Totaal blz1	Tot. blz2	Tot. blz3	Tot blz4	Tot blz5	Totaal 1-5
8p	14p	7p	10p	6	50p.

T.U. Delft Faculteit E.W.I.

tentamen, EE1M21 deel2, 9.00h-11.00h, 27-01-2014

Naam:

Studienummer:

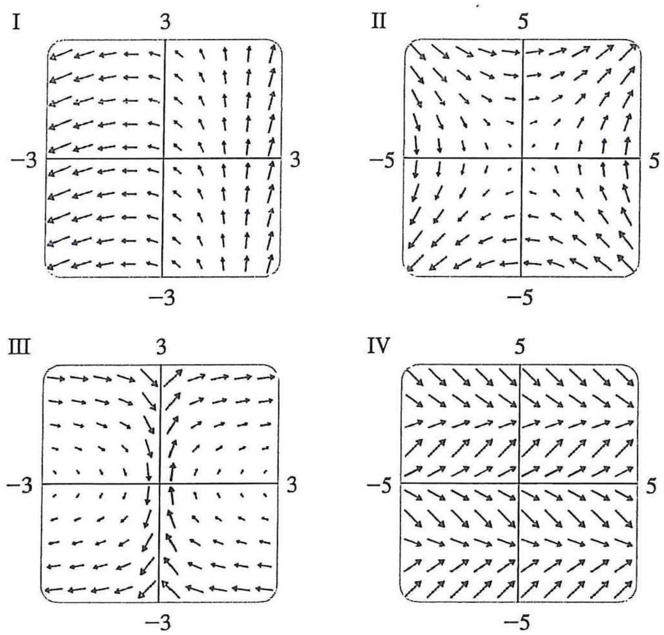
Naam docent:

Tabel van BB en eenvoudig rekenapparaat toegestaan

Kort antwoordvragen: *(Alleen antwoord volstaat)*

normering: opg1: 4p, opg2: 2p, opg3: 2p, opg4: 2p, opg5: 2p, opg6 2p, opg7 : 2p, opg8: 3p, opg9: 3p, opg10: 2p, opg11: 15p, opg12: 6p

1. Onderstaande plaatjes (aangeven met Romeinse cijfers) horen bij de vectorvelden $\mathbf{F}_1$ t/m $\mathbf{F}_4$:



- $\mathbf{F}_1 = \langle y, x \rangle$
- $\mathbf{F}_2 = \langle 1, \sin(y) \rangle$
- $\mathbf{F}_3 = \langle x - 2, x + 1 \rangle$
- $\mathbf{F}_4 = \langle y, \frac{1}{x} \rangle$

4 x 1p = 4p

Vul in de tabel de juiste Romeinse cijfers in.

$\mathbf{F}_1$ hoort bij...II	$\mathbf{F}_2$ hoort bij...IV	$\mathbf{F}_3$ hoort bij...I	$\mathbf{F}_4$ hoort bij...III

2. Gegeven de spiraal $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos(t), 3\sin(t), 4t \rangle$ met $t \in [0, 4\pi]$

De booglengte van de spiraal is gelijk aan	20π

2p

3. Bereken $\int_C \mathbf{F} \cdot dr$ waarbij C de kromme $x = t^2, y = t^3, z = t^2$ is voor $t \in [0, 1]$, en $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, x, y \rangle$.

De lijnintegraal is gelijk aan	$3/2$

2p

Totaal 8p

4. Gegeven het *conservatieve* vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle yz, xz, xy \rangle$, d.w.z. er is een functie ϕ met $\nabla\phi(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z)$. Verder is er een nette kromme $\mathcal{C}$ die loopt van $A(1,1,1)$ naar $B(2,3,4)$.

Dan

$\phi(x,y,z)$ is bijvoorbeeld	xyz	1p
$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ is gelijk aan	23	1p

5. Gegeven de kromme $\mathcal{C}$, $x^4 + y^4 = 1$, die doorlopen wordt van $(1,0)$ naar $(0,1)$ en het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,\cancel{z}) = \langle 2x+y, x \rangle$.

Dan

$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ is gelijk aan	-1	2p

6. Gegeven het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle x, xy, xyz \rangle$

Dan

$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z))$ is gelijk aan	$\langle 1+y, x, 0 \rangle$	1p
$(\nabla \times \mathbf{F})(x,y,z)$ is gelijk aan	$\langle xz, -yz, y \rangle$	1p

7. Gegeven het oppervlak $\mathcal{S}$, $y^2 + z^2 = 4$, met x tussen 0 en 5 dat ligt in het eerste octant.

Geef een parametrisering van $\mathcal{S}$ met een domein D.

Een parametrisering van $\mathcal{S}$ is	$\langle x, 2\cos\theta, 2\sin\theta \rangle$	1p
Het bijbehorende domein D is	$0 \leq x \leq 5$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$	1p

8. Gegeven het oppervlak $\mathcal{S}$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$, met z tussen 0 en 2.

De oppervlakte van $\mathcal{S}$ is	$4\pi\sqrt{2}$	3p

9. Gegeven de cilinder $\mathcal{C}$, $x^2 + y^2 = 1$ met z tussen 0 en 2, en het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle x, y, z \rangle$. De normaal $\mathbf{n}$ op de cilinder is naar buiten gericht. Bereken de flux $\int\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

De flux $\int\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ is gelijk aan	4π	3p

Totaal

14p

10. Gegeven de reeksen:

- $R1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$.
- $R2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- $R3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5^n}\right)^n$.
- $R4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$.

Vul in *convergent of divergent*

Reeks $R1$ is	....Divergent..........	1/2
Reeks $R2$ is	....convergent..........	1/2
Reeks $R3$ is	....convergent..........	1/2
Reeks $R4$ is	....divergent..........	1/2

] 2p

Open vragen:*(antwoord met uitwerking volstaat)*

11. Gegeven:

- Het vector veld $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle -y, x, -2 \rangle$
- De (open) kegel $\mathcal{K}$ bepaald door $z^2 = x^2 + y^2$, met $0 \leq z \leq 4$, ge-oriënteerd met naar beneden wijzende normaal.
- De cirkelschijf $\mathcal{D}$ die de kegel afsluit bij $z = 4$ waarbij de normaal naar boven is gekozen.

(a) i. Geef een parametrisering met juiste grenzen van $\mathcal{K}$.

$\underline{r}(z, \theta) = \langle z\cos\theta, z\sin\theta, z \rangle$ (1p)

$0 \leq \theta \leq 2\pi \; ; 0 \leq z \leq 4$ (1p)

ii. Bereken "direct" $\int\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

$\underline{r}_z = \langle \cos\theta, \sin\theta, 1 \rangle \; ; \underline{r}_\theta = \langle -z\sin\theta, z\cos\theta, 0 \rangle$

$\underline{r}_z \times \underline{r}_\theta = \langle -z\cos\theta, -z\sin\theta, z \rangle$ (normaal ↑)

$$\text{flux} = -\int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 \begin{bmatrix} -z\sin\theta \\ z\cos\theta \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -z\cos\theta \\ -z\sin\theta \\ z \end{bmatrix} dz \right] d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 -2z \, dz \right] d\theta = 32\pi$$

(2p) (1p)

Totaal 7p

(b) Bereken "direct" $\int\int_{\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

$\iint\limits_{\text{cirkelschijf}} -2\, dS \quad (\underline{n} = \langle 0,0,1\rangle) = -32\pi$ 2p

(c) Bereken $div\mathbf{F}$ en $rot\mathbf{F}$.

$\text{div}\,\underline{F} = 0$; $\text{rot}\,\underline{F} = \langle 0,0,2\rangle$ 1p

(d) Waarom geldt $\int\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -\int\int_{\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$?

Gauß: $0 = \iiint\limits_{\text{kegel}} \text{div}\,\underline{F}\, dV = \oiint\limits_{\text{rand}} \underline{F}\cdot\underline{n}\, dS$

$= \iint\limits_{K} \underline{F}\cdot\underline{n}\, dS + \iint\limits_{D} \underline{F}\cdot\underline{n}\, dS$ 3p

(e) Laat $\mathcal{C}_1$ de snijkromme zijn van de kegel $\mathcal{K}$ met het vlak α, $x + y + z = 1$, die van bovenaf met de wijzers van de klok wordt doorlopen. Deze kromme is een ellips die in het vlak α een gebied insluit met oppervlakte A. Druk $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ uit in A. .

$\iint\limits_{K} \text{rot}\,\underline{F}\cdot\underline{n}\, dS = \int\limits_{\delta K} \underline{F}\cdot d\underline{s}$ 3p

$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,1,1\rangle \Rightarrow \iint\limits_{\text{ellips}} \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\, dS = -\int\limits_{C_1} \underline{F}\cdot d\underline{r}$

Antw: $\frac{-2}{\sqrt{3}} A$

(f) Is $\mathbf{F}$ conservatief?, zo ja geef een potentiaalfunctie.

Nee, $\text{rot}\,\underline{F} \neq \underline{0}$ 1p

10p

12. Gegeven de functie $f(x) = \sin(x)$.

(a) Toon aan dat de Taylorreeks van f om $a = 0$ gegeven wordt door $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

$f^{(2k)}(0) = 0$

$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \Rightarrow$

$\ldots \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ 1

(b) Bepaal het convergentie-gebied van de Taylorreeks.

1

d'Alembert $\left|\frac{(-1)^{k+1} x^{2k+3}}{(-1)^k x^{2k+1}} \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!}\right| = |x|^2 \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} \xrightarrow{k \to \infty} 0 < 1$

$\forall x \Rightarrow \mathbb{R}$

(c) Bepaal zelf de Taylorreeksen om $a = 0$, t/m de derde macht van:

i. $\frac{1}{2+x}$. $= \frac{1}{1 + x/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\right)$ 1

ii. e^{2x}. $= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots$ 1

uitbreiding

iii. $\sin(x)\cos(x)$ $= \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \ldots\right)$ 1

iv. $\sqrt{1+x}$ $= (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \ldots$ 1

6p