Wiederholung

– was Sie unbedingt wissen/können müssen

Formalismen

Syntax (AL, FO, Formeln, Terme, freie Variablen, etc.)

Normalformen (DNF, KNF, pränexe Normalform)
syntaktische Manipulationen: Substitution, Skolemisierung

Beweiskalküle (Resolutionsmethode, Sequenzenregeln)

Inhaltliches Verstehen

Semantik von Formeln, Modellbeziehung

Formeln lesen können, Terme/Formeln in Strukturen auswerten

Formalisierungen in AL und FO angeben

semantische Beziehungen: Äquivalenzen, Folgerungsbeziehung, Erfüllbarkeitsäquivalenz
semantische Kriterien: Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, Korrektheit, ...

Wiederholung

zentrale Begriffe/Konzepte inhaltlich beherrschen
im Kontext sinnvoll anwenden
zentrale Sätze und Resultate: kennen
interpretieren
anwenden

zentrale Sätze

Kompaktheit (Endlichkeitssätze),
Herbrand-Modelle,
Reduktionen von FO auf AL,
Korrektheits- und Vollständigkeitsaussagen zu Kalkülen
Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit

Wiederholung: Beispiele

AL-Formeln auswerten (systematisch: Wahrheitstafel)

AL-Formeln auf Folgerung bzw. Äquivalenz untersuchen

natürlichsprachliche Bedingungen in AL formalisieren

Unerfüllbarkeit mittels Resolution nachweisen
Allgemeingültigkeit formal im Sequenzenkalkül nachweisen

Folgerungsbeziehungen reduzieren auf
Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit

Kompaktheitssatz anwenden

Kalküle rechtfertigen (z.B. Korrektheit von Regeln)

Wiederholung: Beispiele

Umgang mit Strukturen
auch spezielle Strukturen und Klassen wie z.B.
Graphen, Transitionssysteme, relationale DB-Strukturen,
Wortmodelle, linear-temporale Abfolgen, $\mathcal{N}$

Auswerten von Termen und Formeln in Strukturen

PNF, Skolemisieren, Substitutionen ausführen

Herbrandmodelle beschreiben/untersuchen

Unerfüllbarkeit durch Reduktion auf AL nachweisen

GI-Resolution und Sequenzenkalkül in Beispielen

etc.

entscheidbar? rekursiv aufzählbar? → Übung G1

$\mathrm{SAT(AL)} := \{\varphi \in \mathrm{AL} : \varphi$ erfüllbar$\}$

$\mathrm{FOLG(AL)} := \{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL} \times \mathrm{AL} : \varphi \models \psi\}$

$\mathrm{SAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi$ erfüllbar$\}$

$\mathrm{VAL(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi$ allgemeingültig$\}$

$\mathrm{UNSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi$ unerfüllbar$\}$

$\mathrm{FINSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi$ hat ein endliches Modell$\}$

$\mathrm{INFVAL(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi$ im Unendlichen allgemeingültig$\}$

$\mathrm{INF}_0\mathrm{(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi$ in unendlichen Modellen erfüllbar$\}$

$\mathrm{INF}_1\mathrm{(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi$ nur in unendlichen Modellen erfüllbar$\}$

$\mathrm{INF}_2\mathrm{(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi$ hat beliebig große endliche Modelle$\}^{**}$

- Beispiele von Sätzen in/außerhalb?
  Inklusionen, Komplementbeziehungen, . . .

FO-ausdrückbar in Graphen?

Distanz gerade oder unendlich (d.h., nicht endlich und ungerade)

Kreisfreiheit

Existenz eines Kreis

uniform unendlicher Grad

uniform endlicher Grad

Herbrand-Modelle – Nichtstandard-Modelle $\rightarrow$ Übung G3

Kann man die Klasse der Herbrandmodelle einer gegebenen Satzmenge in FO axiomatisieren?

Kann man in FO-Satzmenge die Forderung spezifizieren, dass jedes Element der Trägermenge durch eine variablenfreien Term addressiert wird?

Kann die Menge der in einem Modell der Arithmetik durch variablenfreie Terme addressierten Elemente durch eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S_{ar})$ definierbar sein?

$(*)$ Kann man in $\mathrm{MSO}(S_{ar})$ das Standardmodell der Arithmetik bis auf Isomorphie axiomatisieren?

Ist die Menge der Primzahlen im Standardmodell der Arithmetik durch eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S_{ar})$ definierbar? In welchem Sinne gibt es in Nichtstandard-Modellen unendliche Primzahlen?

Was stimmt hiervon?

Man kann die Erfüllbarkeit von AL-Formeln in DNF effizient* entscheiden.

Zu jeder AL-Formel kann man eine logisch äquivalente AL-Formel in DNF berechnen.

Erfüllbarkeit von AL-Formeln ist effizient* entscheidbar.

$*$ in Laufzeit polynomial in der Länge der gegebenen Formel

Was stimmt hiervon?

Zu jeder FO-Formel gibt es

eine $\left\{ \begin{array}{l} \text{logisch äquivalente } \mathrm{FO}^{\neq}\text{-Formel ?} \\ \text{erfüllbarkeitsäquivalente } \mathrm{FO}^{\neq}\text{-Formel ?} \end{array} \right.$

eine $\left\{ \begin{array}{l} \text{logisch äquivalente pränexe } \mathrm{FO}\text{-Formel ?} \\ \text{logisch äquivalente universell-pränexe } \mathrm{FO}\text{-Formel ?} \\ \text{erfüllbarkeitsäquivalente universell-pränexe } \mathrm{FO}\text{-Formel ?} \end{array} \right.$

Wie findet man solche Formeln ggf. algorithmisch?

Was stimmt hiervon?

Man kann die Erfüllbarkeit von (universell-pränexen $=$-freien) FO-Sätzen auf ein AL-Erfüllbarkeitsproblem reduzieren.

Erfüllbarkeit von (universell-pränexen $=$-freien) FO-Sätzen ist entscheidbar.

Was stimmt hiervon?

Resolutionsalgorithmen produzieren schließlich alle Klauseln, die logische Folgerungen aus der gegebenen Klauselmenge sind.

Der (schnittfreie) AL-Sequenzenkalkül $\mathcal{K}$ erlaubt eine terminierende algorithmische Beweissuche.

Der (schnittfreie) FO-Sequenzenkalkül $\mathcal{K}$ erlaubt eine terminierende algorithmische Beweissuche.