Tentamen EE1P21

Elektriciteit en Magnetisme

- Dit tentamen bestaat uit 3 bladzijden met 4 opgaven.
- Het totaal te behalen aantal punten bedraagt 90.
- Bij iedere opgave is het aantal voor die opgave te behalen punten vermeld.
- Begin iedere opgave op een nieuw vel en vermeld op ieder vel van uw uitwerkingen zowel naam als studienummer.

Veel succes!

Opgave 1

20 punten

Bepaal de volgende grootheden door gebruik te maken van de Coulomb constante $k = 9 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$.

We beschouwen een puntlading $Q = 3q$ gelegen in $(x, y, 0)$.

a.) Geef een uitdrukking voor de kracht $\vec{F}$ die de puntlading Q uitoefent op een puntlading Q_0 gelegen in de oorsprong $(0, 0, 0)$. ⇒(7 points)

b.) Geef een uitdrukking voor het elektrisch veld $\vec{E}$ in de oorsprong $(0, 0, 0)$ ten gevolge van de puntlading Q. ⇒(3 points)

We beschouwen nu drie puntladingen $Q_1 = 3q$ gelegen in $(a, a, 0)$, $Q_2 = q$ gelegen in $(-a, a, 0)$ en $Q_3 = q$ gelegen in $(-a, -a, 0)$.

c.) Geef een uitdrukking voor het elektrisch veld $\vec{E}_0$ ten gevolge van de drie puntladingen in de oorsprong $(0, 0, 0)$. ⇒(5 points)

d.) Geef een uitdrukking voor de waarde van een puntlading Q_4 die toegevoegd moet worden in $(a, -a, 0)$ in de configuratie zodat het elektrisch veld $\vec{E}_1 = E_1\hat{y}$ wordt in de oorsprong $(0, 0, 0)$. Geef een uitdrukking voor E_1. ⇒(5 points)

Solution

a.)

From Coulomb's law we have

$$\vec{F}(0,0,0) = k\frac{Q\,Q_0}{r^3}\left[(x_0 - x)\hat{x} + (y_0 - y)\hat{y} + (z_0 - z)\hat{z}\right] = k\frac{3q\,Q_0}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}\left[-x\hat{x} - y\hat{y}\right] \;\; (\mathrm{N}) \qquad (1)$$

since $x_0 = y_0 = z_0 = z = 0$.

b.)

By using the definition of the electric field strength, (1) yields

$$\vec{E}(0,0,0) = \vec{F}(0,0,0)/Q_0 = k\frac{3q}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}\left[-x\hat{x} - y\hat{y}\right] \;\; (\mathrm{N/C}) \text{ or } (\mathrm{V/m}). \qquad (2)$$

Note: For simplicity, henceforth we restrict to using (V/m) as unit measure for the electric field strength.

c.)

Upon applying superposition it follows that

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_0(0,0,0) &= \vec{E}_{0,1}(0,0,0) + \vec{E}_{0,2}(0,0,0) + \vec{E}_{0,2}(0,0,0) \\
&= k\frac{3q}{(a^2+a^2)^{3/2}}\left[-a\hat{x} - a\hat{y}\right] + k\frac{q}{(a^2+a^2)^{3/2}}\left[a\hat{x} - a\hat{y}\right] + k\frac{q}{(a^2+a^2)^{3/2}}\left[a\hat{x} + a\hat{y}\right] \\
&= k\frac{q}{2a^2\sqrt{2}}\left(-\hat{x} - 3\hat{y}\right) \ \text{(V/m)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

where the partial contributions $\vec{E}_{0,1}(0,0,0)$, $\vec{E}_{0,2}(0,0,0)$ and $\vec{E}_{0,2}(0,0,0)$ pertaining to the point charges Q_1, Q_2 and Q_3, respectively, are determined along the same lines as at a.) and b.).

d.)

We must now add a fourth contribution

$$
\vec{E}_{0,4}(0,0,0) = k\frac{Q_4}{(a^2+a^2)^{3/2}}\left[-a\hat{x} + a\hat{y}\right] = k\frac{Q_4}{2a^2\sqrt{2}}\left(-\hat{x} + \hat{y}\right) \ \text{(V/m)}. \tag{4}
$$

By now adding (3) and (4), the $E_{1,x}(0,0,0)$ component has the expression

$$
E_{1,x}(0,0,0) = -k\frac{q}{2a^2\sqrt{2}} - k\frac{Q_4}{2a^2\sqrt{2}} \ \text{(V/m)} \tag{5}
$$

that, by equating to 0 $\Rightarrow$ $Q_4 = -q\,\text{C}$. With this value

$$
E_1(0,0,0) = -k\frac{3q}{2a^2\sqrt{2}} + k\frac{-q}{2a^2\sqrt{2}} = -k\frac{4q}{2a^2\sqrt{2}} = -k\frac{\sqrt{2}\,q}{a^2} \ \text{(V/m)}. \tag{6}
$$

Opgave 2

25 punten

Gegeven is een lange, rechte coaxiale kabel met een perfect geleidende massieve kern met straal $r = R_0$ (r gemeten loodrecht vanaf de hartlijn van de massieve kern), een perfect geleidende dunne mantel M_1 met straal $r = R_1 > R_0$ (waarbij we de dikte van de mantel verwaarlozen) en een tweede perfect geleidende dunne mantel M_2 met straal $r = R_2 > R_1$ (waarbij we de dikte van de mantel verwaarlozen). In de ruimte tussen de massieve kern en de mantel M_1 bevindt zich een medium met permittiviteit $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$. De ruimte tussen de mantel M_1 en de mantel M_2 bevindt zich een medium met permitiviteit $\epsilon_2 = 3\varepsilon_0$. De massieve kern bevat op de buitenkant een lading Q per meter lengte van de kabel. De mantel M_1 bevat op de buitenkant een lading $2Q$ per meter lengte van de kabel en de mantel M_2 bevat geen lading op de buitenkant. We veronderstellen dat de concentrische media geen vrije ladingdragers bevatten, dat "fringing effects" kunnen worden verwaarloosd en dat de potentiaal op oneindig gelijk aan 0 volt is.

a.) Maak een duidelijke schets van de situatie. ⇒(1 point)

b.) Geef uitdrukkingen voor het elektrisch veld $\vec{E}(r)$ in het gebied $r < R_0$ en in het gebied $r > R_2$. ⇒(4 points)

c.) Geef uitdrukkingen voor het elektrisch veld $\vec{E}(r)$ in het gebied $R_0 < r < R_1$ en in het gebied $R_1 < r < R_2$. ⇒(5 points)

d.) Geef een uitdrukking voor de oppervlakte-ladingsdichtheid σ in $\mathrm{C/m^2}$ aan de binnenkant van de mantel M_1. ⇒(5 points)

e.) Geef een uitdrukking voor het elektrische potentiaal $V(R_1)$ op de mantel M_1. ⇒(5 points)

f.) Geef een uitdrukking voor de capaciteit C tussen de mantel M_1 en de mantel M_2. ⇒(5 points)

Solution

a.)

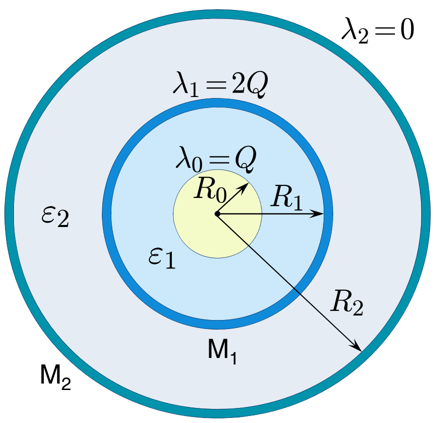


Figure 1: Cable cross-section (basic information).

b.)

By applying Gauss's law for any circularly-cylindrical surface $\mathcal{S}$ with axis along the cable's axis, radius $r < R_0$, length L (larger than the coaxial cable's length), and closed by "lids" lying outside the cable, it is found that

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}_0(r) \cdot \hat{r} \mathrm{d}A = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\varepsilon_0} = 0 \text{ for } r < R_0 \tag{7}$$

since $Q_{\mathrm{encl}} = 0$ inside any perfect conductor. Consequently, $\vec{E}_0(r) = \vec{0}\,(\mathrm{N/C})$ for $r < R_0$.

c.)

By applying Gauss's law for any circularly-cylindrical surfaces $\mathcal{S}_{0,1}$ and $\mathcal{S}_{1,2}$ with axes along the cable's axis, radii $R_0 < r < R_1$ and $R_1 < r < R_2$, respectively, length L (larger than the coaxial cable's length), and closed by "lids" lying outside the cable, it is found that

$$\oiint_{\mathcal{S}_{0,1}} \vec{E}_1(r) \cdot \hat{r}\, \mathrm{d}A = 2\pi r\, L\, E_1(r) = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\varepsilon_1} = \frac{Q\, L}{2\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r}\hat{r}\,(\mathrm{N/C}) \quad \text{for } R_0 < r < R_1 \tag{8}$$

and

$$\oiint_{\mathcal{S}_{1,2}} \vec{E}_2(r) \cdot \hat{r}\, \mathrm{d}A = 2\pi r\, L\, E_2(r) = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\varepsilon_2} = \frac{2Q\, L}{3\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0\, r}\hat{r}\,(\mathrm{N/C}) \quad \text{for } R_1 < r < R_2. \tag{9}$$

d.)

By applying Gauss's law for a circularly-cylindrical surface $\mathcal{S}_1$ located inside the mantel M_1 (with a small, yet non-vanishing thickness), with axis along the cable's axis, length L (larger than the coaxial cable's length), and closed by "lids" lying outside the cable, and by accounting for the fact that the electric field is zero inside perfect conductors, it is found that

$$0 = \left.\frac{Q_{\mathrm{encl}}\, L}{\varepsilon_1}\right|_{\text{outer side of the core}} + \left.\frac{Q_{\mathrm{encl}}\, L}{\varepsilon_1}\right|_{\text{inner side of } M_1} \Longrightarrow \left. Q_{\mathrm{encl}}\right|_{\text{inner side of } M_1} = -Q. \tag{10}$$

Consequently,

$$\left.\sigma\right|_{\text{inner side of } M_1} = \frac{-Q}{2\pi R_1}\;(\mathrm{C/m^2}). \tag{11}$$

e.)

By using the definition of the potential difference and (8) it follows that

$$\begin{aligned} V_{R_1,R_2} &= -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2(r) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0\, r}\mathrm{d}r = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0} \ln(R_1/R_2) \\ &= V(R_2) - V(R_1) \text{ (V)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Nevertheless, since the charge density on the *outer side* of the mantel M_2 is 0, a straightforward application of Gauss's law implies that the electric field outside M_1 is zero and, consequently, the *outer side* of the mantel M_2 is at the same potential as $V_\infty = 0\,\mathrm{V}$. Consequently,

$$V(R_1) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0} \ln(R_2/R_1) \text{ (V)}. \tag{13}$$

f.)

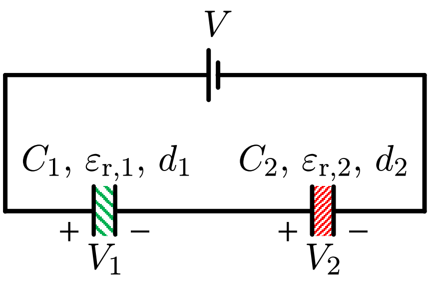
By using (13), the capacity per unit length is

$$C = \frac{2Q}{V(R_1)} = \frac{6\pi\varepsilon_0\, Q}{Q\, \ln(R_2/R_1)} = \frac{6\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} \text{ (F/m)}. \tag{14}$$

20 punten

Opgave 3

Gegeven de schakeling in de figuur hiernaast, bestaande uit twee condensatoren met parallelle platen en een ideale gelijkspanningsbron met bronspanning V. De condensator C_1 heeft platen met oppervlak A, afstand tussen de platen d_1 ($d_1 \ll A$) en relatieve permittiviteit $\varepsilon_{\mathrm{r},1}$. De condensator C_2 heeft platen met hetzelfde oppervlak A, afstand tussen de platen d_2 ($d_2 \ll A$) en relatieve permittiviteit $\varepsilon_{\mathrm{r},2}$. "Fringing effects" worden verwaarloosd.



a.) Geef een uitdrukking voor de totale capaciteit C van de twee condensatoren in serie. ⇒(6 points)

b.) Geef een uitdrukkingen voor de lading Q opgeslagen op de positieve plaat van C_1 en voor de lading opgeslagen op de positieve plaat van C_2. ⇒(5 points)

c.) Geef een uidrukking voor de grootte van de elektrische velden E_1 en E_2 in de twee condensatoren C_1 en C_2. ⇒(5 points)

d.) Neem nu aan dat de diëlektrische sterkte van medium 1 een maximaal elektrisch veld $E_{1,\mathrm{b}}$ (V/m) toelaat en dat de diëlektrische sterkte van medium 2 oneindig groot is. Bepaal de minimum afstand $d_{1,\mathrm{min}}$ waarbij er geen doorslag plaatsvindt in de condensator bij een bronspanning V. ⇒(4 points)

Solution

a.)

By applying the expressions of the equivalent capacitance of 2 series capacitances and of the capacitance of the plane-parallel capacitor it follows that

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{A}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{\mathrm{r},1}\,\varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_{\mathrm{r},2}\,\varepsilon_0}\right) \Rightarrow C = \frac{A\,\varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r},1}\,\varepsilon_{\mathrm{r},2}}{\varepsilon_{\mathrm{r},2}\,d_1 + \varepsilon_{\mathrm{r},1}\,d_2}\ (\mathrm{F}). \tag{15}$$

b.)

Since the two capacitors are in series, $Q = Q_2$, with Q_2 being the electric charge stored on the positive plate of C_2. The value of Q is derived based on the expression of C and the voltage V as

$$Q = C\,V = \frac{A\,\varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r},1}\,\varepsilon_{\mathrm{r},2}}{\varepsilon_{\mathrm{r},2}\,d_1 + \varepsilon_{\mathrm{r},1}\,d_2} V\ (\mathrm{C}). \tag{16}$$

c.)

Upon assuming that the field in the capacitor C_1 is uniform (the fringing effects are neglected), and by making use of the capacitance's definition it follows that

$$E_1 = \frac{V_1}{d_1} = \frac{Q}{C_1\, d_1} = \frac{A\, \varepsilon_0\, \varepsilon_{\mathrm{r},1}\, \varepsilon_{\mathrm{r},2}\, V}{\varepsilon_{\mathrm{r},2}\, d_1 + \varepsilon_{\mathrm{r},1}\, d_2}\, \frac{d_1}{A\, \varepsilon_{\mathrm{r},1}\, \varepsilon_0}\, \frac{1}{d_1} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r},2}\, V}{\varepsilon_{\mathrm{r},2}\, d_1 + \varepsilon_{\mathrm{r},1}\, d_2}\ \mathrm{(V/m)}. \tag{17}$$

By recalling that $Q = Q_2$, a similar reasoning yields

$$E_2 = \frac{V_2}{d_2} = \frac{Q}{C_2\, d_2} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r},1}\, V}{\varepsilon_{\mathrm{r},2}\, d_1 + \varepsilon_{\mathrm{r},1}\, d_2}\ \mathrm{(V/m)}. \tag{18}$$

d.)

Dielectric breakdown occurs when the electric field strength in the capacitor C_1 exceeds the value $E_{1,\mathrm{b}}$. Equation (17) clearly shows that reducing d_1 $\Rightarrow$ increasing E_1. It then follows that equating E_1 in (17) to $E_{1,\mathrm{b}}$ yields the minimum admissible spacing

$$d_{1,\mathrm{min}} = \frac{V}{E_{1,\mathrm{b}}} - \frac{\varepsilon_{\mathrm{r},1}}{\varepsilon_{\mathrm{r},2}}\, d_2\ \mathrm{(m)}. \tag{19}$$

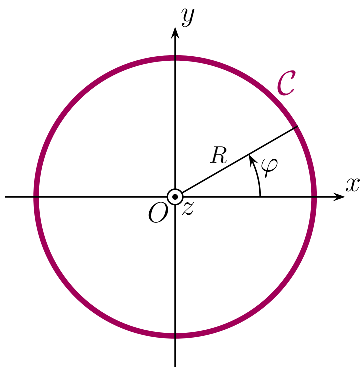
25 punten

Opgave 4

We beschouwen een niet-uniforme ladingsverdeling langs een oneindig dunne ring $\mathcal{C}$ met straal R en middelpunt $(0,0,0)$, gelegen in de het vlak $z=0$ (zie de figuur hiernaast). De niet-uniforme ladingsverdeling heeft de verdeling

$$\lambda(\varphi) = \lambda_0 \sin(\varphi) \text{ (C/m)}$$

met λ_0 een constante en de hoek φ gedefinieerd zoals in de figuur hiernaast. De ringvormige ladingsverdeling is gelegen in de vrije ruimte, met permittiviteit ε_0.



a.) Geef een uitdrukking voor de elementaire lading dq langs $\mathcal{C}$ en bereken de totale lading Q_{tot} van deze cirkelvormige ladingsverdeling. ⇒(5 points)

b.) Geef een uitdrukking voor de potentiaal $V(0,0,z)$, met $z \geqslant 0$ aannemend dat $V_\infty = 0$ V. ⇒(8 points)

c.) Geef een uitdrukking voor de $E_z(0,0,z)$-component van het elektrisch veld $\vec{E}$ voor $z \geqslant 0$. ⇒(6 points)

d.) Geef een uitdrukking voor het elektrisch veld $\vec{E}(0,0,0)$ in het middelpunt van de ring. ⇒(6 points)

Hint: $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$ en $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u)$.

Solution

a.)

The elementary charge dq is

$$\mathrm{d}q = \lambda(\varphi)R\mathrm{d}\varphi = \lambda_0 R \sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi \text{ (C)}. \tag{20}$$

Consequently, the total charge is

$$Q_{\text{tot}} = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}q = \lambda_0 R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \lambda_0 R \cos(\varphi)\Big|_{\varphi=2\pi}^{0} = 0 \text{ (C)}. \tag{21}$$

b.)

The elementary potential corresponding to the elementary charge $\mathrm{d}q$ is

$$\mathrm{d}V(0,0,z) = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda_0 R \sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} \text{ (V)} \tag{22}$$

where $r = \sqrt{R^2+z^2}$ is the distance from the current point along the ring $\mathcal{C}$ to a point $(0,0,z)$, with $z \geqslant 0$. The total potential is then

$$V(0,0,z) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}V = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0 \text{ (V)} \tag{23}$$

(see (21)).

c.)

Here, two solutions are possible.

Solution 1

From Coulomb's law, the elementary $\mathrm{d}E_z$ component at $(0,0,z)$ is

$$\mathrm{d}E_z(0,0,z) = \mathrm{d}E(0,0,z)\cos(\alpha) \tag{24}$$

with α being the angle made by the position vector from the current point along the ring $\mathcal{C}$ to $(0,0,z)$ $\Longrightarrow$ $\cos(\alpha) = z/\sqrt{R^2+z^2} = \text{constant}$. By accounting for this in (24), it immediately follows that

$$E_z(0,0,z) = \frac{\lambda_0 R\, z}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0 \text{ (V/m)} \tag{25}$$

(see (21)).

Solution 2

From its definition, the voltage along the z-axis ($z \geqslant 0$) is

$$\Delta V_{\mathrm{AB}} = -\int_{z_{\mathrm{A}}}^{z_{\mathrm{B}}} \vec{E}(0,0,z)\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\int_{z_{\mathrm{A}}}^{z_{\mathrm{B}}} E_z \mathrm{d}z \tag{26}$$

where A and B are arbitrary points on the axis. But, from b.) $V(0,0,z) = 0\,\mathrm{V}$! Since this $\Delta V_{\mathrm{AB}} = 0\,\mathrm{V}$ for any 2 points on the z-axis, irrespective how close, this can only be achieved if $E_z(0,0,z) = 0\,\mathrm{V/m}$.

d.)

All elements pertaining to the configuration concerning the evaluation of $\vec{E}(0,0,0)$ are in the $z = 0$-plane, the situation being sketched in Fig. 2

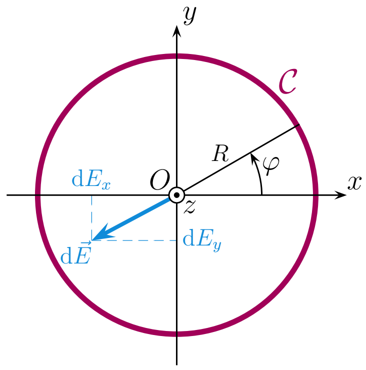


Figure 2: Explicative for the evaluation of $\vec{E}(0,0,0)$.

The nonzero components of the elementary electric field strength are then

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_x(0,0,0) &= \mathrm{d}E(0,0,0)\cos(\varphi+\pi) = -\mathrm{d}E(0,0,0)\cos(\varphi)\\ &= -\frac{\lambda_0 R\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0\, R^2}\cos(\varphi) = -\frac{\lambda_0\sin(2\varphi)\mathrm{d}\varphi}{2\pi\varepsilon_0\, R}\end{aligned} \tag{27}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_y(0,0,0) &= \mathrm{d}E(0,0,0)\sin(\varphi+\pi) = -\mathrm{d}E(0,0,0)\sin(\varphi)\\ &= -\frac{\lambda_0 R\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0\, R^2}\sin(\varphi) = -\frac{\lambda_0\sin^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0\, R}.\end{aligned} \tag{28}$$

It then follows that

$$E_x(0,0,0) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}E_x(0,0,0) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\, R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin(2\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0\ (\mathrm{V/m}) \tag{29}$$

(integral of sine over 4π) and

$$\begin{aligned}E_y(0,0,0) &= \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}E_y(0,0,0) = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0\, R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0\, R}\left[-\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{2\pi} = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0\, R}\ (\mathrm{V/m}).\end{aligned} \tag{30}$$

implying that $\vec{E}(0,0,0) = -\dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0\, R}\hat{y}\,\mathrm{V/m}$.