# Lineaire Algebra en differentiaalvergelijkingen

# College 8: Orthogonaal diagonaliseren.

J. Vermeer
Les 8



## Orthogonaal diagonaliseren I

Definitie: $A$ een reële $n \times n$ matrix. De matrix $A$ heet orthogonaal diagonaliseerbaar als er een diagonalisering $A = PDP^{-1}$ bestaat met $P$ een orthogonale matrix.

Stelling: Stel dat de matrix $A$ orthogonaal diagonaliseerbaar is. Dan is de matrix $A$ symmetrisch!

Is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ orthogonaal diagonaliseerbaar? En de matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$??

Is het toeval dat de matrix $B$ orthogonaal diagonaliseerbaar is?

□

# Orthogonaal diagonaliseren II

We gaan bewijzen dat iedere (reële) symmetrische matrix (reëel) orthogonaal diagonaliseerbaar is.
Stelling: Laat $A$ een symmetrische matrix zijn. Dan geldt dat alle nulpunten van $p_A(\lambda)$ reëel zijn. (Dus alle eigenwaarden van $A$ zijn reëel).
De volgende stelling bewijzen we niet.
Stelling: Laat $A$ een symmetrische matrix zijn. Dan is $A$ een reëel diagonaliseerbare matrix.
(Equivalent: $m.m.(\lambda) = a.m.(\lambda)$ voor iedere (noodzakelijk reële) eigenwaarde $\lambda$.)

Stelling: Laat $A$ een symmetrische matrix zijn. Dan geldt dat eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden orthogonaal zijn.

□



# Orthogonaal diagonaliseren III

Uit bovenstaande stelling volgt dat symmetrische matrices orthogonaal diagonaliseerbaar zijn. We geven het bewijs als procedure.
Procedure: (Hoe een symmetrische matrix $A$ orthogonaal te diagonaliseren.)

1. Bepaal de eigenwaarden van $A$ (deze zijn alle reëel).
2. Bepaal voor iedere $\lambda$ een basis voor de eigenruimte $E_\lambda$.
3. Gebruik nu Gram-Schmidt om voor iedere eigenruimte $E_\lambda$ een orthonormale basis te bepalen.
4. Zet de basisvectoren in matrix $Q$. Dan: $Q$ is vierkant (waarom?) en $Q$ is een orthogonale matrix (waarom?).
5. Dan $A = QDQ^{-1} = QDQ^T$ is een orthogonale diagonalisering van $A$. □

## Voorbeeld van een orthogonale diagonalisering

Beschouw de matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Bepaal een orthogonale diagonalisering van $A$.

Opgave: Verzin een symmetrische $3 \times 3$ matrix $A$ met vlak $x + y - z = 0$ als eigenruimte $E_4$ en met nog een eigenwaarde $\lambda = 6$.

§5.4 besproken tot en met VB 5.18 (tot halverwege blz. 416).

Rest van deze paragraaf wordt overgeslagen. □



## Aanbevolen opgaven

| College 3 | behandeld | aanbevolen opgaven |
|---|---|---|
| | §5.4 | §5.4: 1,7,15,17,19,21,23 |