Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Oefenententamen (deel 2) EE2M21.
Cursusjaar 2014-2015

Opmerking: het gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan. Geef bij de antwoorden duidelijke argumenten aan, tenzij anders wordt vermeld!

1. Beschouw de reële vectorruimte $M_{n\times n}(R)$ van alle $n \times n$ matrices.

(a) Wat is de dimensie van deze vectorruimte?

(b) Geef een basis van deze vectorruimte.

Beschouw de deelverzameling W van $M_{n\times n}(R)$ van alle symmetrische matrices.

(c) Toon aan dat W een deelruimte is van $M_{n\times n}(R)$.

(d) Geef een basis van W.

(e) Bepaal de dimensie van W.

2. Beschouw $C([-1,1],\mathbb{R})$, de vectorruimte van alle continue reële functies op het interval $[-1,1]$ met het standaard inwendigproduct. Beschouw ook de deelruimte $W = Pol_2([-1,1],\mathbb{R})$ (alle polynomen op $[-1,1]$ van graad ≤ 2).

(a) Maak uit de basis $\{1, x, x^2\}$ een orthogonale basis van W.

(b) Bepaal de beste kwadratische benadering van de functie $f(x) = 210x^4$ op het interval $[-1,1]$.

(c) Leg uit wat "beste kwadratische benadering op $[-1,1]$" betekend.

3. (a) Beschouw $PC([-L,L],\mathbb{R})$, de vectorruimte van alle stuksgewijs continue functies op het interval $[-L,L]$ met het standaard inwendigproduct. Beschouw de functies $g(x) = \cos(\frac{n\pi x}{L})$ en $h(x) = \cos(\frac{m\pi x}{L})$ met $m \neq n$ en $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) Toon aan: $\|g\|^2 = L$.

(ii) Toon aan: $g \perp h$.

(b) Beschouw de functie $f(x) = |x|$ op $[-L,L]$. Bepaal de tweede orde Fourrierbenadering $F_2(x)$ van f.

(c) Als men de grafieken van $F_n(x)$ van $f(x)$ zal schetsen, zal dan het Gibbs-fenomeen optreden? (Vergeet de uitleg niet.)

(d) Beschouw $g(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$. Bepaal de Fourierreeks $F(x)$ van $g(x)$.

(e) Schets de periodieke voortzetting van $g(x)$ op het interval $[-3\pi, 3\pi]$.

(f) Maak tweede schets van $F(x)$ op het interval $[-3\pi, 3\pi]$.

4. Beschouw het gekoppelde stelsel

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2).$$

(a) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel (2).

(b) Bepaal e^{At}.

(c) Voeg aan het stelsel (2) de beginvoorwaarde $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ toe. Bepaal de oplossing van dit beginvoorwaardeprobleem.

(d) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel: $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Beschouw het stelsel

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (*)$$

(a) Kies $\alpha = 1$ en voeg aan het stelsel $(*)$ de beginvoorwaarde $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ toe. Bepaal de reele oplossing van dit beginvoorwaardeprobleem.

(b) Kies weer $\alpha = 1$. De stroomlijnen, gaan die linksom of rechtsom om de oorsprong?

(c) Kies nu $\alpha = 0$. Bepaal een vergelijking in x, y voor de banen in het fasevlak van dit stelsel.

(d) Bepaal, voor alle waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$, het type en de stabiliteit van het evenwichtspunt.

6. Beschouw het volgende niet–lineaire autonome stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = (x-2)(2y-x) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (y+2)(2x-y)$$

(5) (a) Bepaal de vier evenwichtspunten van dit stelsel.

(9) (b) Voor ieder van deze evenwichtspunten:

  (i) Bepaal de linearisering van dit stelsel in dit evenwichtspunt.

  (ii) Classificeer het evenwichtspunt van de linearisering (type en stabiliteit)

(5) (c) Classificeer nu ieder evenwichtspunt van het oorspronkelijke stelsel (als dit mogelijk is) via de linearisering.

(3) **7.** (a) Gegeven is de functie $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Laat zien dat de sinusreeks van de functie f op het interval $[0, 2]$ gelijk is aan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi x}{2}), \quad \text{met} \quad b_k = \frac{2}{k\pi}\left(\cos(\frac{k\pi}{2}) - \cos(k\pi)\right).$$

(6) (b) Beschouw de volgende snaarvergelijking.

$$\begin{cases} 1) \quad u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ 2) \quad u(0,t) = 0, & u(2,t) = 0, \qquad t > 0, \\ 3) \quad u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}, \quad 0 < x < 2. \end{cases}$$

Laat, met de methode van scheiden van variabelen, zien dat voor zekere $c_k \in \mathbb{R}$ een oplossing $u(x,t)$ van de vorm:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(\frac{k\pi t}{2}) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

zal bestaan en bepaal tevens die c_k $(k = 1, 2, \cdots)$.