Formale Grundlagen der Informatik II 6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Davorin Lešnik, Daniel Günzel, Daniel Körnlein

SoSe 2014
16. Juli 2014

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Graphen und FO)
Ein Pfad in einem Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Sequenz $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ von Knoten, so dass

$$x_i E x_{i+1}$$

für alle $i < n$. Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle Paare von Knoten (x, y) einen Pfad $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ gibt, mit $x = x_0$ und $y = x_n$.
Zeigen Sie, dass es keine Formelmenge Γ in der Sprache der Graphen gibt, sodass $\mathcal{G} \models \Gamma$ genau dann, wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist.

Lösung: Wir verwenden, dass man eine Formel $\phi_n(x, y)$ definieren kann, die aussagt, dass es einen Pfad der Länge n vom Startzustand nach y gibt:

$$\phi_n(x, y) = \exists x_0, \dots, x_n \left((x_0 = x) \land (x_n = y) \land \bigwedge_{i<n} x_i E x_{i+1} \right).$$

Nehmen wir an, dass es eine Formelmenge Γ gibt in der Sprache der Graphen, sodass ein Graph $\mathcal{G}$ ein Modell von Γ ist genau dann, wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist. Wir erweitern die Signatur um zwei Konstanten c und d und betrachten die folgende Formelmenge in der erweiterten Sprache

$$\Gamma_\infty = \Gamma \cup \left\{ \neg\phi_n(c, d) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die Formelmenge Γ_∞ is unerfüllbar, da man in einem Modell $\mathcal{G}$ die Konstanten c und d nicht widerspruchsfrei interpretieren kann: einerseits soll der Zustand $d^{\mathcal{G}}$ von $c^{\mathcal{G}}$ aus erreichbar sein, da Γ erfüllt ist und der Graph $\mathcal{G}$ deshalb zusammenhängend sein muss; andererseits kann $d^{\mathcal{G}}$ nicht von $c^{\mathcal{G}}$ aus erreichbar sein: dann würde es einen Pfad von $c^{\mathcal{G}}$ nach $d^{\mathcal{G}}$ geben; dieser Pfad hat eine bestimmte Länge n, was unmöglich ist, da $\mathcal{G} \models \neg\phi_n(c, d)$.
Also ist (nach Kompaktheitssatz) schon eine endliche Teilmenge von Γ_∞ unerfüllbar und insbesondere ist schon eine Teilmenge von der Form

$$\Gamma_n = \Gamma \cup \left\{ \neg\phi_k(c, d) \;\middle|\; k < n \right\}$$

unerfüllbar (da jede endliche Teilmenge in einer Γ_n enthalten ist). Aber jedes Γ_n hat ein Modell, wobei es einen Pfad von $c^{\mathcal{G}}$ nach $d^{\mathcal{G}}$ gibt, aber keinen mit einer Länge kürzer als n. (Ein Modell könnte so aussehen:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\ ,$$

wobei wir c als der 0-Knoten und d als der n-Knoten interpretieren.)
Also haben wir einen Widerspruch und schließen, dass es keine Formel Γ geben kann, die den Zusammenhang eines Graphen ausdrückt.

Aufgabe G17 (Entscheidbarkeit von Erfüllbarkeit)

(a) Für eine Klasse L von FO-Sätzen gelte die folgende „Endliches-Modell-Eigenschaft“:

Jeder erfüllbare Satz $\phi \in L$ hat ein endliches Modell.

Argumentieren Sie, dass Erfüllbarkeit für Sätze aus L entscheidbar ist.

Hinweis: Man erinnere sich, dass eine Menge entscheidbar ist, falls man die Menge selbst und auch ihr Komplement rekursiv aufzählen kann. Diesen Sachverhalt kann man für $\mathrm{SAT}(L)$ und $L \setminus \mathrm{SAT}(L)$ ausnutzen.

(b) Zeigen Sie, dass Erfüllbarkeit für pränexe $\exists^*\forall^*$-FO-Sätze in einer Symbolmenge ohne Funktionssymbole (nur Relationen und Konstanten) entscheidbar ist.

Hinweis: Man überlege sich, zunächst für Sätze ohne Gleichheit, wie deren Herbrand-Modelle aussehen.

Lösung:

(a) Sei $S(\phi)$ die Signatur, die genau die Symbole enthält, die in einem Satz ϕ vorkommen. Offenbar ist $S(\phi)$ stets endlich.

Um zu entscheiden, ob ϕ erfüllbar ist, reicht es, Modelle über $S(\phi)$ zu betrachten. Damit ist $\mathrm{SAT}(L)$ aufzählbar, weil für jeden Satz ϕ nur endlich viele Modelle einer festen Größe n gibt (es gibt nur endlich viele Möglichkeiten die Funktion-, Relationssymbole, Konstanten in $S(\phi)$ zu belegen) und damit nach dem kleinsten n, so dass es ein Modell dieser Größe gibt, gesucht werden kann.

$\overline{\mathrm{SAT}(\mathrm{FO})}$ ist aufgrund des Vollständigkeitssatzes rekursiv aufzählbar. Man kann also für einen Kandidaten $\phi \in L$ parallel nach einem endlichen Modell und nach einem Nachweis für die Unerfüllbarkeit von ϕ (d.h. die Allgemeingültigkeit von $\neg\phi$) suchen. Aufgrund der „Endliches-Modell-Eigenschaft“ wird eine dieser Suchen schließlich fündig und zeigt an, ob ϕ erfüllbar ist oder nicht.

(b) Da die Skolemnormalform einer Formel erfüllbarkeitsäquivalent zur Formel ist und die Skolemnormalform eines $\exists^*\forall^*$-Satzes ein $\forall^*$-Satz mit zusätzlichen Konstantensymbolen ist, reduziert sich die Aufgabe auf universell-pränexe FO-Sätze. Universelle Sätze ohne Gleichheit sind genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell haben. Da die Signatur keine Funktionssymbole enthält, sind die einzigen Terme über $S(\phi)$ die Konstanten, die in dem Satz ϕ vorkommen. Also ist jedes Herbrand-Modell endlich, d.h. die Klasse der universell-pränexen gleichheitsfreien Sätze ohne Funktionssymbole hat die „Endliches-Modell-Eigenschaft“ und das Problem ist nach (a) entscheidbar.

Bei Sätzen mit Gleichheit kann $=$ mit einem neuen Relationssymbol $\sim$ eliminiert werden, so dass der Satz weiterhin universell-pränex bleibt. (Der Satz $\phi_\sim$, der aussagt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und die Sätze die aussagen, dass $\sim$ mit allen Relationen verträglich ist, sind universell und gleichheitsfrei. Siehe Skript FO S.12.)

Aufgabe G18 (Intuitionistische Logik)

Zeigen Sie, dass in intuitionistischer Mengenlehre das Auswahlaxiom das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten impliziert (also ist eine intuitionistische Mengenlehre mit dem Auswahlaxiom eigentlich eine klassische Mengenlehre).
Präziser: das Auswahlaxiom besagt, dass für jede Relation $R \subseteq X \times Y$

$$\forall x \in X\ \exists y \in Y\ xRy \quad \longrightarrow \quad \exists f : X \to Y\ \forall x \in X\ xRf(x)$$

gilt. Man kann zeigen, dass das Auswahlaxiom äquivalent zur Aussage „jede surjektive Funktion hat eine rechte Inverse“ ist. (Sie müssen das nicht zeigen und können es als bekannt annehmen.) Eine rechte Inverse zu $f : X \to Y$ is eine Funktion $g : Y \to X$, sodass für jedes $y \in Y$ gilt $f(g(y)) = y$.
Beweisen Sie:

(a) Wenn g eine rechte Inverse zu f ist, dann ist f surjektiv und g injektiv.

(b) Wenn das Auswahlaxiom vorausgesetzt wird, folgt in intuitionistischer Mengenlehre, dass für jeden Satz ϕ gilt $\phi \vee \neg\phi$.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $X := \{0, 1\}$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, für die gilt $0 \sim 1 \longleftrightarrow \phi$. Beachte, dass die Gleichheit auf $\{0, 1\}$ intuitionistisch entscheidbar ist, d.h. es gilt $\forall x, y \in X\ \big(x = y \vee \neg(x = y)\big)$ (Sie müssen das nicht beweisen).

Lösung:

(a) Sei $y \in Y$ beliebig. Dann existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$ gilt, nämlich $x = g(y)$, also ist f surjektiv.

Seien $x, y \in Y$ beliebig, für die gilt $g(x) = g(y)$. Dann $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$, also ist g injektiv.

(b) Setze $0 \sim 0$ und $1 \sim 1$. Per Hinweis deklarieren wir, dass $0 \sim 1$ und $1 \sim 0$ genau dann gelten, wenn ϕ gilt. Es ist leicht zu prüfen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Sei $f : X \to X/_\sim$ die Quotientenabbildung, d.h. $f(x) = [x]_\sim$, wobei $[x]_\sim$ die Äquivalenzklasse von x ist. Die Quotientenabbildung ist immer surjektiv, also existiert nach Voraussetzung eine rechte Inverse $g : X/_\sim \to X$ zu f. Per Hinweis ist die Gleichheit auf $\{0,1\}$ intuitionistisch entscheidbar, also gilt

$$g([0]_\sim) = g([1]_\sim) \ \vee\ \neg\big(g([0]_\sim) = g([1]_\sim)\big).$$

Per vorheriger Teilaufgabe ist g injektiv, also ist $g([0]_\sim) = g([1]_\sim)$ äquivalent zu $[0]_\sim = [1]_\sim$, also zu $0 \sim 1$, also zu ϕ. Wir schließen $\phi \vee \neg\phi$.

Hausübung

Diese Hausübung ist **online in Moodle** (https://moodle.tu-darmstadt.de/) **bis 20:00 am 25. Juli 2014** abzugeben. Um das zu tun, klicken Sie auf *Be6* im Abschitt *Übungen FGdI2* auf der Moodle-Seite der Veranstaltung.

Aufgabe H16 (Graphen und FO) (10 Punkte)

Wir betrachten ungerichtete Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$. Welche der folgenden Aussagen lassen sich durch eine Menge von FO-Formeln ausdrücken? Geben Sie eine entsprechende Formelmenge an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Der Abstand zwischen den Knoten x und y ist gerade (oder unendlich).

(b) $\mathcal{G}$ enthält keinen Kreis.

(c) $\mathcal{G}$ enthält einen Kreis.

(d) Jeder Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

(e) Kein Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

Lösung:

(a) Wir definieren zunächst eine Formel $\varphi_n(x, y)$, die besagt, dass es einen Pfad der Länge höchstens n von x nach y gibt:

$$\varphi_0(x, y) := (x = y), \qquad \varphi_{n+1}(x, y) := \varphi_n(x, y) \vee \exists z\ \big(Exz \wedge \varphi_n(z, y)\big)\ .$$

Die gesuchte Formelmenge ist:

$$\big\{\varphi_{2n+1}(x, y) \to \varphi_{2n}(x, y) \ \big|\ n \in \mathbb{N}\big\}\,.$$

(b) $\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \Big(\big(\bigwedge_{i<k\leq n} x_i \neq x_k\big) \wedge Ex_1x_2 \wedge \ldots \wedge Ex_{n-1}x_n \wedge Ex_nx_1\Big)$, für alle $n > 2$.

(c) Diese Aussage läßt sich nicht durch eine Menge Φ von FO-Formeln ausdrücken. Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Dann ist die Menge

$$\Psi := \Phi \cup \left\{\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \Big(\big(\bigwedge_{i<k\leq n} x_i \neq x_k\big) \wedge Ex_1x_2 \wedge \ldots \wedge Ex_{n-1}x_n \wedge Ex_nx_1\Big) \ \middle|\ n > 2\right\}$$

unerfüllbar. Andererseits folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Ψ doch erfüllbar ist. (Jede endliche Teilmenge ist in einem hinreichend großen Kreis erfüllt.) Widerspruch.

(d) $\forall x\ \exists y_1 \cdots \exists y_n \Big(\big(\bigwedge_{i<k\leq n} y_i \neq y_n\big) \wedge Exy_1 \wedge \cdots \wedge Exy_n\Big)$, für alle $n > 2$.

(e) Diese Aussage läßt sich nicht durch eine Menge Φ von FO-Formeln ausdrücken. Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Dann ist die Menge

$$\Psi := \Phi \cup \left\{\forall x\ \exists y_1 \cdots \exists y_n \Big(\big(\bigwedge_{i<k\leq n} y_i \neq y_k\big) \wedge Exy_1 \wedge \cdots \wedge Exy_n\Big) \ \middle|\ n > 2\right\}$$

unerfüllbar. Andererseits folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Ψ doch erfüllbar ist. (Jede endliche Teilmenge ist in einem Baum von hinreichend großem Verzweigunsgrad erfüllt.) Widerspruch.

Aufgabe H17 ((Semi-)Entscheidbarkeit) (14 Punkte)

Für die folgenden Mengen geben Sie jeweils an, ob sie

- entscheidbar,
- semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar,
- nicht semi-entscheidbar

sind. Schreiben Sie dazu eine kurze Begründung für Ihre Wahl.

(a) $\mathrm{SAT}(\mathrm{AL}) := \{\phi \in \mathrm{AL} \mid \phi \text{ erfüllbar}\}$

(b) $\{(\phi, \psi) \in \mathrm{AL} \mid \phi \models \psi\}$

(c) $\mathrm{SAT}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ erfüllbar}\}$

(d) $\mathrm{VAL}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ allgemeingültig}\}$

(e) $\mathrm{UNSAT}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ unerfüllbar}\}$

(f) $\mathrm{FINSAT}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ hat ein endliches Modell}\}$

(g) $\mathrm{INF}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$

Lösung:

(a) $\mathrm{SAT}(\mathrm{AL}) := \{\phi \in \mathrm{AL} \mid \phi \text{ erfüllbar}\}$ ist entscheidbar.

Begründung: Zugehörigkeit zu dieser Menge kann man mit Wahrheitstafeln entscheiden.

(b) $\{(\phi, \psi) \in \mathrm{AL} \mid \phi \models \psi\}$ ist entscheidbar.

Begründung: Zugehörigkeit zu dieser Menge kann man mit Wahrheitstafeln entscheiden.

(c) $\mathrm{SAT}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ erfüllbar}\}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Begründung: Diese Menge ist nicht entscheidbar (Satz von Church und Turing, S. 37 im Skript). $\overline{\mathrm{SAT}(\mathrm{FO})}$ besteht aus den Sätzen ϕ, die nicht erfüllbar sind, oder, anders gesagt, aus den Sätzen ϕ, für die $\neg\phi$ allgemeingültig ist. Das Komplement von SAT(FO) ist also wegen des Vollständigkeitssatzes semi-entscheidbar. Da eine semi-entscheidbare Menge, deren Komplement auch semi-entscheidbar ist, entscheidbar ist, kann SAT(FO) also nicht semi-entscheidbar sein.

(d) $\mathrm{VAL}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ allgemeingültig}\}$ ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Begründung: Wegen des Vollständigkeitssatzes ist diese Menge semi-entscheidbar. Sie ist nicht entscheidbar, da eine Formel ϕ erfüllbar ist, genau dann wenn $\neg\phi$ nicht allgemeingültig ist. Erfüllbarkeit ist für FO aber nicht entscheidbar.

(e) $\mathrm{UNSAT}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ unerfüllbar}\}$ ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Begründung: Eine Formel ϕ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\neg\phi$ allgemeingültig ist, also ist diese Menge nach (d) semi-entscheidbar. Sie ist nach (c) nicht entscheidbar, da eine Formel unerfüllbar ist, genau dann wenn sie nicht erfüllbar ist.

(f) $\mathrm{FINSAT}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ hat ein endliches Modell}\}$ ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Begründung: Diese Menge ist semi-entscheidbar, da man systematisch alle endlichen Modelle durchsuchen kann. Nach dem Satz von Traktenbrot (S. 37 im Skript) ist diese Menge aber nicht entscheidbar.

(g) $\mathrm{INF}(\mathrm{FO}) := \{\phi \in \mathrm{FO} \mid \phi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Begründung: Wäre diese Menge semi-entscheidbar, dann wäre $\mathrm{SAT}(\mathrm{FO}) = \mathrm{FINSAT}(\mathrm{FO}) \cup \mathrm{INF}(\mathrm{FO})$ das auch, im Widerspruch zu (c).

Aufgabe H18 (Intuitionistische Logik) (12 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen im intuitionistischen Sequenzenkalkül SK_i (Folien, S. 170-171) ab.

Bemerkungen: Sowohl 0 als auch $\bot$ sind Symbole für Falschheit. $\neg\varphi$ ist eine Abkürzung für $\varphi \to \bot$. Die Regel Ax ist nur für Variablen ($\Gamma, p \vdash p$ ist ableitbar) formuliert, Sie können aber frei die darausfolgende Regel für Formeln ($\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ ist ableitbar) verwenden.

(a) $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

(b) $(\varphi \to \chi) \lor (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \land \psi) \to \chi$

Es gilt $\varphi \equiv \psi$ (Formeln φ und ψ sind intuitionistisch logisch äquivalent) genau dann, wenn die Sequenzen $\varphi \vdash \psi$ und $\psi \vdash \varphi$ ableitbar sind. Beweisen Sie damit die folgenden logischen Äquivalenzen.

(c) $\neg(\varphi \to \psi) \equiv \neg\neg\varphi \land \neg\psi$

(d) $\forall x\, \neg\varphi \equiv \neg\exists x\, \varphi$

Lösung:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \varphi \to \bot \vdash \varphi}\text{(Ax)} \qquad \dfrac{}{\varphi, \bot \vdash \bot}\text{(Ax)}}{\varphi, \varphi \to \bot \vdash \bot}(\to\text{L})}{\varphi \vdash (\varphi \to \bot) \to \bot}(\to\text{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \chi, \varphi, \psi \vdash \varphi}\text{(Ax)} \quad \dfrac{}{\chi, \varphi, \psi \vdash \chi}\text{(Ax)}}{\varphi \to \chi, \varphi, \psi \vdash \chi}(\to\text{L}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi \to \chi, \varphi, \psi \vdash \psi}\text{(Ax)} \quad \dfrac{}{\chi, \varphi, \psi \vdash \chi}\text{(Ax)}}{\psi \to \chi, \varphi, \psi \vdash \chi}(\to\text{L})}{(\varphi \to \chi) \lor (\psi \to \chi), \varphi, \psi \vdash \chi}(\lor\text{L})}{(\varphi \to \chi) \lor (\psi \to \chi), \varphi \land \psi \vdash \chi}(\land\text{L})}{(\varphi \to \chi) \lor (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \land \psi) \to \chi}(\to\text{R})$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\varphi \to \psi), \neg\varphi, \varphi \vdash \varphi}\text{(Ax)} \quad \dfrac{}{\neg(\varphi \to \psi), \bot, \varphi \vdash \psi}(\bot\text{-Ax})}{\neg(\varphi \to \psi), \varphi \to \bot, \varphi \vdash \psi}(\to\text{L})}{\neg(\varphi \to \psi), \varphi \to \bot \vdash \varphi \to \psi}(\to\text{R}) \quad \dfrac{}{\bot, \varphi \to \bot \vdash \bot}\text{(Ax)}}{(\varphi \to \psi) \to \bot, \varphi \to \bot \vdash \bot}(\to\text{L})}{(\varphi \to \psi) \to \bot \vdash (\varphi \to \bot) \to \bot}(\to\text{R}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\varphi \to \psi), \psi, \varphi \vdash \psi}\text{(Ax)}}{\neg(\varphi \to \psi), \psi \vdash \varphi \to \psi}(\to\text{R}) \quad \dfrac{}{\bot, \psi \vdash \bot}\text{(Ax)}}{(\varphi \to \psi) \to \bot, \psi \vdash \bot}(\to\text{L})}{(\varphi \to \psi) \to \bot \vdash \psi \to \bot}(\to\text{R})}{(\varphi \to \psi) \to \bot \vdash \big((\varphi \to \bot) \to \bot\big) \land (\psi \to \bot)}(\land\text{R})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\varphi, \neg\psi, \varphi \to \psi, \varphi \vdash \varphi}\text{(Ax)} \quad \dfrac{}{\neg\neg\varphi, \neg\psi, \psi, \varphi \vdash \psi}\text{(Ax)}}{\neg\neg\varphi, \neg\psi, \varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi}(\to\text{L}) \quad \dfrac{}{\neg\neg\varphi, \bot, \varphi \to \psi, \varphi \vdash \bot}\text{(Ax)}}{\neg\neg\varphi, \psi \to \bot, \varphi \to \psi, \varphi \vdash \bot}(\to\text{L})}{\neg\neg\varphi, \psi \to \bot, \varphi \to \psi \vdash \varphi \to \bot}(\to\text{R}) \quad \dfrac{}{\bot, \psi \to \bot, \varphi \to \psi \vdash \bot}\text{(Ax)}}{(\varphi \to \bot) \to \bot, \psi \to \bot, \varphi \to \psi \vdash \bot}(\to\text{L})}{\big((\varphi \to \bot) \to \bot\big) \land (\psi \to \bot), \varphi \to \psi \vdash \bot}(\land\text{L})}{\big((\varphi \to \bot) \to \bot\big) \land (\psi \to \bot) \vdash (\varphi \to \psi) \to \bot}(\to\text{R})$$

(d)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\ (\varphi \to \bot), \varphi(y/x) \to \bot, \varphi(y/x) \vdash \varphi(y/x)}\,(\text{Ax}) \qquad \dfrac{}{\forall x\ (\varphi \to \bot), \bot, \varphi(y/x) \vdash \bot}\,(\text{Ax})}{\forall x\ (\varphi \to \bot), \varphi(y/x) \to \bot, \varphi(y/x) \vdash \bot}\,(\to \text{L})}{\forall x\ (\varphi \to \bot), \varphi(y/x) \vdash \bot}\,(\forall \text{L})}{\forall x\ (\varphi \to \bot), \exists x\ \varphi \vdash \bot}\,(\exists \text{L})}{\forall x\ (\varphi \to \bot) \vdash (\exists x\ \varphi) \to \bot}\,(\to \text{R})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\exists x\ \varphi) \to \bot, \varphi(y/x) \vdash \varphi(y/x)}\,(\text{Ax})}{(\exists x\ \varphi) \to \bot, \varphi(y/x) \vdash \exists x\ \varphi}\,(\exists \text{R}) \qquad \dfrac{}{\bot, \varphi(y/x) \vdash \bot}\,(\text{Ax})}{(\exists x\ \varphi) \to \bot, \varphi(y/x) \vdash \bot}\,(\to \text{L})}{(\exists x\ \varphi) \to \bot \vdash \varphi(y/x) \to \bot}\,(\to \text{R})}{(\exists x\ \varphi) \to \bot \vdash \forall x\ (\varphi \to \bot)}\,(\forall \text{R})
$$

(Hier ist y eine Variable, die in φ nicht vorkommt.)

Bepunktung: je Ableitung 2 Punkte.