

Opmerking: het gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan. Geef bij de antwoorden duidelijke argumenten aan, tenzij anders wordt vermeld!

1. Beschouw de reële vectorruimte $M_{3 \times 3}(R)$ van alle 3×3 matrices.

- (1) (a) Wat is de dimensie van deze vectorruimte? (Antwoord volstaat)
- (2) (b) Geef een basis van deze vectorruimte. (Antwoord volstaat)

Beschouw de deelverzameling W van $M_{3 \times 3}(R)$ van alle symmetrische matrices.

- (3) (c) Toon aan dat W een deelruimte is van $M_{3 \times 3}(R)$.
- (3) (d) Geef een basis van W . (Antwoord volstaat)
- (1) (e) Bepaal de dimensie van W .

2. Beschouw $C([0, 2], \mathbb{R})$, de vectorruimte van alle continue reële functies op het interval $[0, 2]$ met het standaard inwendigproduct. Beschouw ook de deelruimte $V = Pol_1([0, 2], \mathbb{R})$ (alle lineaire polynomen op $[0, 1]$).

- (3) (a) Maak uit de basis $\{1, x\}$ een orthogonale basis van V .
- (5) (b) Bepaal de beste lineaire benadering van de functie $f(x) = x^3$ op het interval $[0, 2]$.
- (2) (c) Leg uit wat “beste lineaire benadering op $[0, 2]$ ” betekent.

3. Beschouw het gekoppelde stelsel

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (*).$$

- (4) (a) Bepaal de algemene (reële) oplossing van het stelsel (2).
- (5) (b) Bepaal e^{At} .
- (2) (c) Voeg aan het stelsel (*) de beginvoorwaarde $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ toe. Bepaal de oplossing van dit beginwaardeprobleem.

Z.O.Z.

4. Beschouw het volgende autonome stelsel:

$$\begin{cases} x' &= y^2 - 2y \\ y' &= x - 1 \end{cases}$$

- (2) (a) Bepaal de twee evenwichtoplossingen van dit stelsel.
- (3) (b) Bepaal in beide evenwichtspunten de linearisering en bepaal type en stabiliteit van het evenwichtspunt van de linearisering.
- (2) (c) Bij één van de twee gelineariseerde stelsels draaien de trajectorieën (de gerichte banen in het fasevlak) van de oplossingen rondom het evenwichtspunt. Welk van de twee is dat en draaien de trajectorieën linksom of rechtsom het evenwichtspunt?
- (4) (d) Bepaal, indien mogelijk, type en stabiliteit van beide evenwichtspunten van het oorspronkelijke stelsel.

- (4) 5. (a) Bepaal de Fourier sinusreeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$ van de constante functie $f(x) = 1$ op het interval $[0, 2]$.

- (7) (b) Beschouw de warmtevergelijking met gegeven rand- en beginvoorwaarden.

$$\begin{cases} u_{x,x} = 2u_t & 0 < x < 2, \quad t > 0 & (1) \\ u(0, t) = 0 \text{ en } u(2, t) = 0, & t > 0 & (2) \\ u(x, 0) = 1, & 0 < x < 2 & (3) \end{cases}$$

Bepaal de oplossing $u(x, t)$ met behulp van scheiden van variabelen.

Normering: Totaal zijn er 54 punten te verdienen. Als T het totaal van de behaalde punten is, dan:

$$\text{Tentamencijfer deel 2} = \frac{6 + T}{6}$$