Formale Grundlagen der Informatik II 4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Davorin Lešnik, Ph.D.
Stéphane Le Roux, Ph.D.

Sommersemester 2013
24. 06. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Sequenzenkalkül)

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül SK für folgende Sequenzen eine Herleitung.

(a) $\vdash p \vee q \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Aufgabe G11 (Monotonie)

Wir definieren folgende partielle Ordnung auf aussagenlogischen V_n-Interpretationen:

$$\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}' \quad \text{:gdw.} \quad \mathfrak{I}(p) \leq \mathfrak{I}'(p) \text{ für alle Variablen } p \in V_n$$

Eine AL_n-Formel φ heißt *monoton*, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$ gilt $\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}'}$. Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass jede aussagenlogische Formel φ, in der kein Negationszeichen vorkommt, monoton ist.

Bemerkung: Umgekehrt kann man zeigen, dass jede monotone Formel äquivalent zu einer Formel ohne Negationszeichen ist.

Aufgabe G12 (Simulation)

(a) Zeigen Sie semantisch, dass die folgende Regel korrekt ist.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}$$

(b) Leiten Sie die Regel in SK^+ ab.

(c) Kann man diese Regel in SK ableiten? Wie?

Hausübung

– Abgabe am 3.7.-5.7. 2013 in der Übung. Denken Sie daran Ihre Antworten zu begründen. –

Aufgabe H9 (Minimale Belegungen) (4 Punkte)

(a) Für die folgenden zwei Formeln finden Sie alle ihren minimalen Belegungen. Entscheiden Sie für beide Formeln, ob sie äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln sind. Wenn ja, welche? Begründen Sie alle Antworten.

i. $\big(p \to (q \vee r)\big) \wedge (p \vee s)$

ii. $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

(b) Geben Sie eine Formel mit vier Variablen an, für die Sie semantisch zeigen, dass ihre minimale Belegungen genau $(1,1,1,0)$ und $(0,0,1,1)$ sind. Ist diese Formel äquivalent zu einer Konjunktion von Hornklauseln?

Aufgabe H10 (Sequenzenkalkül) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie semantisch, dass die folgende Regel korrekt ist.

$$\frac{\Gamma \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \text{(ex falso quodlibet)}$$

(b) Leiten Sie die folgenden Sequenzen und Regeln direkt aus dem Kalkül SK ab.

i. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

ii. $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$

iii. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \Delta}$

iv. $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$

(c) Beweisen Sie durch Induktion über den Aufbau von φ, dass sich die folgende Regel aus SK ableiten lässt:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}$$

Minitest

Aufgabe M8 (Korrektheit und Vollständigkeit)
Kreuzen Sie die korrekten Antworte an.

(a) Der Sequenzenkalkül SK erfüllt die folgenden Eigenschaften:
□ Korrektheit □ Vollständigkeit

(b) Der erweiterte Sequenzenkalkül SK^+ erfüllt die folgenden Eigenschaften:
□ Korrektheit □ Vollständigkeit

Aufgabe M9 (Strukturen)
Sei $R = (\mathbb{R}, +^R, -^R, \cdot^R, <^R, 0, 1)$. Eine Formel $\varphi(x, y)$ definiert in R die Relation $\left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, R \models \varphi[a, b]\right\}$.
Betrachte die folgenden Formeln.

1. $x \cdot x + y \cdot y = 1 + 1 + 1 + 1$

2. $x + x = y + y + y$

3. $((y + y = x) \wedge (x < 1 \vee x = 1) \wedge (0 < x))$
$\vee\ (1 + 1 + 1 + 1 < x \cdot x + y \cdot y \ \vee\ 1 + 1 + 1 + 1 = x \cdot x + y \cdot y)$

4. $(x \cdot x + y \cdot y = \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{\text{16-mal}}) \vee (x \cdot x + y \cdot y = \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{\text{9-mal}} \wedge y < 0 - 1)$
$\vee\ ((x - (1 + 1)) \cdot (x - (1 + 1)) + (y - 1) \cdot (y - 1) < 1)$
$\vee\ ((x + (1 + 1)) \cdot (x + (1 + 1)) + (y - 1) \cdot (y - 1) < 1)$

Für jede Formel oben identifizieren Sie die induzierte Relation unten.

( ) Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 2/3.

( ) Die Strecke, welche vom Punkt (1, 2) bis zur Kreisscheibe mit Radius 2 um den Ursprung führt und senkrecht auf dieser steht.

( ) Ein Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

( ) Ein Smiley.