Formale Grundlagen der Informatik II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wir betrachten die folgenden Formeln:

$$\varphi_1 := \forall x[\exists y(Rxy \wedge \neg \exists x Ryx) \vee \forall y \exists z(Rxz \wedge Rzy)]$$
$$\varphi_2 := \exists x[\forall y \neg Rxy \to \exists y \forall z(Rxy \wedge Rzy)]$$
$$\varphi_3 := \forall x \forall y[Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy \wedge \neg \exists x(Rzx \wedge Rxz))]$$

(a) Geben Sie äquivalente Formeln in Pränex-Normalform an.

(b) Wandeln Sie ihre Ergebnisse aus (a) in Skolem-Normalform um.

(c) Betrachten Sie die Formel $\varphi := \forall x \exists y Rxy$ und die Skolem-Normalform $\psi := \forall x Rxsx$.
   i. Beweisen Sie, daß $\psi \models \varphi$ gilt.
   ii. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass $\varphi \not\models \psi$.

Aufgabe G2

(a) Geben Sie für folgende FO-Formeln jeweils eine Skolem-Normalform an:
   i. $\forall x \exists y Rxy$
   ii. $\forall x(\forall y Ryy \to \exists y Ryf(x))$

(b) Geben Sie einige verschiedene Herbrandmodelle für die Skolem-Normalformen aus (a) an.

Aufgabe G3
Zeigen Sie, dass wenn T_1 und T_2 zwei Theorien sind, so dass $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, es ein Satz σ gibt, so dass $T_1 \models \sigma$ und $T_2 \models \neg\sigma$.

Aufgabe G4
Ein Pfad in einem Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Sequenz $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ von Knoten, so dass

$$x_i E x_{i+1}$$

für alle $i < n$. Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paaren von Knoten (x, y) einen Pfad $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ gibt, mit $x = x_0$ und $y = x_n$.
Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, so dass $\mathcal{G} \models \Gamma$ genau dann wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Betrachte Sätze φ der Form $\varphi := \forall x_1, \ldots, x_n \exists y_1, \ldots, y_m \, \varphi_{\text{qf}}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m)$, wobei φ_{qf} keine Quantoren und kein „=” und keine Funktionssymbole enthält. Geben Sie ein Entscheidungsverfahren für „$\models \varphi$” an.

Gibt es ein Entscheidungsverfahren auch wenn φ_{qf} Funktionssymbole enthält?

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Betrache das Axiom $\Gamma := \forall x(S(x) \neq 0)$ in einer Sprache mit zwei 1-stelligen Funktionssymbolen S und f und einem Konstantensymbol 0.

a) Zeigen Sie (informell): $\Gamma \models \exists x(f(S(f(x))) \neq x)$.

b) Konstruieren Sie aus Ihrem Beweis von a) endliche viele nur aus $0, S, f$ aufgebaute geschlossene Terme $t_1, \ldots, t_n$ mit $\Gamma \models \bigvee_{i=1}^{n}(f(S(f(t_i))) \neq t_i)$.

Hinweis

Man betrachte, ob f injektiv oder nicht-injektiv sein muss.