Complexe eigenwaarden en eigenvectoren

We willen nog even speciale aandacht vestigen op de theorie van eigenwaarden, eigenvectoren en diagonaliseerbaarheid. Poole heeft zich beperkt tot de (reële) eigenwaarden van reële matrices. Als we dit complex gaan doen (zowel complexe eigenwaarden van reële en complexe matrices) moeten we eerst de definities geven en/of deze aanpassen in het geval dat ook complexe eigenwaarden worden toegelaten.

Definitie: Een **eigenwaarde** van een vierkante (complexe) $n \times n$ matrix A is een scalar $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat de vergelijking $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ een niet-triviale oplossing heeft in $\mathbb{C}^n$ (met andere woorden, er bestaat een niet-nulvector $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ met de eigenschap dat $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$).
Zo'n niet-triviale oplossing $\mathbf{z}$ heet een bij λ behorende **eigenvector** van A.
Als λ een eigenwaarde van A is, dan heet de verzameling oplossingen van $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ met $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ de **eigenruimte** van A bij eigenwaarde λ, en wordt genoteerd met E_λ.
De verzameling eigenwaarden heet het spectrum $SP(A)$ van A.

Voor een gegeven $n \times n$ matrix A hebben we weer:

- Het karakteristiek polynoom $p_A(\lambda)$ (in de variabele λ) van A is het n^{de}–graads polynoom $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- De eigenwaarden van de matrix A zijn precies de oplossingen van de karakteristieke vergelijking $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.
- De algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde λ_0 van A is de multipliciteit van λ_0 als nulpunt van het karakteristiek polynoom. We schrijven hiervoor: $a.m.(\lambda_0) = k$.
- De sommatie van de algebraïsche multipliciteiten van de verschillende eigenwaarden van A is dus de graad van het polynoom, is dus n. Dus:

$$\sum_{\lambda \in SP(A)} a.m.(\lambda) = n$$

- Als λ_0 een eigenwaarde is van A dan geldt:

$$E_{\lambda_0} = \mathrm{Nul}(A - \lambda_0 I)$$

- De dimensie van de eigenruimte E_{λ_0} heet de meetkundige multipliciteit van A. We schrijven hiervoor: $m.m.(\lambda_0) = \dim(E_{\lambda_0})$. (In deel 1 is het bewijs hiervan niet gegeven, en het bewijs is gewoon lastig.)

- Altijd geldt: als λ_0 een eigenwaarde van A dan $1 \leq m.m.(\lambda_0) \leq a.m.(\lambda_0)$.

- Daarom zal altijd gelden:
$$\sum_{\lambda \in SP(A)} m.m.(\lambda) \leq n$$

Voorbeeld 0.1. Beschouw de complexe matrix: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. We doorlopen voor deze matrix bovenstaande stappen. We bepalen eerst het karakteristiek polynoom.
$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & i-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (i-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - i)(\lambda^2+1) = -(\lambda - i)^2(\lambda + i)$. We zien: $\lambda = i$ is eigenwaarde van A met algebraïsche multipliciteit $a.m.(\lambda = i) = 2$ en $\lambda = -i$ is een eigenwaarde van A met algebraïsche multipliciteit $a.m.(\lambda = -i) = 1$.
Inderdaad, de som van de algebraïsche multipliciteiten is 3.
We bepalen E_i en E_{-i} door een basis van beide ruimtes te bepalen.
$E_i = \mathrm{Nul}(A - iI)$ levert dat de vectoren in E_i precies de oplossing is van het stelsel:
$\left[\begin{array}{ccc|c} -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Dit geeft $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} iz_3 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = z_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Dus: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis E_i en we zien $m.m.(\lambda = i) = 2$.
Evenzo: $E_{-i} = \mathrm{Nul}(A + iI)$ levert dat de vectoren in E_{-i} precies de oplossing is van het stelsel:
$\left[\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Dit geeft $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -iz_3 \\ 0 \\ z_3 \end{bmatrix} = z_3 \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus: $\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis E_{-i} en we zien $m.m.(\lambda = -i) = 1$.

We vragen ons af of de matrix uit voorafgaand voorbeeld diagonaliseerbaar is. We herinneren ons:

Definitie: Een (eventueel complexe) $n \times n$-matrix A heet **(complex) diagonaliseerbaar** als er een (eventueel complexe) inverteerbare matrix P en een (eventueel complexe) diagonaalmatrix D bestaan zo dat $A = PDP^{-1}$.

De stellingen uit deel 1 (zie college 13) wat betreft het diagonaliseren van reële matrices hebben alle een vertaling naar de nieuwe situtie van het diagonaliseren van complexe matrices. We vermelden expliciet:

LEMMA 0.2. *Stel dat A een complexe $n \times n$ matrix is.*
Als $P = [\,\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n\,]$ een (niet noodzakelijk inverteerbare) $n \times n$ matrix is en $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ een diagonaalmatrix, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

1. *$AP = PD$,*

2. *Ieder diagonaalkental* d_i *van de matrix* D *heeft de eigenschap:* $A\mathbf{p}_i = d_i\mathbf{p}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *en als* $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{0}$ *dan is* d_i *dus een eigenwaarde van* A.

En dus:

STELLING 0.3. *Zij* A *een (eventueel complexe)* $n \times n$ *matrix. Dan geldt:* A *is complex diagonaliseerbaar als en slechts als* A n *(eventueel complexe) lineair onafhankelijke eigenvectoren heeft.*

Weer geldt:

STELLING 0.4. *Zij* A *een (eventueel complexe)* $n \times n$ *matrix. Dan geldt: eigenvectoren bij verschillende (eventueel complexe) eigenwaarden zijn lineair onafhankelijk.*

En dus:

STELLING 0.5. *Zij* A *een (eventueel complexe)* $n \times n$ *matrix. Dan geldt: als* A n *verschillende eigenwaarden heeft dan is* A *complex diagonaliseerbaar.*

Weer geldt:

STELLING 0.6. *Zij* A *een (eventueel complexe)* $n \times n$ *matrix. Er geldt:* A *is diagonaliseerbaar als en slechts als voor iedere eigenwaarde van* A *geldt dat de meetkundige multipliciteit gelijk is aan de algebraïsche multipliciteit. Dit is equivalent met de uitspraak:*

$$\sum_{\lambda \in SP(A)} m.m.(\lambda) = n$$

Voorbeeld 0.7. We concluderen dat de matrix A uit voorbeeld 1.7 diagonaliseerbaar is. Inderdaad, daar is de som van de meetkundige multipliciteiten gelijk aan $2 + 1 = 3$ en A is een 3×3 matrix.
Een diagonalisering is te vinden op de gebruikelijke manier: $A = PDP^{-1}$ met $P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (de eigenvectoren in P) en $D = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$ (de overeenkomstige eigenwaarden in de diagonaalmatrix D).
Een diagonalisering is handig om te hebben, bijvoorbeeld om A^n te bepalen. Hier zien we: $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ en omdat $D^2 = \begin{bmatrix} (i)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (i)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_3$ volgt: $A^2 = PD^2P^{-1} = P(-I)P^{-1} = -PP^{-1} = -I$.

Wat de terminologie van deel 1 over diagonaliseren van reële matrices moeten we iets voorzichtiger zijn. We geven eerst een voorbeeld:

Voorbeeld 0.8. Bekijk de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De eigenwaarden van deze matrix vinden we uit de vergelijking

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(\lambda^2 + 1) = 0.$$

In deel 1 zouden we zeggen: $\lambda = 1$ is de enige eigenwaarde van A met meetkundige multipliciteit 2 (ga na) en dus is de matrix A niet diagonaliseerbaar.
Nu kunnen we zeggen: de eigenwaarden zijn dus i, $-i$ en 1 (met algebraïsche multipliciteit 2).
Ga na dat de vectoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

een basis vormen voor de eigenruimte bij eigenwaarde 1. De vectoren

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

vormen bases voor de eigenruimten bij respectievelijk de eigenwaarden $-i$ en i. Als we nu definieren

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

dan geldt $A = PDP^{-1}$ en de matrix A is opeens wel diagonaliseerbaar geworden, maar complexe getallen zijn nodig.

Kennelijk moeten we enige voorzichtigheid betrachten met wat we bedoelen “A is diagonaliseerbaar”, als de matrix A reëel is. Daarom:

Definitie: Laat A een reële $n \times n$ matrix zijn.
De matrix A heet **reëel diagonaliseerbaar** als er een reële inverteerbare matrix P en een reële diagonaalmatrix D bestaan zo dat $A = PDP^{-1}$.
De matrix A heet **complex diagonaliseerbaar** als er een (eventueel complexe) inverteerbare matrix P en een (eventueel complexe) diagonaalmatrix D bestaan zo dat $A = PDP^{-1}$.

Opmerking: Een reëel diagonaliseerbare matrix is ook complex diagonaliseerbaar.

De reële matrix A uit bovenstaand voorbeeld 1.14 is niet reëel diagonaliseerbaar, maar wel complex diagonaliseerbaar.

Opmerking: Een reële matrix A kan om *twee redenen* niet reëel-diagonaliseerbaar zijn, namelijk: A heeft een niet-reële eigenwaarde of er bestaat een eigenwaarde λ waarvan de dimensie van de eigenruimte kleiner is dan de algebraïsche multipliciteit van λ.
Echter, een matrix A kan slechts om één reden niet complex-diagonaliseerbaar zijn, namelijk: er bestaat een eigenwaarde λ waarvan de dimensie van de eigenruimte kleiner is dan de algebraïsche multipliciteit van λ.
Herinner: Een matrix die een eigenwaarde λ heeft waarvan de meetkundige multipliciteit strikt kleiner is dan de algebraïsche multipliciteit, heet **defect** (in λ).

Opgaven

1. Geef van elk van de volgende matrices aan of ze reëel diagonaliseerbaar en/of complex diagonaliseerbaar of niet diagonaliseerbaar zijn:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Bepaal alle waarden van c waarvoor de matrix $A = \begin{bmatrix} i & c & 1 \\ 0 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ complex diagonaliseerbaar is.

3. (a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Bepaal bij elke eigenwaarde de bijbehorende eigenruimte.

(c) Is A complex diagonaliseerbaar? Zo ja, geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zo dat $A = PDP^{-1}$.

4. Ga van elk van de volgende matrices na of deze complex diagonaliseerbaar is en geef, in het geval van diagonaliseerbaarheid, een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zo dat $A = PDP^{-1}$. Als de matrix reëel is ga dan ook na of de matrix reëel diagonaliseerbaar is.

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$