Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Oefententamen (deel 1) EE2M21.
Cursusjaar 2014-2015

Opmerking: het gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan. Geef bij de antwoorden duidelijke argumenten aan, tenzij anders wordt vermeld!

1. Beschouw $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ van $\mathbb{R}^4$ en de vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(a) Bepaal een matrix A zodat $W = \text{Col}(A)$.
(b) Bepaal een basis voor W. Wat is de dimensie van W?
(c) Bepaal een orthogonale basis van W.
(d) Bepaal de orthogonale projectie van $\mathbf{x}$ op W.
(e) Bepaal een basis voor $W^\perp$, het orthogonaal complement van W.
(f) Bepaal een orthogonale basis van $W^\perp$.
(g) Gebruik de resultaten van onderdeel (c) en (f) om een 4×4 orthogonale matrix te maken.

2. Beschouw de reële matrix $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, waarbij $k \in \mathbb{R}$

(a) Ga na of de matrix A reëel diagonaliseerbaar is voor $k = 5$. Een diagonalisering hoeft u niet te bepalen.
(b) Ga na of de matrix A complex diagonaliseerbaar is voor $k = 1$. Een complexe diagonalisering hoeft u niet te bepalen.
(c) Bepaal alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix A niet diagonaliseerbaar is.
(d) Bepaal alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix A reëel diagonaliseerbaar is.
(e) Bepaal alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix A complex diagonaliseerbaar is.

3. (a) Bepaal een orthogonale diagonalisering van de matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ als bovendien gegeven is dat het karakteristiek polynoom $p_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$ is.
(b) Geef een diagonalisering van A^{10}. Is A^{10} ook symmetrisch?
(c) Bepaal een symmetrische 3×3 matrix B met het vlak $x + 2y + 3z = 0$ als eigenruimte E_{14} en met tweede eigenwaarde $\lambda = 28$. Het volstaat een diagonalisering van de

matrix B te geven, mits u uitlegt waarom het gegeven product een symmetrische matrix oplevert.

4. (a) Wat is een hermitische matrix? Geef een voorbeeld van zo'n complexe (niet reële) 2×2 matrix.

(b) Wat is een unitaire matrix? Geef een voorbeeld van zo'n complexe (niet reële) 2×2 matrix.

(c) Leg uit dat de matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ geen orthogonale diagonalisatie heeft maar wel een unitaire diagonalisatie.

(d) Geef een unitaire diagonalisatie van B.

5. Gegeven de differentiaalvergelijking $x^3 y' = (y-2)^2$ met beginvoorwaarde $y(1) = y_0$.

(a) Ga na dat dit beginwaardeprobleem voldoet aan de voorwaarden van de existentie- en uniciteitsstelling. Wat volgt hieruit?

(b) Bepaal de expliciete algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

(c) Los het beginwaardeprobleem op als $y_0 = 0$.

(d) Los het beginwaardeprobleem op als $y_0 = 2$.

6. (a) Stel dat $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ een homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking is met de functies $p(t),\ q(t)$ continu op een interval $I = (\alpha, \beta)$ en met $0 \in I$. Leg uit waarom de functie $y(t) = t^2$ geen oplossing van deze vergelijking kan zijn.

Beschouw nu de differentiaalvergelijking:

$$t^2 y'' + 2ty' - 6y = 0, \quad t > 0 \qquad (1)$$

(b) Laat zien dat $y_1(t) = t^2$ een oplossing van de differentiaalvergelijking (1) is.

(c) Waarom is de uitspraak in onderdeel (b) niet in tegenspraak met onderdeel (a)?

(d) Gebruik de methode van "reductie van orde" om een tweede onafhankelijke oplossing $y_2(t)$ van vergelijking (1) te bepalen.

(e) Geef de algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking (1).

7. (a) Ga na dat $y_1 = 1 + t$ en $y_2 = e^t$ lineair onafhankelijke oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking $ty'' - (t+1)y' + y = 0 \quad (t > 0)$.

(b) Bepaal met de methode van variatie van constanten een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking $ty'' - (t+1)y' + y = t^3 \quad (t > 0)$.

(c) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem $ty'' - (t+1)y' + y = t^3$ met $y(1) = 2e$ en $y'(1) = 2e - \frac{7}{2}$.

8. Bepaal de oplossing van het stelsel $X' = AX$, in de gevallen:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.