T.U. Delft Faculteit E.W.I.

tentamen, EE1M21 hele stof, 9.00h-12.00h, 21-07-2015

Naam:

Studienummer:

Naam docent:

- *Tabel van BB en eenvoudig rekenapparaat toegestaan*
- *Bij het beantwoorden:Blijf binnen de kaders !!*

Kort antwoordvragen:*(Alleen antwoord volstaat)*

normering: opg1: 7p, opg2: 8p, opg3: 3p, opg4: 3p, opg5: 2p, opg6 4p

1. Gegeven de functie $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$.

(a) $f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) =$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

(b) Het bereik van f is:

$\boxed{[-1, +1]}$

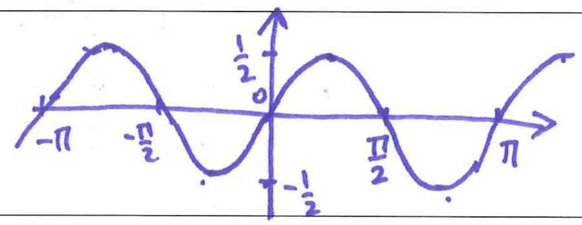
(c) $f_{xy}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ is gelijk aan: $\boxed{-\frac{1}{2}}$

(d) De oplossingen (x, y) van de vergelijking $f(x, y) = 0$ zijn:

(x,y) met $\begin{cases} x = (k+\frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = \ell\pi, \ell \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(e) De schets van de snijkromme C van $z = f(x, y)$ met het vlak $\alpha : x = y$ is:

Geef hierin aan de coördinaten van de snijpunten van C met het xy-vlak.



(f) De richtingsafgeleide in punt $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ van f in de richting van $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$ is:

$\boxed{\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)}$

(g) Geef de linearisering $L(x, y)$ van f in punt $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

$$L(x,y) = \frac{1}{2}(1 - x + y)$$

2. (a) Laat G het gebied zijn dat wordt ingesloten door de y-as, de lijn $y = 1$ en de kromme $y = \sqrt{x}$. Hierop is gegeven de functie $f(x, y) = y$.
Vul de volgende tabel aan:

$\int\int_G ydA =$	$\int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{y^2} ydx\right] dy$
$\int\int_G ydA =$	$\int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{\sqrt{x}} ydy\right] dx$
Bereken de integraal	$\frac{1}{4}$

(b) Op het gebied R dat ligt binnen de (halve) cirkel $x^2 + y^2 \leq 1$ voor $x \geq 0$, is gegeven de functie $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}$.
r, θ zijn de bijbehorende poolcoördinaten. Vul de volgende tabel aan:

$\int\int_R f(x, y)dA =$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{0}^{1} r^4 dr\right] d\theta$
Bereken de integraal	$\frac{\pi}{5}$

(c) G is het gebied binnen de piramide dat begrensd wordt door de vlakken $x = 0, y = 0, z = 0$ en $x + y + z = 1$. Laat I de integraal $\int\int\int_G f(x, y, z)dV$ zijn.
Vul juiste grenzen in:

$$I = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{1-z} \left[\int_{0}^{1-y-z} f(x, y, z)dx\right] dy\right] dz.$$

$$I = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{1-x} \left[\int_{0}^{1-x-y} f(x, y, z)dz\right] dy\right] dx.$$

$$I = \int_{0}^{1} \left[\int_{0}^{1-z} \left[\int_{0}^{1-x-z} f(x, y, z)dy\right] dx\right] dz.$$

3. Gegeven de kromme $\mathcal{C}$: $x = \cos(t), y = \sin(t), z = t$ is voor $t \in [0, 2]$

   (a) De booglengte van $\mathcal{C}$ is:

   $\boxed{2\sqrt{2}}$

   (b) $\int_\mathcal{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ met $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$ wordt gegeven door:

   $\boxed{2}$

   (c) De lading $\int_\mathcal{C} \rho(x, y, z)\, ds$ met de ladingsdichtheid $\rho(x, y, z) = xy$ wordt gegeven door:

   $\boxed{\frac{1}{4}\sqrt{2}(1-\cos(4))}$

4. Gegeven het krachten veld $\mathbf{F} = \langle y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2 \rangle$. $\mathbf{F}$ is conservatief!

   (a) De functie $\phi(x, y, z)$ met $\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$ wordt gegeven door:

   $\boxed{xy^2z^3 + c}$ c constante

   (b) De divergentie $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$ wordt gegeven door:

   $\boxed{2xz^3 + 6xyz^2}$

   (c) De rotatie $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$ wordt gegeven door:

   $\boxed{\langle 0, 0, 0 \rangle}$

5. Gegeven de cilinder $\mathcal{C}$, $x^2 + y^2 = 1$ met z tussen 0 en 2, en het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$. De normaal $\mathbf{n}$ op de cilinder is naar buiten gericht. De flux $\int\int_\mathcal{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ wordt gegeven door:

   $\boxed{4\pi}$

6. Gegeven de reeksen:

- $R1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.
- $R2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$.
- $R3$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5^n}\right)^n$.
- $R4$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$.

Vul in *convergent of divergent*

Reeks $R1$ is	...convergent...
Reeks $R2$ is	...divergent...
Reeks $R3$ is	...convergent...
Reeks $R4$ is	...divergent...

Open-antwoord-vragen:(*Alleen antwoord met uitwerking volstaat)*

normering: opg1: 4p, opg2: 6p, opg3: 5p, opg4: 7p, opg5: 5p

1. Gegeven de functie $z = f(x, y)$ met $x = r\cos(\theta)$ en $y = r\sin(\theta)$.

   (a) Bepaal $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

   (b) Bepaal $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$.

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta)$

$\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\sin(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos(\theta)$

(b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta)\right) =$

$\left(-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} r\sin(\theta) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} r\cos(\theta)\right)\cos(\theta) +$

$\left(-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} r\sin(\theta) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} r\cos(\theta)\right)\sin(\theta) +$

$-\dfrac{\partial f}{\partial x}\sin(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos(\theta) =$

$\left(-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) r\sin(\theta)\cos(\theta) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} r\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)$

$-\dfrac{\partial f}{\partial x}\sin(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos(\theta)$

gebruikt dat $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)$ geeft zelfde resultaat

2. Het traagheidsmoment van een schijf G t.o.v. de oorsprong voor constante dichtheid ρ_0 wordt gegeven door

$$\int\int_G \rho_0(x^2+y^2)\,dA$$

(a) Bereken het traagheidsmoment van de cirkelschijf met dichtheid ρ_0 en straal R t.o.v. het middelpunt.

(b) Dezelfde vraag maar nu t.o.v. een randpunt van de cirkelschijf.

(a) $x = r\cos(\theta)$, $0 \leq r \leq R$
$y = r\sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iint_G \rho_0(x^2+y^2)\,dA = \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \cdot r\,dr\,d\theta =$$

$$\rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3\,dr = \rho_0\, 2\pi \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi\rho_0 R^4$$

(b) $x = R + r\cos(\theta)$, $0 \leq r \leq R$
$y = r\sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iint_G \rho_0(x^2+y^2)\,dA = \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R (R^2 + 2Rr\cos(\theta) + r^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$\rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R R^2 r\,dr\,d\theta + \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R 2Rr^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta +$$

$$\rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\,dr\,d\theta =$$

$$\rho_0 R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\,dr + \rho_0 2R \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\,d\theta \int_0^R r^2\,dr +$$

$$\rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3\,dr =$$

$$\rho_0 R^2\, 2\pi \frac{1}{2}R^2 + 0 + \rho_0\, 2\pi \frac{1}{4}R^4 = \rho_0\pi R^4 + \frac{1}{2}\rho_0\pi R^4$$

$$= \frac{1\frac{1}{2}}{}\rho_0\pi R^4$$

3. Gegeven de kegel $\mathcal{K}$: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ en de bol $\mathcal{B}$ $x^2+y^2+z^2=16$.

Bereken het volume

$$\int\int\int_G dV.$$

waarbij G het gebied is tussen $\mathcal{K}$ en $\mathcal{B}$.

gebruik bol coordinaten

$0 \leq \rho \leq 4, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iiint_G dV = \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin(\varphi)\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^4 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\varphi) d\varphi$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^4 \cdot \left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\pi \frac{1}{3} 4^3 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{128\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

4. Gegeven:

- Het vector veld $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, x^3, y^2 \rangle$
- De (open) bol $\mathcal{B}$ bepaald door $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ met $z \geq 0$ ge-oriënteerd met van het centrum wegwijzende normaal.

Gevraagd de flux $\int\int_{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. (*tip: gebruik Gauß*).

Gauss: $\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ met E de halve bol bepaald door $x^2+y^2+z^2 \leq 16$, $z \geq 0$

en S de rand van E: $S = B \cup \underbrace{\{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \leq 16\}}_{C}$

$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \Rightarrow \iint_{B \cup C} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \iint_B \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_C \vec{F} \cdot d\vec{S}$

op C geldt $\vec{F}(x,y,0) = \langle 0, x^3, y^2 \rangle$

$d\vec{S} = \langle 0, 0, -1 \rangle$

dus $-\iint_C \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_C y^2 \, dA = \iint_B \vec{F} \cdot d\vec{S}$

met $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ volgt $\iint_C y^2 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^4 r^2 \sin^2(\theta) \, r \, dr \, d\theta$

dus $\iint_B \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^4 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \, d\theta$

$= \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^4 \left[\frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))\right]_0^{2\pi}$

$= 64\pi$

5. (a) Bereken zonder tabel de Taylorreeks van e^x om $x = 0$.

(b) Gebruik het resultaat van de vorige vraag; geef de Taylorreeks van e^{x^2} om $x = 0$.

(c) Laat $G(x)$ een primitieve zijn van e^{x^2} met $G(0) = 4$. Geef de eerste 4 termen van de Taylorreeks van G om $x = 0$.

(d) Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!})}{x^6}$$

(a) $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$ met $a=0$ volgt $f^{(n)}(a) = 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

(b) $$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \ldots$$

(c) $$G(x) = \int_0^x e^{u^2}\,du + 4 = 4 + \int_0^x \left(1 + u^2 + \frac{1}{2!}u^4 + \frac{1}{3!}u^6 + \ldots\right)du$$

$$= 4 + x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \ldots$$

(d) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 - \frac{1}{2!}x^4}{x^6} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$