# Lineaire Algebra en differentiaalvergelijkingen

# College 5: Inwendigproduct op $\mathbb{R}^n$

J. Vermeer

Les 5





## §1.2, 5.1, Het standaard inwendigproduct

Definitie: Als $\mathbf{u}\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, zeg $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, dan

wordt het inwendig product gedefinieerd door:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n =! = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

Pas op: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ is een scalar!

Rekenregels:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ $\square$

# Lengte vector

Definitie: Als $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ dan wordt de lengte (of norm) van $\mathbf{u}$:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + \cdots + {u_n}^2} =! = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

Rekenregels:

1. $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $\|c\mathbf{u}\| = |c|\,\|\mathbf{u}\|$
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Driehoeksongelijkheid)

Stelling. (Ongelijkheid Cauchy-Schwarz)

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|.$$

□



# Ongelijkheid Cauchy-Schwarz

In $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ volgt Cauchy-Schwarz uit:
Stelling: In geldt: als $\theta$ de hoek tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ dan:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta.$$

Vanwege Cauchy-Schwarz kunnen we de hoek $\theta$ tussen twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ definiëren via:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

Ook in $\mathbb{R}^n$ geldt dus: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$.
We zeggen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ zijn orthogonaal of loodrecht als $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
Notatie: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
Een eenheidsvector is een vector met lengte $1$.

Iedere vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ is te normeren op eenheidsvector. □

# Orthogonaliteit I

Stelling: (Pythagoras) Als $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} = 0$ dan $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
Definitie: Stel $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^n$.
De loodrechte projectie van $\mathbf{b}$ op $\mathbf{a}$ (notatie: $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ is dat scalaire veelvoud $c\mathbf{a}$ van $\mathbf{a}$ zodat $\mathbf{b} - c\mathbf{a} \perp \mathbf{a}$.
Stelling: $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right) \mathbf{a}$
Het getal $\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ heet de Fourriercoëfficient. $\square$



# Orthogonaliteit II

Definitie: De verzameling vectoren $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ heet een orthogonale verzameling als $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ als $i \neq j$.
Als bovendien geldt: $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ (alle $i$) dan heet de verzameling orthonormaal.
Stelling: Een verzameling orthogonale niet–nul vectoren in $\mathbb{R}^n$ is lineair onafhankelijk.
Definitie: $W$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.De basis $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ van $W$ heet een orthogonale basis als $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j$ voor $i \neq j$. Als bovendien $\|\mathbf{b}_i\| = 1$ (alle $i$) dan heet de basis orthonormaal.
Stelling: Als $W$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ met orthogonale basis $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ dan geldt voor iedere $\mathbf{w} \in W$:

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\right) \mathbf{b}_1 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_k}\right) \mathbf{b}_k$$

$\square$

# Orthogonale matrices I

Stelling: Als $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ dan geldt:

$$A^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$$

Gevolg: 1. De kolommen van $A$ zijn orthogonaal als en slechts als $A^T A$ een diagonaalmatrix is.
2. De kolommen van $A$ zijn orthonormaal als en slechts als $A^T A$ een eenheidsmatrix is.
Definitie Een matrix $Q$ heet een orthogonale matrix als de matrix vierkant is met kolommen orthonormaal!

Voorbeeld: Een $3 \times 3$ matrix: ?? $\square$



# Orthogonale matrices II

Stelling: Laat $Q$ een vierkante matrix zijn. Equivalent zijn:

1. $Q$ is een orthogonale matrix.
2. $Q$ heeft orthonormale kolommen.
3. $Q^T Q = I$
4. $Q^{-1} = Q^T$.
5. $QQ^T = I$
6. $Q$ heeft orthonormale rijen.
7. $Q^T$ is een orthogonale matrix.

Stelling: Het product van twee orthogonale matrices is weer orthogonaal. $\square$

# Orthogonale matrices III

Stelling: Laat $Q$ een orthogonale $n \times n$ matrix zijn. Dan geldt:

1. $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. $Q\mathbf{x} \cdot Q\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, voor alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Stelling:.Laat $Q$ een orthogonale $n \times n$ matrix zijn. Dan geldt:

1. $\det(Q) = \pm 1$.
2. Als $\lambda$ een eigenwaarde van $Q$, dan $|\lambda| = 1$.

$\square$



# §5.2 Orthogonale complement I

Definitie: Laat $W$ een deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. We zeggen: $\mathbf{x}$ is orthogonaal met $W$, als $\mathbf{x} \perp \mathbf{w}$, voor alle $\mathbf{w} \in W$.
Notatie: $\mathbf{x} \perp W$.
Definitie: Het orthogonaal complement van $W$ is de verzameling van alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ met $\mathbf{x} \perp W$.
Notatie: $W^\perp$.
Stelling: Laat $W$ een deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$ zijn.

1. $W^\perp$ is een deelruimte van $W$.
2. $(W^\perp)^\perp = W$.
3. $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
4. Als $W = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ dan $\mathbf{x} \in W^\perp$ als en slechts als $\mathbf{x} \perp \mathbf{a}_i$, voor $i = 1 \ldots k$. $\square$

## Orthogonale complement II

We willen het orthogonaal complement bepalen van een deelruimte $W$. Dat zal er van afhangen hoe $W$ gegeven is als deelruimte.
$W$ kan gegeven zijn als kolomruimte van een matrix, of als nulruimte van een matrix.
Stelling: Laat $A$ een $m \times n$ matrix zijn.

1. Als $W = \mathrm{Col}(A)$ dan $W^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T)$.
2. Als $W = \mathrm{Nul}(A)$ dan $W^{\perp} = \mathrm{Col}(A^T)$.

De 4 deelruimtes $\mathrm{Col}(A), \mathrm{Nul}(A), \mathrm{Col}(A^T), \mathrm{Nul}(A^T)$ heten de vier elementaire deelruimtes geassocieerd met de matrix $A$. $\square$



## De decompositiestelling I

Stelling: Laat $W$ een deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt: $\mathbf{x}$ is te schrijven als $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\sharp}$ met $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{w}^{\sharp} \in W^{\perp}$. Bovendien geldt dat $\mathbf{w}$ en $\mathbf{w}^{\sharp}$ uniek zijn.
Definitie:1. De vector $\mathbf{w}$ het de orthogonale projectie van $\mathbf{x}$ op $W$ en wordt genoteerd met $\mathrm{proj}_W(\mathbf{x})$.
2.De vector $\mathbf{w}^{\sharp}$ heet de component van $\mathbf{x}$ loodrecht op $W$.
Stelling: Als $W$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ met orthogonale basis $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ dan geldt voor iedere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\right)\mathbf{b}_1 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_k}\right)\mathbf{b}_k$$

$\square$

# Decompositiestelling II

M.b.v. de decompositiestelling kan men bewijzen:
Stelling: Laat $W$ een deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$. Dan geldt:

1. $(W^\perp)^\perp = W$.
2. $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$.

We zullen de bewijzen niet bekijken.

Om te projecteren op een deelruimte $W$ hebben we een orthogonale basis nodig op $W$. Probleem: hoe komen we daaraan? $\square$



# Aanbevolen opgaven

| College 1 | behandeld | aanbevolen opgaven |
|---|---|---|
| | §1.2, 5.1, 5.2 | §1.2: 3,9,15,19,25,43<br>§5.1: 3,9,15,17,19,21<br>§5.2: 3,5,13 |