Extra Opgaven Hoofdstukken 13 en 14

1. Gegeven is, dat X een $N(1,2)$ verdeelde stochast is. Volgens de ongelijkheid van Chebyshev geldt er dan dat:

a. $\mathrm{P}(|X-1| \leq 2) \leq \frac{1}{4}$ **b.** $\mathrm{P}(|X-1| \leq 2) \leq \frac{1}{2}$ **c.** $\mathrm{P}(|X-1| \leq 2) \geq \frac{1}{4}$
d. $\mathrm{P}(|X-1| \geq 2) \leq \frac{1}{4}$ **e.** $\mathrm{P}(|X-1| \geq 2) \leq \frac{1}{2}$ **f.** $\mathrm{P}(|X-1| \geq 2) \geq \frac{1}{4}$

2. Zij Y een stochastische variabele met een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling. De ondergrenzen volgens de ongelijkheid van Chebyshev voor de kansen $\mathrm{P}(|Y-\mu| < k\sigma)$, voor $k = 1,2,3$ en de exacte waarden van deze kansen worden gegeven door

a.

k	1	2	3
Cheb.	1	0.2500	0.1111
exact	0.3174	0.0456	0.0026

b.

k	1	2	3
Cheb.	0	0.7500	0.8889
exact	0.6826	0.9544	0.9974

c.

k	1	2	3
Cheb.	1	0.2500	0.1111
exact	0.1587	0.0228	0.0013

d.

k	1	2	3
Cheb.	0	0.7500	0.8889
exact	0.8413	0.9772	0.9987

e.

k	1	2	3
Cheb.	1	0.5000	0.3333
exact	0.3174	0.0456	0.0026

f.

k	1	2	3
Cheb.	0	0.5000	0.6667
exact	0.6826	0.9544	0.9974

3. Stel $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ zijn exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = 2$. De centrale limietstelling geeft dat $\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} \geq 60)$ ongeveer gelijk is aan

a. 0.3085 **b.** 0.1587 **c.** 0.1056 **d.** 0.0793 **e.** 0.0228 **f.** 0.0062

4. De stochasten $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{27}$ zijn onafhankelijk en $U(1,3)$ verdeeld. Benader

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{27} > 60)$$

door de Centrale Limietstelling te gebruiken.

a. 0.002 **b.** 0.0228 **c.** 0.0040 **d.** 0.0344 **e.** 0.0630 **f.** 0.2033

5. De Poissonverdeling heeft de volgende eigenschap: als $X_1, \ldots, X_k$ onafhankelijke Poissonvariabelen zijn met parameters $\mu_1, \ldots, \mu_k$, dan is $X_1 + \ldots + X_k$ ook Poisson verdeeld, met parameter $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_k$. Daaruit, en uit de centrale limietstelling, volgt dat voor grote (gehele) n

$$Pois(n) = Pois(1) + \ldots + Pois(1)$$

bij benadering normaal verdeeld is.
Gebruik dit om voor een $Pois(100)$ variabele X de kans $\mathrm{P}(X \leq 87)$ te benaderen.

a. 0.24 **b.** 0.034 **c.** 0.054 **d.** 0.32 **e.** 0.097 **f.** 0.12

6. Een bank rondt rentebijschrijvingen af op hele eurocenten. Het verschil in centen modelleren we als een $U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ variabele. Als het verschil positief is, betekent dat een winst voor de bank. Stel op een dag doet de bank 15000 rentebijschrijvingen. Wat is de kans dat de bank door de afrondingen meer dan €0.50 (dit is dus 50 eurocent) winst maakt? Gebruik de Centrale Limietstelling!

a. 0.4840 **b.** 0.3557 **c.** 0.1515 **d.** 0.1292 **e.** 0.0901 **f.** 0.0793

7. Een goede benadering voor de kansverdeling van het gemiddelde $\bar{X}_{400}$ van 400 onafhankelijke $Ber(0.25)$ verdeelde stochasten is

a. $N(0.25, 4.69 \cdot 10^{-4})$ **b.** $N(0.25, 2.5 \cdot 10^{-3})$ **c.** $N(0.50, 2.08 \cdot 10^{-4})$
d. $N(0.50, 6.25 \cdot 10^{-4})$ **e.** $N(1.0, 4.69 \cdot 10^{-4})$ **f.** $N(1.0, 6.25 \cdot 10^{-4})$

Antwoorden:

1 e.

2 b.

3 e.

3 e.

4 b.

5 e.

6 f.

7 a.