Mathematik II für Informatik
4. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Albrun Knof
Moritz Schneider

SoSe 2017

Übung: 11./12. Mai 2017
Abgabe: 18./19. Mai 2017

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Variationen des ε-δ-Kriteriums)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Überprüfen Sie, ob die folgenden Aussagen gleichbedeutend sind mit der Stetigkeit von f in x_0. Falls dem nicht so ist, geben Sie anschaulich an, was das jeweilige Kriterium bedeutet. Finden Sie dann für jeden Aufgabenteil eine Funktion, die das entsprechende Kriterium erfüllt und eine Funktion, die das Kriterium nicht erfüllt.

(a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $\delta > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ und für alle $\delta > 0$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$.

(c) Für alle $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

(d) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Lösungshinweise:

(a) Diese Aussage beschreibt Beschränktheit. Bspw. erfüllt die Funktion $f(x) = \sin(x)$ das Kriterium, während $g(x) = x^2$ es nicht erfüllt.

(b) Die einzigen Funktionen, die dieses Kriterium erfüllen, sind die konstanten Funktionen.

(c) Diese Aussage beschreibt eine lokale Beschränktheit, d.h. für jede beliebig große Kugel um x_0 sind die zugehörigen Funktionswerte beschränkt. Eine Funktion, die dies erfüllt ist z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Eine Funktion, welche das nicht erfüllt ist

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit $x_0 = 0$.

(d) Die letzte Aussage beschreibt die Stetigkeit. Eine stetige Funktion ist z.B. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ und eine nicht stetige Funktion ist z.B. $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$

Aufgabe G2 (Stetigkeit)

(a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \frac{x-1}{x^2+1}.$$

i. Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in $x_0 = -1$ stetig ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $|x| \leq 1$ und für $|x| > 1$ separat, dass $\frac{|x|}{x^2+1} \leq 1$.

ii. Bestimmen Sie die Menge der Punkte, in denen f stetig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ Lipschitz-stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Lösungshinweise:

(a) i. Wir zeigen zunächst den Hinweis. Für $|x| \leq 1$ ist

$$\frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{|x|}{1} \leq 1$$

und für $|x| > 1$ erhalten wir

$$\frac{|x|}{x^2+1} < \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|} < 1.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen ist, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass aus $|x - x_0| < \delta$ schon $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt. Hier ist

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x-1}{x^2+1} - (-1) \right| = \left| \frac{x}{x^2+1} \right| \cdot |x+1| \overset{\text{Hinweis}}{\leq} 1 \cdot |x - (-1)| = |x - x_0|.$$

Also kann man $\delta := \varepsilon$ setzen. Damit ist die Aussage bewiesen.

ii. Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, denn man kann $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ schreiben. Hierbei sind p und q Polynome und daher laut Beispiel 5.7.11 stetig. Da $q(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, können wir mit Satz 5.7.15 folgern, dass auch f stetig ist.

(b) Die Funktion f ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 2$, denn für alle $x, y \in [0,1]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left| x^2 - y^2 \right| = |(x+y) \cdot (x-y)| = (x+y) \cdot |x-y| \leq 2 \cdot |x-y|.$$

(c) Ist $x \in \mathbb{Q}$, so definiert $x_n := x + \left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$ eine gegen x konvergente Folge, wobei jedes Folgenglied irrational ist. Hier gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, aber $f(x) = 1$.
Ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Zum Beispiel könnte man als Folge die Dezimalentwicklung von x mit n Stellen wählen. Hier gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, aber $f(x) = 0$.
Damit ist f in jedem Punkt aus $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ unstetig.

Aufgabe G3 (Zwischenwertsatz)

(a) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0,1]$ gibt mit $f(\xi) = \xi$.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) \cdot f(1) < 0$ und $f(0) + f(1) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0,1]$ gibt mit $f(\xi) = f(0) + f(1)$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) := \frac{f(x)}{f(0)+f(1)} - 1$, $x \in [0,1]$.

(c) Geben Sie eine reellwertige, stetige Funktion f auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, die kein Maximum und kein Minimum besitzt.

Lösungshinweise:

(a) Wir betrachten die Funktion

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : g(x) = f(x) - x.$$

Die Funktion g ist stetig als Summe stetiger Funktionen. Es gilt $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$, weil $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Auf Grund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $\xi \in [0,1]$ mit $g(\xi) = 0$, d.h. $f(\xi) = \xi$.

(b) Die Funktion g aus dem Hinweis ist stetig, da f stetig ist. Es gilt

$$g(0)=\frac{f(0)}{f(0)+f(1)}-1=-\frac{f(1)}{f(0)+f(1)} \quad \text{und} \quad g(1)=\frac{f(1)}{f(0)+f(1)}-1=-\frac{f(0)}{f(0)+f(1)}.$$

Daher ist

$$g(0)\cdot g(1)=\frac{f(0)\cdot f(1)}{(f(0)+f(1))^2}<0.$$

Das heißt, dass $g(0)$ und $g(1)$ unterschiedliche Vorzeichen haben. Nach dem Nullstellen-Satz von Bolzano existiert deshalb ein $\xi\in[0,1]$ mit $g(\xi)=0$, d.h. $f(\xi)=f(0)+f(1)$.

(c) Die Menge $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Allerdings besitzt $f(x)=x$ kein Maximum und kein Minimum auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe G4 (Rechenregeln für Grenzwerte)

(a) Sei $x_0\in D$ und seien $f,g\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=a+b$$

gilt.

(b) Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Des Weiteren seien $f,g : D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben, sodass die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren. Zeigen Sie:

$$\text{Gilt } f(x)\le g(x) \text{ für alle } x\in D\backslash\{x_0\}, \text{ so ist } \lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D$ mit $x_n\to x_0$ für $n\to\infty$. Was lässt sich über $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sagen?

Lösungshinweise:

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert x_0. Dann sind auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen. Nach Voraussetzung gilt (die Grenzwerte existieren nach Annahme und sind folglich eindeutig bestimmt):

$$f(x_n)\to a \quad (n\to\infty) \qquad \text{und} \qquad g(x_n)\to b \quad (n\to\infty).$$

Nach Definition 5.3.1 gilt:

$$\exists N_1\in\mathbb{N}:\forall n_1\ge N_1: |f(x_{n_1})-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists N_2\in\mathbb{N}:\forall n_2\ge N_2: |g(x_{n_2})-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt für alle $n\ge\max\{N_1,N_2\}$:

$$|f(x_n)+g(x_n)-(a+b)|=|f(x_n)-a+g(x_n)-b|\le|f(x_n)-a|+|g(x_n)-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge $(f(x_n)+g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a+b$, d.h.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))\overset{\text{Def. 5.7.1}}{=}\lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n))=a+b.$$

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D\backslash\{x_0\}$ eine beliebige Folge mit $x_n\to x_0$ für $n\to\infty$. Eine solche Folge existiert, da x_0 ein Häufungspunkt von D ist. Da die Grenzwerte von $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren, sind $a_n:=f(x_n)$ und $b_n:=g(x_n)$ konvergente Folgen. Außerdem gilt nach Voraussetzung $a_n\le b_n$. Mit den Grenzwertsätzen für Folgen folgt, dass

$$\lim_{x_n\to x_0} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\le\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{x_n\to x_0} g(x_n).$$

Da dies für beliebige Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D\backslash\{x_0\}$ mit $x_n\to x_0$ gilt, folgt die Behauptung.

Hausübung

Aufgabe H1 (Grenzwerte und Monotonie) (12 Punkte)

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$\text{(i)} \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{4-x^2}. \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}.$$

(b) Überprüfen Sie, ob

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x \in [0,2], \\ x+5, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

(streng) monoton ist.

Lösungshinweise:

(a) (i) Der Grenzwert existiert nicht. Dies sieht man wie folgt:

$$\lim_{x\to 2+} \frac{|x-2|}{4-x^2} = \lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x\to 2+} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to 2-} \frac{|x-2|}{4-x^2} = \lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x\to 2-} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{4}.$$

Der rechts- und linksseitige Grenzwert stimmen nicht überein, somit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{4-x^2}$ nicht.

(ii) Wir betrachten zunächst

$$\left| \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} \right|.$$

Hier gilt:

$$0 \le \left| \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} \right| \le \frac{1}{|x|} \qquad \text{für alle } x \neq 0.$$

Mit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

folgt mit dem Sandwich-Theorem für Funktionen (Satz 5.7.6 (c)) die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} \right| = 0.$$

Allgemein gilt für $a, b \in \mathbb{R}$: Ist $|a| \le b$, so gilt $-b \le a \le b$. Wählen wir $a := \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$ und $b := \frac{1}{|x|}$, erhalten wir:

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{|x|} \le \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} \le \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|}.$$

Mit Satz 5.7.6 (c) folgt nun, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} = 0,$$

da

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|}.$$

(b) Wir zeigen, dass die Funktion streng monoton steigend ist, d.h. gilt $x < y$, so muss $f(x) < f(y)$ bzw. äquivalent $f(x) - f(y) < 0$ gelten. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

$$\begin{aligned} 0 \le x < y \le 2: \quad & f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = \underbrace{(x-y)}_{<0}\underbrace{(x+y)}_{>0} < 0, \\ 0 \le x \le 2 < y: \quad & f(x) \le 2^2 = 4 < 7 = 2 + 5 < f(y), \\ 2 < x < y: \quad & f(x) - f(y) = x + 5 - (y+5) = x - y < 0. \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Monotonie und Stetigkeit) (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton, so ist f injektiv.

(b) Überprüfen Sie, ob

$$\text{(i) } f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad \text{(ii) } f : [1, 2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

Lipschitz-stetig sind.

Lösungshinweise:

(a) Wir erinnern zunächst an die Definition von Injektivität:

Die Funktion f ist injektiv, falls aus $x \neq y$ folgt, dass $f(x) \neq f(x)$.

Sei f streng monoton, dann gilt nach Definition 5.7.18 entweder:

Für alle $x < y$ ist $f(x) < f(y)$ (streng monoton wachsend)

oder

Für alle $x < y$ ist $f(x) > f(y)$ (streng monoton fallend).

Sei nun $x \neq y$. Dann gibt es zwei Fälle:
(1) $x < y$: Da f streng monoton ist, gilt entweder $f(x) < f(y)$ (streng monoton wachsend) oder $f(x) > f(y)$ (streng monton fallend). In beiden Fällen ist aber $f(x) \neq f(y)$ und die Bedingung für Injektivität somit erfüllt.
(2) $x > y$: Da f streng monoton ist, gilt entweder $f(x) > f(y)$ (streng monoton wachsend) oder $f(x) < f(y)$ (streng monton fallend). In beiden Fällen ist aber $f(x) \neq f(y)$ und die Bedingung für Injektivität somit erfüllt.
Insgesamt ist eine streng monotone Funktion also injektiv.

(b) (i) Die Funktion f ist nicht Lipschitz-stetig. Sei $L > 0$ beliebig aber fix. Wir setzen

$$y := 0 \quad \text{und} \quad x := \frac{1}{(L+1)^2} \ge 0.$$

Damit erhalten wir:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{x} = \frac{1}{L+1} = \frac{L}{L(L+1)} \overset{L>0}{>} \frac{L}{(L+1)(L+1)} = L\frac{1}{(L+1)^2} = Lx = L|x-y|.$$

Es existiert also keine Lipschitz-Konstante $L > 0$, sodass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le L|x-y|$.
(ii) Die Funktion f ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L = \frac{1}{2}$:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{2}(x-y) + \frac{y-x}{xy}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| |x-y|.$$

Mit $x, y \in [1, 2]$ gilt

$$-1 \le -\frac{1}{xy} \le 0 \iff \frac{1}{2} - 1 \le \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \le \frac{1}{2} + 0 \iff -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \le \frac{1}{2} \iff \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Damit folgt:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| |x-y| \le \frac{1}{2}|x-y|.$$

Aufgabe H3 (Eigenschaften stetiger Funktionen) (12 Punkte)

(a) Sei $T : [0,360] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion **mit $T(0) = T(360)$**, die für jeden Punkt x auf dem Äquator die dort vorherschende Temperatur $T(x)$ angibt. Wir bezeichnen mit x den Längengrad des entsprechenden Punktes auf dem Äquator. Zeigen Sie, dass es zwei Punkte auf dem Äquator gibt, die sich exakt gegenüberliegen und in denen die gleiche Temperatur herrscht.

(b) Welche der folgenden Funktionen besitzen ein Minimum oder ein Maximum (auf den angegebenen Intervallen)?

(i) $f : [-1,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^6 - 2}{x^2 + 4}$ (ii) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Lösungshinweise:

(a) Wir definieren die Funktion $f : [0,180] \to \mathbb{R}$ über $f(x) := T(x) - T(x + 180)$. Da T stetig ist, ist dann auch f stetig und nach Definition von f gilt für einen Punkt x auf dem Äquator, dass seine Temperatur genau dann mit der Temperatur im Punkt auf der gegenüberliegenden Seite der Erde übereinstimmt, wenn $f(x) = 0$. Ist nun $f(0) = 0$, so sind wir bereits fertig. Ist jedoch $f(0) = t \neq 0$, so ist $f(180) = -t$, denn

$$f(0) = T(0) - T(180) = T(360) - T(180) = -\big(T(180) - T(180 + 180)\big) = -f(180).$$

Nach dem Zwischenwertsatz muss es dann einen Punkt $x \in (0,180)$ geben mit $f(x) = 0$.

(b) (i) Die Funktion f ist stetig als Verkettung stetiger Funktionen (Polynome). Der Nenner wird für $x \in [-1,2]$ niemals Null. Das Intervall $[-1,2]$ ist offensichtlich beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum (Satz 5.7.28) nimmt die Funktion f ihr Minimum und ihr Maximum auf dem kompakten Intervall $[-1,2]$ an.

(ii) Das Bild der Funktion f ist beschränkt. Daher existieren das Infimum und das Supremum des Bildes. Weiterhin ist die Funktion f ist streng monoton fallend auf $(0,1)$. Somit können Infimum und Supremum des Bildes nur am Rand liegen. Allerdings wird weder das Infimum $\frac{1}{2}$ noch das Supremum 1 angenommen. Dies sieht man wie folgt:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x^2 + 1} \iff x^2 = 1, \text{ Widerspruch zu } 0 < x < 1.$$

$$1 = \frac{1}{x^2 + 1} \iff x^2 = 0, \text{ Widerspruch zu } 0 < x < 1.$$

Damit besitzt die Funktion f weder Minimum noch Maximum (auf dem Intervall $(0,1)$).