Technische Universiteit Delft — Mekelweg 4
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica — 2628 CD Delft

Deeltentamen I Kansrekening en Statistiek EE1M31
11 maart 2015, 9.00 -11.00u

Bij dit tentamen is het gebruik van een rekenmachine toegestaan. Ook toegestaan is een formuleblad, dat wordt uitgedeeld.
Dit tentamen bestaat uit zes meerkeuze- en drie open vragen. De drie open vragen graag ieder op een apart antwoordvel maken en inleveren.

Toelichting: Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen èn aan te strepen.

Meerkeuze vragen

1. Een uitvinder heeft een apparaat bedacht dat aardgas kan detecteren. Als aardgas aanwezig is, dan geeft dit apparaat dit in 75% van de gevallen aan. Als er géén aardgas aanwezig is geeft het apparaat toch in 20% van de gevallen aan dat er wél aardgas aanwezig is. Een oliemaatschappij test het apparaat op locaties waarvan men denkt dat de kans op aanwezigheid van aardgas $^1{}_{500}$ is. Als het apparaat aanwezigheid van aardgas aangeeft, wat is dan de kans dat er ook echt aardgas zit?

   a. 0.0006 **b.** 0.0020 **c.** 0.0075 **d.** 0.9925 **e.** 0.9980 **f.** 0.9994

2. Van de gebeurtenissen A, B en C is gegeven dat $B \cap C = \emptyset$, $\frac{1}{2} = \mathrm{P}(B) = 2\mathrm{P}(C)$, $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{2}$ en $\mathrm{P}(A \mid C) = \frac{2}{5}$. Bereken $\mathrm{P}(A \mid B \cup C)$.

   a. $\frac{11}{60}$ **b.** $\frac{23}{60}$ **c.** $\frac{28}{60}$ **d.** $\frac{31}{60}$ **e.** $\frac{36}{60}$ **f.** $\frac{54}{60}$

3. Van een bloembollensoort is bekend dat 4% van de bollen niet opkomt. De bollen worden verpakt in dozen van 12 stuks, met de garantie dat 11 van de 12 bollen zeker zullen opkomen. We gaan ervan uit dat de bollen onafhankelijk van elkaar al dan niet opkomen. Hoe groot is de kans dat een aselect gekozen doos de gegarandeerde eigenschap niet heeft?

   a. 0.919 **b.** 0.638 **c.** 0.917 **d.** 0.083 **e.** 0.362 **f.** 0.081

4. Laat X een continue stochast zijn die zijn waarden tussen 0 en 2 aanneemt. Verder is gegeven dat de kansdichtheid (Engels: probability density function) f_X van X gegeven wordt door:
$$f_X(x) = \frac{x + x^3}{6}, \qquad \text{voor } 0 \le x \le 2,$$
   en $f_X(x) = 0$ voor alle andere waarden van x. Dan is $\mathrm{P}(X \le 1)$ gelijk aan:

   a. $\frac{1}{16}$ **b.** $\frac{1}{8}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{1}{3}$ **e.** $\frac{3}{4}$ **f.** $\frac{7}{8}$

5. Laat X uniform verdeeld zijn op $[0, 1]$ (dus $X \sim U(0, 1)$) en laat $Y = X^2$. Bereken $\mathrm{E}[2Y - 1]$.

   a. $\frac{2}{3}$ **b.** $-\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{3}$ **d.** $-\frac{1}{2}$ **e.** $\frac{1}{2}$ **f.** $\frac{1}{6}$

6. Gegeven is de verdelingsfunctie (distribution function) van een discrete stochastische variabele X:

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{voor } a < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 0 \leq a < \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \text{voor } \frac{1}{3} \leq a < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{voor } a \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

De kansmassafunctie van X wordt gegeven door

a.

a	0	1/2	3/4
$P(X = a)$	1/3	1/6	1/2

b.

a	0	1/2	3/4
$P(X = a)$	1/3	1/2	1/6

c.

a	1/3	1/2	1
$P(X = a)$	1/2	1/4	1/4

d.

a	1/3	1/2	1
$P(X = a)$	1/4	1/2	1/4

e.

a	0	1/3	1/2
$P(X = a)$	1/2	1/4	1/4

f.

a	0	1/3	1/2
$P(X = a)$	1/2	3/8	1/8

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Stel X en Y zijn de uitkomsten van twee (onafhankelijke) worpen met een (zeskantige, zuivere) dobbelsteen. Definieer $M = \max\{X, Y\}$, $Z = \min\{X, Y\}$.

   (a) Bereken $P(M = Z)$.

   (b) Beargumenteer (zonder precieze berekening) of M en Z positief of negatief gecorreleerd zullen zijn.

2. Laten X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx^2 + \frac{xy}{3} & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

   (a) Bereken c.

   (b) Bepaal de marginale dichtheid van X en van Y.

   (c) Zijn X en Y onafhankelijk?

3. De tijd waarop een docent van de TU Delft 's ochtends op haar kamer komt, is normaal verdeeld met verwachting μ=half tien en standaardafwijking σ=één kwartier.
   Bereken de kans dat zij tussen half tien en tien uur op haar werk komt.

Antwoorden multiple choice:

1 c. Laat A de gebeurtenis zijn {er is aardgas aanwezig} en O de gebeurtenis {het apparaat detecteert aardgas} .

$$\mathrm{P}(O\,|\,A) = \frac{\mathrm{P}(A\,|\,O)\mathrm{P}(O)}{\mathrm{P}(A\,|\,O)\mathrm{P}(O) + \mathrm{P}(A\,|\,O^c)\mathrm{P}(O^c)} = \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{500}}{\frac{3}{4}\frac{1}{500} + \frac{2}{10}\frac{499}{500}} = 0.0075$$

2 c.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\,|\,B\cup C) &= \frac{\mathrm{P}((A\cap B)\cup(A\cap C))}{\mathrm{P}(B\cup C)} = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(A\,|\,B)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\,|\,C)\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{7}{15}\end{aligned}$$

3 f. Laat X het aantal bollen zijn dat opkomt. Dan is $X \sim Bin(12, 0.96)$. Gevraagd is de kans

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X < 11) &= 1 - \mathrm{P}(X \geq 11) \\ &= 1 - \left(\binom{12}{11}(0.96)^{11}0.04 + (0.96)^{12}\right) \\ &= 1 - 0.919 = 0.081\end{aligned}$$

4 b. Er geldt dat:

$$\mathrm{P}(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+x^3}{6}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{12}+\frac{1}{24} = \frac{1}{8},$$

dus antwoord **b**.

5 b. $\mathrm{E}[X] = 1/2$, $\mathrm{Var}(X) = 1/12$, dus $\mathrm{E}\left[X^2\right] = 1/4 + 1/12 = 1/3$. Hieruit volgt dat

$$\mathrm{E}[2Y-1] = \mathrm{E}\left[2X^2-1\right] = 2\mathrm{E}\left[X^2\right] - 1 = 2\cdot\frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

6 e. Maak eventueel een schets van de grafiek van F_X. Uit de beschrijving van F_X is af te lezen dat F_X sprongen maakt in 0, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$, met sprong-grootte, respectievelijk $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{4}$. Dit betekent dat X als mogelijke waarden heeft 0, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$, met kansen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{4}$:

a	0	1/3	1/2
$\mathrm{P}(X=a)$	1/2	1/4	1/4

Antwoorden open vragen:

1a $M = Z$ betekent dat de twee worpen gelijk zijn. De kans hierop is $\frac{1}{6}$.

1b Als het maximum klein is, dan zal het minimum sowieso eveneens klein zijn. Naarmate het maximum groter is zal de kans op een groter minimum ook groter worden. De correlatie tussen M en Z zal positief zijn.

2a We vinden C uit de eis dat de totale integraal van $f_{X,Y}$ gelijk aan 1 moet zijn:

$$\int_0^1\int_0^2 cx^2 + \frac{xy}{3}\,dydx = \int_0^1 \left[cx^2y + \frac{1}{6}xy^2\right]_0^2 dx = \int_0^1 2cx^2 + \frac{2}{3}x\,dx = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3} = 1.$$

$\iff c = 1.$

2b Er geldt

$$f_X(x) = \int_0^2 f_{X,Y}(x,y)\,dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x$$

en

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y$$

2c Dat zijn ze als $f_{X,Y} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, hetgeen niet het geval is.

3 Stel T is de aankomsttijd, dan is gegeven dat $T \sim N(9.5, \frac{1}{16})$.
De gevraagde kans is gelijk aan

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(9.5 \leq T \leq 10\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{9.5-9.5}{1/4} \leq \frac{T-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-9.5}{\frac{1}{4}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(0 \leq T \leq 2\right) = 0.5 - 0.0228 = 0.4772 \end{aligned}$$