T.U. Delft

Faculteit E.W.I.

tentamen, EE1M21 deel2, 9.00h-11.00h, 26-01-2016

Naam:	
Studienummer:	
Naam docent:	

Tabel van BB en eenvoudig rekenapparaat toegestaan

Kort antwoordvragen:*(Alleen antwoord volstaat)*

normering: opg1: 3p, opg2: 3p, opg3: 4p, opg4: 3p, opg5: 3p, opg6 4p, opg7 : 5p, opg8: 5p, opg9: 8p, opg10: 7p

1. Gegeven het vectorveld $\mathbf{F}(x,y) = \langle \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \rangle$

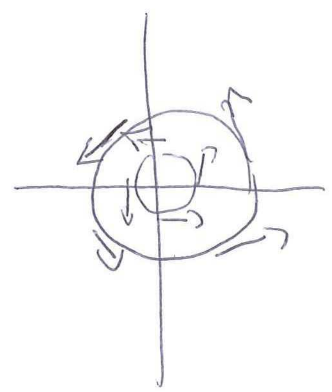
   1 — 1

   (a) Dan zijn de lengten van de vectoren van **F** gelijk aan:

   (b) Maak een schets van het vectorveld **F**:

3

2



2. Bereken $\int_C f(x,y,x)ds$ waarbij C de kromme $\langle t, \cos(t), \sin(t)\rangle$ is voor $t \in [0,\pi]$, en $f(x,y,z) = z$.

3

De lijnintegraal is gelijk aan	$2\sqrt{2}$	3

3. Gegeven het vectorveld $\mathbf{F}(x,y) = \langle y^2, 2xy\rangle$. **F** is conservatief en is C een nette kromme die loopt van $A(1,1)$ naar $B(2,3)$.

4

Een $\phi(x,y)$ met $\nabla\phi(x,y) = \mathbf{F}(x,y)$ is bijvoorbeeld	xy^2	2
$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ is gelijk aan	17	2

4. Gegeven de kromme C $\langle t, t^2 \rangle$ die doorlopen wordt van $(0,0)$ naar $(1,1)$ en het vectorveld $\mathbf{f}(x,y) = \langle xy, x \rangle$.

4

Is $\mathbf{f}(x,y)$ conservatief?	nee	2
$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ is gelijk aan:	$11/12$	2

5. Gegeven het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle x, y^2, z^3 \rangle$

Dan

3

$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z))$ is gelijk aan	$\langle 0, 2, 6z \rangle$	1
$(\nabla \times \mathbf{F})(x,y,z)$ is gelijk aan	$\underline{0}$	1
Is $\mathbf{F}$ conservatief?	Ja	1

6. Gegeven het oppervlak $\mathcal{S}$, $y^2 + z^2 = x$, met x tussen 0 en 25.

4

Een parametrisering van $\mathcal{S}$ is	$\langle r^2, r\cos\theta, r\sin\theta \rangle$	2
Het bijbehorende domein D is	$0 \le \theta \le 2\pi;\ r \in [0,5]$	2

7. Gegeven het oppervlak $\mathcal{S}$ waarvan de parametrisering gegeven wordt door $\mathbf{r}(u,v) = \langle u, v, 1-u-v \rangle$ met $0 \le u \le 1$ en $0 \le v \le 1-u$. Dan:

5

$\mathbf{r}_u(u,v) =$	$\langle 1, 0, -1 \rangle$	1
$\mathbf{r}_v(u,v) =$	$\langle 0, 1, -1 \rangle$	1
$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u,v) =$	$\langle 1, 1, 1 \rangle$	1
$\lVert(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\rVert dudv =$	$\sqrt{3}\, du\, dv$	1
De oppervlakte van $\mathcal{S}$ is	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

8. Gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. **(alle** hierna gevraagde ontwikkelingen zijn om $x = 0$.) Vul de gegeven delen van antwoorden met 3 termen aan.

5

De Taylor(reeks)ontwikkeling van $\frac{1}{1-x}$ is	$1 + x + \ldots x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$	1
en dus de Taylor ontwikkeling van $\frac{1}{1+x}$ is	$1 - x + \ldots x^2 - x^3 + x^4 + \cdots$	1
en dus de Taylor ontwikkeling van $\frac{1}{1+x^2}$ is	$1 - x^2 + \ldots x^4 - x^6 + x^8 + \cdots$	1
en dus de Taylor ontwikkeling van $\arctan(x)$ is	$x - \frac{x^3}{3} + \ldots \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots$	1
en dus $\frac{\pi}{4}$ is gelijk aan	$1 - \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$	1

Open vragen:*(antwoord met uitwerking volstaat)*

9. (a) Gegeven de cilinder $\mathcal{C}$, $x^2+y^2=1$ met z tussen 0 en 2, en het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z)=\langle x,y,z\rangle$. De normaal $\mathbf{n}$ op de cilinder is naar buiten gericht. Bereken de flux $\int\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

   (b) Gegeven het deel van de cilinder $\mathcal{C}_1$, $x^2+y^2=1$ tussen de vlakken $x+z=1$ en $z=0$, de normaal is weer naar buiten gericht Gevraagd wordt de flux $\int\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

   (c) Gegeven een scheve, "open" kegel $\mathcal{K}$ met top $T=(1,1,3)$ en als "basis" de cirkel in het xy-vlak: $x^2+y^2=1$. De normaal is naar "buiten" gekozen. Het volume van de kegel is gelijk aan π. Gebruik Gauß(divergentie-stelling) voor de berekening van $\int\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

8

of (a)

$\underline{r}(\theta,z)=\langle\cos\theta, \sin\theta, z\rangle$

$0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le z\le 2$

$\underline{r}_\theta=\langle -\sin\theta, \cos\theta, 0\rangle$

$\underline{r}_z=\langle 0,0,1\rangle$

$\underline{r}_\theta\times\underline{r}_z=\langle\cos\theta, \sin\theta, 0\rangle$

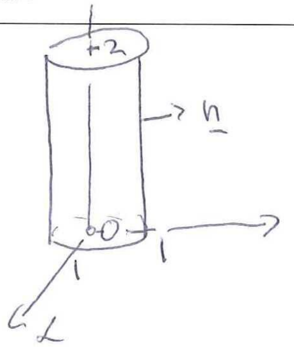
$\iint_C \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{bmatrix}dz\right]d\theta$

$=4\pi$

b)

$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{1-\cos\theta} 1\,dz\right]d\theta = 2\pi$

a



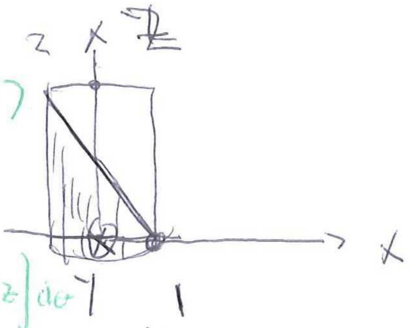
$\iint_C \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS$

2

$=\iint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dS=\iint_C dS$

$=2\pi\cdot 2=4\pi$

b

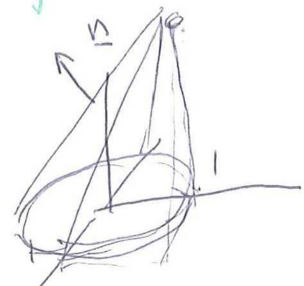


$\iint_{C_1} \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS$

3

$=\iint_{C_1} dS = \frac{1}{2}$ cilinder $=2\pi$

c



$\operatorname{div}\underline{F}=3$

afsluiten kegel af met $\underbrace{\begin{bmatrix}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{bmatrix}}_{W}$ en $\underline{n}=\langle 0,0,-1\rangle$

Nu $3\cdot\pi = \underset{\text{gevulde kegel}}{\iiint} 3\,dV = \iint_K \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS+\iint_W \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS$

$=\iint_K \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS+\iint_W -z\,dS$, $\iint_W = 0$

3

Antw 3π.

10. Gegeven de vectorfunctie $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ met $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ en $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) Bereken $\nabla \times \mathbf{E}$.

(b) Bereken $\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$, waarbij C de kromme is langs de z-as van $P(0,0,1)$ naar $Q(0,0,9)$.

(c) Motiveer met de stelling van Stokes' dat $\int_{\mathcal{K}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$ met $\mathcal{K}$ een willekeurige kromme van $P(0,0,1)$ naar $Q(0,0,9)$ hetzelfde antwoord oplevert als de vorige vraag.

7

a $\nabla \times \underline{E} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{bmatrix}$

$= \left\langle \partial_y\left(\frac{z}{r^3}\right) - \partial_z\left(\frac{y}{r^3}\right), \ldots, \ldots \right\rangle$ symmetrie.

3

$\partial_y\left(\frac{z}{r^3}\right) = z(-3)r^{-4}\frac{\partial r}{\partial y}$

$= -\frac{3z}{r^4}\frac{y}{r} = \frac{-3zy}{r^5}$.

met symmetrie: $\nabla \times \underline{E} = \underline{0}$

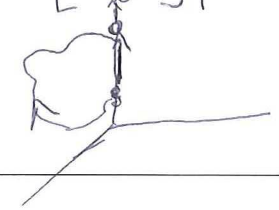
b $C: \langle 0,0,t\rangle$ met $1 \le t \le 9$

$\int_C \underline{E}\cdot d\underline{r} = \int_1^9 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{t}{(\sqrt{t^2})^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_1^9 \frac{1}{t^2}\,dt$

$= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^9 = -\frac{1}{9} + 1 = 8/9$

2

c



Stelling Stokes':

$0 = \iint_{Opp} \nabla \times \underline{E} = \oint_{C^*} \underline{E}\cdot d\underline{s}$

Elke kromme K tegengesteld ge-oriënteerd vormt samen met C een gesloten kromme. $C^* = C \cup K$ die "Opp" omsluit.

2

$\Rightarrow \oint_{C^*} \underline{E}\cdot d\underline{s} = 0$ en dus $\int_K \underline{E}\cdot d\underline{s} = \int_C \underline{E}\cdot d\underline{s}$