Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerking Oefententamen (deel 2) EE2M21.
Cursusjaar 2014-2015

1. (Vind men onderstaand bewijs lastig, bekijk dan is het bwijs voor $= 3$ of $n = 4$.)

(a) Als $M_{n\times n}(R)$ de reële vectorruimte van alle $n \times n$ matrices is, dan zegt een formule (die u geacht wordt te kennen): $\dim(M_{n\times n}(R)) = n^2$.

(b) Laat $M_{i,j}$ de $n \times n$ matrix zijn met alle kentallen 0, behalve het i, j^{de} kental: dat is 1. Dan is $\{M_{i,j} | 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$ een basis voor $M_{n\times n}(R)$, en inderdaad, deze basis heeft n^2 veel elementen.

Beschouw de deelverzameling W van $M_{n\times n}(R)$ van alle symmetrische matrices.

(c) W is een deelruimte is van $M_{n\times n}(R)$, want:
(i) de nulvector= nulmatrix O is symmetrisch, zit dus in W,
(ii) Als $A, B \in W$, dan zijn A, B symmetrisch, d.w.z. $A^T = A$ en $B^T = B$ en dus: $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, d.w.z. $A + B$ is symmetrisch en dus $A + B \in W$,
(iii) Als $A \in W$ dan A symmetrisch en dus cA is symmetrisch, voor alle $c \in \mathbb{R}$. Maar dan: $cA \in W$, voor alle $c \in W$.

(d) Een basis van W: beschouw de matrices $M_{i,i}$ (zie (b)) en de matrices $M_{i,j} + M_{j,i}$ (voor $i \ne j$). Dus het type $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en het type $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

De verzameling matrices $\{M_{i,i} | 1 \le 1 \le n\} \cup \{M_{i,j} + M_{j,i} | 1 \le i < j \le n\}$ vormen een basis voor W. Inderdaad, deze matrices zitten in W.

Deze matrices spannen W op. Inderdaad, als $A = [a_{i,j}] \in W$ dan $A = a_{1,1}M_{1,1} + \cdots + a_{n,n}M_{n,n} + \sum\{a_{i,j}(M_{i,j} + M_{j,i}) : 1 \le i < j \le n\}$.

En deze verzameling matrices is onafhankelijk. Om dit in te zien, stel:
$c_{1,1}M_{1,1} + \cdots + c_{n,n}M_{n,n} + \sum\{c_{i,j}(M_{i,j} + M_{j,i}) : 1 \le i < j \le n\} = O$ (de nulmatrix.)

De som wordt de matrix: $\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{2,3} & \cdots \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ en als dit de nulmatrix is dan zijn alle $c_{i,i}$ en alle $c_{i,j}$ gelijk aan 0.

(e) De dimensie van W is gelijk aan het aantal matrices in bovenstaande basis en dit is kennelijk gelijk aan het aantal kentallen in de bovendriehoek (met diagonaal) er bij. Dit aantal is alsvolgt te bereken. $n^2 - n$ is het aantal van de twee kleine driehoeken (zonder diagonaal) en de kleine driehoek heeft dus: $\dfrac{n^2 - n}{2}$ kentallen. Met diagonaal er bij wordt dit: $\dfrac{n^2-n}{2}+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$. Men kan ook het aantal tellen van de grote driehoek via de aantallen kentallen van de rijen, en dat is $1+2+3+\cdots+n$. Kortom:

$$\dim(W)=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

2. Beschouw $C([-1,1],\mathbb{R})$ en de deelruimte $W=Pol_2([-1,1],\mathbb{R})$ (alle polynomen op $[-1,1]$ van graad ≤ 2) met standaard i.p.

(a) Via Gram-Schmidt maken we uit de basis $\{1,x,x^2\}$ een orthogonale basis van W.
(i) $\mathbf{w}_1=1$.
(ii) Omdat $x\perp 1$ wordt: $\mathbf{w}_2=x$.
(iii) $\mathbf{w}_3=x^2-\dfrac{\langle x,x^2\rangle}{\langle x,x\rangle}-\dfrac{\langle 1,x^2\rangle}{\langle 1,1\rangle}=x^2-\dfrac{1}{3}$.
Dan is $\{1,x,x^2-\frac{1}{3}\}$ een orthogonale basis van W.

(b) De beste kwadratische benadering $a+bx+cx^2$ van de functie $f(x)=210x^4$ op het interval $[-1,1]$ is de projectie van f in $C([-1,1],\mathbb{R})$ op $\mathrm{Span}\{1,x,x^2\}=W$. Hiervoor is een orthogonale basis nodig en die is bepaald bij (a). Daarom:

$$\mathrm{proj}_W(f)=\left(\frac{\langle 1,210x^4\rangle}{\langle 1,1\rangle}\right)1+\left(\frac{\langle x,210x^4\rangle}{\langle x,x\rangle}\right)x+\left(\frac{\langle x^2-1/3,210x^4\rangle}{(x^2-1/3)(x^2-1/3)}\right)(x^2-1/3)=$$

$$=\left(\frac{\int_{-1}^1 210x^4\,dx}{\int_{-1}^1 1\,dx}\right)1+\left(\frac{\int_{-1}^1 210x^5\,dx}{\int_{-1}^1 x^2\,dx}\right)x+\left(\frac{\int_{-1}^1 (x^2-1/3)210x^4\,dx}{\int_{-1}^1 (x^2-1/3)^2\,dx}\right)(x^2-1/3)=$$

$$\frac{420/5}{2}+\left(\frac{0}{2/3}\right)x+\left(\frac{32}{8/45}\right)(x^2-1/3)=42+180(x^2-1/3)=180x^2-18$$

(c) De "beste kwadratische benadering van f op $[-1,1]$" is die kwadratische functie $a+bx+x^2$ met kleinste afstand tot f. Daar deze afstand ongeveer gelijk is aan:

$$d(f,a+bx+cx^2)=\|f(x)-ax-bx-cx^2\|=$$

$$=\sqrt{\langle f(x)-ax-bx-cx^2,f(x)-ax-bx-cx^2\rangle}=\sqrt{\int_{-1}^1 (f(x)-ax-bx-cx^2)^2\,dx}$$

Hoewel het wortelteken buiten de integraal en kwadraat binnen de integraal NIET tegen elkaar wegvallen zou men dit voor de intuïtie toch kunnen laten doen en we zien: $d(f,a+bx+cx^2)\approx\int_{-1}^1|f(x)-ax-bx-cx^2|\,dx$ en dan kunnen we zeggen dat de projectie van $f(x)$ die kwadratische functie is met praktisch kleinste oppervlakte tussen $f(x)=210x^4$ en $a+bx+cx^2$ op het interval $[-1,1]$.

3. (a) *(i)* $\|g\|^2=\langle g,g\rangle=\int_{-L}^L g^2(x)\,dx=\int_{-L}^L\cos^2(\frac{n\pi x}{L})\,dx=\int_{-L}^L(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\frac{2n\pi x}{L}))\,dx=$
$=[\frac{1}{2}x+\frac{L}{4n\pi}\sin(\frac{2n\pi x}{L})]|_{-L}^L=L$.

(ii) $g\perp h$, want: $\langle g,h\rangle=\int_{-L}^L\cos(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi x}{L})\,dx=$ (Formule t-15 met $n\neq m$, formuleblad) $=\left[-\dfrac{\sin(n\pi-m\pi)x}{2(n\pi-m\pi)}-\dfrac{\sin(n\pi+m\pi)x}{2(n\pi+m\pi)}]\right|_{-L}^L=0$ (want beide fincties $\sin(k\pi x)$ zijn nul in $\pm L$)

(b) Bepaal de tweede orde Fourrierbenadering $F_2(x)$ van f met $f(x) = |x|$ op $[-L, L]$.
Omdat $f(x)$ een even functie is op $[-L, L]$ zal gelden: $b_k = 0$ als $k \geq 1$.

$a_0 = \dfrac{\langle 1, f\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \dfrac{\int_{-L}^{L} 1.f(x)\,dx}{\int_{-L}^{L} 1\,dx} = \dfrac{\int_{-L}^{L} |x|\,dx}{2L} = \dfrac{L^2}{2L} = \dfrac{L}{2}.$

$a_1 = \dfrac{\left\langle \cos(\frac{\pi x}{L}), f\right\rangle}{\left\langle \cos(\frac{\pi x}{L}), \cos(\frac{\pi x}{L})\right\rangle} = \dfrac{\int_{-L}^{L} |x| \cos(\frac{\pi x}{L})\,dx}{\int_{-L}^{L} \cos^2(\frac{\pi x}{L})\,dx} = \dfrac{2\int_0^L x\cos(\frac{\pi x}{L})\,dx}{L} = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L x\cos(\frac{\pi x}{L})\,dx =$
$\dfrac{2}{L}\left(\dfrac{L}{\pi}x\sin(\dfrac{\pi x}{L})|_0^L - \displaystyle\int_0^L \frac{L}{\pi}\sin(\frac{\pi x}{L})\,dx\right) = \dfrac{2}{L}\left(0 + \dfrac{L^2}{\pi^2}\cos(\dfrac{\pi x}{L})|_0^L\right) = \dfrac{2L}{\pi^2}(\cos\pi - \cos 0) =$
$\dfrac{-4L}{\pi^2}.$

$a_2 = \dfrac{\left\langle \cos(\frac{2\pi x}{L}), f\right\rangle}{\left\langle \cos(\frac{2\pi x}{L}), \cos(\frac{2\pi x}{L})\right\rangle} = \dfrac{\int_{-L}^{L} |x| \cos(\frac{2\pi x}{L})\,dx}{\int_{-L}^{L} \cos^2(\frac{2\pi x}{L})\,dx} = \dfrac{2\int_0^L x\cos(\frac{2\pi x}{L})\,dx}{L} = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L x\cos(\frac{2\pi x}{L})\,dx$
$= \dfrac{2}{L}\left(\dfrac{L}{2\pi}x\sin(\dfrac{2\pi x}{L})|_0^L - \displaystyle\int_0^L \frac{L}{2\pi}\sin(\frac{2\pi x}{L})\,dx\right) = \dfrac{2}{L}\left(0 + \dfrac{L^2}{\pi^2}\cos(\dfrac{2\pi x}{L})|_0^L\right) = \dfrac{2L}{\pi^2}(\cos 2\pi -$
$\cos 0) = 0.$

Dus: $F_2(x) = a_0 + a_1\cos(\frac{\pi x}{L}) + b_1\sin(\frac{\pi x}{L}) + a_2\cos(\frac{2\pi x}{L}) + b_2\sin(\frac{2\pi x}{L}) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\cos(\frac{\pi x}{L}).$

(c) Als men de grafieken van $F_n(x)$ van $f(x)$ zal schetsen, zal dan het Gibbs-fenomeen optreden?
Antwoord: nee! Dat is niet alleen omdat $f(x)$ continu is op $[-L, L]$, maar ook omdat de periodieke voortzetting van $f(x)$ tot $\mathbb{R}$ continu is.
(Vergelijk de functie $f(x) = x$ op $[-L, L]$. De functie f is continu op $[-L, L]$, maar de periodieke voortzetting van f tot $\mathbb{R}$ heeft sprong–discontinuïteiten in L (en $(2k+1)L$) en juist in die punten zal het Gibbs-fenomeen plaatsvinden. Links van L moet $F_n(x) \approx L$ een sprong naar rechts van L (daar $F_n(x) \approx -L$) maken.)

(d) Als $g(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$. We bepalen de Fourierreeks $F(x)$ van $g(x)$ op $[-\pi, \pi]$.

$a_0 = \dfrac{\langle 1, g\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \dfrac{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx}{\int_{-\pi}\pi 1\,dx} = \dfrac{\int_{-\pi}^{0} 1\,dx}{2\pi} = \dfrac{1}{2}.$

$a_k = \dfrac{\langle \cos(kx), g\rangle}{\langle \cos(kx), \cos(kx)\rangle} = \dfrac{\int_{-\pi}^{0} \cos(kx)\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx} = 0.$

$b_k = \dfrac{\langle \sin(kx), g\rangle}{\langle \sin(kx), \sin(kx)\rangle} = \dfrac{\int_{-\pi}^{0} \sin(kx)\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx} = \dfrac{-\frac{1}{k}\cos(kx)|_{-\pi}^{0}}{\pi} = \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k}\cos(k\pi)\right) =$
$= \dfrac{1}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right)$. Dus:

$F(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right)\sin(kx).$

(e) Schets de periodieke voortzetting $G(x)$ van $g(x)$ op het interval $[-3\pi, 3\pi]$.
Zelf doen. Pas op: $G(-3\pi) = G(-\pi) = G(\pi) = G(3\pi) = 1$ en $G(-2\pi) = G(0) = G(2\pi) = 0$.

(f) Maak tweede schets van $F(x)$ op het interval $[-3\pi, 3\pi]$.
Zelf doen: Er geldt $F(x) = G(x)$ in alle x met $x \neq k\pi$. Daar geldt: $F(k\pi) = \frac{1}{2}$

4. Beschouw het gekoppelde stelsel

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2).$$

(a) Om de algemene oplossing van dit stelsel te bepalen, bepalen we de eigenwaarden en een basis voor de eigenruimtes van deze matrix A. Elementair rekenwerk laat zien dat $\lambda = 4, -2$ de eigenwaarden van A zijn en dat $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ een basis voor E_4 is, respectievelijk $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ voor E_{-2}.

Dus $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$ is die algemene oplossing.

(b) Om e^{At} bepalen we eerst een fundamentaal matrix $\psi(t)$.

Neem bijvoorbeeld $\psi(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}$.

Dan $e^{At} = \psi(t)\psi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t}/2 + e^{-2t}/2 & e^{4t}/2 - e^{-2t}/2 \\ e^{4t}/2 - e^{-2t}/2 & e^{4t}/2 + e^{-2t}/2 \end{bmatrix}$.

(c) Als we aan het stelsel (2) de beginvoorwaarde $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ toevoegen, dan wordt de oplossing van dit beginvoorwaardeprobleem: $\mathbf{x}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{4t} + e^{-2t} \\ 3e^{4t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$.

(d) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel: $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$.

We gebruiken de methode van "variatie van constante"

Merk op dat $\mathbf{x}(t) = \psi(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ de algemene oplossing van het homogene stelsel is.

Stel dat $\mathbf{x}(t) = \psi(t) \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \psi(t)\mathbf{c}(t)$ de algemene oplossing van het niet homogene stelsel is. Dan $\mathbf{x}'(t) = \psi'(t)\mathbf{c}(t) + \psi(t)\mathbf{c}'(t)$ en invullen (herinner: $\psi' = A\psi$) levert dat $\psi(t)\mathbf{c}'(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$ en dus:

$$\mathbf{c}'(t) = \psi^{-1}(t) \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix} = -(1/2)e^{-2t} \begin{bmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}/2 + e^{-4t}/2 \\ e^{4t}/2 - e^{2t}/2 \end{bmatrix}$$

en dus:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-2t}/4 - e^{-4t}/8 + c_1 \\ e^{4t}/8 - e^{2t}/4 + c_2 \end{bmatrix}$$

Daarom:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \psi(t)\mathbf{c}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-2t}/4 - e^{-4t}/8 + c_1 \\ e^{4t}/8 - e^{2t}/4 + c_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (-e^{-2t}/4 - e^{-4t}/8 + c_1) \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} + (e^4t/8 - e^{2t}/4 + c_2) \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1/8 \\ -3/8 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -3/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

5. We werken met het stelsel

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(a) Wel, $\alpha = 1$ levert het stelsel $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}$ met beginvoorwaarde $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Enig rekenwerk laat zien dat $\lambda = 1 \pm i$ de (complexe) eigenwaarden zijn en dat een basis voor de eigenruimte E_{1+i} gegeven wordt door $\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (en dus is $\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ een basis voor de eigenruimte E_{1-i}). De algemene complexe oplossing van dit stelsel wordt dus:

$$\mathbf{z}(t) = z_1 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} + z_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

Echter, we zoeken de reele oplossing van het beginvoorwaardeprobleem.
Omdat geldt"

$$\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^t(\cos(t) + i\sin(t)) = \begin{bmatrix} e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{bmatrix}$$

is

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

de algemene reele oplossing van het stelsel. Invullen van de beginvoorwaarde $t = 0$ levert het stelsel $\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, d.w.z. $c_1 = 3$ en $c_2 = 2$. De oplossing van het beginvoorwaardeprobleem wordt dus:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t\sin(t) - 2e^t\cos(t) \\ 3e^t\cos(t) + 2e^t\sin(t) \end{bmatrix}$$

(b) Kies weer $\alpha = 1$. Om in te zien welk richtingsveld bij het stelsel hoort, zoeken we verschillen. Bijvoorbeeld: op de punten van de positieve x_1–as zit bij richtingsveld een vector $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ met $p > 0$ en $q < 0$. Daarentegen bij richtingsveld 2 zit een vector $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ met $p > 0$ en $q > 0$. Als we het stelsel beschouwen dan zien we dat in het het punt $(x, 0)$ de vector $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$ hoort. Kortom: richtingsveld 1 is het juiste antwoord.

(c) Op college hebben we afgesproken: het deel uit §9.2 over vergelijkingen van banen slaan we over. Dus ook deze opgave!
Voor de volledigheid: als $\alpha = 0$ dan wordt het stelsel $\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, dus; $\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$ en $\frac{dy(t)}{dt} = -x(t)$. Om de vergelijking in x, y van een baan te bepalen moeten we y zien als functie van x, en voor deze functie moet gelden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{-x}{y}$$

Dit geeft een separabele differentiaalvergelijking, en uit $\int y dy = -\int x dx$ verkrijgen we de vergelijking: $x^2 + y^2 = C$. De banen zijn dus cirkels om de oorsprong.

(d) Voor alle waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ bepalen we de eigenwaarden van het stelsel.

Uit $\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 \\ -1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0$ volgt $(\alpha - \lambda)^2 - 1 = 0$ en dus $\lambda = \alpha \pm i$. We concluderen:

Als $\alpha < 0$ dan is $(0,0)$ een asymptotisch stabiel spiraalpunt.
Als $\alpha = 0$ dan is $(0,0)$ een stabiel centrum.
Als $\alpha > 0$ dan is $(0,0)$ een instabiel spiraalpunt.

6. (a) Voor de evenwichtspunten moet gelden:

$$\begin{cases} (x-2)(2y-x) = 0 & \Rightarrow \quad x = 2 \text{ of } 2y = x \\ (y+2)(2x-y) = 0 & \Rightarrow \quad y = -2 \text{ of } 2x = y \end{cases}$$

De vier evenwichtspunten zijn dus $(2,-2)$, $(2,4)$, $(-4,-2)$ en $(0,0)$.

(b) Voor ieder van deze evenwichtspunten (x_0, y_0) beschouwen we de linearisering:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Omdat $F = (x-2)(2y-x) = -x^2 - 4y + 2xy + 2x$ en $G = (y+2)(2x-y) = -y^2 + 2xy + 4x - 2y$ krijgen we:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_0 + 2y_0 + 2 & 2x_0 - 4 \\ 2y_0 + 4 & -2y_0 + 2x_0 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

(i) Linearisering in $(2,-2)$: $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. De matrix $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda = -6, 6$ en gelineariseerde stelsel heeft dus als evenwichts punt een instabiel zadelpunt.

(ii) Linearisering in $(2,4)$: $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. De matrix $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda = 6, -6$ en gelineariseerde stelsel heeft dus als evenwichts punt een instabiel zadelpunt.

(iii) Linearisering in $(-4,-2)$: $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. De matrix $A = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda = 6, -6$ en gelineariseerde stelsel heeft dus als evenwichtspunt een instabiel zadelpunt.

(iv) Linearisering in $(0,0)$: $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. De matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda = \pm\sqrt{12}i$ en gelineariseerde stelsel heeft dus als evenwichtspunt een stabiel centrum.

(c) Voor evenwichtspunten oorspronkelijke stelsel geldt: de punten $(2,-2)$, $(2,4)$ en $(-4,-2)$ blijven instabiele zadelpunten.
Het punt $(0,0)$ is een centrum of spiraalpunt en over de stabiliteit valt niets te zeggen zonder verder onderzoek.

7. (a) De sinusreeks van de functie $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ op het interval $[0, 2]$ is altijd van de vorm

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi x}{2})$$

met $b_k = \int_0^2 f(x) \sin(\frac{k\pi x}{2})dx = \int_1^2 \sin(\frac{k\pi x}{2})dx = -\frac{2}{k\pi} \cos(\frac{k\pi x}{2})|_{x=1}^{x=2} = -\frac{2}{k\pi} \cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi} \cos(\frac{k\pi}{2}) = \frac{2}{k\pi} \left(\cos(\frac{k\pi}{2}) - \cos(k\pi) \right)$.

(b) Vervolgens bekijken we de volgende snaarvergelijking.

$$\begin{cases} 1) & u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) & 0 < x < 2, \quad t > 0, & \\ 2) & u(0,t) = 0, & u(2,t) = 0, & t > 0, \\ 3) & u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Stel dat $u(x,y)$ een niet-nul functie dat voldoet aan stelsel 1) en tevens voldoet aan de eigenschappen 2) en 3)a.
Bovendien nemen we aan dat $u(x,y)$ te schrijven is als $u(x,y) = X(x)T(t)$.
Uit 1) volgt: $X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$ en dus: $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$ en dus:
$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{T''(t)}{T(t)}$, voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$.
Uit 2) volgt dat $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$.
Uit 3) volgt dat $T(0) = 0$.

Stap 1. (Bepaling X) Bepaling van niet–triviale oplossingen van het randvoorwaardeprobleem

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{en} \quad X(0) = 0 = X(2)$$

Stel $\lambda > 0$, zeg $\lambda = u^2$ met $u > 0$.
Er volgt dat $X(x) = c_1 \cosh(ux) + c_2 \sinh(ux)$ en de randvoorwaarden $X(0) = 0 = X(2)$ geven dat $c_1 = c_2 = 0$. Oftewel, in het geval $\lambda > 0$ is er slechts de nulfunctie (de triviale oplossing) als oplossing voor $X(x)$ (en dus ook voor $u(x,y)$).
Stel $\lambda = 0$.
Dit geeft $X''(x) = 0$ en de randvoorwaarden $X(0) = 0 = X(2)$ geven weer dat $X(x) = 0$.
Ook het geval $\lambda = 0$ levert alleen de trivial oplossing op.
Stel $\lambda < 0$, zeg $\lambda = -u^2$ met $u > 0$.
Er volgt dat $X(x) = c_1 \cos(ux) + c_2 \sin(ux)$ en de randvoorwaarde $X(0) = 0$ geeft $c_1 = 0$.
Dus $X(x) = c_2 \sin(ux)$. De tweede randvoorwaarde $X(2) = 0$ geeft $c_2 \sin(2u) = 0$ en we krijgen niet triviale oplossingen als $\sin(2u) = 0$ (en niet c_2). Dit geeft $2u = k\pi$, dus $u = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 1, 2, \cdots)$.
Conclusie: de niet triviale oplossingen zijn (veelvouden van) $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$ en worden verkregen als $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{4}$, voor $k = 1, 2, \cdots$.

Stap 2.(Bepaling bijbehorende $T(t)$.) Kennelijk kunnen we de bij $X_k(x)$ behorende functie $T_k(t)$ verkrijgen uit de differeniaalvergelijking $T''(t) = \lambda_k T(t)$.

Dit geeft $T''(t) = -\frac{k^2\pi^2}{4}T(t)$ met randvoorwaarde $T(0) = 0$. Deze hebben we net opgelost en we verkrijgen weer $T_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi t}{2}\right)$.
Conclusie: de enige functies $u(x, y)$ die voldoen aan 1), 2) en 3)a en die te schrijven zijn als $u(x, y) = X(x)T(t)$ zijn de (veelvouden van)

$$u_k(x,t) = \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi t}{2}\right) \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Stap 3. Beschouw de functies van de vorm

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(\frac{k\pi t}{2})\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

Deze zullen zeker aan de eisen 1), 2) en 3)a voldoen (afgezien van convergentie problemen van de reeks, problemen die we hier niet bespraken) en we proberen $c_k \in \mathbb{R}$ te vinden zodat tevens aan 3)b voldaan is.
Dit wordt de eis $u_t(x, 0) = f(x)$ met $f(x)$ als in onderdeel (a) van de opgave. Omdat

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{k\pi}{2}\cos(\frac{k\pi t}{2})\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

wordt deze eis:

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{k\pi}{2}\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) = f(x)$$

en hier kunnen we aan voldoen want we herkennen in deze de sinusreeks van $f(x)$ op $[0, 2]$, die bij onderdeel (a) bepaald is. Dus: $c_k\frac{k\pi}{2} = b_k = \frac{2}{k\pi}\left(\cos(\frac{k\pi}{2}) - \cos(k\pi)\right)$ en we krijgen:

$$c_k = \frac{4}{k^2\pi^2}\left(\cos(\frac{k\pi}{2}) - \cos(k\pi)\right)$$