Lineaire Algebra en differentiaalvergelijkingen

College 13: Projecteren in inwendig product ruimtes, Fourrier analyse.

J. Vermeer
Les 13

Inwendig product ruimten

Herinner: we hebben het begrip inwendig product $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ op een vectorruimte V geïntroduceerd. Een vectorruimte met gefixeerd inwendig product heet een "inwendig product ruimte"
Standaard inwendigproductruimte: $C([a, b], \mathbb{R})$ met
$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$. (Geeft ook standaard I.P. op deelruimtes.)

$C([a, b], \mathbb{C})$ met $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \overline{\mathbf{f}(\mathbf{x})}\mathbf{g}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$. (Geeft ook standaard I.P. op deelruimtes.) $\square$

Projecteren op een vector

Definitie: Laat V een i.p.ruimte zijn met vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{a}$ in V. Die vector $c\mathbf{a}$ in $\operatorname{Span} a$ met $\mathbf{x} - c\mathbf{a} \perp \mathbf{a}$ heet de (orthogonale) projectie van $\mathbf{x}$ op $\mathbf{a}$ en wordt genoteerd met:

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}).$$

De vector $\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ heet de component van $\mathbf{x}$ loodrecht op $\mathbf{a}$.

Stelling: Er geldt:

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\right)\mathbf{a}.$$

Het getal $\dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}$ heet de Fourriercoëfficient. $\square$

Decompositiestelling

Stelling: Laat V een i.p.ruimte zijn, reëel of complex, met eindig dimensionale deelruimte W. Stel $\mathbf{x} \in V$. Er geldt:

1. $\mathbf{x}$ is te schrijven als $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\sharp$ met $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w}^\sharp \in W^\perp$ en dit op unieke wijze.
2. Er geldt: als $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ een orthogonale basis W, dan:

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1\rangle}\right)\mathbf{b}_1 + \cdots + \left(\frac{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n\rangle}\right)\mathbf{b}_n.$$

Stelling: In de decompositiestelling (met W eindig dimensionaal)

is $\mathbf{w}$ de unieke vector in W met kleinste afstand tot $\mathbf{x}$. $\square$

Orthogonaal projecteren

Definitie: Laat V een i.p.ruimte zijn, reëel of complex, met eindig dimensionale deelruimte W. Stel $\mathbf{x} \in V$. Als $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\sharp$ met $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w}^\sharp \in W^\perp$ dan:

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{w}.$$

Stelling: Als $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ een orthogonale basis W, dan:

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \left(\frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1\rangle}\right)\mathbf{b}_1 + \cdots + \left(\frac{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n\rangle}\right)\mathbf{b}_n.$$

Het vervelende van deze stelling is dat men een een orthogonale basis nodig heeft.

Definitie: De vector $\mathbf{w}^\sharp = \mathbf{x} - \mathrm{proj}_W(\mathbf{x})$ heet de component van $\mathbf{x}$ loodrecht op W.

Notatie boek: $\mathrm{perp}_W(\mathbf{x})$.

□

Gram-Schmidt proces

Het Gram–Schmidt proces levert weer een orthogonale basis op een eindig dimensionale deelruimte.

Stelling: (Het Gram–Schmidt proces) Als $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ een basis is van W dan vormen de vectoren:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle}\right)\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_3\rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle}\right)\mathbf{w}_1 - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3\rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2\rangle}\right)\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_n\rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle}\right)\mathbf{w}_1 - \cdots - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{v}_n\rangle}{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1}\rangle}\right)\mathbf{w}_{n-1}$$

een orthogonale basis voor W. □

“Beste lineaire benadering I”

Bepaal de “beste lineaire benadering” $ax+b$ van de functie $f(x)=\sin(x)$ op het interval $[0,\pi/2]$. (?).
D.w.z. bepaal die functie $ax+b$, (dit zijn de functies uit $W=\text{Span}\{1,x\}$(!)), met minimale afstand tot $f(x)=\sin(x)$.
(Hierbij wordt de afstand bepaald door het standaard inwendig product op $C([0,\pi/2],\mathbb{R})$!)
M.a.w. de vraag wordt dus: bepaal de projectie van f in $C([0,\pi/2],\mathbb{R})$ op deelruimte $W=\text{Span}\{1,x\}$!

Evenzo de vraag: Bepaal de beste kwadratische benadering ax^2+bx+c van de functie $f(x)=\sin(x)$ op het interval $[0,\pi/2]$ is de vraag: bepaal de projectie van f in $C([0,\pi/2],\mathbb{R})$ op deelruimte $W=\text{Span}\{1,x,x^2\}$! $\square$

“Beste lineaire benadering II”

Nodig: orthogonale basis op deelruimte $W=\text{Span}\{1,x\}\subset C([0,\pi/2],\mathbb{R})$.
De standaardbasis $\{1,x\}$ van W in $C([0,\pi/2],\mathbb{R})$ is NIET orthogonaal, want $\int_0^{\pi/2} x dx \neq 0$.
GramSchmidt dus.

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = x - \left(\frac{\langle 1,x\rangle}{\langle 1,1\rangle}\right)1 = x - \left(\frac{\int_0^{\pi/2} x dx}{\int_0^{\pi/2} 1 dx}\right)1$$

$$= x - \left(\frac{(\pi/2)^2/2}{\pi/2}\right)1 = x - \pi/4.$$

Levert $\{1, x-\pi/4\}$ als orthogonale basis van $W=\text{Span}\{1,x\}$.

$\square$

“Beste lineaire benadering III”

De projectie van $f(x) = \sin(x)$ op W wordt dus:

$$\left(\frac{\langle 1, \sin(x)\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\right) 1 + \left(\frac{\langle x - \pi/4, \sin(x)\rangle}{\langle x - \pi/4, x - \pi/4\rangle}\right)(x - \pi/4)$$

$$= \left(\frac{\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx}{\int_0^{\pi/2} 1dx}\right) 1 + \left(\frac{\int_0^{\pi/2}(x - \pi/4)\sin(x)dx}{\int_0^{\pi/2}(x - \pi/4)^2 dx}\right)(x - \pi/4) =$$

$$\left(\frac{1}{\pi/2}\right) 1 + \left(\frac{1 + \pi/4}{(2/3)(\pi/4)^3}\right)(x - \pi/4) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^3(1 + \pi/4)(x - \pi/4)$$

We hebben de beste lineaire benadering van $\sin(x)$ op $[0, \pi/2]$ gevonden. $\square$

“Beste lineaire benadering IV”

1. De beste lineaire benadering van $f(x) = \sin(x)$ op $[0, \pi]$ zal anders zijn dan die op $[0, \pi/2]$.
2. Vraag: wat verandert er dan in de berekening?
3. We zeiden: de basis van $\{1, x\}$ is niet orthogonaal.
   Ook dit hangt af van het interval waarop je werkt! Op het interval $[-1, 1]$ is $\{1, x\}$ wel een orthogonale basis voor $\mathrm{Span}\{1, x\}$. Want daar gebruiken we het inwendig product $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ en inderdaad: $\int_{-1}^{1} xdx = 0$.
4. Als $g(x) = \mathrm{proj}_W(f)(x)$ dan: $\sqrt{\int_0^{\pi/2}(f(x) - g(x))^2 dx}$ $= \|f - g\|$ heet de “Root mean square error". De root mean square error bij de beste kwadratische benadering van $f(x)$ kleiner zal zijn dan bij de beste lineaire benadering. $\square$

Een beroemde orthogonale familie functies

Stelling Op het interval $[-\pi, +\pi]$ zijn de functies

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots\}$$

onderling orthogonaal.
Bovendien geldt:
Stelling Als f een continue functie op $[-\pi, \pi]$ met $f \perp 1$, $f \perp \cos(nx)$ en $f \perp \sin(nx)$, voor alle $n \geq 1$, dan moet gelden: $f(x) = 0$, voor alle $x \in [-\pi, \pi]$

We noemen zo'n verzameling een “maximaal orthogonale familie”. $\square$

De n^{de} Fourrierbenadering op $[\pi, \pi]$.I

Definitie De projectie van $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ op de eindig dimensionale deelruimte
$W = \text{Span}\{1, \cos(x), \sin(x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx)\}$ wordt de n^{de} Fourrierbenadering F_n van f genoemd.

Dus: $F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ met:

$$a_0 = \frac{\langle 1, f\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{\langle \cos(kx), f\rangle}{\langle \cos(kx), \cos(kx)\rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

$$b_k = \frac{\langle \sin(kx), f\rangle}{\langle \sin(kx), \sin(kx)\rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \qquad \square$$

De n^{de} Fourrierbenadering op $[-L, L]$. II

Stelling Op het interval $[-L, L]$ vormen de functies

$$\{1, \cos(\tfrac{\pi x}{L}), \sin(\tfrac{\pi x}{L}), \ldots, \cos(\tfrac{n\pi x}{L}), \sin(\tfrac{n\pi x}{L}), \ldots\}$$

een maximaal orthogonale verzameling.

Definitie De projectie van $f \in C([-L, L], \mathbb{R})$ op $W = \operatorname{Span}\{1, \cos(\tfrac{\pi x}{L}), \sin(\tfrac{\pi x}{L}), \ldots, \cos(\tfrac{n\pi x}{L}), \sin(\tfrac{n\pi x}{L})\}$ wordt de n^{de} Fourrierbenadering F_n van f op $[-L, L]$ genoemd.

In §10.2 van Boys and DuPrima wordt in de maximaal orthogonale famile 1 vervangen door $\dfrac{1}{2}$.

De n^{de} Fourrierbenadering op $[-L, L]$.III

Dus: $F_n(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(\frac{k\pi x}{L}) + b_k \sin(\frac{k\pi x}{L}))$ met:

$$a_0 = \frac{\langle 1, f\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{\left\langle \cos(\frac{k\pi x}{L}), f\right\rangle}{\left\langle \cos(\frac{k\pi x}{L}), \cos(\frac{k\pi x}{L})\right\rangle} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{k\pi x}{L})dx$$

$$b_k = \frac{\left\langle \sin(\frac{k\pi x}{L}), f\right\rangle}{\left\langle \sin(\frac{k\pi x}{L}), \sin(\frac{k\pi x}{L})\right\rangle} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{k\pi x}{L})dx$$

De formule voor a_k geldt niet voor $k = 0$.

Stuksgewijs continue functies

Een functie f op domein D heet stuksgewijs continu als:
1. f is in slechts eindig veel punten van D discontinu.
2. Als f discontinu in c, dan bestaan $\lim_{x \to c^-} f(x)$ en $\lim_{x \to c^+} f(x)$ en zijn eindig.

De stuksgewijs continue functies f en g heten hetzelfde, als:
1. domein f=domein g, op eindig veel punten na.
2. $f(x) = g(x)$ voor alle x in domein, op eindig veel x na.

Stelling Als f en g stuksgewijs continu en “hetzelfde”, dan
1. $\int_p^q f(x)dx$ bestaat en 2. $\int_p^q f(x)dx = \int_p^q g(x)dx$.

Stelling Als f (stuksgewijs) continu op $[-L, L]$ dan heeft f een periodiek (=?) stuksgewijs continue voortzetting tot $[-kL, kL]$. $\square$

De Fourrierreeks van f op $[-L, L]$. I

Definitie De Fourrierreeks van de functie f is:

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\frac{k\pi x}{L}) + b_k \sin(\frac{k\pi x}{L}))$$

Waarbij weer geldt: $a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(\frac{k\pi x}{L})dx$ en

$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(\frac{k\pi x}{L})dx$.

Hoewel f alleen op $[-L, L]$ is gedefinieerd, is $F(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd. $F(x)$ is een periodieke functie met periode $2L$. $\square$

De Fourrierreeks van f op $[-L, L]$. II

Stelling Laat f een functie zijn op $[-L, L]$ met f en afgeleide f' stuksgewijs continu. De stuksgwijs continue voorzetting van f tot $[-kL, kL]$ wordt ook f genoemd.
1. Als f continu in $c \in (-kL, kL)$, dan geldt: $F(c) = f(c)$.
2. Als f niet continu in $c \in (-kL, kL)$, dan geldt:

$$F(c) = \frac{\lim_{x \to c^+} f(x) + \lim_{x \to c^-} f(x)}{2}.$$

$\square$

Even en/of oneven functies op $[-L, L]$

Definitie: 1. Een even functie $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ is functie met $f(-x) = f(x)$, voor alle $x \in [-L, L]$, (op eindig veel x na.)
2. Een oneven functie $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ is functie met $f(-x) = -f(x)$, voor alle $x \in [-L, L]$, (op eindig veel x na.)

Stelling 1. f even functie dan $\int_{-L}^{L} f(x) = 2\int_0^L f(x)\, dx$.
2. f oneven functie dan $\int_{-L}^{L} f(x) = 0$.

Stelling 1. f, g even functies dan ook fg even
2. f even en g oneven functie dan fg oneven.

Stelling: 1. 1 en $\cos(\frac{k\pi x}{L})$ zijn even functies op $[-L, L]$.
2. De functies $\sin(\frac{k\pi x}{L})$ zijn oneven functies op $[-L, L]$. $\square$

Functies op $[0, L]$ I

Gevolg 1. f even functie op $[-L, L]$ dan $b_k = 0$ (alle k) in Fourrierreeks
2. f oneven functie op $[-L, L]$ dan $a_k = 0$ (alle k) in Fourrierreeks
Stelling Stel f stuksgewijs continue functie op $[0, L]$
1. f heeft stuksgewijs continue even uitbreiding tot $[-L, L]$.
2. f heeft stuksgewijs continue oneven uitbreiding tot $[-L, L]$.

Gevolg 1. $\{1, \cos(\frac{\pi x}{L}), \ldots, \cos(\frac{n\pi x}{L}), \ldots\}$ is een maximaal orthogonale familie functies op $[0, L]$.
2. $\{\sin(\frac{\pi x}{L}), \ldots, \sin(\frac{n\pi x}{L}), \ldots\}$ is maximaal orthogonale familie functies op $[0, L]$. $\square$

De cosinusreeks van f op $[0, L]$

Definitie Stel f een stuksgewijs continue functie op $[0, L]$. De projectie van f op de eindig dimensionale deelruimte $W = \text{Span}\{1, \cos(x), \ldots, \cos(nx)\}$ wordt de n^{de} orde cosinus benadering van f op $[0, L]$ genoemd.
Dit is dus:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) \text{ met: } a_0 = \frac{\langle 1, f\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

en $a_k = \dfrac{\langle \cos(kx), f\rangle}{\langle \cos(kx), \cos(kx)\rangle} = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos(kx)dx$

Merk op: De n^{de} cosinus benadering van f is gelijk aan de n^{de} orde Fourrier benadering van de even uitbreiding van f tot $[-L, L]$. $\square$

De sinusreeks van f op $[0, L]$

Evenzo: de n^{de} orde cosinus benadering van f op $[0, L]$ is de projectie van f op deelruimte
$W = \text{Span}\{1, \cos(x), \ldots, \cos(nx)\}$.
Dit is dus:
$\sum_{k=1}^{n}(b_k \sin(kx)$ met:

$$b_k = \frac{\langle \sin(kx), f\rangle}{\langle \sin(kx), \sin(kx)\rangle} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(kx)dx$$

Merk op: De n^{de} sinus benadering van f is gelijk aan de n^{de} orde Fourrier benadering van de oneven uitbreiding van f tot $[-L, L]$. $\square$

Aanbevolen opgaven

College 3	behandeld	aanbevolen opgaven
	§7.3 OVERGESLAGEN	
	§7.5	
	§10.2	
	§10.3	
	§10.4	