Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen (deel 1) EE2M21, 10-12-2014

---

1. (a) Duidelijk is dat de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ voldoet.

(b) Vegen geeft $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ga na). De pivotkolommen van A vormen een basis Col(A). Dit levert: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ als basis $W = \text{Col}(A)$.. We passen Gram-Schmidt toe op de gevonden basis. Dus:

$\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\dfrac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \dfrac{5}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

De gezochte orthogonale basis van W is bijvoorbeeld: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

(c) We gebruiken de projectieformule, maar moeten wel de orthogonale basis gebruiken.

$$\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1} \right) \mathbf{b}_1 + \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2} \right) \mathbf{b}_2 = \frac{8}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{14}{42} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(d) Omdat $W = \text{Col}(A)$ volgt: $W = \text{Nul}(A^T)$. Vegen van het stelsel $A^T|\mathbf{0}$ levert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \text{ Dus: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_3/3 \\ -2x_3/3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \tfrac{x_3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dit levert $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ als basis voor $W^{\perp}$.

(e) Als we de orthogonale bases van W resp. $W^{\perp}$ normeren en in een matrix zetten, verkrijgen we de orthogonale matrix:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \text{ met: } Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-5}{\sqrt{42}} & \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

2. (a) A is niet diagonaliseerbaar als er slechts één eigenwaarde is terwijl voor die eigenwaarde geldt: $m.m(\lambda) < a.m(\lambda)$. (Want A is een 2×2 matrix.) Het karakteristiek polynoom is: $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & k \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + k$ en dus

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4k}}{2}.$$

Dus discrimant gelijk aan 0 als $4 - 4k = 0$, dus als $k = 1$.
Als $k = 1$ dan $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ en dus $\lambda = 1$ met $a.m.(\lambda = 1) = 2$.
$E_1 = \text{Nul}(A - I)$ levert: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ dus $\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. We zien: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ is basis E_1, dus $m.m.(\lambda = 1) = 1 < a.m.(\lambda = 1)$. Dus inderdaad, als $k = 1$ dan is A niet diagonaliseerbaar.

(b) Met bovenstaand verhaal is het duidelijk dat $k < 1$ (dan $D > 0$) er twee reële eigenwaarden zijn en dus is A reëel diagonaliseerbaar..

(c) Evenzo als $k > 1$ is de diagonalisering complex, niet reëel. (Het antwoord is dus eigenlijk: $k \neq 1$, zoals ?? opmerkte).

3. (a) Om een orthogonale diagonalisering van de symmetrische matrix A te vinden hebben we van ieder van de eigenruimtes een orthonormale bases nodig. Omdat $p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$, zien we de eigenwaarden $\lambda = 2$ (met $a.m.(\lambda = 2) = 2$) en $\lambda = 5$ (met $a.m.(\lambda = 5) = 1$).
Basis $E_5 = \text{Nul}(A - 5I)$.
Omdat $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ zien we $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3/2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Dus $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een orthogonale basis van E_5 en $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$ een orthonormale basis.
Basis $E_2 = \text{Nul}(A - 2I)$. Omdat $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ zien we $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is basis E_2.
We passen Gram-Schmidt toe op de basis van E_2.

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \left(\frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dus: $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ is een orthogonale basis van E_2 en normeren levert de orthonormaale basis. Een orthogonale diagonalisering is dus: $A = QDQ^{-1} = QDQ^T$ met:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ en } D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Er bestaat geen symmetrische 3×3 matrix B met het vlak $x+y-z=0$ als eigenruimte E_1 en met tweede eigenruimte $E_{-3} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$!

Want: eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden van een symmetrische matrix zijn loodrecht, en deze matrix zal deze eigenschap niet hebben. Inderdaad, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in E_1$ en $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E_{-3}$ en deze eigenvectoren zijn niet loodrecht. Dus B is niet symmetrisch.

(c) De matrix $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ heeft geen orthogonale diagonalisatie, want de matrix is niet symmetrisch. De matrix C heeft wel een unitaire diagonalisatie, want de matrix is wel normaal. Inderdaad: $CC^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ en evenzo: $C^*C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Om een unitaire diagonalisatie van C te bepalen, bepalen we eerst de eigenwaarden via: $p_C(\lambda) = (2-\lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i$.

Basis $E_{2+i} = \text{Nul}(C-(2+i)I)$: $\left[\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ levert $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} iz_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus $\left\{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis voor E_{2+i}. Evenzo:

Basis $E_{2-i} = \text{Nul}(C-(2-i)I)$: $\left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ levert $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -iz_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus $\left\{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis voor E_{2-i}.

Merk op dat voor de twee basisvectoren geldt: $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. Daarom, na normering, is de matrix

$$U = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

een unitaire matrix en $C = UDU^{-1} = UDU^*$ (met $D = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}$) is een unitaire diagonalisatie van C.

4. (a) $ty' - y = t^2 e^{-2t} \;\Rightarrow y' - \frac{1}{t}y = te^{-2}$.
Kennelijk $p(t) = -\frac{1}{t}$, dus $P(t) = -\ln(t)$ en de integrerende factor wordt: $e^{P(t)} = e^{-\ln(t)} = \frac{1}{t}$. Dit levert: $\frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = e^{-2t}$, dus $(\frac{1}{t}y)' = e^{-2t}$ geeft $\frac{1}{t}y = \frac{1}{2}e^{-2t} + C$, dus:

$$y = -\frac{1}{2}te^{-3t} + Ct$$

(b) De differentiaalvergelijking is separabel. Allereerst merken we op dat de functie $y(x) = 3$ een oplossing is, maar deze voldoet niet aan de beginvoorwaarde. Dit levert de vergelijking $\dfrac{y'}{y-3} = \dfrac{1-x^2}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} - 1$. Dus: $\displaystyle\int \frac{1}{y-3}\,dy = \int \frac{1}{x^2} - 1\,dx$, waaruit volgt dat $\ln|y-3| = -\dfrac{1}{x} - x + c \quad (c \in \mathbb{R})$. Substitutie $y(-1) = 4$ levert $c = -2$.
Dus: $|y-3| = e^{-\frac{1}{x}-x-2} \;\Rightarrow y - 3 = \pm e^{-\frac{1}{x}-x-2}$. Omdat $y(-1) - 3 = 1 > 0$ volgt: $y - 3 = e^{-\frac{1}{x}-x-2}$ en dus:

$$y = 3 + e^{-\frac{1}{x}-x-2}.$$

5. (a) Invullen laat zien dat $y = t^r$ is een oplossing van de homogene differentiaalvergelijking. Invullen geeft: $t^2 r(r-1)t^{r-2} - 2trt^{r-1} + 2t^r = 0 \Rightarrow t^r(r^2 - 3r + 2) = 0 \Rightarrow r = 1, 2$.
Dit geeft $y_1(t) = t$ en $y_2(t) = t^2$ als basis oplossingen van de homogene vergelijking.

(b) Stel nu dat $y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ (waarin $u_1 = u_1(t)$ en $u_2 = u_2(t)$) een oplossing is van de differentiaalvergelijking:

$$y'' - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2} = 8.$$

Dan (standaard kennis of afleiden via invullen met aanname $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$):

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Dus: $\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2t & -t^2 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ \frac{8}{t} \end{pmatrix}$. We verkrijgen $u_1' = -8 \Rightarrow u_1(t) = -8t + c_1$ en $u_2' = 8/t \Rightarrow u_2(t) = 8\ln(t) + c_2$.
We concluderen dat de algemene oplossing wordt:
$y(t) = (-8t + c_1)t + (8\ln(t) + c_2)t^2 = -8t^2 + 8\ln(t) + c_1 t + c_2 t^2$.
Omdat $8t^2$ een homogene oplossing is, kun je deze bij de algemene oplossing optellen (dat hoeft echter niet) en dan wordt de algemene oplossing iets korter:

$$y(t) = 8\ln(t) + c_1 t + c_2 t^2.$$

6. (a) $y(t) = e^{rt}$ invullen in $y'' + 5y' = 0$ levert als karakteristieke vergelijking: $r^2 + 5r = 0$.
Dus $r = 0, -5$ wat

$$y_h(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-5t} = c_1 + c_2 e^{-5t}$$

als algemene homogene oplossing geeft.

(b) Omdat $1, e^{-5t}$ homogene oplossingen zijn, proberen we als particuliere oplossing:

$$y_p = (At + B)e^{3t} + (Ct^3 + Dt^2 + Et)e^{-5t} + (Ft^3 + Gt^2 + Ht).$$