Lineaire Algebra en differentiaalvergelijkingen

College 1: Determinanten

J. Vermeer
Les 1

Standaard kennis en §4.2

De volgende paragrafen uit Poole worden bekend verondersteld.

- §1.1 §1.2; en §2.1 §2.2 §2.3;
- §3.1 §3.2 §3.3 §3.5; en §5.1

Stelling 3.8. Als $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan: A is inverteerbaar als en slechts als $ad - bc \neq 0$. Er geldt:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Het getal $ad - bc$ heet de determinant van A.

Notatie: $\det(A)$ of $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. $\square$

§4.1 Eigenwaarden en eigenvectoren

Definitie Laat A een $n \times n$ matrix zijn.

1. De vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heet een eigenvector van A als $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en er bestaat $\lambda \in \mathbb{R}$ zodat $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
2. Dan heet λ een eigenwaarde van A.
3. Dus λ is eigenwaarde van $A \Leftrightarrow$ er is $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ met $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
4. Doel: gegeven een matrix A eigenwaarden en eigenvectoren te vinden.

Voorbeelden:

Definitie Laat λ een eigenwaarde van A zijn. De eigenruimte $E_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ is de verzameling:

$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}.$$

$\square$

Ondermatrices

Beschouw de $n \times n$ matrix $A = [a_{i,j}]_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n}$ of:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Definitie: De i, j^{de} ondermatrix $A_{i,j}$ van A is de matrix uit A verkregen door de i^{de} rij en de j^{de} kolom weg te laten.

Voorbeeld: Als $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ dan $A_{2,1} = ??$ en $A_{3,2} = ??$. $\square$

Determinanten

Definitie Laat A een 3×3 matrix zijn. Dan:

$$\det(A) = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + a_{1,3}\det(A_{1,3})$$

Voorbeeld: Bepaal $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Evenzo voor een 4×4 matrix:

$$t(A) = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + a_{1,3}\det(A_{1,3}) - a_{1,4}\det(A_{1,4})$$

Definitie Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Dan:

$$\det(A) = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + a_{1,3}\det(A_{1,3}) - + \cdots =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1,k}\det(A_{1,k})$$

Dit heet: "berekenen van $\det(A)$ door Laplace ontwikkeling naar de eerste rij van A. $\square$

Laplace ontwikkeling naar de i^{de} rij van A

Beschouw de i^{de} rij van een $n \times n$ matrix.

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Stelling: $\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i,1}\det(A_{i,1}) + (-1)^{i+2}a_{i,2}\det(A_{i,2}) + \cdots + (-1)^{i+n}a_{i,n}\det(A_{i,n})$

Dus $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} A_{i,k}$. Dit heet de ontwikkeling naar de i^{de} rij.

Bepaal opnieuw $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, nu door ontwikkelen naar de tweede rij. $\square$

Laplace ontwikkeling naar de j^{de} kolom van A

Beschouw de j^{de} kolom van een $n \times n$ matrix A: $\begin{bmatrix} \cdot & a_{1,j} & \cdot \\ \cdot & {}_{2,j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{n,j} & \cdot \end{bmatrix}$.

Stelling: $\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1,j} \det(A_{1,j}) + (-1)^{2+j} a_{2,j} \det(A_{2,j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{n,j} \det(A_{n,j}) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(A_{k,j})$$

Let bij het ontwikkelen op, op het schaakbord patroon $\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \end{bmatrix}$. $\square$

Voorbeelden

Bepaal opnieuw $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, nu door ontwikkelen naar de tweede kolom.

Bepaal $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ door ontwikkelen naar welke rij of kolom? I.h.a. is het bij matrix met weinig of geen nullen veel werk om de determinant te bepalen. Bij onderdriehoeksmatrices en bij bovendrieohoeksmatrices is het makkelijk de determinant te bepalen. $\square$

Determinanten en vegen

Stelling: Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Stel B uit A verkregen door:

- Verwisseling van rijen, dan $\det(B) = -\det(A)$.
- één rij van A met k te vermenigvuldigen, dan $\det(B) = k \det(A)$.
- $k\times$ ene rij bij andere rij op te tellen, dan $\det(B) = \det(A)$.

De manier om de determinant van een matrix te bepalen: een combinatie van vegen en ontwikkelen. $\square$

Eigenschappen determinanten

Stelling: Laat A en B vierkante $n \times n$ matrices zijn. Dan geldt:

1. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
2. $\det(A + B) = ????$.
3. $\det(kA) = k^n \det(A)$.
4. $\det(A^T) = \det(A)$.

Stelling: Laat A een vierkante $n \times n$ matriix zijn. Dan geldt:

1. A is inverteerbaar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
2. Als $\det(A) \neq 0$ dan $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

$\square$

Regel van Cramer

Definitie: Laat A een $n \times n$ matrix zijn en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Dan: $A_i(\mathbf{b})$ is de matrix A met de i^{de} kolom vervangen door de vector $\mathbf{b}$.
Stelling: De lineaire vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, met A een inverteerbare matrix, heeft een unieke oplossing $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Er geldt:

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

Opmerking In de praktijk wordt de regel van Cramer niet meer gebruikt. $\square$

Formule voor de inverse matrix I

Definitie Laat A een $n \times n$ matrix zijn met $n \geq 2$.

1. De i, j^{de} minor van A is het getal $\det(A_{i,j})$.
2. De i, j^{de} cofactor $C_{i,j}$ van A is het getal $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$.
3. De formule $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(A_{i,k})$ wordt in het boek als $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} C_{i,k}$ geschreven: “cofactor expansie langs i^{de} rij.

$\square$

Formule voor de inverse matrix II

Definitie Laat A een $n \times n$ matrix zijn met $n \geq 2$.

1. De matrix $[\det(A_{i,j}]_{i=1...n}^{j=1...n}$ heet de de minoren matrix van A
2. $C = [C_{i,j}]_{i=1...n}^{j=1...n}$ heet de cofactoren matrix van A
3. C^T heet de adjoint van A: adj(A).

Stelling: Als A een inverteerbare $n \times n$ met $n \geq 2$, dan geldt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adjoint(A)$$

□

Aanbevolen opgaven

College 1	behandeld	aanbevolen opgaven
	§4.1 §4.2	§1.2: 1-12 §4.2: zie schema