Lineaire Algebra en differentiaalvergelijkingen

College 11: De lineaire structuur van een abstracte vectorruimte, inwendig product ruimtes.

J. Vermeer
Les 11

Vectorruimten

Herinner: we hebben het begrip "vectorruimte"geïntroduceerd, een lineaire structuur V, d.w.z. een optelling en een scalaire vermenigvuldiging. Deze operaties moesten aan 8 axioma's voldoen. Afhankelijk van het "scalairenlichaam"($\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$), spreken we van een "reële vectorruimte" of van een "complexe vectorruimte".
Standaard reële vectorruimtes:
$\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^\infty$ en de functieruimte $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ met zijn belangrijke deelruimtes.
Standaard complexe vectorruimtes:

$\mathbb{C}^n$, $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}^\infty$ en de functieruimte $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ met zijn belangrijke deelruimtes. $\square$

Lineaire onafhankelijkheid I

Definitie: Stel V is vectorruimte over $\mathbb{L}$.

- De lege verzameling $S = \emptyset$ zullen we een onafhankelijke deelverzameling van V noemen.
- Een niet leeg eindig stelsel $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset V$ heet onafhankelijk als de vectorvergelijking
$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$
alleen de triviale oplossing $c_1 = 0, \ldots, c_p = 0$ heeft.
- Een oneindige verzameling $S = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in I} \subset V$ heet onafhankelijk als iedere eindige deelverzameling van S onafhankelijk is.

Vraag: Hoe na te gaan of vectoren onafhankelijk zijn? In $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ weten we dat, maar hoe in functieruimtes? $\square$

Lineaire onafhankelijkheid II

Voorbeeld: Is de verzameling functies (vectoren) $\{f, g, h\}$ met $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ en $h(x) = \sin(2x)$ lineair afhankelijk of niet in de vectorruimte $V = C([0, 2\pi], \mathbb{R})$?
Voorbeeld: Is de verzameling functies $\{f, g, h\}$ met $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ en $h(x) = \sin(1 + x)$ lineair afhankelijk of niet in de vectorruimte $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Vraag: Wat zou er gebeuren als we de methode van voorbeeld 1 zouden toepassen op voorbeeld 2?? $\square$

Lineaire onafhankelijkheid III

Definitie: Als $f_1, \ldots, f_k$ een k-tal functies is dat $k-1$ maal gedifferentiëerd kan worden op een domein $[a,b]$ (of heel $\mathbb{R}$) dan heet de determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \ldots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

de Wronskiaan van de functies $f_1, \ldots, f_k$, en wordt soms ook genoteerd met $W[f_1, \ldots, f_k](x)$.

Stelling: Als een x bestaat met $W[f_1, \ldots, f_k](x) \neq 0$, dan zijn de functies $f_1, \ldots, f_k$ lineair onafhankelijk. $\square$

Het begrip basis

We zijn inmiddels bekend met het begrip "opspanning" en met het begrip "lineair onafhankelijk".
Laat V een vectorruimte zijn over $\mathbb{L}$.
Definitie. Een basis van V is een deelverzameling $B \subset V$ met:
(i) $\mathrm{Span}(B) = V$ en:
(ii) B is een onafhankelijke verzameling.

Definitie. De vectorruimte V heet eindig dimensionaal als V een eindige basis heeft. Zo niet, dan heet V oneindig dimensionaal.

$\square$

Voorbeelden

Voorbeeld. Beschouw $V = Pol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dan is de verzameling $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$ een basis van $Pol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. (De zogeheten standaardbasis van $Pol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.)
Voorbeeld. Beschouw $V = Pol_n([a, b], \mathbb{R})$. Ook dan is de verzameling $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$ een basis van $Pol_n([a, b], \mathbb{R}))$.
Voorbeeld. Beschouw $V = M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Dan is de verzameling $E = \{E_{i,j} : i = 1\ldots m, j = 1\ldots n\}$ een basis. Hierbij staat $E_{i,j}$ voor die matrix met allemaal nullen, op het i, jde kental na. Die is 1. Ook dit heet de standaardbasis van $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

De vectorruimten $Pol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ zijn dus eindig dimensionaal. □

Dimensie

Het verhaal over uit §6.2 over coördinaten t.o.v. een basis slaan we over.
Stelling: Stel dat V een eindig dimensionale vectorruimte is met basis $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$. Dan geldt: iedere basis van V bestaat precies uit n vectoren.
Definitie. Als V vectorruimte met basis $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$, dan zeggen we: de dimensie van V is n en noteren we dit met

$$\dim(V) = n.$$

Als V geen eindige basis heeft dan heet V oneindig dimensionaal: $\dim(V) = \infty$

$\boxed{\dim(\mathbb{P}ol_n([a, b], \mathbb{R})) =?}$ en $\boxed{\dim(\mathbb{P}ol_n([a, b], \mathbb{C})) =?}$

$\boxed{\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) =?}$ en $\boxed{\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})) =?}$. □

Basis-kennis

Stelling: Als V een eindig dimensionale vectorruimte met $\dim(V) = n$, dan geldt:

1. Ieder $n + 1$ tal vectoren in V is afhankelijk.
2. Ieder onafhankelijk stelsel bestaat uit tenhoogste n vectoren.

Stelling: (De dimensiestelling) Stel V eindig dimensionaal met $\dim(V) = n$. Dan geldt:

1. Ieder n-tal onafhankelijke vectoren in V is een basis van V.
2. Ieder n-tal opspannende vectoren in V is een basis van V.

$\square$

Voorbeelden uit DV

Stelling: Als $y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + +p_0(t)y = 0$ een homogene $n$de-graads lineaire differentiaalvergelijking is (met $p_i(t)$ continue op interval I) dan is de oplossingsverzameling Op een lineaire deelruimte van $C(I, \mathbb{R})$ met $\dim(Op) = n$.
In Boyce of DuPrima is de dimensiestelling vaak toegepast. Om te zien of n oplossingen Op opspannen werd gecontroleerd (via de Wronskiaan) of de oplossingen onafhankelijk waren!

Stelling: Als $X' = P(t)X$ een homogeen $n \times n$ lineair stelsel is (met $p_{i,j}(t)$ continue op I) dan is de oplossingsverzameling Op een lineaire deelruimte van $C(I, \mathbb{R}^n)$ (dan wel $C(I, \mathbb{C}^n)$) met $\dim(Op) = n$. $\square$

Inwendig product

Definitie: Laat V een vectorruimte V over $\mathbb{L}$ zijn. Een inwendig product op V is een voorschrift dat aan twee vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ een getal $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{L}$ toekent met de volgende eigenschappen :

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$, voor alle $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in V
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$, voor alle $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ in V
3. $\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, voor alle $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in V en $c \in \mathbb{L}$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ is reëel en $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$, voor elke $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ uit V.
   (Positief definiet)

De vectorruimte V met dit inwendig product heet een inwendig productruimte. Als V een reële vectorruimte, dan: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, voor alle $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in V. $\square$

Rekenregels inwendig product

Laat $\langle , \rangle$ een i.p. op V zijn. Dan:

1. $\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$, voor alle $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ en $\mathbf{v}$ in V.
2. Als $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ dan $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{c} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, voor alle $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in V en $c \in \mathbb{C}$.
   Als $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ dan $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, voor alle $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in V en $c \in \mathbb{R}$.
3. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0$, voor alle $\mathbf{u}$ in V.
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, als en slechts als $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
5. Als voor alle $\mathbf{u}$ in V geldt dat $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle$, dan $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. $\square$

Standaard inwendig producten

Op $\mathbb{R}^n$ is $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ als standaard inwendig product.
Op $\mathbb{C}^n$ kennen we $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$ als standaard inwendig product.
Op $\mathbb{R}^\infty$ of $\mathbb{C}^\infty$ kennen we geen (standaard) inwendig product.
Op $C([a,b],\mathbb{R})$ (en de deelruimtes) kennen we

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}$$

als standaard inwendig product.
Op $C([a,b],\mathbb{C})$ (en de deelruimtes) kennen we

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \overline{\mathbf{f}(\mathbf{x})}\mathbf{g}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}$$

als standaard inwendig product. □

Introductie meetkunde

V inwendig product ruimte met i.p.: $\langle , \rangle$. Dan:

- Lengte vector: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$
- Rekenregel: $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$ en $\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{v}\| = 0$.
- Eenheidsvectoren.
- Normeren vector.
- Afstand vectoren: $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

Vraag: wat stellen begrippen als lengte, afstand voor in functieruimtes? □

Orthogonaliteit

V inwendig product ruimte met inwendig product $\langle , \rangle$. Dan:
Definitie: De vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ zijn orthogonaal als $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
Notatie: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
Stelling: (Pythagoras) Als de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ orthogonaal zijn, dan geldt $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
In een reële inwendig productruimte geldt het omgekeerde.

Als $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$. dan zijn $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ orthogonaal. $\square$

Beroemde standaard stellingen

De volgende stelling bewijzen we niet.
Stelling: (Cauchy-Schwarz)
Als $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan geldt:

$$| \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle | \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$$

Er treedt gelijkheid op als en slechts als $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ afhankelijk zijn.
De volgende stelling wordt ook ook niet bewezen.
Stelling: (Driehoeksongelijkheid) Als $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan geldt:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

$\square$

Orthogonaal complement

Laat V een i.p.ruimte zijn, reëel of complex, met deelruimte W.
Definitie: We zeggen dat $\mathbf{x} \in V$ loodrecht op W als $\mathbf{x} \perp \mathbf{w}$, voor iedere $\mathbf{w} \in W$. Notatie: $\mathbf{x} \perp W$.
Definitie: Het *orthogonale complement* van W is de verzameling van alle vectoren die loodrecht staan op W. Notatie: $W^{\perp}$.
Stelling: Het orthogonaal complement van W is deelruimte V.
Stelling: Als $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \ldots\}$ deelruimte van V, dan $\mathbf{w} \in W^{\perp}$ als en slechts als $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}_i$, voor alle i.

In het algemeen is het lastig $W^{\perp}$ te bepalen. $\square$

Projecteren op een vector

Definitie: Laat V een i.p.ruimte zijn met vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{a}$ in V.
Die vector $c\mathbf{a}$ in $\mathrm{Span}\, a$ met $\mathbf{x} - c\mathbf{a} \perp \mathbf{a}$ heet de (orthogonale) projectie van $\mathbf{x}$ op $\mathbf{a}$ en wordt genoteerd met:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}).$$

De vector $\mathbf{x} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ heet de component van $\mathbf{x}$ loodrecht op $\mathbf{a}$.
Notatie boek:

$$\mathrm{perp}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}).$$

Stelling: Er geldt:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}\right) \mathbf{a}.$$

Het getal $\dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ heet de Fourriercoëfficient. $\square$

Decompositiestelling

Stelling: Laat V een i.p.ruimte zijn, reëel of complex, met eindig dimensionale deelruimte W. Stel $\mathbf{x} \in V$. Er geldt:

1. $\mathbf{x}$ is te schrijven als $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\sharp$ met $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w}^\sharp \in W^\perp$ en dit op unieke wijze.
2. Er geldt: als $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ een orthogonale basis W, dan:
$$\mathbf{w} = \left(\frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1\rangle}\right)\mathbf{b}_1 + \cdots + \left(\frac{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n\rangle}\right)\mathbf{b}_n.$$

Stelling: In de decompositiestelling (met W eindig dimensionaal)

is $\mathbf{w}$ de unieke vector in W met kleinste afstand tot $\mathbf{x}$. $\square$

Orthogonaal projecteren

Definitie: Laat V een i.p.ruimte zijn, reëel of complex, met eindig dimensionale deelruimte W. Stel $\mathbf{x} \in V$. Als $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\sharp$ met $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w}^\sharp \in W^\perp$ dan:
$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Stelling: Als $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ een orthogonale basis W, dan:
$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \left(\frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1\rangle}\right)\mathbf{b}_1 + \cdots + \left(\frac{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n\rangle}\right)\mathbf{b}_n.$$

Het vervelende van deze stelling is dat men een een orthogonale basis nodig heeft.

Definitie: De vector $\mathbf{w}^\sharp = \mathbf{x} - \mathrm{proj}_W(\mathbf{x})$ heet de component van $\mathbf{x}$ loodrecht op W.

Gram-Schmidt proces

Het Gram–Schmidt proces levert weer een orthogonale basis op een eindig dimensionale deelruimte.

Stelling: (Het Gram–Schmidt proces) Als $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ een basis is van W dan vormen de vectoren:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\right) \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\right) \mathbf{w}_1 - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\right) \mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_n \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\right) \mathbf{w}_1 - \cdots - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{v}_n \rangle}{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1} \rangle}\right) \mathbf{w}_{n-1}$$

een orthogonale basis voor W. $\square$

Aanbevolen opgaven

College 3	behandeld	aanbevolen opgaven
	§6.2	??
	§7.1	??