Col 8, ③

§7.7. Fundamentaal matrices.

Beschouw ~~lin~~ $n\times n$ homogeen lineair 1ste stelsel

$$(*) \quad \underline{x}' = P(t)\,\underline{x} \qquad (P_{ij}(t) \text{ continu op } (\alpha,\beta)=I).$$

Als $\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t)$ n $\underbrace{\text{lineair onafh. oplossingen}}_{\text{(fundamental set of solutions)}}$ $(*)$.

dan heet ~~is~~ de matrix

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in (\alpha,\beta))$$

een fundamentaal matrix van het stelsel (met determinant de Wronskiaan)

Merk op (i) dat $\Psi(t) \neq 0$, voor alle $t \in (\alpha,\beta)$

(ii) De algemene oplossing

$$\underline{x}(t) = c_1\,\underline{x}_1(t) + \cdots + c_n\,\underline{x}_n(t) = \Psi(t)\,\underline{c} \quad \text{met } \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{\underline{x} = \Psi(t)\,\underline{c}}$$

(iii) $\Psi(t)$ voldoet aan "matrix dif vgl" $\underline{\Psi' = P(t)\,\Psi}$.

(per kolom klopt het!)

V.b. ~~Hst~~ (Opgave 3) $\underline{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\underline{x}$

- Bepaal een fundamentaal matrix $\Psi(t)$
- Bepaal die fundamentaal matrix $\Phi(t)$ met $\Phi(0) = I$.

Antwoord. ① $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$\lambda = i$ $\quad E_i = Nul(A - iI)$ $\quad$ Basis $\left\{\begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-i & -5 & 0 \\ 1 & -2-i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\times(2+i)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} (2+i)x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Complexe oplossing: $z(t) = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}(\cos t + i\sin t) = \begin{bmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{bmatrix}$

$$\underline{x}_1(t) = \operatorname{Re} z(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_2(t) = \operatorname{Im}(t) = \begin{bmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(t) & \underline{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t - \sin t & \cos t + 2\sin t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$$

Col 8 (4)

<u>Onhandig</u>: gezocht $\underline{x}(t) = a\begin{bmatrix}2\cos t - \sin t\\ \cos t\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}\cos t + 2\sin t\\ \sin t\end{bmatrix}$ met $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow a\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow a = 0 \quad b = 1 \quad \Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{x}_2(t)$$

Evenzo: $\underline{x}(t) = c\, x_1(t) + d\, x_2(t)$ met $x(t) = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

$$c\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow c = 1 \;\&\; d = -2 \quad \Rightarrow \underline{x}(t) = \begin{bmatrix}-5\sin t\\ \cos t - 2\sin t\end{bmatrix}$$

Dus $\varphi(t) = \begin{bmatrix}2\cos t - \sin t & -5\sin t\\ \cos t & \cos t - 2\sin t\end{bmatrix}$

<u>Handig</u>. Gezocht $\varphi(t) = \psi(t)\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$ met $\varphi(0) = I$

$$\varphi(0) = I \Rightarrow \psi(0)\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} = I \Rightarrow \begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} = \psi(0)^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & +1\\ 1 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix} = \text{zie boven}$$

Algemeen geldt:

~~Als A matrix met constante coëfficiënten, dan geldt:~~

<u>Stelling</u>. Het stelsel $\underline{x}' = A\,\underline{x}$ heeft <u>unieke</u> fundamentele matrix $\varphi(t)$ met $\varphi(0) = I$.

- Als $\psi(t)$ willekeurige fundamentaal matrix, dan
$$\varphi(t) = \psi(t)\,\psi^{-1}(0).$$
- De (unieke) oplossing $\begin{cases}\underline{x}' = A\,\underline{x}\\ \underline{x}(0) = \underline{c}\end{cases}$ is $x(t) = \varphi(t)\,\underline{c}$

<u>Bewijs</u>. $\underline{x}_i(t) = i^{de}$ kolom $\varphi(t)$ is (unieke!) oplossing $\begin{matrix}\underline{x}'(t) = A\,\underline{x}\\ \underline{x}_i(0) = \underline{e}_i\end{matrix}$ $\Rightarrow \varphi$ is fundam.

Als A matrix met constante coëfficiënten, dan:

<u>Notatie</u>. $\varphi(t) = e^{At}$ dus: $\boxed{e^{At} = \psi(t)\,\psi^{-1}(0)}$

<u>Men kan aantonen</u>: (herinner $e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}$) $A^0 = I$

$$\varphi(t) = I + At + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

We weten: ψ fundamentaal $\Rightarrow \psi$ opl. $\psi' = A\psi$

Dus: $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}}$

Bepalen e^{At}

- Algemeen, via oplossen $\underline{x}' = A\underline{x}$ (als in opgave 3) via $e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)$)

opgave 3 $\Rightarrow$ als $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan $e^{At} = \begin{bmatrix} 2\cos t - \sin t & -5\sin t \\ \cos t & \cos t - 2\sin t \end{bmatrix}$

- Als $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ een diagonaal matrix, dan

$$e^{Dt} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{d_1^k t^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n t} \end{bmatrix}$$

- Voor diagonaliseerbare matrices is er een alternatief voor de berekening e^{At}

Stel $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$

Dus

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = P.P^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{PD^nP^{-1}t^n}{n!} =$$

$$= P.P^{-1} + P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n t^n}{n!}\right)P^{-1}$$

$$= P\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n t^n}{n!}\right)P^{-1} = P\,e^{Dt}\,P^{-1}$$

V.b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \underbrace{\lambda = 3, +1 \quad E_3 = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad E_{+1} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}_{\circledast}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\underset{\text{ga na}}{=} \begin{bmatrix} \frac{e^{3t} + e^{t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{t}}{2} \\ \frac{e^{3t} - e^{t}}{2} & \frac{e^{3t} + e^{t}}{2} \end{bmatrix}$$

We hebben al ~~gem~~ oplossing $\left.\begin{array}{l} \underline{x}' = A\underline{x} \\ \underline{x}^* = \underline{c} \end{array}\right\} \rightarrow \underline{x}(t) = e^{At}\,\underline{c}$

N.B. Deze methode is niet voordeliger. $\circledast \Rightarrow \Psi(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{t} \\ e^{3t} & +e^{t} \end{bmatrix}$ en $e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)$

§ 7.9 Niet homogene lineaire stelsels [Col 8, 6]

$$\underline{x}'(t) = P(t)\,\underline{x} + g(t) \qquad (*)$$

met bijbehorende homogeen stelsel

$$\underline{x}'(t) = P(t)\,\underline{x} \qquad (**)$$

Er geldt weer:

Stelling ① $\underline{y}_1(t)$, $\underline{y}_2(t)$ oplossingen $(*) \Rightarrow \underline{y}_1(t) - \underline{y}_2(t)$ oplossing $(**)$

② y_1 oplossing $(**)$, y_2 〃 $(*)$ $\Big\} \Rightarrow y_1 + y_2$ oplossing $(*)$.

③ Algemene oplossing $(*)$: $\underline{x} = \underbrace{\underline{x}_h}_{\text{variabele homogene opl } (**)} + \underline{x}_p$ ← één particuliere — $(*)$.

Besproken methoden:
- diagonaliseren
- methode onbepaalde coëfficiënt ✗ Overslaan
- variatie ~~parameter~~ constante
- Laplace transf. ✗ Overslaan

Diagonaliseren. N.B. $P(t)$ met constante coëfficiënten.

Algemeen:
$$\underline{x}'(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$$
$$\underline{x}'(t) = P D P^{-1}\,\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$$
$$P^{-1}\underline{x}'(t) = D\,(P^{-1}\underline{x}(t)) + P^{-1}\underline{g}(t)$$

Als $P^{-1}\underline{x}(t) = \begin{matrix} 3x_1 + 4x_2 \ldots \\ \ldots \end{matrix} = \underline{y}(t)$ dan $P^{-1}\underline{x}'(t) = \underline{y}'(t)$

geeft stelsel:
$$\underline{y}'(t) = D\,\underline{y}(t) + \underline{H}(t)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= d_1 y_1 + h_1(t) \\ y_2' &= d_2 y_2 + h_2(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= d_n y_n + h_n(t) \end{aligned}\right\}$$ "ontkoppeld" stelsel is op te lossen!

$\underline{y}(t)$ bekend $\Rightarrow \underline{x}(t) = P\,\underline{y}(t)$ bekend.

Vb. §7.9 opgave 2

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} e^{t} \\ \sqrt{3}\, e^{-t} \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ Ga na: eigenwaarden $\lambda = \pm 2$ basis E_2: $\left\{\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

basis E_{-2}: $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\right\}$

Dus $A = P D P^{-1}$

met $P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & +1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\underline{x}' = P D P^{-1} \underline{x} + \underline{g}(t)$

$(P^{-1}\underline{x})' = D(P^{-1}\underline{x}) + P^{-1}g(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{t} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{-t} \\ -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} \end{bmatrix}$

- $y_1' = 2y_1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{t} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{-t}$

  $y_1' - 2y_1 = \quad$,,

  $\underbrace{e^{-2t}y_1' - 2e^{-2t}y_1}_{(e^{-2t}y_1)'} = \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{-t} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{-3t}$

  $e^{-2t}y_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{-t} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\, e^{-3t} + c_1 \quad \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{t} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\, e^{-t} + c_1 e^{2t}$

- $y_2' = -2y_2 - \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t}$

  $\underbrace{e^{2t}y_2' + 2e^{2t}y_2}_{(e^{2t}y_2)'} = -\frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{t}$

  $e^{2t}y_2 = -\frac{1}{12}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{t} + c_2 \quad \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{12}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

- Dus: $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}\sqrt{3} \\ 3/4 \end{bmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$

en

$$\underline{x} = P\underline{y} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}\sqrt{3} \\ 3/4 \end{bmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} -4/6 \\ -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Huiswerk: §7.5 26, ~~25~~ 31

§7.6 26 (13)

§7.8 1 ab

§7.7 1, 5 §7.8 17(c)(f)

College 9.

Colg. ①

Waren bezig met niet homogene 1^{ste} orde stelsels

$$\underline{x}'(t) = \underset{A}{P(t)}\ \underline{x}(t) + \underline{g}(t)$$

beperken ons tot constante coëfficiënten

Weer geldt: $\underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p$

4 methoden:

- als A diagonaliseerbaar: ontkoppelen
- onbepaalde coëfficiënt
- variatie parameter
- Laplace transformatie

niet besproken (mag wel gebruiken).

Veel rekenwerk bij stelsels

Variatie van constanten.

(De meest gebruikte methode!)

Methode ① Los op: $\underline{x}'(t) = \cancel{P(t)}\,A(t)\ \underline{x}(t)$

vindt n basisoplossingen $\underline{x}_1(t) \ldots \underline{x}_n(t)$

$$\underline{x}_h(t) = c_1 \underline{x}_1(t) + \cdots + c_n \underline{x}_n(t) = \underbrace{\Psi(t)}_{\text{fundamentele matrix}} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (\Psi' = P\Psi)$$

② Stel $\underline{x}(t) = \Psi(t)\ \underline{u}(t)$

$\left(\text{met } \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}\right)$

Invullen $\Rightarrow \Psi'\underline{u} + \Psi\underline{u}' = A\Psi\underline{u} + \underline{g}(t)$

$(\Psi' = A\Psi) \Rightarrow \Psi\underline{u}' = \underline{g}(t)$

$\Rightarrow \underline{u}' = \Psi^{-1}\underline{g}(t) \Rightarrow \underline{u}(t) = \int \Psi^{-1}\underline{g}(t)\,dt$

$\underline{x} = \Psi\underline{u} =$ etc.

Vb. $\underline{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2t \\ 4 \end{bmatrix}$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda = 1, -1$ ga na $\quad E_1 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ ga na
  $E_{-1} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

- $\underline{x}_h = \begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \Psi(t)\underline{c}$

- Stel $\underline{x} = \Psi(t)\ \underline{u}(t) \Rightarrow \Psi'\underline{u} + \Psi\underline{u}' = A\Psi\underline{u} + \underline{g}(t)$

$\underline{u}' = \Psi^{-1}\underline{g}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & 3e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{-t} - 2e^{-t} \\ -te^{t} + 6e^{t} \end{bmatrix}$

$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \int (t-2)e^{-t}\,dt \\ \int (-t+6)e^{t}\,dt \end{bmatrix} \overset{\text{ga na}}{=} \begin{bmatrix} (-t+1)e^{-t} + c_1 \\ (-t+7)e^{t} + c_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \underline{x} = \Psi\underline{u} = [$ z.o.z.

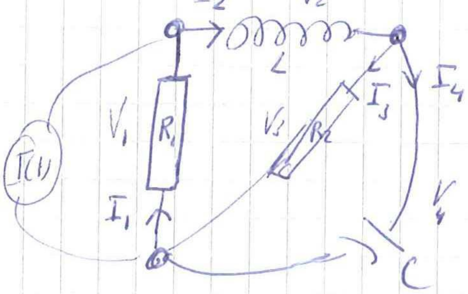
Volg ②

$$\begin{bmatrix}3e^{t} & e^{-t}\\ e^{t} & e^{-t}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}-t+1\\ 0\end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix}0\\ -t+7\end{bmatrix}e^{t}+c_1\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}3(-t+1)\\ (-t+1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-t+7\\ -t+7\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}3e^{t}\\ e^{t}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4\\ -2\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}10\\ 8\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}e^{t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-t}$$

(13)



① $I_1 + I(t) = I_2$

② $I_2 = I_3 + I_4$

③ $V_1 + V_2 + V_3 = 0$

④ $V_3 = V_4$

⑤ $V_1 = R_1 I_1$

⑥ $L \dfrac{dI_2}{dt} = V_2$

⑦ $V_3 = R_2 I_3$

⑧ $C \dfrac{dV_4}{dt} = I_4$

Wordt als makkelijk circuit beschouwd door EP

omwerken naar stelsel in I_2 & V_4 $(=V_3)$

mag niet

nee

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{L}V_2 = \frac{1}{L}(-V_1 - V_3) =$$

$$= \frac{1}{L}(-R_1 I_1 - V_4) = \frac{1}{L}\left[-R_1(I_2 - I(t)) - V_4\right]$$

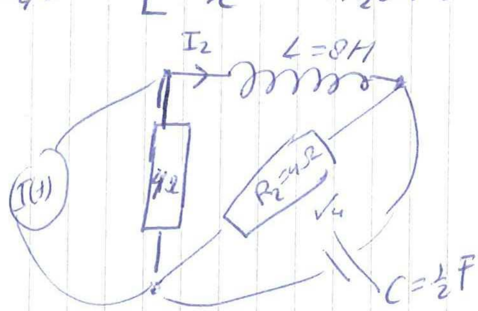
$$\frac{dI_2}{dt} = -\frac{R_1}{L}I_2 - \frac{1}{L}V_4 + \frac{R_1}{L}I(t)$$

$$\frac{dV_4}{dt} = \frac{1}{C}\underset{\text{nee}}{I_4} = \frac{1}{C}(I_2 - \underset{\text{nee}}{I_3}) = \frac{1}{C}\left(I_2 - \frac{V_3}{R_2}\right) = \frac{1}{C}\left(I_2 - \frac{V_4}{R_2}\right)$$

$$\frac{dV_4}{dt} = \frac{1}{C}I_2 - \frac{1}{R_2 C}V_4$$

Geeft:
$$\begin{bmatrix}I_2\\ V_4\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}-R_1/L & -1/L\\ 1/C & -1/R_2C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2\\ V_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}R_1/L\\ 0\end{bmatrix}I(t)$$

Vervolgens



$$\begin{bmatrix}I_2'\\ V_4'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{8}\\ 2 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2\\ V_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}I(t)$$

Los stelsel op als $I(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$
en $\underline{X}(0) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

a) We bepalen fundamentaal matrix $\boxed{\text{Colg. } 3}$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-\tfrac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \tfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}i$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{8} & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2}i & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

basis $E_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$: $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{4}i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

complexe oplossing : $\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}i \\ 1 \end{bmatrix}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\tfrac{1}{2}t + i e^{-\frac{1}{2}t}\sin\tfrac{1}{2}t\right)$

$$\Psi(t) = [\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z] = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}t & \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{1}{2}t \\ e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{1}{2}t & e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}t \end{bmatrix}}_{\text{Det} = -\frac{1}{4}e^{-t}\sin^2\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-t}\cos^2\frac{1}{2}t = \frac{-1}{4e^t}}$$

b) $\underline{x} = \Psi(t)\,\underline{u}(t) \Rightarrow \underline{u}' = \Psi^{-1}\underline{g} =$

$$= -4e^{t}\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}t & -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{1}{2}t \\ -e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{1}{2}t & -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t/2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin\frac{1}{2}t \\ 2\cos\frac{1}{2}t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{u}(t) = \int \begin{bmatrix} -2\sin\frac{1}{2}t \\ 2\cos\frac{1}{2}t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 4\cos\frac{1}{2}t + c_1 \\ 4\sin\frac{1}{2}t + c_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(t) = \Psi(t)\,u(t) = -\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} \sin\frac{1}{2}t & -\cos\frac{1}{2}t \\ -4\cos\frac{1}{2}t & -4\sin\frac{1}{2}t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4\cos\frac{1}{2}t + c_1 \\ 4\sin\frac{1}{2}t + c_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(0) = \underline{0} \Rightarrow -\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4+c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = -4 \text{ en } c_2 = 0$$

$$\underline{x}(t) = -\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} \sin\frac{1}{2}t & -\cos\frac{1}{2}t \\ -4\cos\frac{1}{2}t & -4\sin\frac{1}{2}t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4\cos\frac{1}{2}t - 4 \\ 4\sin\frac{1}{2}t \end{bmatrix}$$

$$= -\tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} 4\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t - 4\sin\frac{1}{2}t - 4\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t \\ -16\cos^2\frac{1}{2}t + 16\cos\frac{1}{2}t - 16\sin^2\frac{1}{2}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\frac{1}{2}t \\ 4 - 4\cos\frac{1}{2}t \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}$$

Nu ~~zijn~~ I_1, I_3, I_4 & V_1, V_2 te bepalen, via:

$\frac{dV_4}{dt} = \frac{1}{C} I_4 \Rightarrow I_4$ bekend

$\frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{L} V_2 \Rightarrow V_2$ bekend $\Rightarrow V_1 = -V_3 - V_2$ bekend

$I_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad I_3 = \frac{V_2}{R_2}$ bekend.