Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Tobias Löw

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2006

Klausur

Formale Grundlagen der Informatik II

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	
Punkte (maximal)	12	12	12	12	12	48	(+12)
erreichte Punkte							

Note:

Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und fangen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite an.

Vor der Abgabe bitte hier falten und die Lösungsblätter hineinlegen.

Bearbeiten Sie **mindestens 4 Aufgaben** Ihrer Wahl von den folgenden 5 Aufgaben. Bei der Bewertung wird auf klare Darstellung und Begründungen Wert gelegt.

Aufgabe 1 **12 Punkte**

(a) Gegeben sei die AL-Formel

$$\varphi := \neg[(p \leftrightarrow (q \vee \neg r)) \rightarrow ((q \rightarrow p) \wedge \neg(p \wedge r))]$$

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle für φ und alle relevanten Subformeln, ob φ erfüllbar ist und ob φ allgemeingültig ist.

(b) Geben Sie für jedes $n \geq 1$ eine AL-Formel $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ an, so daß eine Interpretation $\mathfrak{J}$ die Formel φ genau dann erfüllt, wenn ein Index k existiert mit

$$\mathfrak{J}(p_1) = \dots = \mathfrak{J}(p_k) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}(p_{k+1}) = \dots = \mathfrak{J}(p_n) = 0\,.$$

(c) Beweisen Sie mit Hilfe der AL-Resolutionsmethode, daß

$$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r) \models (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$$

Aufgabe 2 **12 Punkte**

(a) Sei $S = \{E\}$ die Signatur der Graphen mit einer zweistelligen Kantenrelation E. Drücken Sie die folgende Aussage durch einen FO(S)-Satz aus:

„Die Struktur ist ein ungerichteter Graph (d. h. E ist symmetrisch und irreflexiv), so daß zwischen je zwei Knoten ein Pfad der Länge höchstens 2 existiert.“

(b) Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol, g ein einstelliges Funktionssymbol und E ein zweistelliges Relationssymbol.

(i) $S := \{E, f, g\}$. Zeigen Sie, daß die folgende Formel erfüllbar ist, indem Sie ein dreielementiges Modell angeben.

$$\forall x \forall y[\neg Exx \wedge Exgx \wedge (Exy \rightarrow (Exfxy \wedge Efxyy))]$$

Argumentieren Sie, daß dieser Satz auch ein unendliches Modell haben muß (es ist nicht nötig, ein solches anzugeben).

(ii) $S := \{E, g, c\}$ mit einem Konstantensymbol c. Geben Sie ein Herbrandmodell für folgende Formel an.

$$\forall x \forall y[\neg Exx \wedge Exgx \wedge (Exy \rightarrow Exgy) \wedge (gx = gy \rightarrow x = y)]$$

Gibt es ein endliches Modell? Geben Sie ein solches an, oder argumentieren Sie, wieso es kein endliches Modell geben kann.

Aufgabe 3 12 Punkte

Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und P ein einstelliges Relationssymbol. Betrachten Sie die FO-Sätze

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y((Rxy \wedge Px) \rightarrow Py)\,, \\
\varphi_2 &:= \exists x \forall y Rxy\,, \\
\varphi_3 &:= \forall x(Rxx \rightarrow Px)\,, \\
\psi &:= \forall x Px\,.
\end{aligned}$$

(a) Formen Sie die Sätze φ_1, φ_2, φ_3 und $\neg\psi$ in Skolemnormalform um.

(b) Bringen Sie $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \neg\psi$ in Klauselform.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Grundinstanzenresolution, daß

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \models \psi\,.$$

Hinweis. Man überlege sich inhaltlich, warum diese Folgerungsbeziehung gilt und welche Grundinstanzen dabei eine Rolle spielen.

Aufgabe 4 12 Punkte

Beantworten Sie folgende Fragen jeweils mit einer kurzen aber klaren Begründung:

(a) Gibt es bis auf logische Äquivalenz nur endlich viele Formeln in AL_n?

(b) Gibt es bis auf logische Äquivalenz mehr erfüllbare oder mehr unerfüllbare Formeln in AL_n?

(c) Für welche Signaturen S ist die Menge der variablenfreien Terme endlich?

(d) Gibt es ein $\varphi \in \mathrm{FO}(\{U\})$, für einstelliges Relationssymbol U, derart daß

$$(A, U^A) \models \varphi \quad \text{gdw} \quad U^A \text{ endlich ist?}$$

(e) Gibt es ein $\varphi \in \mathrm{FO}(\{U, <\})$, für einstelliges Relationssymbol U und zweistelliges $<$, derart daß über $(\mathbb{N}, <)$ mit der natürlichen Ordnung für alle Interpretationen $U^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ gilt:

$$(\mathbb{N}, <, U^{\mathbb{N}}) \models \varphi \quad \text{gdw} \quad U^{\mathbb{N}} \text{ endlich ist?}$$

Aufgabe 5 12 Punkte

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des FO-Sequenzenkalküls, daß

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$$

(b) Welche der folgenden FO-Sequenzelregeln sind korrekt? Führen Sie entweder einen Korrektheitsbeweis oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$

(ii) $\dfrac{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta}$