Antwoordvel

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen (deel 2) EE2M21, 13.30-15.30, Woensdag 27 januari 2016
Naam: Studienummer:

Opmerking: Voor de korte antwoord vragen volstaat het antwoord.Bij de open vragen is duidelijke uitleg vereist. Het gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan. Een onbeschreven formuleblad wel.

Korte antwoord vragen

(2) **1.** Beschouw de vectoren $\begin{bmatrix} 1-i \\ i \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} z \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{C}^2$.

(a) Deze vectoren zijn lineair afhankelijk in $\mathbb{C}^2$ als $z = \ldots$ $z = \boxed{-2-2i}$

(b) Deze vectoren zijn orthogonaal als $z = \ldots$. $z = \boxed{1+i}$

(3) **2.** Beschouw de vectorruimte $M_{4\times4}(\mathbb{R})$ van alle reële 4×4 matrices en de deelruimte W van alle symmetrische 4×4 matrices. Dan:

(a) $\dim(M_{4\times4}(\mathbb{R})) = \boxed{16}$ 1 (b) $\dim(W) = \boxed{10}$ 2

(2) **3.** Beschouw de vectorruimte $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ van alle continue functies $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$. Beschouw de stelsels $S_1 = \{\sin^2(x), \cos^2(x), \cos(2x)\}$ en $S_2 = \text{Span}\{\sin(x), \cos(x), \cos(3x)\}$.

(a) Bepaal $\dim(\text{Span}(S_1))$. $\dim(\text{Span}(S_1)) = \boxed{2}$

(b) Bepaal $\dim(\text{Span}(S_2))$. $\dim(\text{Span}(S_2)) = \boxed{3}$

(2) **4.** (a) Geef de orthogonale familie functies op $[-1,1]$ die gebruikt wordt bij het bepalen van de Fourrierreeks op het interval $[-1,1]$.

$1, \cos \pi x, \sin \pi x, \ldots\ldots, \cos n\pi x, \sin n\pi x, \ldots\ldots$

of $\frac{1}{2}$ maar dan

(2) (b) De bijbehorende formules van a_0, a_k en b_k van die Fourriereeks op $[-1,1]$ van f zijn:

$$a_0 = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \quad \text{of} \quad a_0 = \frac{\langle f, \frac{1}{2}\rangle}{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{\langle f, \cos n\pi x\rangle}{\langle \cos n\pi x, \cos n\pi x\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x}{\int_{-1}^{1}\cos^2 n\pi x\,dx} = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx$$

$$b_n = \frac{\langle f, \sin n\pi x\rangle}{\langle \sin n\pi x, \sin n\pi x\rangle} = \quad " \quad = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx$$

volstaat!

(3) **5.** Beschouw de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Het stelsel $X' = AX$ heeft als basisoplossingen $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ en $X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}$.

Bepaal de matrix e^{At}.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} \end{bmatrix}$$

3 zonder ½
2

(2) **6.** Beschouw het lineaire stelsel:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Bepaal de stabiliteit en het type van het evenwichtspunt.

Stabiliteit: instabiel Type: spiraal punt

(2) **7.** Laat f de functie op $[0,1]$ zijn met $f(x) = 1 - x + x^2$. Laat g de even uitbreiding zijn van f tot het interval $[-1,1]$. Dan:

(a) Een formule van $g(x)$ met $x \in [-1,0]$ luidt: $g(x) = f(-x) = 1 + x + x^2$

(b) De cosinusreeks van f op $[0,1]$ is gelijk aan de Fourrierreeks van g op $[-1,1]$ (juist/onjuist). juist

(2) **8.** Stel dat X_1, X_2 particuliere oplossingen zijn van het (niet–homogene) lineaire stelsel $X' = AX + G$ en dat X_3 een particuliere oplossing is van het (niet–homogene) lineaire stelsel $X' = AX + H$ (dus de twee stelsels hebben dezelfde matrix A). Dan geldt:

(a) $X_1 + X_3$ is een particuliere oplossing van het stelsel $X' = AX + G + H$. (juist/onjuist) juist

(b) $X_1 - X_2 + X_3$ is een particuliere oplossing van het stelsel $X' = AX + H$. (juist/onjuist) juist

Antwoordvel.

Open vragen

Tentamen (deel 2) EE2M21, 13.30-15.30, Woensdag 27 januari 2016
Naam: Studienummer:

---

9. Beschouw de vectorruimte $Pol_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (alle polynomen op $\mathbb{R}$ van graad tenhoogste 3) en beschouw $V = \{p \in Pol_3(\mathbb{R},\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$.

(3) (a) Toon aan dat V een lineaire deelruimte is van $Pol_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

niet te kritisch

$p = 0 \in V \quad (p(x) = 0 \text{ alle } x \Rightarrow p(1) = 0)$

Als $p, q \in V$ dan $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow p + q \in V$

~~deze:~~ 2 punten.

Als $p \in V$ en $c \in \mathbb{R}$ dan $(cp)(1) = c\,(p(1)) = c\,0 = 0$
$\Rightarrow cp \in V$

Dus V is deelruimte.

(3) (b) Bepaal een basis van V.

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in V \iff a + b + c + d = 0$
a, b, c vrij, $d = -a - b - c$

geeft: $p = ax^3 + bx^2 + cx - a - b - c$
$= a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1)$

basis: $\{x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}$

Onafh via Wronskian

$$\begin{vmatrix} x^3 - 1 & x^2 - 1 & x - 1 \\ 3x^2 & 2x & 1 \\ 6x & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (alle } x)$$

wat mij betreft:
antwoord volstaat

(2) (c) Bepaal de dimensie van V.

3

antwoord volstaat, als geen basis bij (b)
dan moet er uitleg bij!!

10. Beschouw de lineaire deelruimte $Pol_1([0,2],\mathbb{R})$ van $C([0,2],\mathbb{R})$ (de vectorruimte van alle continue functies op $[0,2]$) met het standaard inwendig product).

(3) (a) Bepaal een orthogonale basis voor de deelruimte $Pol_1([0,2],\mathbb{R})$.

Basis $Pol_1([0,2],\mathbb{R})$: $\{1, x\}$

woord Gram Schmidt 1 punten

Gram schmidt:

$w_1 = 1$

$$w_2 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 = x - \frac{\overbrace{\int_0^2 x\,dx}^{2}}{\underbrace{\int_0^2 1\,dx}_{2}} 1 = x - 1$$

orthogonale basis: ~~$\{1$~~ $\{1, x-1\}$

(4) (b) Bepaal de beste lineaire benadering van de functie $f(x) = 3x^2$ op het interval $[0,2]$.

Beste lineaire ~~proj~~ benadering =

1 Projectie f op span$\{1, x\}$ =

2 $$= \left(\frac{\langle 1, 3x^2\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\right) 1 + \left(\frac{\langle 3x^2, x-1\rangle}{\langle x-1, x-1\rangle}\right)(x-1)$$

$$= \frac{\int_0^2 3x^2\,dx}{2} 1 + \left(\frac{\int_0^2 3x^3 - 3x^2\,dx}{\int_0^2 (x-1)^2\,dx}\right)(x-1)$$

$$= \frac{8}{2} \cdot 1 + \frac{12-8}{2/3}(x-1) = 4 + \underbrace{\tfrac{3}{2}(4)}_{6}(x-1) = 6x-2$$

formule ~~op~~ met basis $\{1, x\}$: 1 punt (rest niets) dus ten hoogste 2 punten

Antwoord formulier.

Tentamen (deel 2) EE2M21, 13.30-15.30, Woensdag 27 januari 2016

Naam: Studienummer:

---

(3) **11.** (a) Gegeven is de $n \times n$ matrix A met eigenvector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ bij de eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$. (Dus $A\mathbf{v} = \lambda v$). We weten dat $X_1(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ een oplossing is van het lineaire stelsel $X' = AX$.

Toon aan: $X_2(t) = \mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{b}e^{\lambda t}$ is ook een oplossing van dit lineaire stelsel als en slechts als $(A - \lambda I)\mathbf{b} = \mathbf{v}$.

X_2 is oplossing $\Longleftrightarrow X_2' = A X_2$

$X_2'(t) = (\underline{v} t e^{\lambda t} + b e^{\lambda t})' = v e^{\lambda t} + \lambda \underline{v} t e^{\lambda t} + \lambda b e^{\lambda t}$

$A X_2 = \underbrace{A v}_{=\lambda v} t e^{\lambda t} + A b e^{\lambda t} = \lambda \underline{v} t e^{\lambda t} + A b e^{\lambda t}$

dus: $X_2' = A X_2 \Longleftrightarrow v e^{\lambda t} + \lambda v t e^{\lambda t} + \lambda \underline{b} e^{\lambda t} = \lambda v t e^{\lambda t} + A b e^{\lambda t} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow A b e^{\lambda t} - \lambda b \cancel{e^{\lambda t}} = v \cancel{e^{\lambda t}} \Longleftrightarrow (A - \lambda I)\underline{b} = \underline{v}$

Niet te streng wezen.

(4) (b) Bepaal de algemene reële oplossing van het stelsel $X' = AX$ met $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ en $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad$ a.m.$(\lambda = 1) = 2$.

1 basis $E_1 = Nul(A - I)$: $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$ m.m.$(\lambda = 1) = 1$

1 oplossing: $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$

1 gegeneraliseerde eigenvector $\underline{b}$: $(A - \lambda I) b = v \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1 geeft $X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{\lambda t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$

Dus $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{\lambda t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \right)$

gekozen $\underline{b}$ moet v/d vorm $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ voor een $c \in \mathbb{R}$

12. Beschouw het niet lineaire autonome stelel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = (2-y)(2x-y) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (2+x)(x-2y).$$

(2) (a) Bepaal de vier evenwichtsoplossingen.

$\frac{dx}{dt} = (2-y)(2x-y) = 0 \Rightarrow y = 2$ ① of $2x = y$ ③ / ④ 1

$\frac{dy}{dt} = (2+x)(x-2y) = 0 \Rightarrow x = -2$ of $x = 2y$

geeft $(-2,2)$ ①, $(4,2)$ ②, $(-2,-4)$ ③ en $(0,0)$ ④ 1

(3) (b) Bepaal bij ieder evenwichtspunt: de linearisering van het stelsel in het evenwichtspunt en klassificeer het evenwichtspunt van de linearisering naar type en stabiliteit.

$$F = \begin{bmatrix} 4x - 2y - 2xy + y^2 \\ 2x - 4y + x^2 - 2xy \end{bmatrix} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2y & -2-2x+2y \\ 2+2x-2y & -4-2x \end{bmatrix}$$

in ① $(-2,2)$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm 6i \Rightarrow$ stabiel centrum ✓

in ② $(4,2)$: $A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = -6\ (2x)$ + A niet diag $\Rightarrow$ ~~in~~stabiel (onzuiver) knooppunt

in ③ $(-2,-4)$: $A = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 6\ (2x)$ A niet diag $\Rightarrow$ instabiel (onzuiver) knooppunt 1

in ④ $(0,0)$: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow$ instabiel zadelpunt. 1

(3) (c) Classificeer nu de evenwichtspunten van het oorspronkelijke stelsel naar type en stabiliteit, voor zover dit mogelijk is.

① – ① $(-2,2)$: centrum of spiraalpunt: stabiliteit niet te bepalen.

1 ② $(4,2)$ ~~in~~stabiele knoop of spiraalpunt.

③ $(-2,-4)$ instabiele 〃 〃 〃

1 ④ $(0,0)$ instabiel zadelpunt

antwoordvel.

Tentamen (deel 1) EE2M21, 13.30-15.30, Woensdag 9 december 2015
Naam: Studienummer:

(4) **13.** (a) Bepaal de Fourrierreeks van de functie $f(x) = x$ op het interval $[-2, 2]$.

$f(x) = x$ op $[-2,2]$ is oneven functie $\Rightarrow a_0 = 0$ & $a_n = 0$ $(n \geq 1)$ 1

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{-4}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{-4}{n\pi}(-1)^n$$

dus

$$\int_{-2}^{2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \overset{1}{=} -\frac{2}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} + \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{2} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{4}{n\pi}\cos(-n\pi) + \underbrace{\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{-2}^{2}}_{=0} = -\frac{8}{n\pi}\cos(n\pi)$$

x ½ !

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi}(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$ 0

$\cos(n\pi)$

(6) (b) (BONUSVRAAG) Beschouw de warmtevergelijking met gegeven rand– en beginvoorwaarden.

$$\begin{cases} u_{x,x} = 4u_t & 0 < x < 2, \quad t > 0 \quad (1) \\ u(0,t) = 0 \text{ en } u(2,t) = 0, & t > 0 \quad (2) \\ u(x,0) = x, & 0 < x < 2 \quad (3) \end{cases}$$

Bepaal de oplossing.
(Hint: maak gebruik van opgave 13a)

Stel $u(x,t)$ is oplossing (1) die voldoet aan (2) met $u(x,t) \neq 0$

en $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ (Scheiden variabelen)

(Zal niet aan (3) voldoen)

(2) $\Rightarrow X(0) = 0$ en $X(2) = 0$

(1) $\Rightarrow X''(x)\,T(t) = 4\,X(x)\,T'(t) \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{4T'}{T} \Rightarrow$

$$\frac{X''}{X} = \underset{\text{constant}}{\lambda} = 4\frac{T'}{T} \Rightarrow X'' = \lambda X$$

Z.O.Z.

(b) (Vervolg)

Voor welke λ heeft $X'' = \lambda X$, $X(0)=0$ en $X(2)=0$ een niet triviale oplossing?

$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = u^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X = c_1 \cosh(ux) + c_2 \sinh(ux) \\ X(0)=0 \text{ en } X(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X = 0$ V.N

$\lambda = 0 \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X = ax + b \\ X(0) = X(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X = 0$ V.N.

$\lambda < 0$, zeg $\lambda = -u^2 \ (u>0) \Rightarrow X = c_1 \cos(ux) + c_2 \sin(ux)$

$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + 0 = 0 \Rightarrow 0$

$X(2) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(u2) = 0 \xrightarrow{c_2 \neq 0} \sin(u2) = 0 \Rightarrow 2u = k\pi$

$\Rightarrow u = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \dots)$

Dus: voor $\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{4}$ niet triviale oplossing met $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$

Dan: $\frac{4T'}{T} = \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{4} \Rightarrow T' = -\frac{k^2\pi^2}{16} T$

$\Rightarrow T_k(t) = e^{-\frac{k^2\pi^2}{16}t}$

Geeft $u_k(x,t) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{16}t} \quad k = 1, 2, \dots$

Beschouw
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{16}} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

voldoet aan 1, 2, stel ook aan 3

$$\Rightarrow u(x,0) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}_{\text{sinusreeks van } x \text{ op } [0,2]\,!} = x$$

dus a $\Rightarrow c_k = \frac{-8}{k\pi}(-1)^k$

$$\text{Dus } u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{k\pi}(-1)^k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{16}} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

Normering: Voor korte antwoord resp. open vragen zijn 20 resp. 34 punten te halen. Als voor deze delen K resp. O punten gehaald zijn, dan:

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{6 + K + O}{6}$$

Met de bonusvraag kunt u uw cijfer maximaal één punt ophogen.