Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Hannes Meinlschmidt
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2013
21. Mai 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Fehler erster und zweiter Art)
Ein Pharma-Unternehmen bewirbt einen neuen Schwangerschaftstest mit der Aussage, dass er zu 99% genau sei.

(a) Warum ist diese Aussage unpräzise?

(b) Beim Studium des Beipackzettels wird klar, dass die oben genannte Wahrscheinlichkeit den relativen Anteil der erkannten unter den tatsächlichen Schwangerschaften angibt. Die Wahrscheinlichkeit für falschen Alarm (Test signalisiert "schwanger", obwohl Probandin nicht schwanger) beträgt allerdings 20%.

Die Nullhypothese sei gegeben durch $H_0 =$ "Probandin ist schwanger". Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster und zweiter Art an.

Aufgabe G2 (Konstruktion von Testverfahren)
Seien im Folgenden $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch $N(\mu, 1)$-verteilte Zufallsvariablen. Wir wollen einen Gauß-Test zum Niveau α durchführen.

(a) Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$. Laut Skript ist H_0 abzulehnen, falls $|T| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Anders formuliert, ist die Nullhypothese abzulehnen, falls

$$T \in I := \mathbb{R} \setminus \left[-u_{1-\frac{\alpha}{2}}, u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \tag{1}$$

gilt. Dabei ist T die Testgröße

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}\left(\bar{X}_{(n)} - \mu_0\right) = \sqrt{n}\left(\bar{X}_{(n)} - \mu_0\right).$$

Im Folgenden soll eine alternative Testgröße

$$\tilde{T}(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \cdot \bar{X}_{(n)}$$

verwendet werden. Geben Sie eine Menge $\tilde{I}$ an, sodass $\tilde{T} \in \tilde{I}$ äquivalent zu (1) ist.

(b) Wir betrachten nun die Nullhypothese $H_0 : \mu \le \mu_0$. Geben Sie wieder den kritischen Bereich $\tilde{I}$ an, sodass $\tilde{T} \in \tilde{I}$ als Kriterium zur Ablehnung von H_0 verwendet werden kann.

Hinweis: Gehen sie nicht von dem bekannten Kriterium aus dem Skript aus, sondern verwenden Sie, dass $\tilde{T}(X_1, \dots, X_n)$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $\sqrt{n} \cdot \mu$ und Varianz 1.

(c) Verwenden Sie den vorherigen Aufgabenteil, um das entsprechende Kriterium aus dem Skript (unter Verwendung von T) herzuleiten.

(d) Wir betrachten nun die Nullhypothese $H_0 : \mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ mit einem $\mu_0 \geq 0$. Geben Sie wieder den kritischen Bereich $\tilde{I}$ an, sodass $\tilde{T} \in \tilde{I}$ als Kriterium zur Ablehnung von H_0 verwendet werden kann.

(e) Wir betrachten nun die Nullhypothese $H_0 : \mu \in [\mu_0, \mu_1]$ mit $\mu_0 \leq \mu_1$. Geben Sie wieder den kritischen Bereich $\tilde{I}$ an, sodass $\tilde{T} \in \tilde{I}$ als Kriterium zur Ablehnung von H_0 verwendet werden kann.

Hausübung

Aufgabe H1 (Testverfahren)
Eine bestimmte Weizensorte wird auf 9 vergleichbaren, gleich großen Versuchsflächen angebaut. Aus Erfahrung weiß man, dass die Erträge der einzelnen Versuchsflächen als eine Stichprobe unabhängiger, identisch $N(\mu, 3.24)$-verteilter Zufallsvariablen angesehen werden können. Es ergibt sich ein arithmetisches Mittel von 105 [dz]. (Für Interessierte: dz = Doppelzentner = 100 kg.)

(a) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu = 106$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$.

(b) Welche Entscheidung würde sich zum Niveau $\alpha = 0.05$ ergeben?

(c) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 106$ zum Niveau $\alpha = 0.01$.

(d) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 106$ zum Niveau $\alpha = 0.01$.

Aufgabe H2 (Testverfahren)
Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine bestimmte Strecke von genau 1000 [m] zehnmal vermessen. Es ergaben sich folgende Meßwerte (in [m]):

998.0 1001.0 1003.0 1000.5 999.0 997.5 1000.0 999.5 996.0 998.5

Es wird angenommen, dass die Messwerte eine Realisierung unabhängiger $N(\mu, \sigma^2)$-verteilter Zufallsvariablen sind.

(a) Überprüfen Sie zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät mindestens die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.

(b) Überprüfen Sie unter der Voraussetzung, dass $\sigma^2 = 4$ gilt, zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.

(c) Das Gerät soll nur dann angeschafft werden, wenn es eine höhere Genauigkeit besitzt als die bisher verwendeten Geräte, deren Messgenauigkeit durch die Varianz von $\sigma_0^2 = 4\,[m^2]$ charakterisiert ist. Es soll daher mit einem geeigneten Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese überprüft werden, dass das neue Gerät die Varianz der herkömmlichen Geräte nicht unterschreitet.

Beurteilen Sie anhand des Tests, ob das Gerät angeschafft wird.

Hinweis: Es gilt $\bar{X}_{(10)} = 999.3$ und $S^2_{(10)} = 3.9$.

Aufgabe H3 (Aussagen)

(a) Ein Hypothesentest zum Niveau $\alpha = 0.02$ führte für eine konkrete Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ zur Ablehnung von H_0.

i. Welche Aussage können Sie über die Wahrscheinlichkeit $P(H_0$ ist falsch) machen?

ii. Welche Aussage können Sie über die Wahrscheinlichkeit $P(H_0$ ist falsch obwohl abgelehnt) machen?

(b) Es wird ein weiterer Test, diesmal zum Niveau 0.05, durchgeführt. Was können Sie über folgende Wahrscheinlichkeiten aussagen?

i. $P(H_0$ wird abgelehnt, obwohl sie richtig war)

ii. $P(H_0$ wird nicht abgelehnt, obwohl sie falsch war)

iii. $P(H_0$ wird zu Recht abgelehnt)