Formale Grundlagen der Informatik II
2. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
18. Juni 2014

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Resolutionsverfahren)
Seien φ und ψ AL-Formeln. Wie kann man das Resolutionsverfahren benutzen, um zu überprüfen, ob

(a) φ unerfüllbar ist;

(b) φ erfüllbar ist;

(c) φ allgemeingültig ist;

(d) φ nicht allgemeingültig ist;

(e) $\varphi \models \psi$;

(f) eine endliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist;

(g) eine unendliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist?

Aufgabe G5 (Sequenzenkalkül)
Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül SK für folgende Sequenzen eine Herleitung.

(a) $\vdash p \vee q \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Aufgabe G6 (Kompaktheitssatz)
Für Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jedes Modell, das alle Formeln $\phi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

Hausübung

Aufgabe H4 (Resolutionsverfahren) (12 Punkte)
Seien

$$\varphi := (p \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$
$$\psi := (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass

(a) φ erfüllbar ist;

(b) $\varphi \models \psi$ gilt.

Aufgabe H5 (Beweiskalküle) (12 Punkte)
Wir betrachten folgenden Beweiskalkül von Shoenfield (1967) für das System $\{\neg, \vee\}$:

$$\text{Axiome: } \neg\phi \vee \phi$$
$$\text{Regeln: } \frac{\phi}{\phi \vee \psi} \qquad \frac{\phi \vee \phi}{\phi} \qquad \frac{\phi \vee (\psi \vee \chi)}{(\phi \vee \psi) \vee \chi} \qquad \frac{\phi \vee \psi \qquad \neg\phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

Wir schreiben $\Phi \vdash \psi$, falls es einen Beweisbaum gibt, dessen Blätter Axiome oder Aussagen in Φ sind und dessen Wurzel ψ ist. Beweisen Sie:

(a) $\phi \vee \psi \vdash \psi \vee \phi$.

(b) $\phi, \phi \to \psi \vdash \psi$ (wie üblich betrachten wir $\phi \to \psi$ als eine Abkürzung für $\neg\phi \vee \psi$).

(c) $\phi \vee \psi, \neg\phi \vdash \psi$.

(d) $\neg\neg\phi \vdash \phi$.

Aufgabe H6 (Kompaktheitssatz) (12 Punkte)
Eine Interpretation $\mathscr{I} : \mathscr{V} = \{p_1, p_2, \ldots\} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als eine unendliche Bit-Sequenz. P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, $\overline{P}$ das Komplement von P. Wir betrachten ein P, so dass sowohl P als auch $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned} P &= \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \models \Phi\} \\ \overline{P} &= \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \models \Psi\} \end{aligned}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathscr{V})$.
Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ sogar schon durch einzelne AL-Formeln ϕ und ψ spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).