Tentamen Magnetisme (Elektriciteit en Magnetisme deel B, EE1210B)
13 augustus 2014 van 9.00 tot 12.00 uur
Dit tentamen bestaat uit 4 vragen.
Beantwoord iedere opgave op een nieuw vel papier.
Een formulenblad is bijgevoegd.
Er mogen geen aantekeningen gebruikt worden.
Er mag een rekenmachine gebruikt worden, maar geen programmeerbare.

Vraag 1 (8+2+3+2 +10=25 punten)

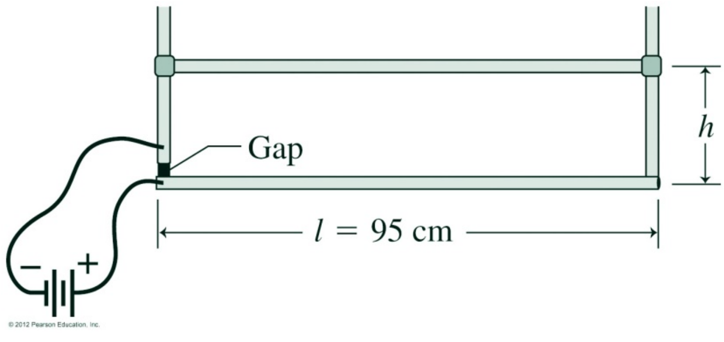
Gegeven een cirkelvormige spoel met als middelpunt het punt (0,0,0). Deze spoel ligt in het vlak x=0 en heeft grote straal a. De stroom door de spoel is I_1 en de spoel heeft 1 winding.

a) Leid een uitdrukking af voor de magnetische fluxdichtheid op de as van deze cirkelvormige spoel B als functie van de afstand tot de spoel x.

Binnen deze spoel is er een cilindervormige permanente magneet met straal b en lengte l die gemagnetiseerd is in de lengterichting. Voor de straal b geldt: $b \ll a$. Het middelpunt van deze permanente magneet is (0,0,0). De as van deze cilindervormige magneet maakt een hoek θ met de as van de spoel (de x-as).
De richting van de magnetisatie valt samen met die van de as van de magneet.
De magnetisatie wordt gemodelleerd als een Ampère-stroom (Amperian current) op het oppervlak van de magneet. De grootte van deze stroom is $I_a = lM$.
Bij vraag b), c) en d) gaan we ervan uit dat de magneet zo klein is in vergelijking tot de spoel dat het magnetisch veld van de spoel uniform is over de magneet. De grootte van dit veld is B.

b) Bepaal het magnetisch dipoolmoment van de permanente magneet.
c) Bepaal het koppel op de permanente magneet.
d) Als de permanente magneet zich vrij kan richten terwijl de as van deze magneet door de oorsprong blijft lopen, hoe richt deze magneet zich dan?

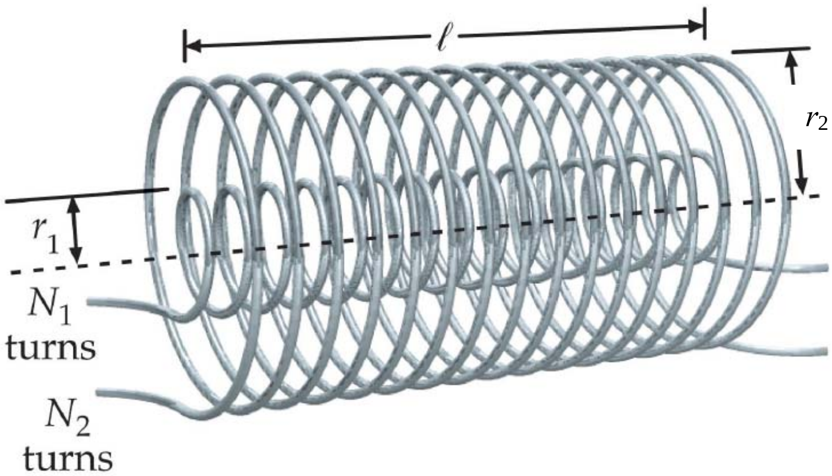
Beschouw nu een andere situatie van geleidende staven verticaal opgesteld in het zwaartekrachtsveld zoals hiernaast weergegeven. De bovenste staaf (massa 10 g, lengte 95 cm) kan vrij op en neer bewegen terwijl het elektrisch contact met de verticale staven goed blijft. De batterij zorgt dat er een stroom van 100 A loopt.



e) Op welke hoogt h zal de bovenste staaf terecht komen?

Vraag 2 (3+3+3+3+3+3+3+4=25 punten)

Gegeven twee concentrische solonoide spoelen.
Spoel 1 heeft N_1=100 windingen en straal r_1=10 cm.
Spoel 2 heeft N_2=1000 windingen en straal r_2=20 cm.
De lengte van beide spoelen is l=100 cm.
De weerstand van beide spoelen mag verwaarloosd worden.
Voor beide spoelen kunnen de gebruikelijke verwaarlozingen voor de berekeningen aan het veld aangehouden worden: $l>>r_2$, dus het veld buiten de spoel is verwaarloosbaar ten opzichte van het veld in de spoel.
De stroom in spoel 2 is een gelijkstroom van I_2=100 A.



a) Bereken de magnetische fluxdichtheid binnen spoel 2 ten gevolge van de stroom I_2.
b) Bereken de met spoel 2 gekoppelde flux ten gevolge van de stroom I_2.
c) Bereken de zelf-inductiviteit van de spoel 2.
d) Bereken de energie opgeslagen in het magnetisch veld.
e) Bereken de met spoel 1 gekoppelde flux ten gevolge van de stroom I_2.

De stroom in spoel 2 wordt nu een wisselstroom:
$I_2 = 100\sin(\omega t)\,\mathrm{A}$ met $\omega = 2\pi 50\,\mathrm{rad/s}$

f) Bereken de spanning geïnduceerd in spoel 2 als functie van de tijd.
g) Bereken de spanning geïnduceerd in spoel 1 als functie van de tijd.

Vervolgens wordt spoel 1 kortgesloten.

h) Wat wordt de amplitude van de stroom die in spoel 1 gaat lopen?

Vraag 3 (3+3+3+3+3+5=20 punten)

Elektromagnetische golven worden veroorzaakt door ladingen die een versnelling ondergaan. We beschouwen een proton dat een cirkelvormige baan doorloopt in een magnetisch veld. De frequentie van de elektromagnetische golf is gelijk aan de omloopfrequentie. Het proton heeft een kinetische energie van 6.0 MeV en beschrijft een cirkel met een straal van 75 cm. De massa van een proton is $m = 1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

a) Bereken de snelheid van het proton.
b) Bereken de grootte van het magnetisch veld B nodig voor de cirkelvormige beweging.
c) Bereken de frequentie van de elektromagnetische golven uitgezonden door het proton.
d) Bereken de golflengte van de elektromagnetische golven uitgezonden door het proton.

Op een voldoende grote afstand van het proton kan de elektromagnetische golf beschreven worden als

$$\vec{E}(x,t) = E_p \sin(kx - \omega t)\,\hat{j}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_p \sin(kx - \omega t)\,\hat{k}$$

waarin $E_p = 30\,\mathrm{V/m}$.

e) Bereken de amplitude van het magnetisch veld.
f) Bepaal de vector van Poynting voor deze elektromagnetische golf in dit punt.

Vraag 4 (5+5+5+5=20 punten)

Het vlak x=0 vormt de scheiding tussen twee halfruimten. In halfruimte 1 geldt dat x<0, en deze halfruimte is gevuld met een magnetisch materiaal met relatieve magnetische permeabiliteit μ_{r1}=1000. In halfruimte 2 geldt dat x>0 en deze halfruimte is vacuum met magnetische permeabiliteit μ_0 en permittiviteit ε_0.
Voor het magnetisch veld (de magnetische fluxdichtheid) op de x-as in het magnetisch materiaal net voor het grensvlak geldt: $\vec{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\mathrm{T}$.

a) Bepaal de vector voor de magnetische veldsterkte $\vec{H}_1$ op deze plaats in het magnetisch materiaal in halfruimte 1.
b) Bepaal de vector voor de magnetische veldsterkte $\vec{H}_2$ net aan de andere kant van het vlak x=0 in de lucht van halfruimte 2.
c) Bepaal de vector voor de magnetische fluxdichtheid $\vec{B}_2$ net aan de andere kant van het vlak x=0 in de lucht van halfruimte 2.
d) Bepaal de divergentie van $\vec{B}$ (ofwel $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$).

Formulenblad Elektriciteit en Magnetisme

Lichtsnelheid: $c = 3.00 \cdot 10^8\,\text{m/s}$

Magnetische permeabiliteit in vacuüm: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{N/A}^2$

Elektrische permittiviteit in vacuüm: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$

Lading elektron: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$

Wet van Coulomb: $\vec{F} = k\dfrac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2}\hat{r}_{1,2}$ met $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9\,\text{Nm}^2/\text{C}^2$

Kracht op een lading in het elektrisch veld $\vec{F} = q\vec{E}$

Koppel op een elektrische dipool: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{d}$ met het elektrisch dipoolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$

Potentiele energie van een elektrische dipool: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Potentiaalverschil: $\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

De potentiaal van een ladingsverdeling: $V = \iiint_V \dfrac{k}{r}\mathrm{d}q$

Elektrisch veld ten gevolge van potentiaalverandering: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Kracht op een lading in een magnetisch veld: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

De wet van Lorenz: $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

Koppel op een magnetische dipool: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ met het magnetisch dipoolmoment: $\vec{\mu} = NI\vec{A}$

Potentiele energie van een magnetische dipool: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

De wet van Biot-Savart: $\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\vec{L} \times \hat{r}}{r^2}$

Elektrische stroom $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = nqA\left|\vec{v}_d\right|$ met $\vec{v}_d$ de driftsnelheid.

Stroomdichtheid $\vec{J} = nq\vec{v}_d = \sigma\vec{E}$ met σ de soortelijke geleiding

Weerstand: $R = \dfrac{\rho l}{A} = \dfrac{l}{\sigma A}$ met ρ de soortelijke weerstand

Wet van Ohm: $V = IR$.

Energiedichtheid van het elektrische veld: $u_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$

Capaciteit: $C = \dfrac{Q}{V}$

Energie in een capaciteit: $U = \dfrac{1}{2}CV^2$

Energiedichtheid van het magnetische veld: $u_B = \dfrac{B^2}{2\mu_0\mu_r}$

Inductiviteit: $L = \dfrac{\Phi_B}{I}$

Energie in een inductivteit: $U = \dfrac{1}{2}LI^2$

De elektrische flux $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

De wet van Gauss voor het elektrisch veld:

- Met de elektrische fluxdichtheid: $\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \mathrm{d}V = \int \rho_f \mathrm{d}V$
- Met de elektrische veldsterkte: $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \int (\rho_f + \rho_b) \mathrm{d}V$

De magnetische flux $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

De wet van Gauss voor het magnetisch veld: $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \mathrm{d}V = 0$

De wet van Faraday: $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

De wet van Ampère:

- Met de magnetische fluxdichtheid:
  $$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 \int (\vec{J}_f + \vec{J}_a) \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$
- Met de magnetische veldsterkte: $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

De constitutieve vergelijkingen:

- Voor dielektrische materialen in het algemeen: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
- Voor lineaire dielektrische materialen: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$
- Voor magnetische materialen in het algemeen: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$
- Voor lineaire magnetische materialen: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

De Poynting vector: $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

Implusmoment van een elektromagnetische golf: $p = \frac{U}{c}$

Voor een elektromagnetische golf in vacuüm: $E = cB$ en $f \lambda = c$.

Uitwerkingen tentamen Magnetisme 13 augustus 2014 van 9.00 tot 12.00 uur

Vraag 1 (8+2+3+2 +10=25 punten)

a) Biot-Savart: $\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\mathrm{d}\vec{L} \times \hat{r}}{r^2}$

Voor de straal geldt: $r = \sqrt{a^2 + x^2}$

In het punt x=0 geldt dat alle bijdragen van de stroom aan de fluxdichtheid dezelfde richting hebben. Bij andere waarden van x heffen de componenten loodrecht op de x-as elkaar op. Daarom nemen we alleen de x-component:

$$B_x = \int \mathrm{d}B_x = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\mathrm{d}\vec{L} \times \hat{r}}{r^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{aIa}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

b) De grootte van het magnetisch dipoolmoment is $\mu = \pi b^2 l M$

c) Het koppel is $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. De grootte van het koppel is $\tau = \mu B \sin\theta$

d) Als de as van de spoel en van de magneet samenvallen is het koppel 0.

e) Op de hoogte waarop de staaf terecht komt is er evenwicht tussen de zwaartekracht die naar beneden trekt en de afstotende elektromagnetische kracht die de staaf naar boven duwt. Volgens de wet van Ampere geldt voor de fluxdichtheid rond de onderste geleider:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \text{ dus } 2\pi r B = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

De kracht die de stroomvoerende geleiders op elkaar uitoefenen kan berekend worden met Lorenz: $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r}$$

Deze moet gelijk zijn aan de zwaartekracht, dus $F = mg = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r}$

$$h = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi m g} = 19.37\,\text{mm}$$

Vraag 2 (3+3+3+3+3+3+3+4=25 punten)

a) Bereken de magnetische fluxdichtheid in spoel 2 ten gevolge van de stroom I_2.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$Bl = \mu_0 N_2 I_2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l} = 125.7\,\text{mT}$$

b) Bereken de met spoel 2 gekoppelde flux ten gevolge van de stroom I_2.

$$\Phi_2 = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \pi r_2^2 B N_2 = \frac{\mu_0 \pi r_2^2 N_2^2}{l} I_2 = 15.79\,\text{Wb}$$

c) Bereken de zelf-inductiviteit van de spoel 2.

$$L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi r_2^2 N_2^2}{l} = 157.9\,\text{mH}$$

d) Bereken de energie opgeslagen in het magnetisch veld.

$$U = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = 789.6\,\text{J}$$

e) Bereken de met spoel 1 gekoppelde flux ten gevolge van de stroom I_2.

$$\Phi_1 = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \pi r_1^2 B N_1 = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 N_2 N_1}{l} I_2 = 394.8\,\text{mWb}$$

f) Bereken de spanning geïnduceerd in spoel 2.

$$V_2 = RI_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = \omega L_2 I_2 \cos(\omega t) = 4961\cos(\omega t)\,\text{V}$$

g) Bereken de spanning geïnduceerd in spoel 1.

$$V_1 = RI_2 + \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 N_2 N_1}{l} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = 124.0\cos(\omega t)\,\text{V}$$

h) Hoe groot wordt de stroom die in spoel 1 gaat lopen?
De spanning geïnduceerd in spoel 1 door de stroom in spoel 2 moet dan gelijk zijn aan de geïnduceerd in spoel 1 door de stroom in spoel 1, dus:

$$\frac{\mu_0 \pi r_1^2 N_2 N_1}{l} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 N_1^2}{l} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

Dus $I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2$. Dus de amplitude van de stroom in spoel 1 is 1000 A.

Of op een andere manier: Faraday zegt dat de geïnduceerde stroom de verandering van het veld tegenwerkt. Als de weerstand 0 is, wordt de verandering perfect tegengewerkt. Met andere woorden: het veld binnen de spoel 1 is 0. Dus de stroom in spoel 1 moet zo groot zijn dat de stroom in spoel 1 helemaal gecompenseerd wordt. Dat is het geval als $I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2$. Dus de amplitude van de stroom in spoel 1 is 1000 A.

Vraag 3 (3+3+3+3+3+5=20 punten)

a) Bereken de snelheid van het proton.
De kinetische energie is 6.0 MeV, dus de snelheid is

$$U = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2U}{m}}$$

b) Bereken de grootte van het magnetisch veld B.
De elektromagnetische kracht op een proton is $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. In dit geval: $F = evB$.
Deze kracht staat loodrecht op de snelheid, dus is de beweging circelvormig. Deze kracht moet gelijk zijn aan de centripetale kracht: $F = ma = mv^2 / r$.
Mocht je vergeten zijn dat $a = v^2 / r$, dan kun je dat altijd afleiden:

$$x = r\cos(\omega t) \quad ; \quad x = r\sin(\omega t)$$

$$v_x = -r\omega \sin(\omega t) \quad ; \quad v_y = r\omega\cos(\omega t)$$

$$a_x = -r\omega^2 \cos(\omega t) \quad ; \quad a_y = -r\omega^2 \sin(\omega t)$$

Gelijk stellen van die krachten: $F = mv^2 / r = evB$ leidt tot

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{m}{er}\sqrt{\frac{2U}{m}} = \frac{1}{er}\sqrt{2Um} = 0.4719\,\text{T}.$$

c) Bereken de frequentie van de elektromagnetische golven uitgezonden door de proton.
Voor de snelheid van een cirkelvormige beweging geldt ook: $v = \omega r$. Daarom:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r}\sqrt{\frac{2U}{m}} = 7.195\,\text{MHz}$$

d) Bereken de golflengte van de golf: $\lambda = \frac{c}{f} = 41.69\,\mathrm{m}$

e) Bereken de amplitude van het magnetisch veld B_p.

$$B_p = \frac{E_p}{c} = 100\,\mathrm{nT}$$

f) Bereken de Poynting vector:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{bmatrix} E_p B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin^2(kx-\omega t) = \begin{bmatrix} 2.387 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin^2(kx-\omega t)\,\mathrm{W/m^2}$$

Vraag 4 (5+5+5+5=20 punten)

a) Voor de magnetische veldsterkte $\vec{H}$ op deze plaats in de lucht in halfruimte 1 geldt.

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0\mu_r} = \begin{bmatrix} 397.9 \\ 397.9 \\ 397.9 \end{bmatrix}\mathrm{A/m}$$

b) De randvoorwaarden zeggen dat de normale component van de magnetische fluxdichtheid $\vec{B}$ continu is (volgt uit Gauss) en dat de tangentiele componenten van de magnetische veldsterkte $\vec{H}$ continu zijn.
Dus de x-component van de magnetische fluxdichtheid is continu:

$$B_{x2} = B_{x1} = 0.5\,\mathrm{T} \text{ en } H_{x2} = \frac{B_{x2}}{\mu_0} = 397.9\,\mathrm{kA/m}$$

en de y-component en de z-component van de magnetische veldsterkte zijn continu:

$$H_{y2} = H_{y1} = 397.9\,\mathrm{A/m} \text{ en } B_{y2} = \mu_0 H_{y2} = 0.5\,\mathrm{mT}$$

$$H_{x2} = H_{x1} = 397.9\,\mathrm{A/m} \text{ en } B_{z2} = \mu_0 H_{z2} = 0.5\,\mathrm{mT}$$

$$\vec{H}_2 = \begin{bmatrix} 397.9 \\ 0.3979 \\ 0.3979 \end{bmatrix}\mathrm{kA/m}$$

c) $\vec{B}_2 = \begin{bmatrix} 500 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\mathrm{mT}$

d) De divergentie van $\vec{B}$ is volgens Gauss altijd 0 (ofwel $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$).