Formale Grundlagen der Informatik II
1. Hausübung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SoSe 2015**
Prof. Dr. Martin Otto **3. Juni 2015**
Julian Bitterlich, Felix Canavoi, Kord Eickmeyer, Daniel Günzel

Aufgabe H1 (AL-Spezifikationen) (12 Punkte)

(a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n, z_0, \dots, z_n)$, die genau dann wahr ist, wenn die Summe der in $\bar{x}$ und $\bar{y}$ kodierten Binärzahlen gleich der in $\bar{z}$ kodierten Binärzahl ist. Dabei kodiere $\bar{x}$ die Zahl $\sum_i x_i 2^i$.

(*Hinweis:* Für ein transparentes Vorgehen per Induktion über n überlege man sich zunächst geeignete Hilfsformeln.)

(b) Gibt es — möglicherweise unendliche — aussagenlogische Formelmengen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \subseteq AL(\mathcal{V})$ mit $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots\}$ derart, dass für Belegungen $\mathfrak{I}$ gilt

i. $\mathfrak{I} \models \Phi_1$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ höchstens zwei Variablen mit 1 belegt,

ii. $\mathfrak{I} \models \Phi_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ genau zwei Variablen mit 1 belegt, und

iii. $\mathfrak{I} \models \Phi_3$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ mindestens zwei Variablen mit 1 belegt.

Aufgabe H2 (Vollständige Systeme von Junktoren) (12 Punkte)

Für jede der folgenden Junktorenmengen beweisen oder widerlegen Sie, dass sie vollständige Systeme von Junktoren sind.

(a) $\{\neg, \rightarrow\}$

(b) $\{\rightarrow, 0\}$

(c) $\{\leftrightarrow\}$

(d) $\{\wedge, \vee\}$

Aufgabe H3 (Resolution) (12 Punkte)

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(q \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \wedge (r \vee s) \wedge ((p \wedge s) \rightarrow r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

(b) Weisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode die folgende Folgerungsbeziehung nach:

$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \models (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \rightarrow 0)$$

(c) Bestimmen Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$H_0 = \{(p \wedge t) \rightarrow s, \quad r, \quad (q \wedge r) \rightarrow s, \quad t \rightarrow p, \quad t\}$$

Aufgabe H4 (Untere Schranken für Formelgrößen) (12 Punkte)
Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \ldots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat;

(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(a) jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder hat.

Aufgabe H5 (Folgerungen aus dem Kompaktheitssatz) (12 Punkte)

(a) Für — möglicherweise unendliche — Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jede Interpretation, die alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Sei $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Eine Interpretation $\mathfrak{I} : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als die unendliche Bit-Sequenz $\mathfrak{I}(p_1)\mathfrak{I}(p_2)\mathfrak{I}(p_3)\ldots$
P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, so dass sowohl P als auch das Komplement $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$P = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Phi\}$$
$$\overline{P} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Psi\}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$.
Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ jeweils schon durch eine einzelne AL-Formel spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

Aufgabe H6 (Sequenzenkalkül) (12 Punkte)
Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Aufgabe H7 (12 Punkte)
Zeigen Sie semantisch, dass die folgenden Regeln korrekt sind.

(a) $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\phi}$

(b) $\dfrac{\Gamma \vdash (\phi \to \psi) \to \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}$

(c) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \to \psi \vdash \Delta}$