Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Oefententamen (deel 1) EE2M21.
Cursusjaar 2014-2015

Opmerking: het gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan. Geef bij de antwoorden duidelijke argumenten aan, tenzij anders wordt vermeld!

1. (a) Duidelijk is dat de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ voldoet.

(b) Vegen geeft $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ga na (op tentamen wel veegwerk geven, voldoende is een echelonvorm van A)) De pivotkolommen van A vormen een basis Col(A). Dit levert: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ als basis Col(A)..

(c) We passen Gram-Schmidt toe op de gevonden basis. Dus:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$ De gezochte orthogonale basis van W is: $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

(d) We gebruiken de projectieformule, maar moeten wel de orthogonale basis gebruiken.

$$\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 + \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2} \right) \mathbf{w}_2 = \frac{8}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{10}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(e) Omdat $W = \mathrm{Col}(A)$ met $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ geldt $W = \mathrm{Nul}(A^T)$. Vegen van het stelsel $A^T|\mathbf{0}$ levert: (ga na)

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Dus: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_3/3 + 4x_4/3 \\ -2x_3/3 - x_4/3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{x_3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x_4}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Dus $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis voor $W^\perp$. (U kunt uw antwoord controleren door na te gaan of ieder van de basisvectoren van $W^\perp$ loodrecht staat op ieder van de basisvectoren van W.)

(f) We passen Gram-Schmidt toe op bovenstaande basis.

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \left(\frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{2}{14} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27/7 \\ -8/7 \\ 3/7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Een orthogonale basis van $W^\perp$ is bijvoorbeeld: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 27 \\ -8 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix} \right\}$.

(g) Als we de orthogonale bases van W resp. $W^\perp$ normeren (orthonormaal maken) en in een matrix zetten, verkrijgen we de orthogonale matrix

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{27}{\sqrt{1243}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{-8}{\sqrt{1243}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{1243}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{21}{\sqrt{1243}} \end{bmatrix}$$

2. (a) Als $k = 5$ dan $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Dan karakteristiek polynoom: $0 = p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)\lambda + 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 1$. Omdat de discriminant $D = 25 - 4 > 0$ zijn er twee verschillende reële nulpunten (eigenwaarden) en een 2×2 matrix met 2 verschillende reële eigenwaarden is reëel diagonaliseerbaar.

(b) Als $k = 1$ dan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Dan karakteristiek polynoom: $0 = p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\lambda + 1 = \lambda^2 - \lambda + 1$. Omdat de discriminant $D = 1 - 4 < 0$ zijn er twee verschillende complexe (niet reële) nulpunten (complexe (niet reële)eigenwaarden) en een 2×2 matrix met 2 verschillende complexe (niet reële) eigenwaarden is complex diagonaliseerbaar en niet reëel diagonaliseerbaar.

(c) A is niet diagonaliseerbaar als er slechts één eigenwaarde is en voor die eigenwaarde geldt: $m.m(\lambda) < a.m(\lambda)$. (Want A is een 2×2 matrix.) Het karakteristiek polynoom is: $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} k-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(k-\lambda)\lambda + 1 = \lambda^2 - k\lambda + 1$ en deze heeft discrimant gelijk aan 0 als $k^2 - 4 = 0$, dus als $k = \pm 2$.
$k = 2$. Dan $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ en dus $\lambda = 1$ met $a.m.(\lambda = 1) = 2$.
$E_1 = \text{Nul}(A - I)$ levert: $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ dus $\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. We zien: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ is basis E_1, dus $m.m.(\lambda = 1) = 1 < a.m.(\lambda = 1)$. Dus dan is A inderdaad niet diagonaliseerbaar.
$k = -2$. Dan $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ en dus $\lambda = -1$ met $a.m.(\lambda = -1) = 2$.
$E_{-1} = \text{Nul}(A + I)$ levert: $\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ dus $\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. We zien: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is basis E_{-1}, dus $m.m.(\lambda = -1) = 1 < a.m.(\lambda = -1)$. Dus dan is A inderdaad niet diagonaliseerbaar.

(d) Met bovenstaand verhaal is het duidelijk als $|k| > 2$.

(e) Evenzo als $|k| < 2$.

3. (a) Om een orthogonale diagonalisering van de matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ hebben we van ieder van de eigenruimtes een orthonormale bases nodig. Omdat $p_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$, zien we de eigenwaarden $\lambda = -2$ (met $a.m.(\lambda = -2) = 1$) en $\lambda = 7$ (met $a.m.(\lambda = 7) = 2$).
Basis $E_{-2} = \text{Nul}(A + 2I)$. Omdat $\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ zien we $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3/2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3/2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dus $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis van E_{-2} en $\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\}$ is een orthonormale basis van E_{-2}.
Basis $E_7 = \text{Nul}(A - 7I)$. Omdat $\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ zien we $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_2/2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis van E_7.
(Dit is een goed moment om te controleren dat ieder van de basisvectoren van E_7 loodrecht staat op ieder van van de basisvectoren van E_{-2}, wat moet bij een symmetrische matrix!)

(Opmerking: er geldt zeker: $A = PDP^{-1}$ met $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, maar dit is niet de gevraagde orthogonale diagonalisatie. De matrix P is niet orthogonaal, om twee redenen: de tweede en derde kolom zijn niet loodrecht en de kolommen hebben geen lengte 1.)

We passen Gram-Schmidt toe op de basis van E_7.

$\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \left(\dfrac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dus: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ is een orthogonale basis van E_7 en normeren levert de orthonormaale basis. Een orthogonale diagonalisering is dus: $A = QDQ^{-1} = QDQ^T$ met:

$$Q = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{bmatrix} \text{ en } D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) We weten dat geldt: $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$ In het bijzonder geldt: $A^{10} = QD^{10}Q^{-1}$ met Q als boven en $D^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 7^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 7^{10} \end{bmatrix}$. Omdat kennelijk A^{10} een orthogonale diagonalisatie heeft, is A^{10} symmetrisch!

(c) Bepaal een symmetrische 3×3 matrix B met het vlak $x + 2y + 3z = 0$ als eigenruimte E_{14} en met tweede eigenwaarde $\lambda = 28$.

Antwoord: omdat eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden bij een symmetrische matrix loodrecht zijn, zal de normaal $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ van dit vlak eigenvector zijn bij $\lambda = 28$.

Kennelijk geldt: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis E_{28}.

Basis E_{14}. Oplossen van stelsel $x + 2y + 3z = 0$ levert $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus is $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ een basis van E_{14}.

Er zal gelden: $B = PDP^{-1}$ met $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$, maar niemand zal overtuigd zijn van het feit dat deze matrix symmetrisch is. Eén manier om te overtuigen is dit product uit te rekenen, maar lekker rekenen is dat niet! (Maple geeft $B = \begin{bmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 2 & 18 & 6 \\ 3 & 6 & 23 \end{bmatrix}$).

De handige manier om te overtuigen is een orthogonale diagonalisatie te geven! Gram-Schimst op de basis van E_{14} levert:

$\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \left(\dfrac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{6}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ -6/5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dus: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ is een orthogonale basis van E_7 en normeren levert de orthonormaale basis. Een orthogonale diagonalisatie van de matrix B is: $B = QDQ^{-1} = QDQ^T$ met $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} & -2/\sqrt{5} & -6/\sqrt{70} \\ 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{70} \\ 3/\sqrt{14} & 0 & 5/\sqrt{70} \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$ en omdat B een orthogonale diagonalisatie heeft, is B een symmetrische matrix.

4. (a) Een hermitische matrix A is een matrix met de eigenschap $A^* = A$. Een voorbeeld van een Hermitische 2×2 matrix is $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & -3 \end{bmatrix}$.

(b) Een unitaire matrix is een vierkante matrix met orthonormale kolommen? We construeren een complex 2×2 voorbeeld. Neem een vector, zeg $\begin{bmatrix} 1+i \\ i \end{bmatrix}$. We zoeken een vector $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ hier loodrecht op. Dus moet gelden:

$$(1-i)z_1 + (-i)z_2 = 0$$

(Vergeet niet te conjugeren.) Kies $z_1 = i$ dan $z_2 = 1 - i$. Dus $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1+i \\ i \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \end{bmatrix}$ zijn loodrecht en normeren levert de unitaire matrix

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(c) De matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ heeft geen orthogonale diagonalisatie, want de matrix is niet symmetrisch. De matrix B heeft wel een unitaire diagonalisatie, want de matrix is wel normaal (d.w.z. $B^*B = BB^*$). Inderdaad: $BB^* = BB^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ en evenzo: $B^*B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) Om een unitaire diagonalisatie van B te bepalen, bepalen we eerst de eigenwaarden via: $p_B(\lambda) = (2-\lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i$.
Basis $E_{2+i} = \text{Nul}(A-(2+i)I)$: $\left[\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ levert $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} iz_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus $\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis voor E_{2+i}. Evenzo:
Basis $E_{2-i} = \text{Nul}(A-(2-i)I)$: $\left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ levert $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -iz_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus $\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis voor E_{2-i}.
Merk op dat voor de twee basisvectoren geldt: $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. (Vergeet niet te conjugeren!) Daarom, na normering, is de matrix

$$U = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

een unitaire matrix en $B = UDU^{-1} = UDU^*$ (met $D = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}$) is een unitaire diagonalisatie van B.

5. (a) We delen de differentiaalvergelijking door x^3 om hem in de vorm $y' = f(x,y)$ te schrijven. Dit levert $y' = \dfrac{(y-2)^2}{x^3}$, dus $f(x,y) = \dfrac{(y-2)^2}{x^3}$. Dan is $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2(y-2)}{x^3}$.
In de "rechthoek" $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ zijn f en $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continu en $(1, y_0)$ ligt binnen dit gebied. Dus aan de voorwaarden van de existentie- en uniciteitsstelling is voldaan.
Hieruit volgt dat er een interval rondom $x = 1$ is waarop het beginwaardeprobleem een unieke oplossing heeft.

(b) De differentiaalvergelijking is separabel. Allereerst merken we op dat de functie $y(x) = 2$ een oplossing is, want dan is $y'(x) = 0$ en als we dit invullen in de differentiaalvergelijking krijgen we $x^3 \cdot 0 = (2-2)^2$, dus dat klopt.
Om de andere oplossingen te bepalen delen we de vergelijking door $(y-2)^2$ en door x^3. Dit levert de vergelijking $\dfrac{y'}{(y-2)^2} = \dfrac{1}{x^3}$. Vervolgens primitiveren we beide leden: $\displaystyle\int \frac{y'}{(y-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^3}\,dx$. Op grond van de substitutieregel mogen we dit schrijven als $\displaystyle\int \frac{1}{(y-2)^2}\,dy = \int \frac{1}{x^3}\,dx$, waaruit volgt dat $-\dfrac{1}{y-2} = -\dfrac{1}{2x^2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$. Dus $\dfrac{1}{y-2} = \dfrac{1-2cx^2}{2x^2}$, dus $y - 2 = \dfrac{2x^2}{1-2cx^2}$, dus $y = 2 + \dfrac{2x^2}{1-2cx^2} = \dfrac{2+(2-4c)x^2}{1-2cx^2}$.
Dus de algemene oplossing bestaat uit de functie $y(x) = 2$ en de functies $y(x) = \dfrac{2+(2-4c)x^2}{1-2cx^2} \quad (c \in \mathbb{R})$.

(c) Uit (a) weten we dat er een unieke oplossing is voor het beginwaardeprobleem. De oplossing $y(x) = 2$ van de differentiaalvergelijking voldoet niet aan de beginvoorwaarde $y(1) = 0$, dus de oplossing van het beginwaardeprobleem moet bij de andere oplossingen van de differentiaalvergelijking gevonden worden. Daarvoor geldt $y(1) = 0$ dan en slechts dan als $\dfrac{2 + (2 - 4c)}{1 - 2c} = 0$, dus $2 + (2 - 4c) = 0$ (en $1 - 2c \neq 0$), dus $c = 1$. Dit levert de oplossing $y(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{1 - 2x^2}$.

(d) De functie $y(x) = 2$ voldoet nu aan de differentiaalvergelijking en aan de beginvoorwaarde $y(1) = 2$, dus met deze beginvoorwaarde is $y(x) = 2$ de oplossing van het beginwaardeprobleem.

6. (a) Via de uniciteit– en de extensie–stelling weten we dat het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

een unieke oplossing zal hebben met domein tenminste het interval U. Deze unieke oplossing moet dan wel de nulfunctie $y(t) = 0$ zijn, en dus niet de functie $y(t) = t^2$. Omdat deze $y(t)$ wel voldoet aan de eisen $y(0) = 0$ en $y'(0) = 0$, kan deze functie dus niet aan de differentiaalvergelijking voldoen.

We beschouwen de differentiaalvergelijking: $t^2y'' + 2ty' - 6y = 0, \quad t > 0 \qquad (1)$

(b) Invullen laat zien dat $y_1(t) = t^2$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking (1) is.

(c) Dit is niet in tegenspraak met onderdeel (a), want als we tweede differentiaalvergelijking omschrijven naar één van het eerste type: $y'' + (2/t)y' - (6/t^2)y = 0$, zien we dat de ontstane $p(t) = 2/t$ en $q(t) = -6/t^2$ niet continu zijn op een interval dat 0 bevat, dus (a) is niet toepasbaar.

(d) Stel $y(t) = r(t)t^2$ is ook een oplossnig van (2).
Dan: $y'(t) = r(t)2t + r'(t)t^2$ en $y''(t) = r(t)2 + 4r(t)t + r''(t)t^2$.
Invullen in (1) levert: $t^4r''(t) + 6t^3r'(t) = 0$.
Stellen we $r' = v$ dan verkrijgen we de lineaire eerste orde differentiaalvergelijking $v' + (6/t)v = 0$.
Dus $p(t) = 6/t$, en $P(t) = 6\ln(t) = \ln(t^6)$ en $e^{P(t)} = t^6$.
We verkrijgen $t^6v' + 6t^5v = 0 \Rightarrow (t^6v)' = 0 \Rightarrow t^6v = c_1 \Rightarrow v = r' = c_1/t^6 \Rightarrow r(t) = -\dfrac{1}{5}\dfrac{c_1}{t^5} + c_2$. Nemen we $r(t) = 1/t^5$ dan verkrijgen we $y_1(t) = 1/t^3$ als tweede oplossing.
Merk tenslotte op dat $y(t) = t^2$ en $y_1(t) = 1/t^3$ inderdaad onafhankelijke oplossingen zijn want hun Wronskiaan $W(y, y_1) = \begin{vmatrix} t^2 & 1/t^3 \\ 2t & -3/t^4 \end{vmatrix} = -5/t^3 \neq 0$.

(e) De algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking (1) wordt:
$y(t) = c_1t^2 + c_2/t^3$ (waarbij $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

7. (a) Als $y = y_1 = 1 + t$ dan is $y' = 1$ en $y'' = 0$. Dit vullen we in in het linkerlid van de differentiaalvergelijking: $t \cdot 0 - (t + 1) \cdot 1 + (1 + t) = -t - 1 + 1 + t = 0$ dus $y = y_1$ voldoet.
Als $y = y_2 = e^t$ dan is $y' = e^t$ en $y'' = e^t$. Invullen in het linkerlid van de differentiaalvergelijking levert $te^t - (t + 1)e^t + e^t = te^t - te^t - e^t + e^t = 0$ dus $y = y_2$ voldoet ook.
Om aan te tonen dat y_1 en y_2 lineair onafhankelijk zijn bepalen we de Wronskiaan:

$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix} = (1+t)e^t - e^t = te^t$. Er is gegeven dat $t > 0$, en op dit interval geldt $W(t) \neq 0$, dus y_1 en y_2 zijn lineair onafhankelijk.

(b) We delen de differentiaalvergelijking eerst door t om hem in de standaardvorm $y'' + py' + qy = g$ te brengen: $y'' - (1 + \frac{1}{t})y' + \frac{1}{t}y = t^2$. Stel $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ waarin $u_1 = u_1(t)$ en $u_2 = u_2(t)$. Door te eisen dat $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ en $u_1'y_1' + u_2'y_2' = g$ zorgen we ervoor dat y_p een oplossing is van de inhomogene differentiaalvergelijking. We eisen dus dat $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$. Als we alle gegevens invullen krijgen we $\begin{pmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{te^t}\begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ -1 & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ (t+t^2)e^{-t} \end{pmatrix}$, dus $u_1' = -t$ en $u_2' = (t+t^2)e^{-t}$. Dus u_1 moet een primitieve van $-t^2$ zijn. We kunnen nemen $u_1 = -\frac{1}{2}t^2$. Om u_2 te vinden primitiveren we de functie $(t+t^2)e^{-t}$:
$\int (t+t^2)e^{-t}\,dt = -\int (t+t^2)\,de^{-t} = -\big((t+t^2)e^{-t} - \int e^{-t}\,d(t+t^2)\big) = -\big((t+t^2)e^{-t} - \int e^{-t}(1+2t)\,dt\big) = -\big((t+t^2)e^{-t} + \int (1+2t)\,de^{-t}\big) =$
$-\big((t+t^2)e^{-t} + (1+2t)e^{-t} - \int e^{-t}\,d(1+2t)\big) =$
$-\big((t+t^2)e^{-t} + (1+2t)e^{-t} - 2\int e^{-t}\,dt\big) = -\big((t+t^2)e^{-t} + (1+2t)e^{-t} + 2e^{-t}\big) + c =$
$-(t^2+3t+3)e^{-t} + c$. Dus we kunnen nemen $u_2 = -(t^2+3t+3)e^{-t}$. Dit levert de particuliere oplossing $y_p = -\frac{1}{2}t^2(1+t) - (t^2+3t+3)e^{-t}e^t = -\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t - 3$.

(c) Gebruikmakend van (a) en (b) kunnen we de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking opschrijven:
$y = c_1(1+t) + c_2e^t - \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t - 3$. Dus $y(1) = 2c_1 + c_2e - 8$. Dit moet gelijk zijn aan $2e$, dat wil zeggen $2c_1 + ec_2 = 2e + 8$. Verder geldt $y' = c_1 + c_2e^t - \frac{3}{2}t^2 - 3t - 3$, dus $y'(1) = c_1 + c_2e - \frac{15}{2}$, hetgeen gelijk moet zijn aan $2e - \frac{7}{2}$, zodat $c_1 + ec_2 = 2e + 4$. Dus $\begin{pmatrix} 2 & e \\ 1 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e+8 \\ 2e+4 \end{pmatrix}$, zodat $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & e \\ 1 & e \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2e+8 \\ 2e+4 \end{pmatrix} = e^{-1}\begin{pmatrix} e & -e \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e+8 \\ 2e+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Dus $y = 4(1+t) + 2e^t - \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t - 3 = 2e^t - \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t + 1$.

8. Zoals bekend is besloten hoofdstuk 7 niet bij het tentamen deel 1 te stoppen, dus we laten de uitwerking weg.