Lineaire Algebra en differentiaalvergelijkingen

College 7: GramSchmidtt, projectiematrices en complexe diagonalisering.

J. Vermeer

Les 7

De decompositiestelling ophalen

Stelling: Laat W een deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt: $\mathbf{x}$ is te schrijven als $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\sharp$ met $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{w}^\sharp \in W^\perp$. Bovendien geldt dat $\mathbf{w}$ en $\mathbf{w}^\sharp$ uniek zijn.

Definitie:1. De vector $\mathbf{w}$ het de orthogonale projectie van $\mathbf{x}$ op W en wordt genoteerd met $\text{proj}_W(\mathbf{x})$.

2.De vector $\mathbf{w}^\sharp$ heet de component van $\mathbf{x}$ loodrecht op W.

Stelling: Als W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ met orthogonale basis $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$ dan geldt voor iedere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\right) \mathbf{b}_1 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_k}\right) \mathbf{b}_k$$

$\square$

Voorbeeld van een projectie

Als $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bepaal de projectie van $\mathbf{x}$ op $W == \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

Stap 1: Controleer dat $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ een basis is, zoniet, dun dan uit tot een basis.

Pas op, het volgende is niet de projectie.

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) \neq \left(\frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\right)\mathbf{a}_1 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3}\right)\mathbf{a}_3$$

Want, de basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ is NIET orthogonaal.

Stap 2: Bepaal een orthogonale basis van W. $\square$

Gram-Schmidt proces

Het Gram–Schmidt proces construeert vanuit een gegeven basis een orthogonale basis voor de deelruimte.

Stelling: (Het Gram–Schmidt proces) Als $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ een basis is van W dan vormen de vectoren $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ met:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{b}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{b}_n - \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{b}_n \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{b}_n \rangle}{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1} \rangle}\mathbf{w}_{n-1}$$

een orthogonale basis voor W. $\square$

QR-ontbinding matrix

Herinner:
Definitie: Een vierkante matrix R heet een bovendriehoeksmatrix als $[R]_{i,j} = 0$ voor $i > j$.
Stelling: Zij $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k]$ een $n \times k$ matrix zijn met onafhankelijke kolommen. Dan geldt: de matrix A is te factorizeren als $A = QR$ met Q een $n \times k$ met k orthonormale kolommen en R een inverteerbare bovendriehoeksmatrix.
In bovenstaande stelling is de matrix Q te bepalen door het Gram-Schmidt proces op $\{\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_k\}$ toe te passen en de uiteindelijke orthogonale vectoren te normeren tot $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k\}$.

Schrijf $Q = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_k]$. Dan is R is het simpelste te bepalen via

$R = Q^T A$. (Die zal dus bovendriehoeks moeten zijn!) $\square$

Projectiematrices

Stelling: Laat W een één dimensionale deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$. Stel dat $\{\mathbf{q}\}$ een basis is van W met $||\mathbf{q}|| = 1$ (een orthonormale basis!). Dan geldt: $P = \mathbf{q}\mathbf{q}^T$ is een $n \times n$ matrix met de eigenschap:

$$P\mathbf{x} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{x}), \text{ voor alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

P heet een projectiematrix.
Stelling: Laat W een deelruimte zijn van $\mathbb{R}^n$. Stel dat $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k\}$ een orthonormale basis zijn.
Dan geldt als: $P = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \dots + \mathbf{q}_k\mathbf{q}_k^T$ dan:

$$P\mathbf{x} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{x}), \text{ voor alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

P heet weer een projectiematrix. $\square$

Eigenwaarden complexe matrices

Stel dat A een complexe $n \times n$ matrix is.
Definitie: $\lambda \in \mathbb{C}$ is een eigenwaarde van A, als $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ bestaat met $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
Alle $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ met $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ heet weer de eigenruimte E_λ van A.
Stelling: Er geldt:

1. $E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$
2. λ is eigenwaarde A als $\det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) = 0$
3. Graad van λ als nulpunt $p_A(\lambda)$: $a.m.(\lambda)$.
4. $\dim(E_\lambda) = \dim(\mathrm{Nul}(A - \lambda I))$: $m.m.(\lambda)$
5. $m.m.(\lambda) \leq a.m.(\lambda)$.

Bepaal eigenwaarden en eigenruimtes $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$. □

Diagonaliseren complexe matrices

Definitie: Een (complexe) matrix A heet (complex) diagonaliseerbaar als $A = PDP^{-1}$ met D een complexe diagonaalmatrix en P een complexe matrix.
Dezelfde resultaten gelden ook complex.
Stelling: A een complexe $n \times n$ matrix. Equivalent zijn:

1. A is (complex) diagonaliseerbaar.
2. $\displaystyle\sum_\lambda m.m.(\lambda) = n$
3. Voor alle eigenwaarde λ geldt: $m.m.(\lambda) = a.m.(\lambda)$

Voorbeeld: Is de matrix $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ diagonaliseerbaar? □

Complex diagonaliseren reële matrices I

Definitie: De reële matrix A heet reëel diagonaliseerbaar als $A = PDP^{-1}$ met D een reële diagonaalmatrix en P een reële matrix.
De reële matrix A heet complex diagonaliseerbaar als $A = PDP^{-1}$ met D een complexe diagonaalmatrix en P een complexe matrix.
Een reëel diagonaliseerbare matrix is complex diagonaliseerbaar. (Ook reële getallen zijn complex). Maar niet omgekeerd!

Voorbeeld: De matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ is complex diagonaliseerbaar, niet reëel diagonaliseerbaar. $\square$

Complex diagonaliseren reële matrices II

Stelling: A een reële $n \times n$ matrix. Equivalent zijn:

1. A is reëel diagonaliseerbaar.
2. $\sum_{\lambda} m.m.(\lambda) = n$, met sommatie over de reële eigenwaarden.

Stelling: A een reële $n \times n$ matrix. Equivalent zijn:

1. A is complex diagonaliseerbaar.
2. $\sum_{\lambda} m.m.(\lambda) = n$, met sommatie over de complexe eigenwaarden.

$\square$

Aanbevolen opgaven

College 7	behandeld	aanbevolen opgaven
	§5.3 (G.S en QR)	§5.3: 3,5,7,9,13,15
	projectiematrices	§5.3: Bepaal projectie-matix opgave 5,6
	complex diagonaliseren	B.B. opgave 1,2,3,4