Formale Grundlagen der Informatik II 7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Alexander Kreuzer
Pavol Safarik

SS 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten ungerichtete Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$. Welche der folgenden Aussagen lassen sich durch eine Menge von FO-Formeln ausdrücken? Geben Sie eine entsprechende Formelmenge an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Der Abstand zwischen den Knoten x und y ist gerade oder unendlich.

(b) $\mathcal{G}$ enthält keinen Kreis.

(c) $\mathcal{G}$ enthält einen Kreis.

(d) Jeder Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

(e) Kein Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

Aufgabe G2

(a) Geben Sie eine passende Signatur an, und drücken Sie darüber die folgenden „Tatsachen" durch Sätze der Logik erster Stufe aus:

   i. Ein Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.

   ii. Grüne Drachen können fliegen.

   iii. Ein Drache ist grün, wenn einer seiner Elterndrachen grün ist.

   iv. Alle grünen Drachen sind glücklich.

   Hinweis: Überlegen Sie sich u. a., was Sie in der Signatur benötigen, um „ist Kind von" ausdrücken zu können.

(b) Leiten sie argumentativ die vierte Aussage aus den ersten drei her.

(c) Zeigen Sie mittels dem Resolutionsverfahren, dass die vierte Aussage aus den ersten drei folgt.

   Hinweis: Beachten Sie, dass man auf eine Skolemfunktion geführt wird, die ggf. „nicht fliegende Kinder" liefert.

Aufgabe G3

Beweisen Sie die gegebene Folgerungsbeziehung sowohl im Sequenzenkalkül als auch durch Resolution.

$$\forall x \neg P(x), \neg\forall x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \models \exists x Q(x)$$

Aufgabe G4

Sei S eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält und wofür die Menge der geschlossenen Termen $T_0(S)$ unendlich ist.

(a) Zeigen Sie, dass es keine Menge Φ von S-Sätzen gibt, so dass Φ genau dann wahr ist in einer S-Struktur $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A}$ ein Herbrandmodell ist.

Hinweis: Betrachten Sie erst den Spezialfall $S = (c, f)$ (eine Konstante c und ein einstelliges Funktionssymbol f).

(b) Folgern Sie aus (a), dass es keine S-Formel $\psi(x)$ geben kann, so dass

$$(\mathcal{A}, \beta[x \mapsto a]) \models \psi(x)$$

gilt, genau dann wenn a die Interpretation von einem variablenfreien Term ist.

Aufgabe G5

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \exists y (R(x,y) \wedge (P(x) \rightarrow Q(y))) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)) \\
\varphi_3 &:= \exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \wedge Q(y) \rightarrow R(y,x)) \\
\varphi_4 &:= \neg \exists x \exists y (R(x,y) \wedge P(x) \wedge P(y))
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Zeigen Sie jetzt mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(d) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies alle vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Aufgabe G6 (Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretation — Zusatzaufgabe)

Im folgenden bezeichnen φ und ψ quantorenfreie Formeln in FO. Beschreiben Sie informell mittels der Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretation die Bedeutung der folgenden Aussagen:

$$\begin{gathered}
\neg \forall n \varphi(n) \\
\exists n \neg \varphi(n) \\
\varphi \vee \psi \\
\neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)
\end{gathered}$$

Argumentieren Sie informell mittels der Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretation, welche der folgenden Aussagen intuitionistisch wahr bzw. im intuitionistischem Sinne falsch sind:

$$\begin{gathered}
\exists n \neg \varphi(n) \rightarrow \neg \forall n \varphi(n) \\
\neg \forall n \varphi(n) \rightarrow \exists n \neg \varphi(n) \\
\varphi \vee \psi \rightarrow \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi) \\
\neg(\neg \varphi \vee \neg \psi) \rightarrow \varphi \vee \psi
\end{gathered}$$

Aufgabe G7 (Zusatzaufgabe)
Die Gödel-Genzen Negativübersetzung ordnet jeder FO-Formel φ eine FO-Formel φ^N zu. Die Formel φ^N ist induktiv durch folgende Regeln gegeben.

$$\begin{aligned}
\varphi^N &:= \neg\neg\varphi \qquad \text{falls } \varphi \text{ ein atomare Formel ist} \\
(\varphi \wedge \psi)^N &:= \varphi^N \wedge \psi^N \\
(\varphi \vee \psi)^N &:= \neg(\neg\varphi^N \wedge \neg\psi^N) \\
(\varphi \to \psi)^N &:= \varphi^N \to \psi^N \\
(\neg\varphi)^N &:= \neg\varphi^N \\
(\forall x\varphi)^N &:= \forall x\varphi^N \\
(\exists x\varphi)^N &:= \neg(\forall x\neg\varphi^N)
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle FO-Formel φ gilt $\models \varphi \leftrightarrow \varphi^N$.

(b) Zeigen Sie, dass φ^N nur aus doppelt negierten Atomen, $\wedge$, $\to$, $\forall$ und $\perp$ besteht.
($\neg\varphi$ wir als Abkürzung für $\varphi \to \perp$ gelesen.)

(c) Bemerken Sie, dass

$$\vdash_H \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{H_i} \varphi^N$$

Benutzen Sie dafür den Satz auf Folie 173.

Aufgabe G8 (Zusatzaufgabe)

(a) Wir betrachten Wortmodelle $\mathcal{W} = (\{1, \ldots, n\}, <, P_a, P_b)$ (siehe Skript – Seite 3) mit zwei Buchstaben. Bestimmen Sie durch Analyse von Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen den minimalen Quantorenrang einer Formel, mit deren Hilfe die beiden folgenden Wörter unterschieden werden können:

$$a\,b\,a\,b\,a \qquad a\,b\,b\,a\,b\,a$$

(b) Wir betrachten Strukturen $\mathcal{A} = (A, P, Q)$ mit zwei einstelligen Relationen P und Q. Zeigen Sie, dass es keine FO-Formel φ gibt, so dass gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ und } Q \text{ haben gleich viele Elemente.}$$

(c) Zeigen Sie, dass es für Wortstrukturen $\mathcal{W} = (\{1, \ldots, n\}, <, P_a, P_b)$ keine FO-Formel φ gibt, so dass gilt

$$\mathcal{W} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{W} \text{ enthält gleich viele } a \text{ wie } b.$$

(Beachten Sie, dass die Aussage aus (b) hieraus folgt.)