# Hoofdstuk 8

# De vectorruimte $\mathbb{C}^n$

Bij het vak Analyse zijn de complexe getallen geïntroduceerd. We zullen in vogelvlucht de elementaire operaties op $\mathbb{C}$ herhalen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en conjugatie. We zeggen ook nog wat over de polaire vorm (notatie) van een complex getal. De volgende paragraaf § 8.1 introduceert de complexe getallen[1], wordt niet besproken op college en de inhoud wordt bekend verondersteld.

## 8.1 Herhaling: Introductie tot $\mathbb{C}$

De vergelijking $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossingen in de verzameling $\mathbb{R}$ der reële getallen, dus als we toch een oplossing willen hebben van deze vergelijking dan moeten we $\mathbb{R}$ uitbreiden. Daarvoor introduceren we een nieuw getal $i$ met de eigenschap dat

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Dan worden $x = i$ and $x = -i$ oplossingen van de vergelijkinge $x^2 + 1 = 0$.

Een **complex getal** is een expressie van de vorm $a + bi$, waarbij $a$ and $b$ reële getallen zijn[2]. Twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ zijn *gelijk* als en slechts als $a = c$ en $b = d$. Als $z = a + bi$ een complex getal is, dan heet $a$ het **reële deel** van $z$ (notatie: $\text{Re}(z)$) en $b$ heet het **imaginaire deelt** van $z$ (notatie: $\text{Im}(z)$).
Bijvoorbeeld, $-3+4i$ is een complex getal met $\text{Re}(-3+4i) = -3$ en $\text{Im}(-3+4i) = 4$.
De verzameling van alle complexe getallen wordt genoteerd met $\mathbb{C}$, dus $z \in \mathbb{C}$ betekend $z = a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Elk reëel getal $a$ kan gezien worden als een complex met als imaginair deel 0:

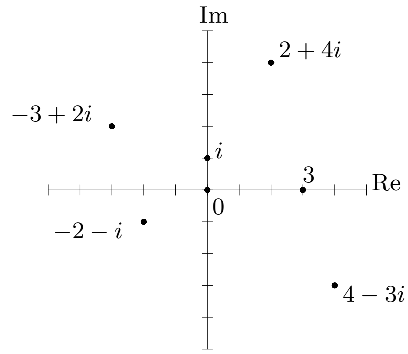
$$a = a + 0i$$

In het bijzonder zullen we 0 schrijven voor het complexe getal $0 + 0i$. Kortom: reële getallen zijn ook complexe getallen en we schrijven $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Een complex getal met 0 als reëel deel heet een **zuiver imaginair** getal.

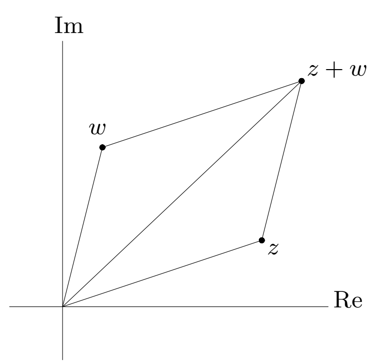
[1]Naar een handout van Dr. H.A.W.M. Kneppers

[2]In de electrotechniek wordt het symbool $j$ gebruikt in plaats van $i$, omdat $i$ staat voor de elektrische stroom.

De verzameling $\mathbb{R}$ kan grafisch gerepresenteerd worden door een rechte lijn, de zogeheten: *reële lijn*. Ieder punt van deze lijn correspondeert met een getal en omgekeerd.
Evenzo kan de verzameling $\mathbb{C}$ van complexe getallen grafisch gerepresenteerd worden door een vlak, het zogeheten *complexe vlak*. Het punt $(a, b)$ in dit vlak correspondeert met het complexe getal $a + bi$.




De horizontale as bestaat uit alle complexe getallen van de vorm $a+0i$, dus corresponderen deze punten met de reële getallen. Daarom wordt deze as de *reële as* genoemd. Evenzo, de vertikale as correspondeert met de zuiver imaginaire getallen and heet daarom de *imaginaire as*.
Optellen van complexe getallen betekend het optellen van de reële delen en van de imaginaire delen: als $z = a + bi$ en $w = c + di$ dan $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
In het complexe vlak komen de optelling en de vectoriële opteling overeen: de punten $0$, $z$, $z + w$ en $w$ zijn de hoekpunten van een parallellogram.




Twee complexe getallen kunnen vermenigvuldigt worden met behulp van de standaard methode van "haakjes wegwerken": als $z = a + bi$ en $w = c + di$ dan $zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$ en omdat $i^2 = -1$ is dit gelijk aan $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Samenvattend:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\\(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{array}}$$

Het volgende voorbeeld laat zien hoe het quotient van twee complexe getallen in de vorm $a + bi$ gebracht kan worden.

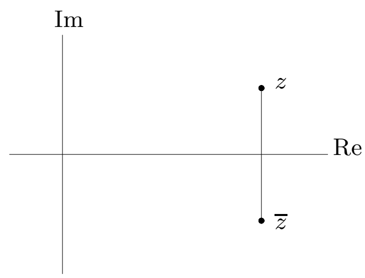
**Voorbeeld**
$$\frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-3i+i^2}{4-i^2} = \frac{1-3i}{5} = \tfrac{1}{5} - \tfrac{3}{5}i.$$

In het algemeen, als $c + di$ in de noemer staat vermenigvuldig teller en noemer dan met $c - di$. Merk op dat dit deze methode voor $\dfrac{z}{w}$ werkt, mits $w \neq 0$.

Voor een complex getal $z$ en $n \in \mathbb{Z}$ dan is $z^n$ op de gebruikelijke manier gedefiniëerd, als $n > 0$ dan is $z^n$ het product van $n$ copies van $z$, $z^0 = 1$ and negative machten van $z$ zijn gedefiniëerd via $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$. De gebruikelijke rekenregels gelden: $z^n z^m = z^{m+n}$, $(z^m)^n = z^{mn}$, $(zw)^n = z^n w^n$ en $\left(\dfrac{z}{w}\right)^n = \dfrac{z^n}{w^n}$ als $z, w \in \mathbb{C}$ en $m, n \in \mathbb{Z}$. De **complex geconjugeerde** van een complex getal $z = a + bi$ wordt gedefinieerd via $\bar{z} = a - bi$, met andere woorden:

$$\boxed{\overline{a+bi} = a - bi}$$

Merk op dat in het complexe vlak conjugeren van een complex getal correspondeert met spiegelen ten opzichte van de reële as.




Conjugeren heeft de volgende eigenschappen: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ (see Stewart Appendix G exercise 18) and $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

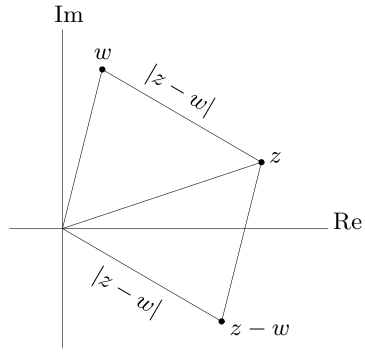
De **modulus** $|z|$ van een complex getal $z$ is de afstand van 0 tot $z$ in het complex vlak. Als $z = a + bi$, dan vol uit de stelling van Pythagoras dat

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Merk op dat $(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$ en dus

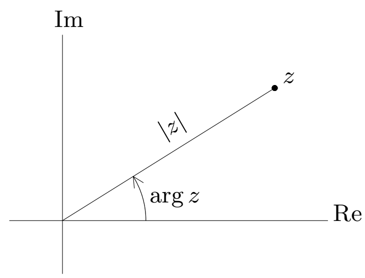
$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$$

Als $z, w \in \mathbb{C}$ dan kunnen we $|z - w|$ interpreteren als de afstand tussen $z$ and $w$ in het complex vlak.




De modulus heeft de volgende eigenschappen: $|z+w| = |z|\,|w|$ en $|z+w| \leq |z|+|w|$.

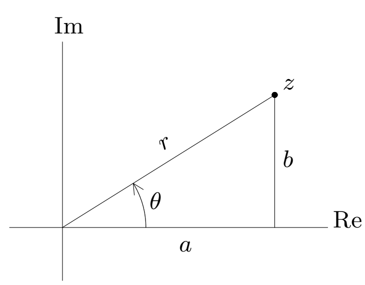
Als $z \neq 0$ dan heet de hoek (gemeten in radialen en tegen de klok in) tussen de positief reële as en de lijn van 0 naar $z$ een **argument** van $z$. Notatie: $\arg z$. het getal 0 heeft geen argument.




Als $z$ een argument $\theta$ heeft, dan is $\theta + 2k\pi$ ook een argument van $z$, voor iedere $k \in \mathbb{Z}$. Bijvoorbeeld, $\frac{1}{2}\pi$ is een argument van $7i$ maar $\frac{5}{2}\pi$ is dat ook.
Een negatief argument wordt verkregen door de hoek met de klok mee te meten, bijvoorbeeld $-\frac{1}{4}\pi$ is een argument van $1 - i$.

Stel dat $z = a + bi$ als modulus $r$ heeft en als argument $\theta$. Dan volgt onmiddelijk uit de definitie van sinus en cosinus dat:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{aligned}}$$




Dus $z = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta$ en daarom

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

De expressie $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ met $r \in \mathbb{R}^+$ en $\theta \in \mathbb{R}$ heet de *polaire vorm* van $z$. Merk op dat als $z$ in deze vorm geschreven is, er zal volgen uit de definities van sinus en cosinus dat $r$ de modulus van $z$ zal zijn en dat $\theta$ een argument van $z$ zal zijn.
Met andere woorden: als er twee polaire vormen van $z$ gegeven zijn, zeg $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en $z = s(\cos\phi + i\sin\phi)$ (met $r, s > 0$) dan $r = s$ en er bestaat $k \in \mathbb{Z}$ zo dat $\phi = \theta + 2k\pi$.

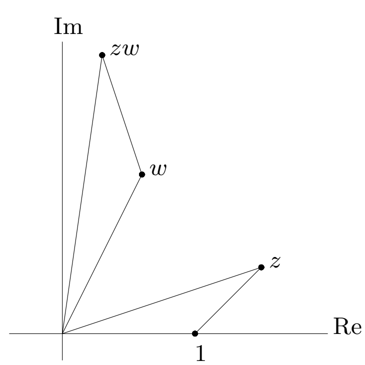
**Voorbeeld**
Als $z = 5\sqrt{3} + 5i$ dan $|z| = 10$ en $\arg z = \frac{1}{6}\pi$, zodat $z$ de polaire vorm $z = 10(\cos(\frac{1}{6}\pi) + i\sin\frac{1}{6}\pi)$ heeft. Andere polaire vormen voor $z$ zijn $z = 10(\cos\frac{13}{6}\pi + i\sin\frac{13}{6}\pi)$ en $z = 10(\cos(-\frac{11}{6}\pi) + i\sin(-\frac{11}{6}\pi))$.

In bovenstaande voorbeelden kon $\arg z$ bepaald worden met behulp van elementaire meetkunde, wat altijd het geval zal zijn als $\arg z$ een veelvoud is van $\frac{1}{6}\pi$ of van $\frac{1}{4}\pi$. In het algemeen zal de *arctan*-functie nuttig zijn om het argument van $z$ te bepalen. Per definitie, $\arctan x = y$ als en slechts als $\tan y = x$ *EN* $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$. Als $z = a + bi$ met $a \neq 0$ en $\arg z = \theta$ dan $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Als $a > 0$ dan $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ en dus $\theta = \arctan\frac{b}{a}$. Als, echter, $a < 0$ dan ligt $\theta$ niet tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$, en kan dus niet gelijk zijn aan $\arctan\frac{b}{a}$. Het is makkelijk in te zien dat nu geldt: $\theta = \arctan\frac{b}{a} + \pi$. Bijvoorbeeld, $\arg(3 + 4i) = \arctan(\frac{4}{3})$ en $\arg(-3 - 4i) = \arctan(\frac{4}{3}) + \pi$

Voor de polaire vorm gelden de volgende belanrijke rekenregels. Stel dat $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en $w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$. Dan $zw = rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = rs(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi))$. Gebruik makend van de formules voor $\sin(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$ levert dit: $rs(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi))$, dus $|zw| = rs$ en $\arg(zw) = \theta + \phi$, daarom:

$$\boxed{\begin{array}{c} |zw| = |z|\,|w| \\ \arg(zw) = \arg z + \arg w \end{array}}$$

Deze eigenschappen leiden tot de meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$: de driehoek met hoekpunten 0, 1 en $z$ is gelijkvormig met de driehoek met hoekpunten 0, $w$ and $zw$.




**Voorbeeld**

Stel dat $z = \sqrt{3} + i$ en $w = 1 + i\sqrt{3}$. Dan $zw = (\sqrt{3} + i)(1 + i\sqrt{3}) = 4i$. Als we $z$ en $w$ in polaire vorm schrijven verkrijgen we $z = 2(\cos \frac{1}{6}\pi + i \sin \frac{1}{6}\pi)$ en $w = 2(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi)$, en dus $zw = 4i = 4(\cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi)$. Inderdaad, $|z|\,|w| = 2 \cdot 2 = 4 = |zw|$ en $\arg z + \arg w = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi = \arg(zw)$.

Merk op dat $\arg\left(z \cdot \frac{1}{z}\right) = \arg 1 = 0$ en dus $\arg z + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ zodat

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$$

**De Stelling van De Moivre**
Stel dat $n$ een geheel getal is. Dan

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

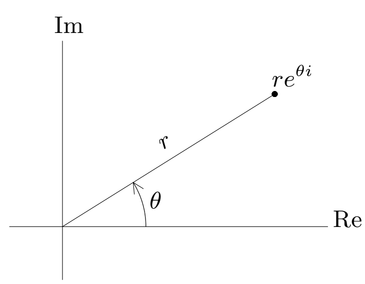
**Bewijs**
Stel dat $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Dan $|z| = 1$ and $\arg z = \theta$. Als $n > 0$ dan $|z^n| = |zz\cdots z| = |z|\,|z|\cdots|z| = 1$ en $\arg(z^n) = \arg(zz\cdots z) = \arg z + \arg z + \cdots + \arg z = \theta + \theta + \cdots + \theta = n\theta$. En dus $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. Als $n = 0$, dan is de stelling duidelijk correcr. Als $n < 0$, zeg $n = -m$, dan bekijk $w = \dfrac{1}{z}$ dus $w = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$. Nu geldt $z^n = w^m$ en omdat $m > 0$ geldt volgens het eerste gedeelte van dit bewijs dat $w^m = \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)$ wat gelijk is aan $\cos n\theta + i\sin n\theta$.

Om de **exponentiële functie** $\exp(x) = e^x$ uit te breiden tot de complexe getallen definiëren we eerst de e-macht van een zuiver imaginair getal. Als $t$ een reëel getal is dan

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i\sin t}$$

Onze definitie van $e^{it}$ geeft een kortere notatie voor de polaire vorm van een complex getal: Als $|z| = r$ en $\arg z = \theta$ dan

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$




**Stelling**
Voor alle $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$:

(a) $|e^{it}| = 1$,

(b) $e^{is} = e^{it}$ als en slechts als er een geheel getal $k$ bestaat zodat $s = t + 2k\pi$,

(c) $e^{it} \cdot e^{is} = e^{i(t+s)}$,

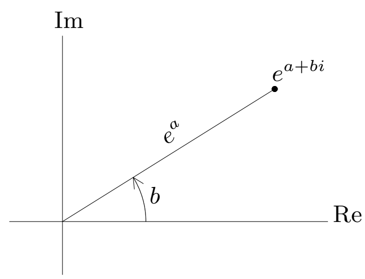
(d) Als $n \in \mathbb{Z}$ dan $(e^{it})^n = e^{int}$.

**Proof**
De uitspraken (a) en (b) hebben we al aangetoond. Uitspraak (c) volgt uit de regel $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ en (d) is de stelling van De Moivre in exponentiële vorm.

Tenslotte breiden we de definitie van de exponentiële functie uit tot alle complexe getallen: als $z = a + bi \in \mathbb{C}$ dan definiëren we $e^z$ door:

$$\boxed{e^z = e^a e^{ib}}$$

Bijvoorbeeld $e^{-1+\frac{1}{2}\pi i} = e^{-1}e^{\frac{1}{2}\pi i} = e^{-1}(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi) = e^{-1}(0+i) = \dfrac{i}{e}$.




## 8.2 De lineaire structuur van $\mathbb{C}^n$

Net als $\mathbb{R}^n$ uit alle reële $n \times 1$ matrices bestaat, zal $\mathbb{C}^n$ bestaan uit alle complexe $n \times 1$ matrices, We schrijven $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Op $\mathbb{C}^n$ definiëren we een optelling en een scalaire vermenigvuldiging (een lineaire structuur) via: als: $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ en $c \in \mathbb{C}$, zeg:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{z} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad c\mathbf{z} = \begin{bmatrix} cz_1 \\ \vdots \\ cz_n \end{bmatrix}$$

Met deze optelling en (complexe )scalaire vermenigvuldiging blijkt $\mathbb{C}^n$ een zogeheten (complexe) vectorruimte te zijn, waarmee we bedoelen dat aan de 8 rekenregels uit deel 1 voldaan is.