Extra Opgaven over Hoofdstuk 9 en 10

9.1. Van twee stochasten X en Y is gegeven dat $\mathrm{Var}(X) = 3$ en $\mathrm{Var}(Y) = 5$. Verder is gegeven dat $\mathrm{Var}(X+Y) = 6$. Bereken de covariantie $\mathrm{Cov}(X,Y)$ van X en Y.

9.2. Stel X is exponentieel verdeeld met parameter 2, en Y is, onafhankelijk van X, exponentieel verdeeld met parameter 3. Bereken $\mathrm{Var}(X+Y)$.

9.3. Laat X en Y twee Bernoulli verdeelde discrete stochasten zijn, en laat verder gegeven zijn dat $\mathrm{P}(X=0, Y=0) = \frac{4}{11}$, $\mathrm{P}(X=0, Y=1) = 0$, en $\mathrm{P}(X=1, Y=0) = \frac{2}{11}$. Welke van de volgende uitspraken is juist?

a. X en Y zijn ongecorreleerd, maar afhankelijk.
b. X en Y zijn ongecorreleerd, en onafhankelijk.
c. X en Y zijn niet ongecorreleerd, maar wel onafhankelijk.
d. X en Y zijn positief gecorreleerd en niet onafhankelijk.
e. X en Y zijn negatief gecorreleerd en niet onafhankelijk.
f. er zijn niet genoeg gegevens om deze opgave op te kunnen oplossen.

9.4. Laat gegeven zijn dat X en Y twee onafhankelijke stochasten zijn, die allebei uniform verdeeld zijn op [0,1]. Bereken dan de (voorwaardelijke) kans dat $X > Y$ als gegeven is dat $X + Y \leq 1$.

9.5. Stel X en Y zijn twee negatief gecorreleerde stochasten. Bekijk de volgende twee beweringen

(A) $\mathrm{Cov}(X, X+Y) < \mathrm{Cov}(X,Y)$
(B) $\mathrm{Var}(X+Y) < \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

a. (A) en (B) zijn allebei waar
b. (A) is waar en (B) is onwaar
c. (A) is onwaar en (B) is waar
d. (A) en (B) zijn allebei onwaar

9.6. Iemand gooit met een dobbelsteen net zolang totdat hij zes gooit; het aantal worpen noemen we X_1. Daarna gooit hij weer net zolang totdat hij een zes gooit; dit aantal worpen noemen we X_2. Het totale aantal worpen noemen we X_3, dus $X_3 = X_1 + X_2$. Welke van de drie stochasten heeft een geometrische verdeling?

a. alle drie
b. alleen X_1
c. alleen X_1 en X_3
d. alleen X_1 en X_2
e. alleen X_3
f. geen van de drie

9.7. Vervolg vorige vraag: Welke van de volgende uitspraken is waar?

a. X_1 en X_3 zijn onafhankelijk
b. X_1 en X_2 zijn negatief gecorreleerd
c. X_1 en X_2 zijn positief gecorreleerd
d. X_1 en X_3 zijn negatief gecorreleerd
e. X_2 en X_3 zijn onafhankelijk
f. X_2 en X_3 zijn positief gecorreleerd

9.8. De correlatie tussen de twee stochasten X en Y is gelijk aan -0.5. Verder geldt dat $\mathrm{Var}(X) = 1$ en $\mathrm{Var}(Y) = 4$. Wat is de variantie van $X + Y$?

9.9. Laat X uniform over $[0,1]$ verdeeld zijn, en laat $Y = X^2$. Bereken $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Deze is gelijk aan

a. $-\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{3}{16}$ **c.** $\frac{3}{8}$ **d.** $\frac{2}{9}$ **e.** $\frac{1}{12}$ **f.** $\frac{1}{4}$

9.10. Stel U_1 en U_2 zijn onafhankelijke stochasten elk met een $U(0,1)$-verdeling. Dan is de variantie van $2 + 3U_1 - U_2$ is gelijk aan

a. $\frac{2}{12}$ **b.** $\frac{4}{12}$ **c.** $\frac{8}{12}$ **d.** $\frac{10}{12}$ **e.** $\frac{26}{12}$ **f.** 6

Extra opgaven over Hoofdstuk 11

11.1. X heeft een (normale) $\mathcal{N}(1,5)$ verdeling; Y is onafhankelijk van X en heeft een $\mathcal{N}(2,4)$ verdeling. Bereken $\mathrm{P}(X+Y \leq 7.5)$.

a. 0.76 **b.** 0.82 **c.** 0.85 **d.** 0.91 **e.** 0.93 **f.** 0.97

11.2. Als X en Y onafhankelijk van elkaar zijn en ieder Poisson verdeeld met verwachting gelijk aan 1, dan is $\mathrm{P}(X+Y=2)$ gelijk aan

a. $2e^{-1}$ **b.** e^{-1} **c.** e^{-2} **d.** $4e^{-2}$ **e.** $e^{-2}+e^{-1}$ **f.** $2e^{-2}$

11.3. Stel X en Y zijn onafhankelijke stochasten met kansverdelingen gegeven door

$$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2} \qquad \mathrm{P}(Y=0)=\frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(Y=1)=\frac{2}{3}.$$

a. Bereken de kansmassafunctie van $Z=X+Y$.

b. Bereken $\mathrm{Cov}(2X,Z)$.

11.4. Gegeven de volgende beweringen, waarbij X en Y steeds onafhankelijk verondersteld worden.

A Als $X \sim \mathrm{Bin}(n,p_1)$ en $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p_2)$, dan $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n,p_1+p_2)$.

B Als $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ en $Y \sim \mathrm{U}(0,1)$, dan $X+Y \sim \mathrm{U}(0,2)$.

C Als $X \sim \mathrm{Bin}(n_1,p)$ en $Y \sim \mathrm{Bin}(n_2,p)$, dan $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n_1+n_2,p)$.

Welke beweringen zijn waar?

a. alleen A **b.** B en C **c.** alleen B **d.** A en C **e.** alleen C **f.** A en B

Extra Opgaven over Hoofdstuk 12

12.1. Bij een server komen berichten binnen volgens een Poisson proces. De intensiteit van dit Poisson proces is 2 berichten per 3 minuten. Wat is de kans dat we na ontvangst van een bericht langer dan 20 seconden op een volgend bericht moeten wachten (afgerond op 2 decimalen)?

a. 0.13 **b.** 0.22 **c.** 0.37 **d.** 0.61 **e.** 0.80 **f.** 0.87

12.2. Gedurende een periode van 8 uur arriveren klanten bij een loket volgens een Poisson proces met intensiteit $\lambda=2$ per uur. Noem X_1 het aantal klanten dat aankomt in het eerste uur, X_2 het aantal in het tweede uur, enzovoort. De stochast N telt hoeveel van de stochasten X_1, X_2, …, X_8 de uitkomst nul hebben, dat wil zeggen hoeveel van de klokuren "leeg" waren. Dan heeft N een

a. Poisson verdeling met $\mu=8$.

b. Poisson verdeling met $\mu=16$.

c. Exponentiële verdeling met $\lambda=1$.

d. Exponentiële verdeling met $\lambda=2$.

e. Binomiale verdeling met $n=8$ en $p=1/e^2$.

f. Binomiale verdeling met $n=16$ en $p=1/e$.

12.3. Bij een server komen berichten binnen volgens een Poisson proces. De intensiteit van dit Poisson proces is 3 berichten per 2 minuten. Wat is de kans dat gedurende een halve minuut precies 1 bericht binnenkomt (afgerond op 2 decimalen)?

a. 0.35 **b.** 0.83 **c.** 0.33 **d.** 0.34 **e.** 0.75 **f.** 0.78

12.4. Gegeven een aankomstproces van klanten bij een loket dat gemodelleerd wordt met een 1-dimensionaal Poisson process. De intensiteit is 2 (dat wil zeggen: in een interval ter lengte Δ, verwachten we 2Δ aankomsten). Wat is de kans dat de tijd tot de eerste aankomst meer dan 2 is?

a. e^{-1} **b.** $2e^{-1}$ **c.** $2e^{-2}$ **d.** e^{-2} **e.** e^{-4} **f.** $e^{-2}/2$

Extra Opgaven over Hoofdstuk 6

6.1. Laat V een discrete stochast zijn onderstaande kansmassatabel.

v	-1	0	1	3
$\mathrm{P}(V = v)$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/2$

Beschrijf hoe V kan worden gesimuleerd met behulp van een uniform verdeelde stochast $U \sim U(0,1)$.

6.2. Gegeven is de verdelingsfunctie $F(x) = 0$ voor $x < 0$, en

$$F(x) = 1 - e^{-3x^5} \qquad \text{voor } x \geq 0.$$

Met behulp van een $U(0,1)$ variabele U kan men een stochast Z met de bovenstaande verdelingsfunctie construeren op de volgende manier:

a. $Z = 1 - e^{-3U^5}$ **b.** $Z = 1 - e^{-\sqrt[5]{\frac{1}{3}U}}$ **c.** $Z = 1 - e^{-2\sqrt[5]{U}}$

d. $Z = -\frac{1}{5}\ln(\sqrt[3]{1-U})$ **e.** $Z = -\ln(\frac{1}{3}\sqrt[5]{1-U})$ **f.** $Z = \sqrt[5]{-\frac{1}{3}\ln(1-U)}$

6.3. Zij $a \in (0,1)$. Definieer de verdelingsfunctie F_a als volgt:

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ x^2 & \text{voor } x \in [0,a) \\ 1 & \text{voor } x \geq a. \end{cases}$$

Geef aan hoe op basis van een uniform op $(0,1)$ verdeelde stochastische variabele een stochastische variabele X kan worden gegenereerd met verdelingsfunctie F_1 (dus F_a met $a = 1$).

6.4. Stel de continue stochast X heeft dichtheid f_X gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{voor } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

a. Geef de verdelingsfunctie F_X van X

b. Construeer X m.b.v. een uniform verdeelde stochast U op $[0,1]$

Antwoorden:

9.1. -1

9.2. $\frac{13}{36}$

9.3. d.

9.4. $\frac{1}{2}$

9.5. c.

9.6. d.

9.7. f.

9.8. 3.

9.9. e.

9.10. d.

11.1. e.

11.2. f.

11.3.a $p_Z(0) = \frac{1}{6}, p_Z(1) = \frac{1}{2}, p_Z(2) = \frac{1}{3}$.

11.3.b $\frac{1}{2}$.

11.4. e.

12.1. e.

12.2. e.

12.3. a.

12.4. e.

6.2. f.

6.3. $X \sim \sqrt{U}$, waarbij $U \sim U(0,1)$.

6.4.a $F(x) = 0, x < 0; F(x) = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1; F(x) = 1; x > 1$.

6.4.b $X \sim U^2$.