Computational Engineering und Robotik

Prof. Dr. Oskar von Stryk, Juliane Euler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2019
0. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Lernportal Informatik** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt:

  `https://moodle.informatik.tu-darmstadt.de/course/view.php?id=387`
- Inhaltliche Fragen zu dieser Übung werden in den Sprechstunden und dem Frage- und Antwortenforum im Lernportal Informatik beantwortet.
- Organisatorische Fragen richten Sie bitte an den betreuenden Mitarbeiter.
- Die Mitarbeiter-Sprechstunde für diese Übung findet in Raum S2|02/D210 statt.
- Für diese Übung ist **keine Abgabe erforderlich**.

Aufgabe 1 System, Modell, Simulation

a) In der Vorlesung wurden die Begriffe System und Modell eingeführt und näher erläutert. Welche Möglichkeiten zur Klassifikation von Modellen anhand

   1. der Beschreibung des Zustands,
   2. des zeitlichen Verlaufs und
   3. der zeitlichen Charakteristik der Zustandsübergänge

   werden vorgestellt? Welche weiteren Unterteilungen gibt es bei dynamischen Modellen?

b) Aus dem System und dem Modell ergibt sich die Simulation.

   1. Zu welchem Zweck kann eine Simulation allgemein eingesetzt werden?
      Nennen Sie drei Beispiele.
   2. Wie genau müssen die Ergebnisse einer Simulation sein? Gibt es ein Kriterium dafür?
   3. Welche Möglichkeiten zur Validierung von Simulation und Modell haben Sie kennengelernt?

c) Sie wollen einen Radfahrer auf einem Rennrad bei gleichbleibender Sitzposition simulieren. Nennen sie jeweils drei physikalische Größen, die Ihnen für Ihr Modell am wichtigsten erscheinen, wenn Sie sich für

   1. den Luftwiderstand des Gesamtsystems bestehend aus Rad und Fahrer oder
   2. die Fahrstabilität und Lenkpräzision bei hohen Geschwindigkeiten

   interessieren. Begründen Sie dabei kurz Ihre Auswahl.

Aufgabe 2 Rotationsmatrizen

Im $\mathbb{R}^3$ wird eine Rotation beschrieben durch die Multiplikation mit einer Matrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, deren Spalten paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind und für die $\det(\boldsymbol{R}) = 1$ gilt.
Die Darstellungsmatrix einer Rotation um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn, deren Rotationsachse durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{u} = (a, b, c)^T$ beschrieben ist, hat die allgemeine Form

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrizen der Rotation $\boldsymbol{R}_x$ um die x-Achse, $\boldsymbol{R}_y$ um die y-Achse und $\boldsymbol{R}_z$ um die z-Achse an.

b) Wegen der Orthogonalität gilt für Rotationsmatrizen $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, wobei $\boldsymbol{I}$ die Einheitsmatrix darstellt. Zeigen Sie diesen Zusammenhang anhand der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}_x$ aus dem vorangegangen Aufgabenteil.

c) Bestimmen Sie die Rotationsmatrix der folgenden nacheinander ausgeführten Operationen und zeigen Sie dadurch, dass Rotationsmatrizen nicht kommutativ sind:

- $\boldsymbol{R}_{xy}$: Drehung 30° um die x-Achse, dann 90° um die y-Achse
- $\boldsymbol{R}_{yx}$: Drehung 90° um die y-Achse, dann 30° um die x-Achse

Aufgabe 3 Differentialgleichungen lösen

a) Gegeben sei das inhomogene lineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = 2x(t) - 2t \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1\,. \tag{*}$$

Ermitteln Sie schrittweise die Lösung von (*), indem Sie die folgenden Teilaufgaben bearbeiten:

(i) Wie lautet die homogene Differentialgleichungen zu (*)?
Bestimmen Sie die dazugehörige homogene Lösung $x_h(t)$.

(ii) Wie lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung $x_p(t)$ des Problems?
Setzen Sie diesen in (*) ein und bestimmen Sie $x_p(t)$.

(iii) Addieren Sie $x_h(t)$ und $x_p(t)$ um die allgemeine Lösung von (*) zu erhalten.
Ermitteln Sie dann anhand der gegebenen Anfangsbedingung die spezielle Lösung.

b) Gegeben sei das inhomogene lineare DGL-System mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}(t)}\,. \tag{**}$$

(i) Wie lautet das homogene DGL-System zu (**)? Bestimmen Sie die homogene Lösung $\boldsymbol{x}_h(t)$.
Hinweis: Verwenden Sie das "Kochrezept" aus dem DGL-Repetitorium unter Beachtung des Sonderfalls komplexer Eigenwerte.

(ii) Der Ansatz der Variation der Konstanten lässt sich auch im Mehrdimensionalen anwenden. Bestimmen Sie damit die partikuläre Lösung $\boldsymbol{x}_p(t)$ von (**).

(iii) Wie lautet die allgemeine Lösung von (**)?

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Mit der Abgabe einer Lösung für eine schriftliche Aufgabe oder eine Programmieraufgabe bestätigen Sie, dass Sie/Ihre Gruppe die alleinigen Autoren des gesamten Materials sind. Falls die Verwendung von Fremdmaterial gestattet ist, so müssen Quellen korrekt zitiert werden. Weiterführende Informationen finden Sie auf der Internetseite des Fachbereichs Informatik:

`http://www.informatik.tu-darmstadt.de/Plagiarismus`