

Tentamen Magnetisme (Elektriciteit en Magnetisme deel B, EE1210B)

2 juli 2014 van 9.00 tot 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 vragen.

Beantwoord iedere opgave op een nieuw vel papier.

Een formulesblad is bijgevoegd.

Er mogen geen aantekeningen gebruikt worden.

Er mag een rekenmachine gebruikt worden, maar geen programmeerbare.

Vraag 1 (3+3+3+2+5+3+3+3=25 punten)

Een vereenvoudigde hoogspanningslijn bestaat uit twee geleiders. We veronderstellen dat de geleiders rond zijn met diameter van 50 mm, en dat er een afstand van 5 m zit tussen de hartlijnen van de geleiders. De lengte van de lijn is 100 km.

Een van deze geleiders is aan een kant verbonden met een gelijkstroombron van 1000 A. Deze stroom komt terug via de andere geleider. De weerstand van de geleiders is verwaarloosbaar. De lengte van de geleiders is veel groter dan de diameter van de geleiders en veel groter dan de afstand tussen de geleiders, waardoor eindeffecten verwaarloosd kunnen worden.

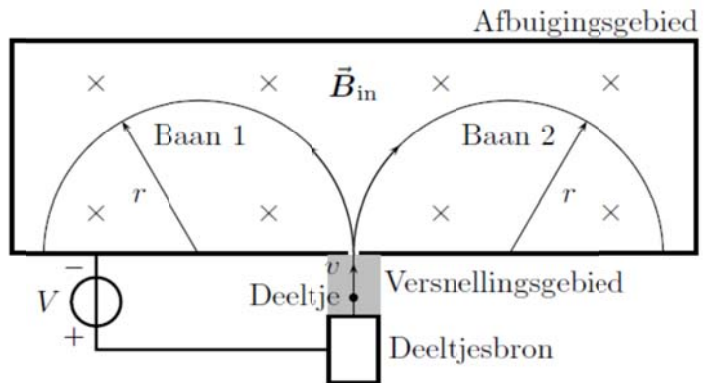
- a) Geef een uitdrukking voor de magnetische fluxdichtheid binnen een stroomvoerende geleider.
- b) Geef een uitdrukking voor de magnetische fluxdichtheid buiten een stroomvoerende geleider.
- c) Bereken de kracht die de stroomvoerende geleiders op elkaar uitoefenen per eenheid van lengte. Hierbij mag gerekend worden alsof alle stroom geconcentreerd is in de hartlijn van de geleider.
- d) Trekken de geleiders elkaar aan, of stoten ze elkaar af? Motiveer je antwoord kort.
- e) Bereken de magnetische flux gekoppeld met de hoogspanningslijn. Neem hierbij de hartlijn van de geleider als grens van het oppervlak.

In de rest van de opgave veronderstellen we dat $L=200$ mH. De stroom is nog steeds een gelijkstroom van 1000 A.

- f) Bereken de magnetische flux als de hoogspanningslijn deze inductiviteit heeft.
- g) Bereken de magnetische energie opgeslagen in het magnetisch veld rond de hoogspanningslijn.
- h) Bereken de effectieve waarde van de spanning over de inductiviteit van de hoogspanningslijn als de frequentie 50 Hz is en de stroom een effectieve waarde heeft van 1000 A.

Vraag 2 (2+2+3+8=15 punten)

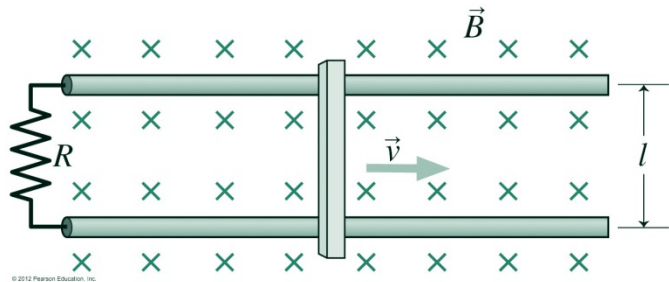
In de bijgevoegde figuur is een massaspectrometer weergegeven. Het magnetisch veld B in het afbuigingsgebied staat loodrecht op het papier en het papier in.



- Geef aan of bij een positieve waarde van V de massaspectrometer geschikt is voor positieve of negatieve deeltjes.
- Geef aan of deze volgens baan 1 of baan 2 worden afgebogen. Motiveer je antwoord kort.
- Verklaar waarom in het afbuigingsgebied de kinetische energie van de deeltjes niet verandert.
- Geef de uitdrukking voor de straal r van de baan als functie van de massa m van het deeltje, de lading q van het deeltje, de spanning V , en de grootte B van het afbuigveld.

Vraag 3 (3+3+2+2+3+3+4=20 punten)

In de figuur hiernaast staan 2 parallelle geleidende rails op een afstand l van elkaar in een uniform magnetisch veld B loodrecht op het papier en het papier in. Aan de linkerkant zijn de geleiders aangesloten op een weerstand R . Een geleidende staaf met verwaarloosbare weerstand wordt over de rails getrokken met een snelheid v naar rechts.



- Welke richting heeft de stroom in het circuit, met de klok mee, of tegen de klok in? Motiveer je antwoord kort.
- Bereken het vermogen nodig om de staaf met snelheid v naar rechts te verplaatsen.

De weerstand wordt vervangen door een ideale voltmeter.

- Op welke van de twee rails moet de positieve aansluiting van de voltmeter aangesloten worden om een positieve spanning te meten, de bovenste of de onderste?
- Bereken het vermogen nodig om de staaf met snelheid v naar rechts te verplaatsen.

De ideale voltmeter wordt vervangen door een weerstand in serie met een batterij. De positieve aansluiting van de batterij zit aan de bovenste rail. Aanvankelijk heeft de staaf snelheid 0.

- Beschrijf de beweging van de staaf.
- Waarom bereikt de staaf na enige tijd een constante snelheid?
- Bereken de constante snelheid van de staaf als functie van de emf van de batterij, het magnetisch veld B , de afstand l , en de weerstand R .

Vraag 4 (3+4+8=15 punten)

Een antenne van een mobiele telefoon zendt elektromagnetische golven uit met een frequentie van 2.4 GHz (dus 2400000000 Hz).

Het signaal is in alle richtingen even sterk.

Het vermogen van de antenne is 10 W.

- a) Bereken de golflengte van de elektromagnetische golf.
- b) Bereken de intensiteit op een afstand van 1 km.
- c) Bereken de amplitudes van het elektrisch en het magnetisch veld op een afstand van 1 km.

Vraag 5 (2+8+5=15 punten)

Door een draad loopt een stroom I . Deze draad ligt in een oppervlak wat de scheiding vormt tussen een halfruimte gevuld met lucht en een halfruimte met een magnetisch materiaal met een relatieve magnetische permeabiliteit μ_r . We veronderstellen dat de magnetische veldlijnen cirkels vormen met de draad als middelpunt.

- a) Geef een duidelijke schets van de situatie.
- b) Bereken magnetische veldsterkte en de magnetische fluxdichtheid als functie van de afstand r tot het hart van de geleider.
- c) Voldoet deze oplossing aan de randvoorwaarden voor de magnetische veldsterkte en de magnetische fluxdichtheid? Motiveer je antwoord kort.

Formuleblad Elektriciteit en Magnetisme

Lichtsnelheid: $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s

Magnetische permeabiliteit in vacuum: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A²

Elektrische permittiviteit in vacuum: $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$

Lading elektron: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

Wet van Coulomb: $\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2}$ met $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9$ Nm²/C²

Kracht op een lading in het elektrisch veld $\vec{F} = q\vec{E}$

Koppel op een elektrische dipool: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{d}$ met het elektrisch dipoolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$

Potentiele energie van een elektrische dipool: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Potentiaalverschil: $\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

De potentiaal van een ladingsverdeling: $V = \iiint_V \frac{k}{r} dq$

Elektrisch veld ten gevolge van potentiaalverandering: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

Kracht op een lading in een magnetisch veld: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

De wet van Lorenz: $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

Koppel op een magnetische dipool: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ met het magnetisch dipoolmoment: $\vec{\mu} = NI\vec{A}$

Potentiele energie van een magnetische dipool: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

De wet van Biot-Savart: $\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{L} \times \hat{r}}{r^2}$

Elektrische stroom $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqA|\vec{v}_d|$ met \vec{v}_d de driftsnelheid.

Stroomdichtheid $\vec{J} = nq\vec{v}_d = \sigma\vec{E}$ met σ de soortelijke geleiding

Weerstand: $R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\sigma A}$ met ρ de soortelijke weerstand

Wet van Ohm: $V = IR$.

Energiedichtheid van het elektrische veld: $u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$

Capaciteit: $C = \frac{Q}{V}$

Energie in een capaciteit: $U = \frac{1}{2} CV^2$

Energiedichtheid van het magnetische veld: $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}$

Inductiviteit: $L = \frac{\Phi_B}{I}$

Energie in een inductiviteit: $U = \frac{1}{2} LI^2$

De elektrische flux $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

De wet van Gauss voor het elektrisch veld:

- Met de elektrische fluxdichtheid: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \int \rho_f dV$
- Met de elektrische veldsterkte: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int (\rho_f + \rho_b) dV$

De magnetische flux $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

De wet van Gauss voor het magnetisch veld: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0$

De wet van Faraday: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

De wet van Ampère:

- Met de magnetische fluxdichtheid:
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int (\vec{J}_f + \vec{J}_a) \cdot d\vec{A} + \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot d\vec{A}$$
- Met de magnetische veldsterkte: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot d\vec{A}$

De constitutieve vergelijkingen:

- Voor dielektrische materialen in het algemeen: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
- Voor lineaire dielektrische materialen: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \kappa \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$
- Voor magnetische materialen in het algemeen: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$
- Voor lineaire magnetische materialen: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

De Poynting vector beschrijft de intensiteit van een elektromagnetische golf: $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

Impulsmoment van een elektromagnetische golf: $p = \frac{U}{c}$

Voor een elektromagnetische golf in vacuum: $E = cB$ en $f\lambda = c$.

Uitwerkingen tentamen Magnetisme 2 juli 2014 van 9.00 tot 12.00 uur

Vraag 1 (25 punten)

- a) Bereken de fluxdichtheid binnen en rond een stroomvoerende geleider.

Met Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Binnen de geleider met een straal van 25 mm is de omvatte stroom evenredig met

$$r^2/r_{Cu}^2: \quad 2\pi r B = \frac{\mu_0 I r^2}{r_{Cu}^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_{Cu}^2}$$

- b) Buiten geleider met straal van 25 mm: $2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

- c) Bereken de kracht die de stroomvoerende geleiders op elkaar uitoefenen per eenheid van lengte.

$$\text{Lorenz: } \vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} = 40 \text{ mN/m}$$

- d) Trekken de geleiders elkaar aan, of stoten ze elkaar af?

De stroomrichtingen zijn tegengesteld, dus ze stoten elkaar af.

- e) Bereken de flux gekoppeld met de stroomvoerende lus. Neem hierbij de hartlijn van de geleider als grens van het oppervlak.

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^l \int_0^d B dr dl = l \int_0^d B dr$$

We berekenen eerst de bijdrage aan de flux ten gevolge van de fluxdichtheid van een geleider zoals uitgerekend in opgave a).

$$\Phi_B = l \int_0^d B dr = l \int_0^{r_{Cu}} B dr + l \int_{r_{Cu}}^d B dr = l \int_0^{r_{Cu}} \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_{Cu}^2} dr + l \int_{r_{Cu}}^d \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = l \frac{\mu_0 I}{4\pi} + l \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{r_{Cu}}\right)$$

De fluxdichtheid ten gevolge van de andere geleider geeft een zelfde bijdrage aan de fluxdichtheid, dus

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{d}{r_{Cu}}\right) \right) = 231.9 \text{ Wb}$$

- f) Bereken de magnetische flux gekoppeld met deze hoogspanningslijn.

$$\Phi_B = LI = 200 \text{ Wb}$$

- g) Bereken de energie opgeslagen in het veld.

$$U = \frac{1}{2} LI^2 = 100 \text{ kJ}$$

- h) Bereken de effectieve waarde van de spanningsval over de inductiviteit van deze hoogspanningslijn.

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

Voor de effectieve waarde geldt: $V = L\omega I = 62.8 \text{ kV}$

Voor een hoogspanningslijn op 380 kV zo'n inductieve spanningsval acceptabel

Vraag 2 (15 punten)

- a) Geschikt voor positief geladen deeltjes.
b) In het afbuigingsgebied volgen de deeltjes baan 1, tegen de klok in.

- c) De kinetische energie in het afbuigingsgebied verandert niet omdat de kracht loodrecht op de snelheid staat.
- d) De elektromagnetische kracht in het afbuigingsgebied op de lading is $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. De grootte van deze kracht kan geschreven worden als $F = qvB$. Deze kracht staat loodrecht op de snelheid, dus is de beweging circelvormig. Deze kracht moet gelijk zijn aan de centripetale kracht: $F = ma = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$.

Gelijk stellen van die krachten: $F = \frac{mv^2}{r} = qvB$ leidt tot $r = \frac{mv}{qB}$.

De kinetische energie die het deeltje opbouwt tijdens het versnellen is

$$U = \frac{1}{2}mv^2 = qV. \text{ Hieruit volgt } v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

Substitueren van de snelheid resulteert in: $r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$

Vraag 3 (20 punten)

(vraag 27.44, 27.45 en 27.46 gecombineerd)

INTERPRET We have a circuit formed by the rails, a resistance, and a conducting bar. As the bar slides along the rails, the circuit area increases and a current is induced because the circuit encloses more flux (i.e., Faraday's law). We are interested in the rate of work done by an external agent to move the conducting bar.

DEVELOP To find the direction of the current in the loop, we note that since the area enclosed by the circuit, and the magnetic flux through it, are increasing, Lenz's law requires that the induced current opposes this with an upward induced magnetic field. To answer part (b), we make use of the result obtained in Example 27.4, which analyzes the same situation. In this example, the current in the bar is found to be $I = |\mathcal{E}|/R = Blv/R$. Because this is perpendicular to the magnetic field, the magnetic force on the bar is $F_{\text{mag}} = I\ell B$ (to the left in Fig. 27.39). The agent pulling the bar at constant velocity must exert an equal force in the direction of v .

- a) From the right-hand rule, the induced current must circulate counterclockwise. Take the positive sense of circulation around the circuit to be clockwise, so that the normal to the area is in the direction of B (i.e., into the page).
- b) The rate of work done by the external agent is

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = I\ell Bv = \frac{(Blv)^2}{R}$$

ASSESS The conservation of energy requires that the work done by the agent be equal to the rate energy is dissipated in the resistor (we neglected the resistance of the bar and the rails), $I^2 R = (Blv/R)^2 R = (Blv)^2 / R$. An alternative way to determine the direction of the current is to note that the force on a (hypothetical) positive charge carrier in the bar, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, is upward in Fig. 27.39, so current will circulate counterclockwise around the loop containing the bar, the resistor, and the rails (i.e., downward in the resistor). The force per unit positive charge is the motional emf in the bar.

INTERPRET This problem involves using Lenz's law to find the sign of the voltage across the two rails in the preceding problem.

DEVELOP As per the discussion for Problem 27.44, Lenz's law requires the current to try to circulate counterclockwise to generate an upward magnetic field to compensate for the increased downward magnetic field enclosed by the circuit.

- c) Because current flows from the positive to the negative terminal of a battery, the positive terminal will be the top bar. Thus, the positive terminal of the voltmeter must be connected to the top bar in Figure 27.39.
- d) When an ideal voltmeter replaces the resistor, no current flows (since its resistance is infinite) so no work is done moving the bar.

ASSESS Note that work is done in accelerating the bar, because charge is separated in this process to charge the capacitor formed by the gap between the upper and lower bars. But once the bar is moving at constant velocity, no work is done.

INTERPRET The circuit consists of the rails, the resistance, the conducting bar, and the battery. The emf of the battery will cause a current to circulate in the circuit, which will create a magnetic field. Lenz's law will tell us the subsequent motion of the conducting bar.

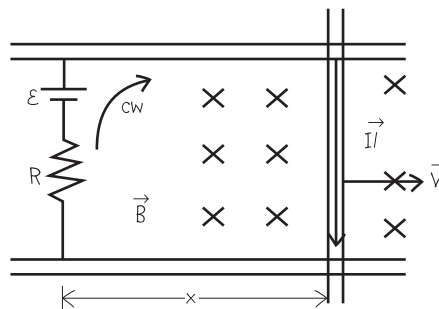
DEVELOP To analyze the subsequent motion of the bar, we first note that the battery causes a clockwise current (downward in the bar) to flow around the circuit, as indicated in the sketch below. Thus, there is a magnetic force on the conducting bar of

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \vec{I} \times \vec{B} = I\vec{B}$$

which, using the right-hand rule, is to the right. This force accelerates the bar in that direction. However, as in Example 27.4, the motion of the bar creates an induced emf $\varepsilon_i = -d\Phi_B/dt = -Blv$ that opposes the battery. By Ohm's law (Equation 26.5), the instantaneous current is

$$I(t) = \frac{\varepsilon + \varepsilon_i(t)}{R} = \frac{\varepsilon - Blv(t)}{R}$$

Thus, as the speed v increases, the induced current I (and the accelerating force) decreases.



- e) The bar will accelerate to the right until it reaches a constant velocity.
- f) When $\varepsilon = Blv(t)$, $F_{\text{mag}} = 0$ and Newton's second law tells us that the bar will move with a constant velocity.
- g) Solving the expression of part (b) for the velocity, we find that $v_{\infty} = \varepsilon/Bl$. Although v_{∞} doesn't depend on the resistance, the value of R does affect how rapidly v approaches v_{∞} . For large R , I charges slowly and v takes a long time to reach v_{∞} .

ASSESS In this problem, the equation of motion of the bar (mass m) is

$$F = ma \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = I\vec{B} = \frac{(\varepsilon - Blv)IB}{R} = \frac{(v_{\infty} - v)I^2 B^2}{R}$$

which can be rewritten as

$$\frac{dv}{v_\infty - v} = \frac{l^2 B^2}{mR} dt$$

For $v_0 = 0$, this integrates to $\ln(1 - v/v_\infty) = -l^2 B^2 t / (mR)$ or $v(t) = v_\infty (1 - e^{-l^2 B^2 t / (mR)})$. The time constant $\tau = mR / (lB)^2$ depends on the resistance.

Vraag 4 (15 punten)

a) Bereken de golflengte van de golf: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3}{24} = 125 \text{ mm}$

b) Bereken de intensiteit op een afstand van 1 km.
Het oppervlak op een afstand r kan berekend worden als

$$A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta d\theta d\vartheta = 2\pi r^2 [-\cos \vartheta]_0^\pi = 4\pi r^2$$

Daarmee is de intensiteit vermogen gedeeld door oppervlak:

$$S = \frac{P}{A} = \frac{10}{4\pi 1000^2} = 0.796 \mu\text{W/m}^2$$

c) Bereken de grootte van het elektrisch en het magnetisch veld

De Poynting vector geeft de intensiteit: $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

Voor de gemiddelde waarde van de intensiteit: $\bar{S} = \frac{E_p B_p}{2\mu_0}$

Voor de verhoudingen van de elektrische veldsterkte en de magnetische fluxdichtheid geldt: $E_p = cB_p$.

Daarom geldt: $\bar{S} = \frac{E_p B_p}{2\mu_0} = \frac{cB_p^2}{2\mu_0} \Rightarrow B_p = \sqrt{\frac{2\mu_0 \bar{S}}{c}} = 0.08165 \text{ nT}$

En $E_p = cB_p = 24.49 \text{ mV/m}$

Vraag 5 (15 punten)

a) De wet van Ampere: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$.

Toepassen van deze wet op een contour met straal r levert $\pi r H_a(r) + \pi r H_{Fe}(r) = I$.

Voor de relatie tussen de magnetische veldsterkte en de magnetische fluxdichtheid geldt $B_a(r) = \mu_0 H_a(r)$ en $B_{Fe}(r) = \mu_0 \mu_r H_{Fe}(r)$.

Invullen in Ampere: $\frac{\pi r B_a(r)}{\mu_0} + \frac{\pi r B_{Fe}(r)}{\mu_0 \mu_r} = I$

Gauss voor het magnetisch veld impliceert: $B_{Fe}(r) = B_a(r)$

Daarom: $\frac{\pi r B_a(r)}{\mu_0} + \frac{\pi r B_a(r)}{\mu_0 \mu_r} = I$

$$B_a(r) = \frac{\mu_r}{\mu_r + 1} \frac{\mu_0 I}{\pi r} \quad \text{en} \quad H_a(r) = \frac{\mu_r}{\mu_r + 1} \frac{I}{\pi r}$$

$$B_{Fe}(r) = \frac{\mu_r}{\mu_r + 1} \frac{\mu_0 I}{\pi r} \quad \text{en} \quad H_{Fe}(r) = \frac{1}{\mu_r + 1} \frac{I}{\pi r}$$

- b) De normale component van de magnetische fluxdichtheid zijn constant op het grensvlak, dus aan die randvoorwaarde is voldaan. De tangentele componenten van de magnetische veldsterkte zijn 0 op het grensvlak, dus aan die randvoorwaarde is ook voldaan.