T.U. Delft | Faculteit E.W.I.

tentamen, EE1M21 deel1, 9.00h-11.00h, 10-12-2014

Naam:

Studienummer:

Naam docent:

Tabel van BB en eenvoudig rekenapparaat toegestaan

Kort antwoordvragen:(*Alleen antwoord volstaat*)

normering: opg1: 10p, opg2: 5p, opg3: 4p, opg4: 3p, opg5: 3p, opg6 2p, opg7 : 3p, opg8: 1p, opg9: 3p

1. Gegeven de functie $f(x,y) = \sqrt{(6 - x^2 - 3y^2)}$.

   (a) $f(1,1) =$

   (b) Schets in het xy-vlak het domein van f en geef het bereik.
   Het bereik:

   De schets v.h. domein:(geef coördinaten snijpunten met assen)

   (c) Bereken $f_x(1,1)$

   (d) Geef de vergelijking en een schets van de niveaukromme horende bij de functiewaarde $\sqrt{5}$.
   De vergelijking :

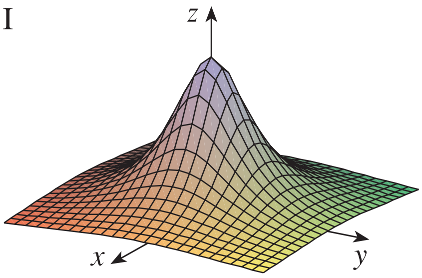
   De schets:(geef coördinaten snijpunten met assen)

(e) Geef de richtingsafgeleide in punt $P(1,1)$ van f in de richting van $\langle -1, \sqrt{3} \rangle$.

(f) Geef de linearisering $L(x,y)$ van f in punt $(1,1)$.

2. Gegeven de grafiek van een functie f voor $-2 \leq x \leq 2$ en $-2 \leq y \leq 2$.

I



Vul in onderstaande tabel in: $< 0, > 0$, of $= 0$.

$f_x(0,0)$.......	$f_x(1,1)$.......	$f_{xx}(0,0)$.....	$f_{xy}(0,1)$.......	$D_{\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle} f(1,1)$ ......

3. Gegeven $z = f(x,y)$ waarbij $x = g(u,v)$ en $y = h(u,v)$. Alle gegeven functies zijn "netjes".

Druk de gevraagde partiële afgeleiden uit in de partiële afgeleiden van f, g, en h.

(a) $z_u(u,v) =$

(b) $z_{uv}(u,v) =$

4. Gegeven op $\mathbb{R}^3$ de functie $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$ en punt $P(1,1,1)$. Laat $\mathbf{u}$ een eenheidsrichtingsvector zijn. Geef in de volgende tabel een geschikte $\mathbf{u}$.

$D_{\mathbf{u}}f(P)$ is maximaal als $\mathbf{u} = \langle ...., ..., ... \rangle$
$D_{\mathbf{u}}f(P)$ is minimaal als $\mathbf{u} = \langle ...., ..., ... \rangle$
$D_{\mathbf{u}}f(P) = 0$ als $\mathbf{u} = \langle ...., ..., ... \rangle$

5. Laat G het gebied zijn dat wordt ingesloten door de driehoek met de hoekpunten $A(0,0)$, $B(4,0)$ en $C(4,8)$.Hierop is gegeven de functie $f(x,y) = y$. Vul de volgende tabel aan:

$\int\int_G ydA =$	$\int_{.....}^{.....} \left[\int_{.....}^{.....} ydx\right] dy$
$\int\int_G ydA =$	$\int_{...}^{...} \left[\int_{...}^{...} ydy\right] dx$
Bereken de integraal	....

6. Op het gebied R beschreven door $x^2 + y^2 \leq 1$, is gegeven de functie $f(x,y) = (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}$.

   r, θ zijn de bijbehorende poolcoördinaten. Vul de volgende tabel aan:

$\int\int_R f(x,y)dA =$	$\int_{.....}^{.....} \left[\int_{.....}^{.....} ....dr\right] d\theta$
Bereken de integraal	....

7. G is het gebied binnen het prisma dat begrensd wordt door de vlakken

   $x = 0, x = 1, z = 0, z - y = 0$ en $y = 1$. Laat I de integraal $\int\int_G f(x,y,z)dV$ zijn. Vul juiste grenzen in:

$$I = \int_{.....}^{.....} \left[\int_{.....}^{.....} \left[\int_{.....}^{.....} f(x,y,z)dx\right] dy\right] dz.$$

$$I = \int_{.....}^{.....} \left[\int_{.....}^{.....} \left[\int_{.....}^{.....} f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx.$$

$$I = \int_{.....}^{......} \left[\int_{....}^{.....} \left[\int_{.....}^{.....} f(x,y,z)dy\right] dx\right] dz.$$

8. Bij de transformatie $x = 2u + v$ en $y = u + 4v$ van de integraal $\int\int_G f(x,y)dA$ wordt dA gegeven door $dA = |h(u,v)|dudv$.

   Dan is de Jacobiaan $h(u,v)$ gelijk aan

9. Laat G het gebied zijn dat begrensd is door het vlak $z = 0$ en de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

   I is de integraal $\int\int\int_G (x^2 + y^2 + z^2)dV$. Verder zijn (ρ, θ, ϕ) en (r, θ, z) respectievelijk de bolcoördinaten en cilindercoördinaten in "Stewart-notatie". Vul volgende tabel aan:

$\displaystyle\int\int\int_G (x^2 + y^2 + z^2)dV =$	$\displaystyle\int_{.....}^{.....}\left[\int_{.....}^{.....}\left[\int_{.....}^{.....} ....d\rho\right]d\theta\right]d\phi$
$\displaystyle\int\int\int_G (x^2 + y^2 + z^2)dV =$	$\displaystyle\int_{.....}^{.....}\left[\int_{.....}^{.....}\left[\int_{.....}^{.....} ....dz\right]dr\right]d\theta$

Open-antwoord-vragen:(*Alleen antwoord met uitwerking volstaat)*

normering: opg1: 4p, opg2: 7p

1. Gegeven het gebied G binnen de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ met $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

   I.h.a. wordt het massamiddelpunt van een gebied R in $\mathbb{R}^2$ gegeven door $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$, met

$$\overline{x} = \frac{\int\int_R x\rho(x,y)dA}{\int\int_R \rho(x,y)dA}$$

$$\overline{y} = \frac{\int\int_R y\rho(x,y)dA}{\int\int_R \rho(x,y)dA}$$

   waarbij $\rho(x,y)$ de dichtheid is. Deze wordt nu gelijk gekozen aan ρ_0 (constant dus).

   (a) Maak een schets van G.

   (b) Bereken $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$.

2. Gegeven 2 cilinders $y^2 + z^2 = 1$ en $x^2 + z^2 = 1$. Het volume van het gebied G ingesloten door de 2 cilinders wordt gegeven door de integraal (integrand is 1):

$$\int\int\int_G dV.$$

(a) Schets een "bovenaanzicht" van G:

(b) Beschrijf en teken de "doorsneden" van G met het vlakken van het type $z = z_0$ met z_0 een getal uit $[-1, 1]$.

(c) Bereken

$$\int\int\int_G dV :$$

(*gebruik hierbij het resultaat uit de vorige vraag!*)

(d) Geef het volume van het ingesloten gebied tussen de cilinders $y^2 + z^2 = R^2$ en $x^2 + z^2 = R^2$: