Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen (deel 1) EE2M21, 14.00-16.00, 10 december 2014
Cursusjaar 2014-2015

Opmerking: het gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan. Geef bij de antwoorden duidelijke argumenten aan, tenzij anders wordt vermeld!

1. Beschouw $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en de vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(1) (a) Bepaal een matrix A zodat $W = \text{Col}(A)$.

(3) (b) Bepaal een orthogonale basis van W.

(2) (c) Bepaal de orthogonale projectie van $\mathbf{x}$ op W.

(2) (d) Bepaal een basis voor $W^{\perp}$, het orthogonaal complement van W.

(3) (e) Gebruik de resultaten van onderdeel (b) en (d) om een 3×3 orthogonale matrix Q te maken. Bepaal ook Q^{-1}.

(8) **2.** Beschouw de reële matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & k \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, waarbij $k \in \mathbb{R}$.

(a) Bepaal alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix A niet diagonaliseerbaar is.

(b) Bepaal alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix A reëel diagonaliseerbaar is.

(c) Bepaal alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix A complex diagonaliseerbaar is.

(4) **3.** (a) Bepaal een orthogonale diagonalisering van de matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ als bovendien gegeven is dat het karakteristiek polynoom $p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$ is.

(3) (b) Ga na of een symmetrische 3×3 matrix B bestaat met het vlak $x + y - z = 0$ als eigenruimte E_1 en tweede eigenruimte $E_{-3} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Als zo'n symmetrische matrix B niet bestaat, leg uit waarom niet. Als die wel bestaat, dan volstaat het een diagonalisering van de matrix B te geven, mits u uitlegt waarom de gegeven diagonalisering een symmetrische matrix oplevert.

(4) (c) Leg uit dat de matrix $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ geen orthogonale diagonalisatie heeft maar wel een unitaire diagonalisatie. Geef een unitaire diagonalisatie van de matrix C.

Z.O.Z.

(4) **4.** (a) Bepaal de algemene oplossing van de eerste orde differentiaalvergelijking:

$$ty' - y = t^2 e^{-2t}.$$

(5) (b) Beschouw het beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} x^2 y' = (y-3)(1-x^2) \\ y(-1) = 4 \end{cases}$$

Bepaal (zo mogelijk expliciet) de oplossing van dit beginwaardeprobleem.

5. Beschouw de differentiaalvergelijking:

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 8t^2, \quad t > 0 \qquad (1)$$

(3) (a) Bepaal $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ zodat $y(t) = t^r$ een oplossing is van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking.

(6) (b) Bepaal nu via "variatie van constante" de algemene oplossing van differentiaalvergelijking (1).

(6) (c) Voor hen die onderdeel (a) (en dus (b)) niet konden de volgende noodoplossing. Maakt u hier gebruik van, dan krijgt u voor onderdelen (a) en (b) geen punten!
Bepaal via "variatie van constante" de algemene oplossing van $t^2 y'' - 2y = 4t^2 - 3 \quad (t > 0)$ als $y_1(t) = t^2$ en $y_2 = t^{-1}$ oplossingen zijn van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking.

6. Beschouw de differentiaalvergelijking:

$$y'' + 5y' = te^{3t} + t^2 e^{-5t} + t^2 - 1$$

(2) (a) Los de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking op.

(5) (b) Wat zou u gokken als partikuliere oplossing via de methode van de onbepaalde coëfficienten? De onbepaalde coëfficienten hoeven niet bepaald te worden.

Normering: Totaal zijn er 54 punten te verdienen. Als T het totaal van de behaalde punten is, dan:

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{6+T}{6}$$