AL Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$

(Ax) $\dfrac{}{\Gamma, p \vdash \Delta, p}$ $(p \in \mathcal{V})$

(0-Ax) $\dfrac{}{\Gamma, 0 \vdash \Delta}$

(1-Ax) $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, 1}$

($\neg$L) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$

($\neg$R) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$

($\vee$L) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$

($\vee$R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$

$$(\wedge \mathrm{L})\ \frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta} \qquad (\wedge \mathrm{R})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\rightarrow \mathrm{L})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta} \qquad (\rightarrow \mathrm{R})\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Übung: Zeige, dass (Ax) für beliebiges φ statt p ableitbar ist.

Korrektheitssatz: Jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

Beweis: Überprüfe, dass für alle Regeln gilt: sind die Prämissen allgemeingültig, so auch die Konklusion.

Sequenzenkalkül: Gleichheitsregeln

$$(=) \qquad \frac{\Gamma, t = t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

$$(\mathsf{Sub}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi(t'/x), t = t', \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t = t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta}$$

Es ist tatsächlich ausreichend, diese Regeln for alle atomaren Formeln P statt φ zu fordern.

Übung: Zeige, dass

$$\Gamma, t = t', \varphi(t/x) \vdash \Delta, \varphi(t'/x)$$

ableitbar ist (siehe S. Negri, J. van Plato: Structural Proof Theory, CUB 2001).

Sequenzenkalkül: Quantorenregeln

(O.B.d.A.: y frei für x in φ wenn wir schreiben $\varphi(y/x)$)

$$(\forall L) \quad \frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} \qquad (\forall R) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(y/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}$$

falls y nicht in $\Gamma, \Delta, \forall x\varphi$

$$(\exists L) \quad \frac{\Gamma, \varphi(y/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} \qquad (\exists R) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}$$

falls y nicht in $\Gamma, \Delta, \exists\varphi$

Korrektheit prüfen!