T.U. Delft | Faculteit E.W.I.

tentamen, EE1M21 hele stof, 9.00h-12.00h, 21-07-2015

Naam:

Studienummer:

Naam docent:

- *Tabel van BB en eenvoudig rekenapparaat toegestaan*
- *Bij het beantwoorden:Blijf binnen de kaders !!*

Kort antwoordvragen:(*Alleen antwoord volstaat*)

normering: opg1: 7p, opg2: 8p, opg3: 3p, opg4: 3p, opg5: 2p, opg6 4p

1. Gegeven de functie $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$.

   (a) $f(\frac{}{4}, \frac{}{4}) =$

   (b) Het bereik van f is:

   (c) $f_{xy}(\frac{}{4}, \frac{}{4})$ is gelijk aan:

   (d) De oplossingen (x,y) van de vergelijking $f(x,y) = 0$ zijn:

   (e) De schets van de snijkromme $\mathcal{C}$ van $z = f(x,y)$ met het vlak $\alpha : x = y$ is:

   Geef hierin aan de coördinaten van de snijpunten van $\mathcal{C}$ met het xy-vlak.

   (f) De richtingsafgeleide in punt $P(\frac{}{4}, \frac{}{4})$ van f in de richting van $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$ is:

(g) Geef de linearisering $L(x, y)$ van f in punt $(\frac{}{4}, \frac{}{4})$.

2. (a) Laat G het gebied zijn dat wordt ingesloten door de y-as, de lijn $y = 1$ en de kromme $y = \sqrt{x}$. Hierop is gegeven de functie $f(x, y) = y$.
Vul de volgende tabel aan:

$\int\int_G ydA =$	$\int_{:::::}^{:::::} \left[\int_{:::::}^{:::::} ydx\right] dy$
$\int\int_G ydA =$	$\int_{:::}^{:::} \left[\int_{:::}^{:::} ydy\right] dx$
Bereken de integraal	....

(b) Op het gebied R dat ligt binnen de (halve) cirkel $x^2 + y^2 \leq 1$ voor $x \geq 0$, is gegeven de functie $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}$.
r, θ zijn de bijbehorende poolcoördinaten. Vul de volgende tabel aan:

$\int\int_R f(x, y)dA =$	$\int_{:::::}^{:::::} \left[\int_{:::::}^{:::::} ....dr\right] d\theta$
Bereken de integraal	....

(c) G is het gebied binnen de piramide dat begrensd wordt door de vlakken $x = 0, y = 0, z = 0$ en $x + y + z = 1$. Laat I de integraal $\int\int\int_G f(x, y, z)dV$ zijn.
Vul juiste grenzen in:

$$I = \int_{:::::}^{:::::} \left[\int_{:::::}^{:::::} \left[\int_{:::::}^{:::::} f(x, y, z)dx\right] dy\right] dz.$$

$$I = \int_{:::::}^{:::::} \left[\int_{:::::}^{:::::} \left[\int_{:::::}^{:::::} f(x, y, z)dz\right] dy\right] dx.$$

$$I = \int_{:::::}^{::::::} \left[\int_{::::}^{:::::} \left[\int_{:::::}^{:::::} f(x, y, z)dy\right] dx\right] dz.$$

3. Gegeven de kromme $\mathcal{C}$: $x = \cos(t), y = \sin(t), z = t$ is voor $t \in [0, 2]$

   (a) De booglengte van $\mathcal{C}$ is:

   (b) $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ met $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$ wordt gegeven door:

   (c) De lading $\int_{\mathcal{C}} \rho(x, y, z)\, ds$ met de ladingsdichtheid $\rho(x, y, z) = xy$ wordt gegeven door:

4. Gegeven het krachten veld $\mathbf{F} = \langle y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2 \rangle$. $\mathbf{F}$ is conservatief!

   (a) De functie $\phi(x, y, z)$ met $\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$ wordt gegeven door:

   (b) De divergentie $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)$ wordt gegeven door:

   (c) De rotatie $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$ wordt gegeven door:

5. Gegeven de cilinder $\mathcal{C}$, $x^2 + y^2 = 1$ met z tussen 0 en 2, en het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$. De normaal $\mathbf{n}$ op de cilinder is naar buiten gericht. De flux $\int\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ wordt gegeven door:

6. Gegeven de reeksen:

- $R1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.
- $R2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$.
- $R3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5^n}\right)^n$.
- $R4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$.

Vul in *convergent of divergent*

Reeks $R1$ is	....
Reeks $R2$ is	....
Reeks $R3$ is	....
Reeks $R4$ is	....

Open-antwoord-vragen:(*Alleen antwoord met uitwerking volstaat)*

normering: opg1: 4p, opg2: 6p, opg3: 5p, opg4: 7p, opg5: 5p

1. Gegeven de functie $z = f(x, y)$ met $x = r\cos(\theta)$ en $y = r\sin(\theta)$.

   (a) Bepaal $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

   (b) Bepaal $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$.

2. Het traagheidsmoment van een schijf G t.o.v. de oorsprong voor constante dichtheid ρ_0 wordt gegeven door

$$\int\int_G \rho_0(x^2 + y^2)\, dA$$

(a) Bereken het traagheidsmoment van de cirkelschijf met dichtheid ρ_0 en straal R t.o.v. het middelpunt.

(b) Dezelfde vraag maar nu t.o.v. een randpunt van de cirkelschijf. (De verkregen herhaalde integraal hoeft niet berekend te worden!!)

3. Gegeven de kegel $\mathcal{K}$: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en de bol $\mathcal{B}$ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Bereken het volume

$$\int\int\int_G dV.$$

waarbij G het gebied is tussen $\mathcal{K}$ en $\mathcal{B}$ voor $z \geq 0$.

4. Gegeven:

- Het vector veld $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, x^3, y^2 \rangle$
- De (open) bol $\mathcal{B}$ bepaald door $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ met $z \geq 0$ ge-oriënteerd met van het centrum wegwijzende normaal.

Gevraagd de flux $\int\int_{\mathcal{B}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. (*tip: gebruik Gauß*).

5. (a) Bereken zonder tabel de Taylorreeks van e^x om $x = 0$.

(b) Gebruik het resultaat van de vorige vraag; geef de Taylorreeks van e^{x^2} om $x = 0$.

(c) Laat $G(x)$ een primitieve zijn van e^{x^2} met $G(0) = 4$. Geef de eerste 4 termen van de Taylorreeks van G om $x = 0$.

(d) Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!})}{x^6}$$