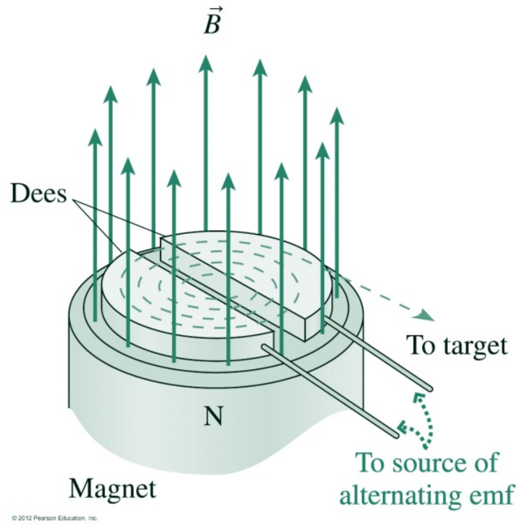
Proeftentamen Magnetisme

2 juli 2014 van 9.00 tot 12.00 uur
Dit tentamen bestaat uit 5 vragen op 3 bladzijden.
Pagina 4 bevat een formulenblad.



Vraag 1

Een cyclotron met een diameter van 90 cm wordt gebruikt om deuteriumkernen (een proton en een neutron) te versnellen. De massa van zo'n deuteriumkern is $m = 3.32 \times 10^{-27}$ kg. De magnetische fluxdichtheid B is 2 T en is naar boven gericht.

a Wat is de omlooprichting van de deuteriumkernen van boven gezien, met de klok mee of er tegenin?

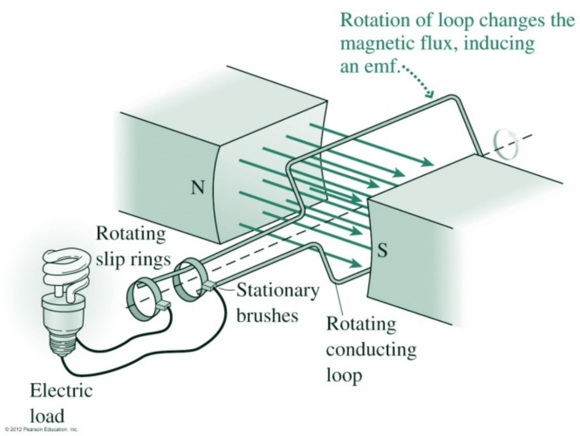
b Op welke frequentie moet de spanning tussen de dees veranderd worden?

c Wat is de maximale kinetische energie van de deuteriumkern?

d Als de amplitude van het potentiaalverschil tussen de dees 1500 V is, hoeveel cycli moet een deuterium dan maken voordat hij deze maximale energie bereikt?

Vraag 2

Een spoel roteert met hoeksnelheid ω in een uniform magnetisch veld B. Op tijdstip t=0 staat de spoel verticaal. De spoel heeft lengte l in axiale richting. Als de spoel verticaal staat (op tijdstip t=0) heeft de spoel heeft een hoogte $2r$.
De spoel heeft N windingen.
De spoel is aangesloten op een belasting met weerstand R.



a Bereken de magnetische flux gekoppeld met de spoel als functie van de tijd.

b Bereken de spanning geïnduceerd in de spoel als functie van de tijd.

c Bereken de stroom door de spoel als functie van de tijd.

d Bereken het vermogen dat aan de belasting afgegeven wordt als functie van de tijd.

e Bereken de grootte van het koppel als functie van de tijd.

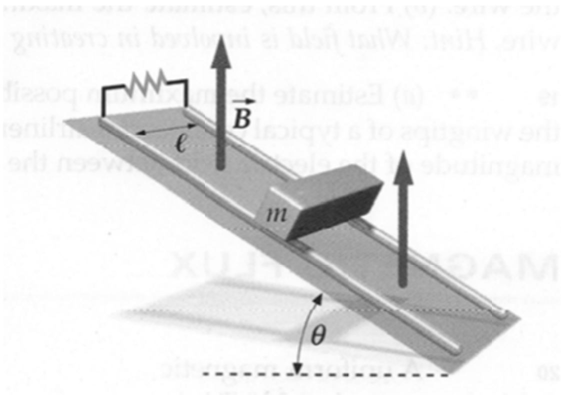
f Hoe verhoudt zich de richting van het elektromagnetisch koppel tot de draairichting van de rotor?

g Bereken het mechanisch vermogen dat via de as aan de rotor toegevoerd wordt als functie van de tijd.

h Bepaal het magnetisch dipoolmoment van de rotor als de stroom in de rotor I is.

Vraag 3

Een geleidend staafje met massa *m* en verwaarloosbare weerstand kan zonder wrijving glijden over twee parallelle rails, zonder wrijving en met verwaarloosbare weerstand (zie onderstaande figuur). De afstand tussen de rails is l en de rails zijn met elkaar verbonden door een weerstand R. De rails maken een hoek θ met de horizontaal. Er is een naar boven gericht magnetisch B veld aanwezig.



Door de werking van de zwaartekracht krijgt het staafje een versnelling langs de rails naar beneden.

a Bepaal de magnetische flux Φ_B omvat door de lus gevormd door het staafje, de weerstand en de stukken rails tussen staafje en weerstand. *Hint: neem aan dat de x-as langs de rails ligt en dat bovenaan de rails geldt x = 0.*

b Bepaal de grootte van de in het circuit geïnduceerde spanning V_{ind}. Geef aan hoe de spanning staat gericht.

c Bepaal de grootte van de op het staafje werkende en langs de rails naar boven gerichte component van de lorentzkracht.

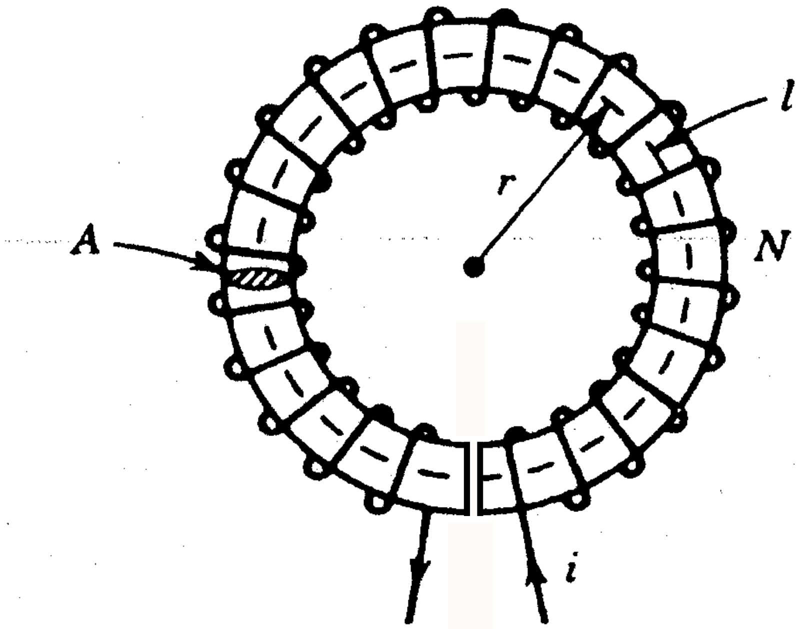
d Beredeneer dat het staafje uiteindelijk met een constante snelheid v_{eind} naar beneden glijdt. *Hint: je mag aannemen dat de rails voldoende lang zijn.*

e Laat zien dat het staafje uiteindelijk naar beneden glijdt met een constante snelheid

$$v_{eind} = \frac{mgR\sin\theta}{B^2 l^2 \cos^2\theta}$$

f Hoe groot is de eindsnelheid in het geval dat we de richting van B omkeren? Verklaar je antwoord.

Vraag 4
Toroide met luchtspleet



Gegeven de bijgevoegde toroidale kern met N windingen.
Door de windingen loopt een stroom I.
Er is zit luchtspleet in de kern met lengte l_g.
We gaan ervan uit dat de straal van de kern r zo groot is in verhouding tot de doorsnede van de kern A dat de fluxdichtheid over het oppervlak van de kern constant verondersteld kan worden.
We gaan ervan uit dat de luchtspleet zo klein is dat de fluxdichtheid de luchtspleet loodrecht oversteekt.
De relatieve magnetische permeabiliteit van de kern is $\mu_r = 1000$.

a Bereken de magnetische veldsterkte en de magnetische fluxdichtheid in de luchtspleet en in de kern.
b Bereken de magnetische flux gekoppeld met de wikkeling.
c Bereken de inductiviteit van de wikkeling.
d Bereken de magnetische energie opgeslagen in de spoel.

Vraag 5
A radar system produces pulses consisting of 100 full cycles of a sinusoidal 70-GHz electromagnetic wave. The average power while the transmitter is on is 45 MW, and the waves are confined to a beam 20 cm in diameter.
a Calculate the peak electric field.
b Calculate the wavelength.
c Calculate the total energy in a pulse.
d Calculate the total momentum in a pulse.
e If the transmitter produces 1000 pulses per second, what is its average power?

Formuleblad Elektriciteit en Magnetisme

Lichtsnelheid: $c = 3.00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

Magnetische permeabiliteit in vacuum: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$

Elektrische permittiviteit in vacuum: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{Nm^2}}$

Lading elektron: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Wet van Coulomb: $\vec{F} = k\dfrac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2}\hat{r}_{1,2}$ met $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$

Kracht op een lading in het elektrisch veld $\vec{F} = q\vec{E}$

Het elektrisch dipoolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$

Koppel op een elektrische dipool: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{d}$

Potentiele energie van een elektrische dipool: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Potentiaalverschil: $\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

De potentiaal van een ladingsverdeling: $V = \iiint_V \dfrac{k}{r}\,\mathrm{d}q$

Elektrisch veld ten gevolge van potentiaalverandering: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Kracht op een lading in een magnetisch veld: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Wet van Lorenz: $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

Magnetisch dipoolmoment: $\vec{\mu} = NI\vec{A}$

Koppel op een magnetische dipool: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Potentiele energie van een magnetische dipool: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

De wet van Biot-Savart: $\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\vec{L} \times \hat{r}}{r^2}$

Elektrische stroom $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = nqA\left|\vec{v}_d\right|$ met $\vec{v}_d$ de driftsnelheid.

Stroomdichtheid $\vec{J} = nq\vec{v}_d = \sigma\vec{E}$ met σ de soortelijke geleiding

Weerstand: $R = \dfrac{\rho l}{A} = \dfrac{l}{\sigma A}$ met ρ de soortelijke weerstand

Wet van Ohm: $V = IR$.

Energiedichtheid van het elektrische veld: $u_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$

Capaciteit: $C = \dfrac{Q}{V}$

Energie in een capaciteit: $U = \dfrac{1}{2}CV^2$

Energiedichtheid van het magnetische veld: $u_B = \dfrac{B^2}{2\mu_0\mu_r}$

Inductiviteit: $L = \dfrac{\Phi_B}{I}$

Energie in een capaciteit: $U = \dfrac{1}{2}LI^2$

De elektrische flux $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

De wet van Gauss voor het elektrisch veld:

- Met de elektrische fluxdichtheid: $\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \mathrm{d}V = \int \rho_f \mathrm{d}V$
- Met de elektrische veldsterkte: $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \mathrm{d}V = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \mathrm{d}V = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int (\rho_f + \rho_b)\mathrm{d}V$

De magnetische flux $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

De wet van Gauss voor het elektrisch veld: $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \mathrm{d}V = 0$

De wet van Faraday: $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

De wet van Ampère:

- Met de magnetische fluxdichtheid:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 \int (\vec{J}_f + \vec{J}_a) \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

- Met de magnetische veldsterkte: $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

De constitutieve vergelijkingen:

- Voor dielektrische materialen in het algemeen: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- Voor lineaire dielektrische materialen: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_0\kappa\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$
- Voor magnetische materialen in het algemeen: $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$
- Voor lineaire magnetische materialen: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$

De Poynting vector beschrijft de intensiteit van een elektromagnetische golf: $\vec{S} = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

Implusmoment van een elektromagnetische golf: $p = \dfrac{U}{c}$

Vraag 1

a Met de klok mee.

b De elektromagnetische kracht op een deuteron is $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. In dit geval: $F = e\omega rB$. Deze kracht staat loodrecht op de snelheid, dus is de beweging circelvormig. Deze kracht moet gelijk zijn aan de centripitale kracht: $F = ma = m\omega^2 r$.

Gelijk stellen van die krachten: $F = m\omega^2 r = e\omega rB$ leidt tot $\omega = \frac{eB}{m}$

De frequentie is $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{eB}{2\pi m} = 15\,\text{MHz}$

c De straal volgt vanuit dezelfde krachtenbalans: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{m}$

Daarom: $v = \frac{reB}{m}$

De maximale kinetische energie is dus $U = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{r^2e^2B^2}{2m} = 20\,\text{MeV}$

d Iedere periode neemt de energie twee maal toe met 1500 eV, de deuterium kern iedere periode twee maal

$$N = \frac{U}{3000\,\text{eV}} = \frac{20\,\text{MeV}}{3000\,\text{eV}} = 6666$$

The problem asks us to consider the acceleration of deuterium nuclei in a cyclotron.
DEVELOP Particles in a cyclotron get a boost in velocity each time they pass from one dee to the other. The magnetic field holds them in a circular orbit, so they make multiple passes. In order to always be accelerating the particles, the voltage has to be alternated every time they make a half circle of their orbit. In other words, the voltage needs to cycle at the same rate as the particles revolve in the magnetic field, which is just the cyclotron frequenqcy: $f = qB/2\pi m$ (Equation 26.4). In this case, the particles are deuterium nuclei, which have atomic mass 2 and charge +*e*:

$$m = 2(1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg}) = 3.32 \times 10^{-27}\,\text{kg}$$
$$q = +1.60 \times 10^{-19}\,\text{C}$$

The frequency does not depend on the speed (energy) of the nuclei, but the radius of their orbit does: $r = mv/eB$ (Equation 26.3). The maximum energy is achieved when the nuclei reach the outer rim of the cyclotron. We can figure out how many orbits it takes to reach this maximum by dividing by the kinetic energy gain of each orbit. We'll assume the nuclei have negligible kinetic energy to begin with.

b The frequency at which the voltage should be alternated is:

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})(2.0\text{ T})}{2\pi(3.32 \times 10^{-27}\,\text{kg})} = 15\text{ MHz}$$

c The maximum kinetic energy can be derived from the speed at the cyclotron's radius:

$$K = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{rqB}{m}\right)^2 = \frac{(rqB)^2}{2m}$$
$$= \frac{\left[\left(\tfrac{1}{2}\cdot 90\text{ cm}\right)\left(1.60 \times 10^{-19}\text{C}\right)\left(2.0\text{ T}\right)\right]^2}{2(3.32 \times 10^{-27}\,\text{kg})} = 3.1 \times 10^{-12}\,\text{J} = 20\text{ MeV}$$

We've written the answer in eV, as this unit is easier to work with for particles.

d Each orbit in the cyclotron accounts for two passes across the potential difference between the dees. Therefore, the kinetic energy gain in each orbit is $\Delta K = 2q\Delta V$, and the number of orbits needed to reach the maximum energy is

$$\frac{K}{\Delta K} = \frac{20 \text{ MeV}}{2(e)(1500 \text{ V})} = \frac{20 \text{ MeV}}{(3000 \text{ eV})} = 6700$$

ASSESS Notice how much easier the final calculation was when we were using eV rather than J. At 15 MHz, the deuterium nuclei will reach the maximum energy in less than half a millisecond.

Vraag 2

a Bereken de flux gekoppeld met de spoel als functie van de tijd.

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 2rlNB\cos\omega t$$

b Bereken de spanning geïnduceerd in de spoel als functie van de tijd.

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 2\omega rlNB\sin\omega t$$

c Bereken de stroom door de spoel als functie van de tijd.

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2\omega rlNB}{R}\sin\omega t$$

d Bereken het vermogen dat aan de belasting afgegeven wordt als functie van de tijd.

$$P = I^2R = \frac{4\omega^2r^2l^2N^2B^2}{R}\sin^2\omega t$$

e Bereken de grootte van het koppel als functie van de tijd.

$$T = rF = r\left|I\vec{L} \times \vec{B}\right| = 2rlNBI\sin\omega t = \frac{4\omega r^2l^2N^2B^2}{R}\sin^2\omega t$$

f De richting van het elektromagnetisch koppel is tegengesteld aan de draairichting.

g Bereken het mechanisch vermogen dat via de as aan de rotor toegevoerd wordt als functie van de tijd.

$$P = \omega T = \frac{4\omega^2r^2l^2N^2B^2}{R}\sin^2\omega t$$

h Bepaal de grootte van het magnetisch dipoolmoment van de rotor als de stroom in de spoel I is.

$$\mu = NIlr$$

Vraag 3

a $$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = Blx\cos\theta$$

b $$V_{ind} = \frac{d\Phi_B}{dt} = Bl\cos\theta\frac{dx}{dt} = Blv\cos\theta$$

De geïnduceerde spanning zorgt voor een stroom die van boven gezien met de klok mee door het circuit loopt.

c $$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

De richting van de kracht F is horizontaal en tegengesteld aan de richting van de snelheid. De component gericht in de richting van de rails. De stroom is de geïnduceerde spanning gedeeld door de weerstand.

$$F = \frac{Blv\cos\theta}{R}lB\cos\theta = \frac{B^2l^2v\cos^2\theta}{R}$$

d De zwaartekracht is constant. De elektromagnetische kracht is evenredig met de snelheid. De snelheid wordt constant als er evenwicht is tussen de zwaartekracht en de elektromagnetische kracht.

e De zwaartekracht zorgt voor een kracht langs de rails omlaag ter grootte van

$F = mg\sin\theta$

Gelijk stellen van deze krachten leidt tot $\dfrac{B^2l^2v\cos^2\theta}{R} = mg\sin\theta$

Daaruit volgt $v = \dfrac{Rmg\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}$

f Omdraaien van de richting van het veld heft geen effect op de eindsnelheid omdat ook de richting van de stroom omdraait.

Vraag 4

a Bereken de magnetische veldsterkte en de magnetische fluxdichtheid in de luchtspleet en in de kern. Toepassen van de wet van Ampere $\oint \vec{H}\cdot d\vec{r} = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}$ leidt tot

$l_{core}H_{core} + l_gH_g = NI$

Toepassen van de wet van Gauss op een pillendoosje op het grensvlak tussen kernmateriaal en luchtspleet $\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ leidt tot $B_g = B_{core}$.

Invullen van de constitutieve vergelijkingen geeft $\mu_0H_g = \mu_0\mu_rH_{core}$

Invullen in de wet van Ampere geeft $l_{core}H_{core} + l_g\mu_rH_{core} = NI$.

Dus

$$H_{core} = \frac{NI}{l_{core} + \mu_rl_g};\quad B_{core} = \frac{\mu_0\mu_rNI}{l_{core} + \mu_rl_g}$$

$$H_g = \frac{\mu_rNI}{l_{core} + \mu_rl_g};\quad B_g = \frac{\mu_0\mu_rNI}{l_{core} + \mu_rl_g}$$

b Bereken de flux gekoppeld met de wikkeling.

$$\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0\mu_rAN^2I}{l_{core} + \mu_rl_g}$$

c Bereken de inductiviteit van de wikkeling.

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0\mu_rAN^2}{l_{core} + \mu_rl_g}$$

d De energie opgeslagen in het veld:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0\mu_rAN^2I^2}{2(l_{core} + \mu_rl_g)}$$

Vraag 5

This problem involves characterizing an electromagnetic wave given the relevant parameters.The average intensity of a pulse is the average power during a pulse divided by the beam area; $\overline{S} = P = \pi R^2$ and (from Equation 29.20b) the peak electric field is $E_p = \sqrt{2\mu_0 c\overline{S}}$. The wavelength may be found using Equation 29.16c, $c = f\lambda$. To find the energy in a pulse, use $U = \overline{P}_{\text{pulse}}\Delta t$, where $\Delta t = NT = N/f$, with $N = 100$ and $f = 70$ GHz.

To find the average power output, calculate the power in a pulse, multiply by 1000 because there are 1000 pulses per second, and divide by 1 s to get the power (energy per unit time).

a The peak electric field is

$$E_p = \sqrt{2\mu_0 c\overline{S}} = \frac{1}{R}\sqrt{2\mu_0 cP/\pi} = \frac{\left(8\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m}\right)\left(3.00\times10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)\left(45\ \mathrm{MW}\right)^{1/2}}{0.10\ \mathrm{m}} = 1.0\ \mathrm{MV/m}$$

b The wavelength is $\lambda = c/f = \left(3.00\times10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)/\left(70\ \mathrm{GHz}\right) = 4.3\ \mathrm{mm}$.

c The total enegy in a pulse is $U = \overline{P}_{\mathrm{pulse}}N/f = \left(45\ \mathrm{MW}\right)\left(100\right)\left(1/70\ \mathrm{GHz}\right) = 64\ \mathrm{mJ}$.

d The momentum per pulse is given by
$p = U/c = \left(64\ \mathrm{mJ}\right)/\left(3.00\times10^{8}\ \mathrm{m/s}\right) = 2.1\times10^{-10}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$.

e Every pulse carries 64.3 mJ, and there are 1000 per second, so the average power is
$\overline{P} = \left(64.3\ \mathrm{mJ}\right)\left(1000\right)/\left(1.0\ \mathrm{s}\right) = 64\ \mathrm{W}$.

The average power in the beam is much less than the power per pulse because the duty cycle is

$$\text{duty cycle} = \frac{t_{\mathrm{on}}}{t_{\mathrm{tot}}} = \frac{\left(1000\right)\left(100\right)}{\left(70\ \mathrm{GHz}\right)\left(1\ \mathrm{s}\right)} = 1.4\times10^{6}$$

which explains the six-order-of-magnitude difference between $\overline{P}_{\mathrm{pulse}}$ and $\overline{P}$.