Lineaire Algebra en differentiaalvergelijkingen

College 3: Eigenwaarden en eigenvectoren, diagonaliseren

J. Vermeer
Les 1

§4.2 Karakteristiek polynoom

Herinner:
λ is eigenwaarde van de $n \times n$ matrix $A \Leftrightarrow$
er is een vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ met $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow$
er is vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ met $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$
de matrix $A - \lambda I$ is niet inverteerbaar $\Leftrightarrow$

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$\det(A - \lambda I)$ blijkt een polynoom van de graad n te zijn, het zogeheten karakteristiek polynoom van A.
Notatie: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Conclusie: De (reële) nulpunten van het karakteristiek polynoom van A zijn precies de eigenwaarden van A. $\square$

Algebraïsche multipliciteit van eigenwaarde

Voorbeeld Bepaal karakteristiek polynoom en daarmee de eigenwaarden van de matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Definitie: Als λ_0 een nulpunt van $p_A(\lambda)$ van de graad k, dan zeggen we: λ_0 is eigenwaarde A met algebraïsche multipliciteit k.

Notatie: a.m.$(\lambda = \lambda_0) = k$. $\square$

Meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde

Laat λ een eigenwaarde zijn van de $n \times n$ matrix A. Herinner: De eigenruimte E_λ is de verzameling alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ met $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ is gelijk aan de verzameling alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ met $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ is gelijk aan

$$\mathrm{Nul}(A - \lambda I) \quad .$$

Uit de identiteit $E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$ volgt:

1. E_λ is een lineaire deelruimte van A.
2. Oplossen van stelsel $A - \lambda I|\mathbf{0}$ levert een basis E_λ

Definitie: de dimensie van de deelruimte E_λ heet de meetkundige dimensie van de eigenwaarde λ.

Notatie: m.m.$(\lambda = \lambda_0) = \ell$. $\square$

Relatie tussen multipliciteiten

Stelling Laat λ_0 een eigenwaarde zijn van A. Dan geldt:

$$1 \le m.m.(\lambda = \lambda_0) \le a.m.(\lambda = \lambda_0)$$

Nog een stel eigenschappen eigenwaarden.

Stelling

1. A niet inverteerbaar $\Leftrightarrow \lambda = 0$ is eigenwaarde A
2. Als $\mathbf{x}$ eigenvector A bij λ dan $\mathbf{x}$ eigenvector A^n bij λ^n, $n = 1, 2, \ldots$
3. Als $\mathbf{x}$ eigenvector A bij λ en A inverteerbaar dan $\mathbf{x}$ eigenvector A^{-1} bij $\dfrac{1}{\lambda}$.

□

Discrete dynamische systemen

Toepassing: Stel A is een $m \times m$ matrix en de (start)vector $\mathbf{x}_0$. Beschouw de rij $\{\mathbf{x}_n : n \ge 0\}$:

$$\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 (= A^2\mathbf{x}_0), \ldots, \mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1} (= A^n\mathbf{x}_0)$$

Probleem: Bepaal een formule voor $\mathbf{x}_n$.

Oplossing:

1. Schrijf $\mathbf{x}_0$ als lineaire combinatie van eigenvectoren van A.
2. Zeg: $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$. (Met $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$.)
3. Dan geldt:

$$\boxed{\mathbf{x}_n = c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k^n\mathbf{v}_k}$$

Voorbeeld □

Eigenschap

De volgende stelling staat bewezen in boek, wij bewijzen deze niet.
Stelling Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Laat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ eigenvectoren zijn van A bij de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, waarbij $\lambda_i \neq \lambda_j$ als $i \neq j$.
Dan zijn de eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ lineair onafhankelijk.

Gevolg: Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Dan heeft A tenhoogste n eigenwaarden. $\square$

§4.4 Gelijkvormige matrices

Laat A en B $n \times n$ matrices zijn.
Definitie De matrices A en B heten gelijkvormig, als er een matrix P bestaat met $A = PBP^{-1}$.
Stelling Laat A en B gelijkvormige matrices zijn. Dan geldt:

1. $\det(A) = \det(B)$.
2. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.
3. A en B hebben dezelfde eigenwaarden met dezelfde multipliciteiten (meetkundig en algebraïsch).

$\square$

Diagonaliseerbare matrices

Definitie: Laat A een $n \times n$ matrix zijn. De matrix A heet diagonaliseerbaar als A gelijkvormig is met een diagonaalmatrix. Equivalent: er bestaat een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodat $A = PDP^{-1}$.
De schrijfwijze $A = PDP^{-1}$, met gegeven D en P, heet een diagonalisering van A.
Basisvragen:

1. Hoe na te gaan of een gegeven matrix A diagonaliseerbaar is?
2. Als A diagonaliseerbaar is, hoe een diagonalisering te bepalen?

□

Het diagonaliseren van een matrix I

Stelling: Laat A een $n \times n$ matrices zijn, D een diagonaal matrix en $P = [\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n]$. Equivalent zijn:

1. $AP = PD$
2. $A\mathbf{p}_i = d_{i,i}\mathbf{p}_i$, voor $i = 1, \ldots, n$.

Conclusie: Laat $A = PDP^{-1}$ een diagonalisering zijn van A dan is $\mathbf{p}_i$ een eigenvector van A bij de eigenwaarde $\lambda_i = d_{i,i}$.
Voorbeelden Probeer de matrices A, B, C, D te diagonaliseren.
Stelling: Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Equivalent zijn:

1. De matrix A is diagonaliseerbaar.
2. Er bestaan n lineair onafhankelijke eigenvectoren.

□

Het diagonaliseren van een matrix II

Stelling. Laat A een $n \times n$ matrix zijn met n verschillende eigenwaarden. Dan geldt: A is diagonaliseerbaar.
Stelling: Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Equivalent zijn:

1. De matrix A is diagonaliseerbaar.
2. Er geldt:
   (a) Al de nulpunten van $p_A(\lambda)$ zijn reëel.
   (b) Voor iedere eigenwaarde λ_0 geldt:
   $$m.m.(\lambda = \lambda_0) = a.m.(\lambda = \lambda_0).$$
3. $\sum_{\lambda} m.m.(\lambda) = n$.

Definitie: Als $m.m.(\lambda = \lambda_0) < a.m.(\lambda = \lambda_0)$ dan heet A defect in de eigenwaarde λ_0. $\square$

Toepassen diagonaliseren

Stelling: Laat A een diagonaliseerbare matrix zijn.
Als $A = PDP^{-1}$ dan geldt:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Conclusie Omdat D^n voor een diagonaalmatrix gemakkelijk te bepalen is, is A^n ook te bepalen.

Voorbeelden Bepaal C^{10}. En A^{10}? $\square$

Aanbevolen opgaven

College 1	behandeld	aanbevolen opgaven
	§4.3	zie werkschema
	§4.4	zie werkschema