Uitwerking + normering.

K	1	2	3	4	5

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen (deel 1) EE2M21, 13.30-15.30, Woensdag 9 december 2015
Naam: Studienummer:

Opmerking: Voor de korte antwoord vragen volstaat het antwoord.Bij de open vragen is duidelijke uitleg vereist. Het gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan.

Korte antwoord vragen

(2) **1.** A en B zijn 3×3 matrices met $\det(A) = 1$ en $\det(B) = 5$. Bepaal $\det(2AB)$.

$\boxed{40}$

(2) **2.** A is een 2×2 matrix met eigenvector $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ bij eigenwaarde $\lambda_1 = 1/2$ en eigenvector $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bij eigenwaarde $\lambda_2 = 1$. Beschouw de rij $\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 0}$ met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$. Bepaal een expliciete formule voor $\mathbf{x}_n$ en bepaal $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$.

1 $\boxed{\underline{x}_n = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$ 1

(2) **3.** Geef de definitie van een orthogonale matrix.

1 A is orthogonaal $\iff$
A is vierkant & kolommen A orthonormaal 1 | OF: $A^{-1} = A^T$ 2

(2) **4.** A is een symmetrische 2×2 matrix met eigenwaarden $\lambda = 2, 4$ en basis E_2: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Geef een diagonalisering van de matrix A.

$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ met } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ en } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}$ 1 1

(2) **5.** Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $t^2y' = ty + t^3e^t$ op het interval $(0, \infty)$.

$\boxed{y(t) = te^t + Ct}$ 1 1 ($+ te^t + C$ 1 punt)

(2) **6.** Bepaal de oplossing van de Eulervergelijking $t^2y'' + 5ty' + 3y = 0$ met $t > 0$. (Hint: probeer $y(t) = t^r$.)

$\boxed{y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-3}}$ 2

~~y(t)~~ alleen t^{-1}, t^{-3}: 1 punt

→ bij antwoord $(-2,2)$: 1 punt.

(2) **7.** Gegeven is het beginwaardeprobleem: $ty''+p(t)y'+q(t)y=t^2$ met $y(-1)=2$, $y'(-1)=0$. De functie $p(t)$ is continu op het open interval $(-4,2)$ en de functie $q(t)$ is continu op het interval $(-2,3)$. Geef een zo groot mogelijk open interval I waarop de oplossing $y(t)$ van dit beginwaardeprobleem zeker zal bestaan.

$\boxed{(-2,0)}$ (2)

(2) **8.** Beschouw het homogene lineaire stelsel $X'=AX$ met $X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ en $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel.

$$\boxed{X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}} \quad (2)$$

goed/fout.

Open vragen

(3) **1.** Laat Q een orthogonale $n\times n$ matrix zijn. Toon aan: $\det(Q)=\pm 1$.

Q orthogonaal $\Longleftrightarrow$ $Q^{-1}=Q^T$ (1) $\Rightarrow$ $\det(Q^{-1}) = \det(Q^T) = \det(Q)$ iets van (1)

$\Rightarrow \dfrac{1}{\det(Q)} = \det(Q)$ (1) $\Rightarrow (\det Q)^2 = 1$

$\Rightarrow \det Q = \pm 1$

(5) **2.** Bepaal de orthogonale projectie van de vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ op het vlak $x-2y+3z=0$.

Methode 1. • Basis $x-2y+3z=0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 2y-3z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1) wordt $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \{a_1, a_2\}$

• Orthogonale basis via Gram Schmidt

(2) $w_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$w_2' = a_2 - \left(\dfrac{a_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\right) w_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(-\dfrac{6}{5}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 6/5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow w_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

Dan: $\{w_1, w_2\}$ is orthogonale basis

• Projectie $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ wordt $\underbrace{\left(\dfrac{w_1 \cdot x}{w_1 \cdot w_1}\right) w_1 + \left(\dfrac{w_2 \cdot x}{w_2 \cdot w_2}\right) w_2}_{\text{formule = 1 punt}} =$

(2) $= \left(-\dfrac{1}{5}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\dfrac{1}{5}\right)\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

projectie op basis $\{a_1, a_2\}$ ⇒ 0 punten (ook niet voor formule)

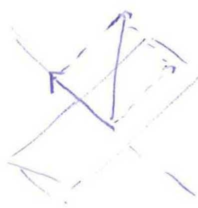
niet ⊥

Methode 2. (Zal niemand hebben).

(5) Orthogonaal complement vlak $= \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

projectie $\underline{x}$ op $W^\perp$: $\left(\dfrac{a\cdot x}{a \cdot a}\right) \underline{a} = \left(\dfrac{28}{14}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

projectie $\underline{x}$ op W : $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Uitwerking + normering

Tentamen (deel 1) EE2M21, 13.30-15.30, Woensdag 9 december 2015
Naam: Studienummer:

---

3. Beschouw de reële matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

(3) (a) Bepaal de QR-ontbinding van A.

$A = [a_1 \ a_2]$ $\{a_1, a_2\}$ basis $Kol(A) = \mathbb{R}^2$

Gram Schmidt op $\{a_1, a_2\}$:

$w_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$w_2 = a_2 - \left(\frac{w_1 \cdot a_2}{w_1 \cdot w_1}\right) a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{8}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (1)

normeren: $q_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $q_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Q = [q_1 \ q_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (1)

formule is 1 punt waard.

$R \overset{(1)}{=} Q^T A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ +1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(4) (b) Bepaal de reële oplossing van het lineaire stelsel $X' = AX$ met $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

Eigenwaarden: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3+\lambda) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 + 1$

Dus: $\lambda = -1 \pm i$ (1)

Basis $E_{-1+i} = Nul(A - (-1+i)I)$ $\left[\begin{array}{cc|c} 2-i & 5 & 0 \\ -1 & -2-i & 0 \end{array}\right]$

of vegen naar $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} -2-i \\ 1 \end{bmatrix}$ (1)

geeft $X_p(t) = \begin{bmatrix} -2-i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} = \begin{bmatrix} -2-i \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}(\cos t + i \sin t) =$

$= \begin{bmatrix} -2e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$ (1)

niet te streng met rekenfouten in X_p

en dus

$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2\cos t + \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{-t}$ (1)

OF

of vegen naar $\left[\begin{array}{cc|c} 2-i & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2+i \end{bmatrix}$ (1)

geeft $X_p(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ -2+i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2+i \end{bmatrix} e^{-t}(\cos t + i \sin t) =$

$= \begin{bmatrix} 5e^{-t}\cos t \\ -2e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 5e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$ (1)

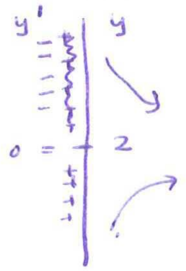
dus: $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 5\cos t \\ -2\cos t - \sin t \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 5\sin t \\ \cos t - 2\sin t \end{bmatrix} e^{-t}$ (1)

4. Beschouw de autonome differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}(y-2)^3$.

(2) (a) Bepaal het/de evenwichtspunt(en) en bepaal van deze het type.

antwoorden volstaan.

$y = 2$ 1



Stabiel evenwichtspunt 1.

(4) (b) Bepaal een oplossing $y_1(t)$ met $y_1(2) = 3$.
Heeft deze oplossing een verticale asymptoot?

Separabel: 1 punt zeggen.

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(y-2)^3 \overset{1}{\Longrightarrow} \int \frac{-2}{(y-2)^3}\,dy = \int 1\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(y-2)^2} = t + C \xrightarrow{y(2)=3} C = -1 \quad 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(y-2)^2} = t - 1 \Rightarrow (y-2)^2 = \frac{1}{t-1} \quad (t>1)$$

$$\Rightarrow y - 2 = \pm + \frac{1}{\sqrt{t-1}} \Rightarrow y(t) = 2 + \frac{1}{\sqrt{t-1}} \quad (t>1) \quad 1$$

uitleg + niet nodig

Kennelijk: $y(t)$ heeft vertikale asymptoot bij $t = 1$ 1

6

(2) (c) Bepaal een oplossing $y_2(t)$ met $y_2(2) = 2$.

Aanpak als bij (b) lukt niet (C niet te bepalen)

Kennelijk:

a $\Rightarrow$ $y(t) = 2$ (alle t) 2.

Antwoord volstaat

Uitwerking + normering.

Tentamen (deel 1) EE2M21, 13.30-15.30, Woensdag 9 december 2015
Naam: Studienummer:

---

(6) **5.** Van de homogene lineaire differentiaalvergelijking $t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=0$ $(t>0)$ zien we één oplossing $y_1(t)=t$. Bepaal via reductie van orde de algemene oplossing $y(t)$ op het interval $(0,\infty)$.

Stel $y(t) = c(t)\, y_1(t) = t\, c(t)$ is oplossing (1)

Dan:

$$\begin{array}{lll} y(t) = t\,c(t) & & \times(t+2) \\ y'(t) = c(t) + t\,c'(t) & & \times -t(t+2) \\ y''(t) = 2c'(t) + t\,c''(t) & & \times t^2 \end{array} \quad +$$

$$0 = 0 + (-t^2(t+2)+2t^2)c'(t) + t^3c''(t).$$ (3)

$\Rightarrow t^3c'' - t^3c' = 0$

$c''(t) - c'(t) = 0$ (mag $c'(t) = u(t)$ stellen deze wel erg simpel)

$[c'(t) - c(t)]' = 0$

$c'(t) - c(t) = c_1$

$p(t) = -1 \Rightarrow P(t) = -t \Rightarrow I(t) = e^{P(t)} = e^{-t}$

$\underbrace{e^{-t}c'(t) - e^{-t}c(t)}_{[e^{-t}c(t)]'} = c_1e^{-t}$

$[e^{-t}c(t)]' = c_1e^{-t}$

$e^{-t}c(t) = -c_1e^{-t} + c_2$

$c(t) = \underbrace{-c_1}_{\text{mag } +c_1 \text{ noemen}} + c_2e^t$ (2)

$\Rightarrow \boxed{y(t) = t\,c\,t = c_1t + c_2te^t.}$ (1)

Normering: Voor korte antwoord resp. open vragen zijn 16 resp. 29 punten te halen. Als voor deze delen K resp. O punten gehaald zijn, dan:

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{5+K+O}{5}$$