auf ganz $\mathbb{R}$.