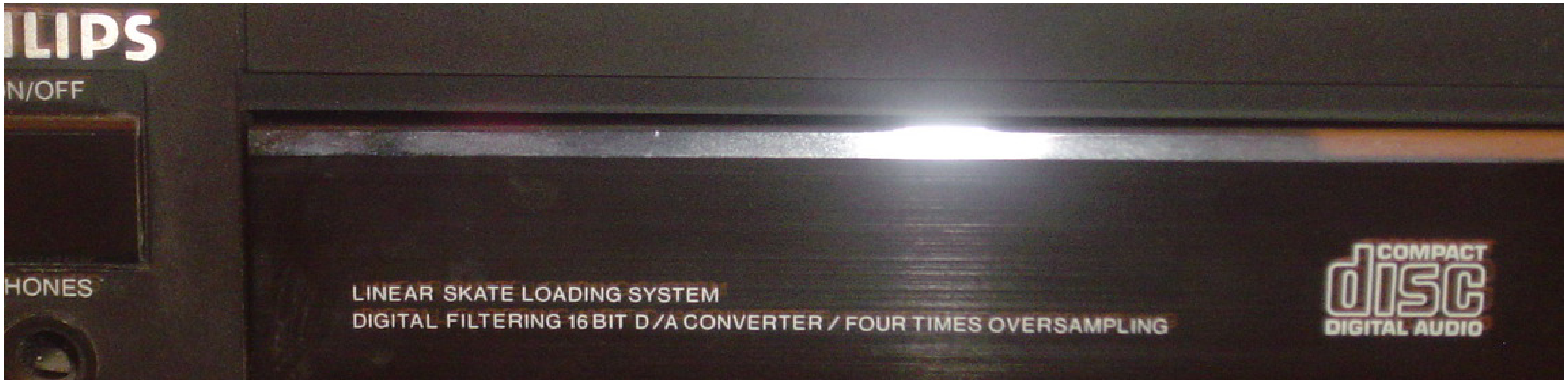
Multirate systemen

Multirate systemen hebben verschillende bemonsteringsfrequenties in het digitale deel.

Toepassingen zijn:

- sample rate conversie tussen diverse delen van audio systemen
- digitale anti-aliasing (bijv. CD spelers)
- subband codering van spraak en audio
- subband adaptieve filters



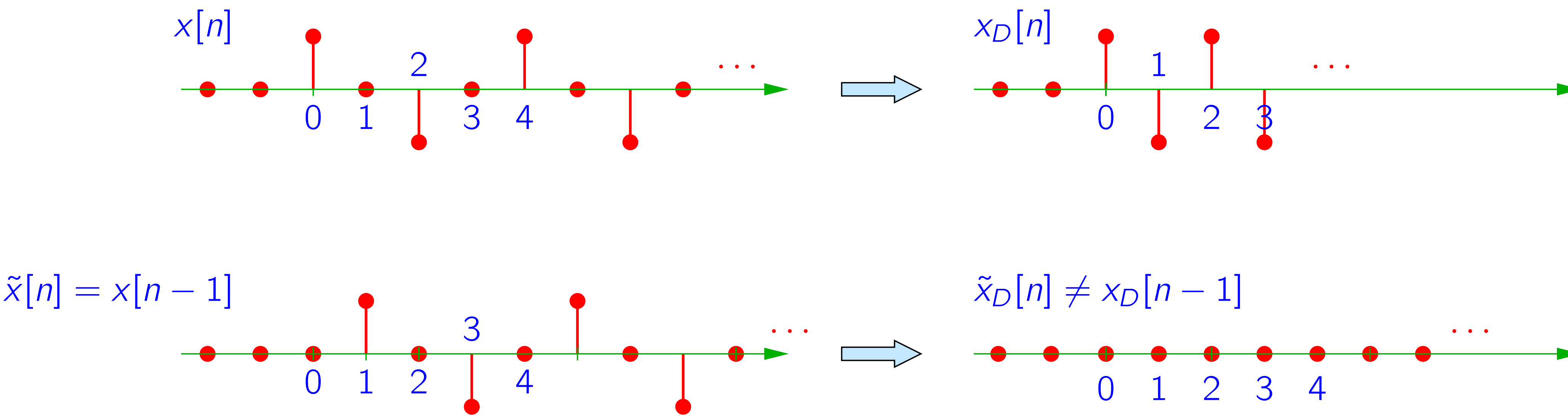
Multirate systemen

Downsampling met een geheel getal (decimatie)

$$T_s' = MT_s \qquad \Rightarrow x_D[n] = x_a(nT_s') = x_a(nMT_s) = x[nM]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow x_D[n] = x[Mn]$$

Decimatie is een *tijdvarierend* lineair systeem:

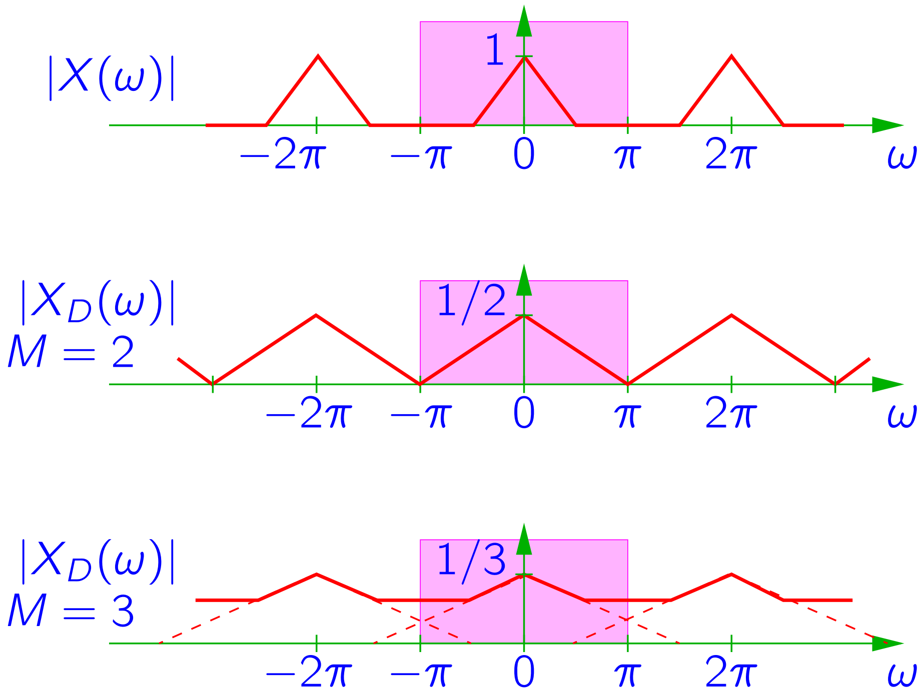


Decimatie

Eigenschap:

$$X_D(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M}e^{-j2\pi k/M}), \qquad X_D(\omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(\frac{\omega - 2\pi k}{M})$$

Het spectrum van $X_D(\omega)$ bestaat uit verschoven, uitgerekte versies van het spectrum van $X(\omega)$. Hierdoor kan aliasing optreden.



Multirate systemen

Bewijs decimatie-eigenschap: Stel

$$p[\ell] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi k\ell/M} = \begin{cases} 1, & \ell = 0, \pm M, \pm 2M, \cdots \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

Dan

$$\begin{aligned}
X_D(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nM] z^{-nM/M} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p[\ell]\, x[\ell]\, z^{-\ell/M} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi k\ell/M} \right\} x[\ell]\, z^{-\ell/M} \\
&= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell] (z^{1/M} e^{-j2\pi k/M})^{-\ell} \\
&= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} e^{-j2\pi k/M})
\end{aligned}$$

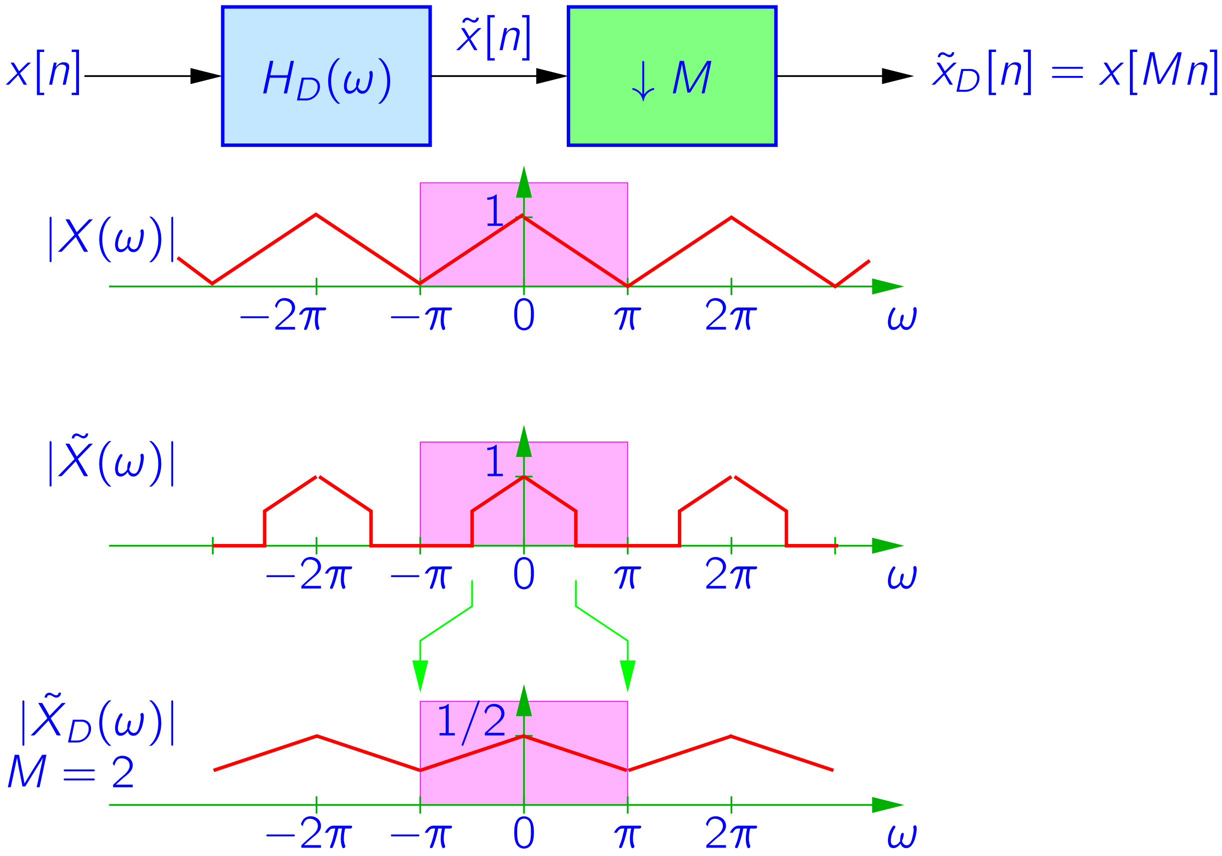
Multirate systemen

Decimatie

Geen aliasing als $X(\omega) = 0$ voor $\pi/M \leq \omega \leq \pi$.

In dat geval is $X_D(\omega) = \frac{1}{M} X(\frac{\omega}{M})$, $(-\pi \leq \omega \leq \pi)$.

Om aliasing te voorkomen wordt daarom vaak eerst een anti-aliasing filter toegepast ("decimatiefilter", laagdoorlaatfilter), idealiter met bandbreedte π/M.

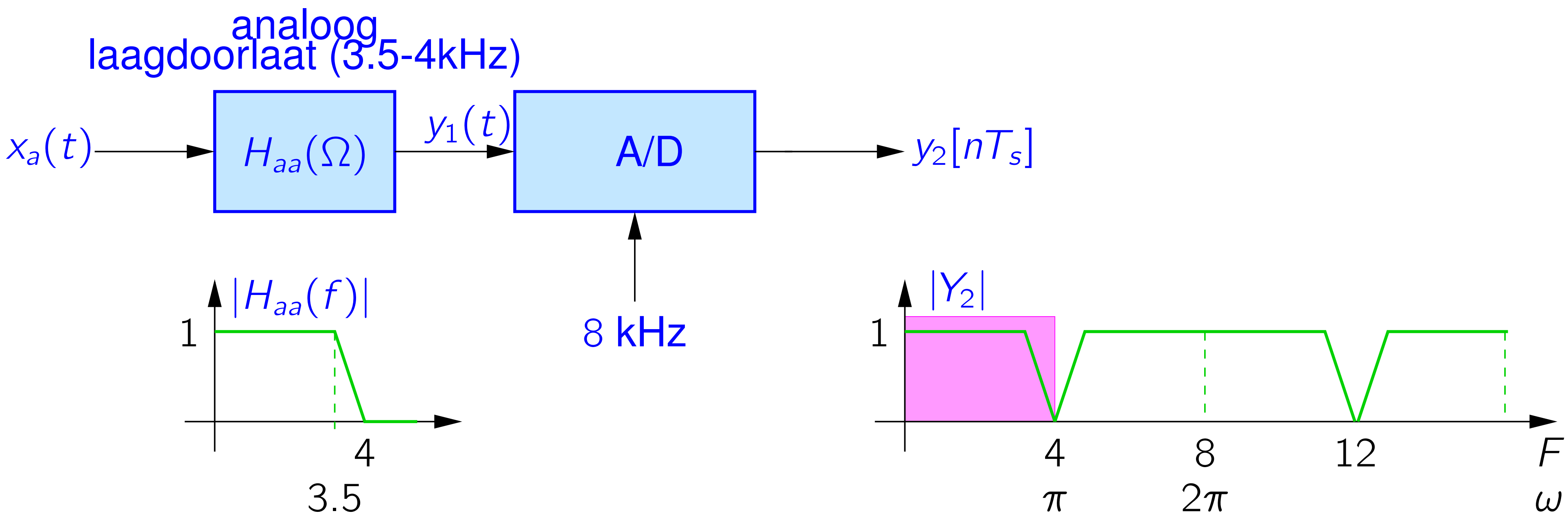


Multirate systemen

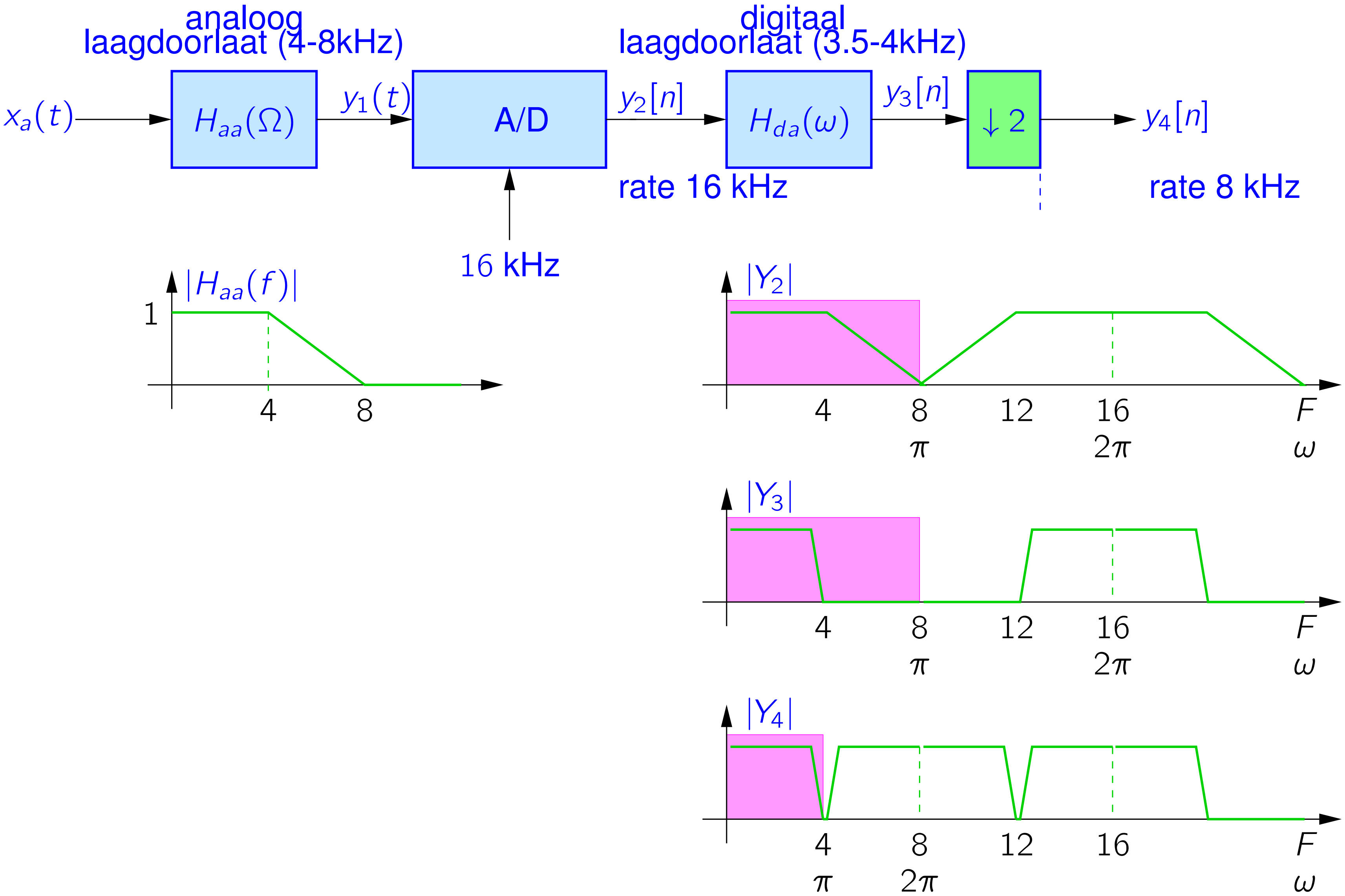
Toepassing decimatie op audio

Stel een analoog audiosignaal waarbij enkel de frequenties onder 3.5 kHz van belang zijn. We willen dit samplen met een rate van $F_s = 1/T_s = 8$ kHz.

Om aliasing te vermijden moeten eerst alle frequenties boven $F_s/2 = 4$ kHz weggefilterd worden. Hiervoor is een analoog laagdoorlaatfilter nodig met een transitieband van 3.5 kHz tot 4 kHz: waarschijnlijk lastig te maken.



Multirate systemen

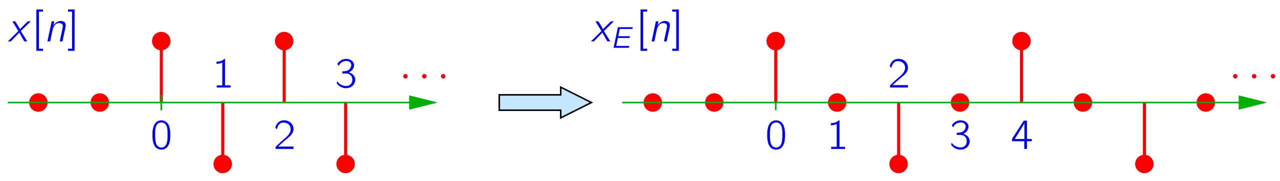


Het tijdscontinue filter kan nu veel simpeler worden, de complexiteit is verschoven

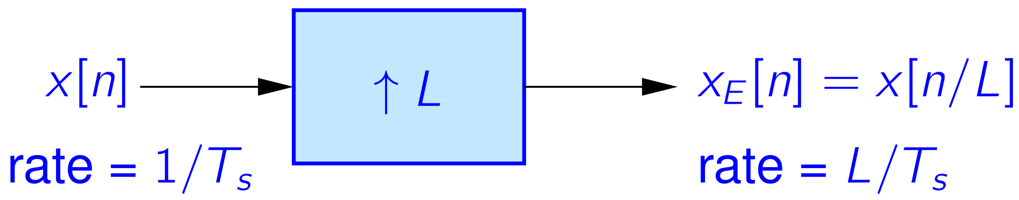
Upsampling met een geheel getal

Omhoogsamplen met een geheel getal L betekent $L-1$ nullen tussenvoegen:

$$x_E[n] = \begin{cases} x[k], & n = kL \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$



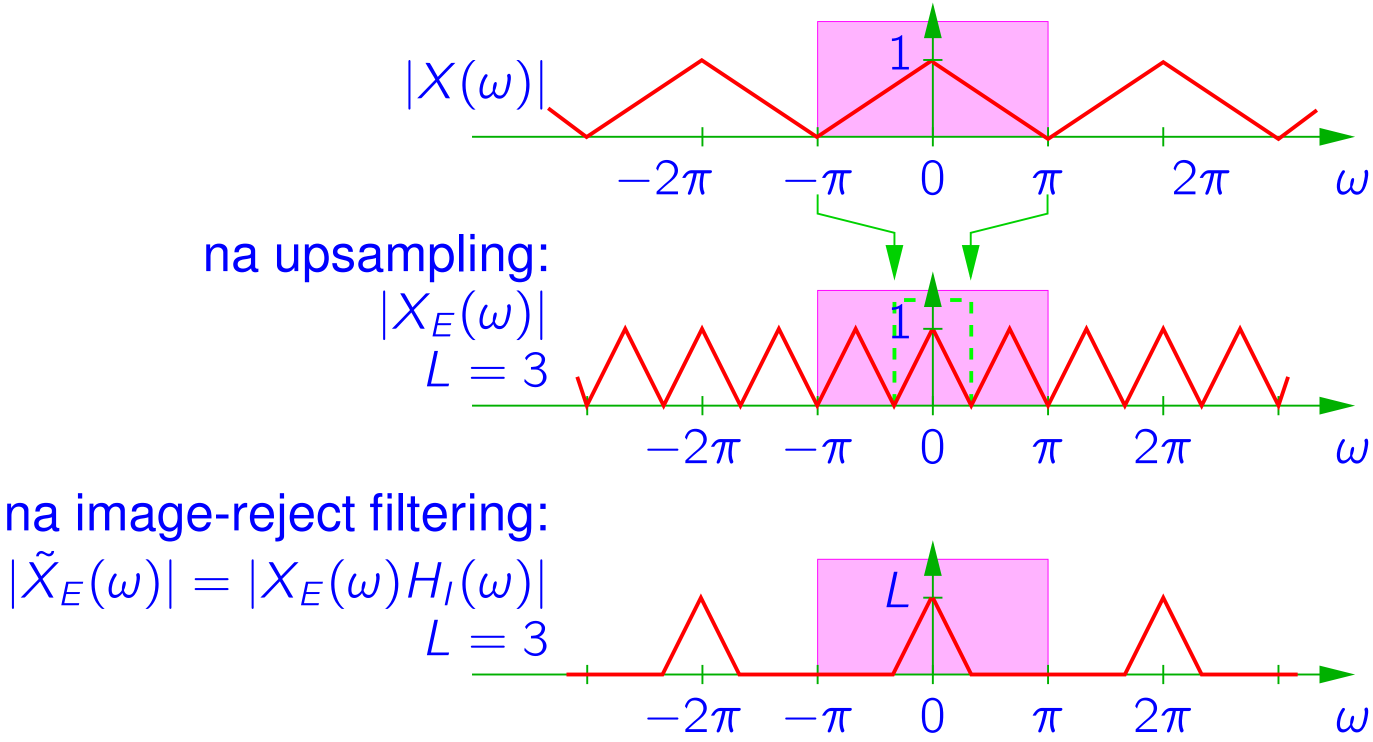
De datarate van $X_E[n]$ gaat hierdoor met een factor L omhoog. Dit heet ook wel expansie. Er is geen informatieverlies.



$$X_E(z) = X(z^L)\,, \qquad X_E(\omega) = X(\omega L)$$

Het spectrum wordt dus een factor L "inelkaargedrukt", en er komen $L-1$ kopieen van het spectrum in het fundamentele interval.

Multirate systemen



We kunnen de $L-1$ kopieen verwijderen door een ideaal laagdoorlaatfilter (interpolatiefilter of image-rejectfilter)

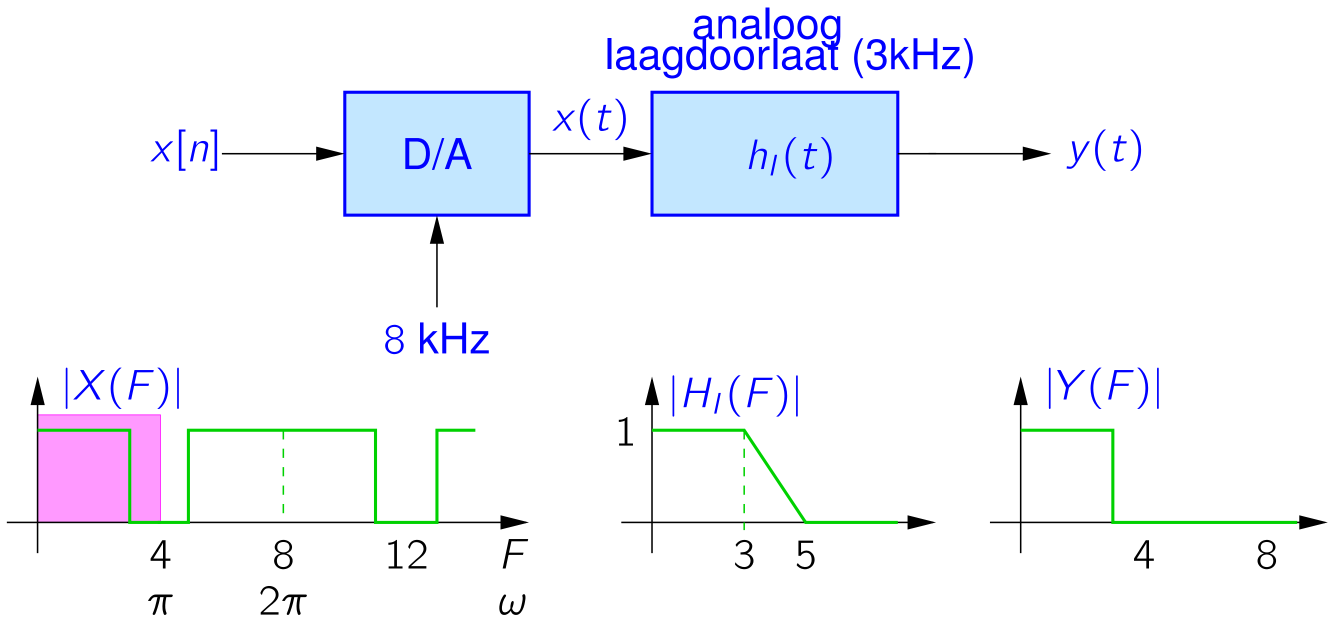
$$H_I(\omega) = \begin{cases} L, & |\omega| < \pi/L \\ 0, & \pi/L < |\omega| < \pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad h_I[n] = \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{L}\right)$$

Het gecombineerde systeem komt overeen met samplen met een rate L/T_s

Toepassing interpolator op audio

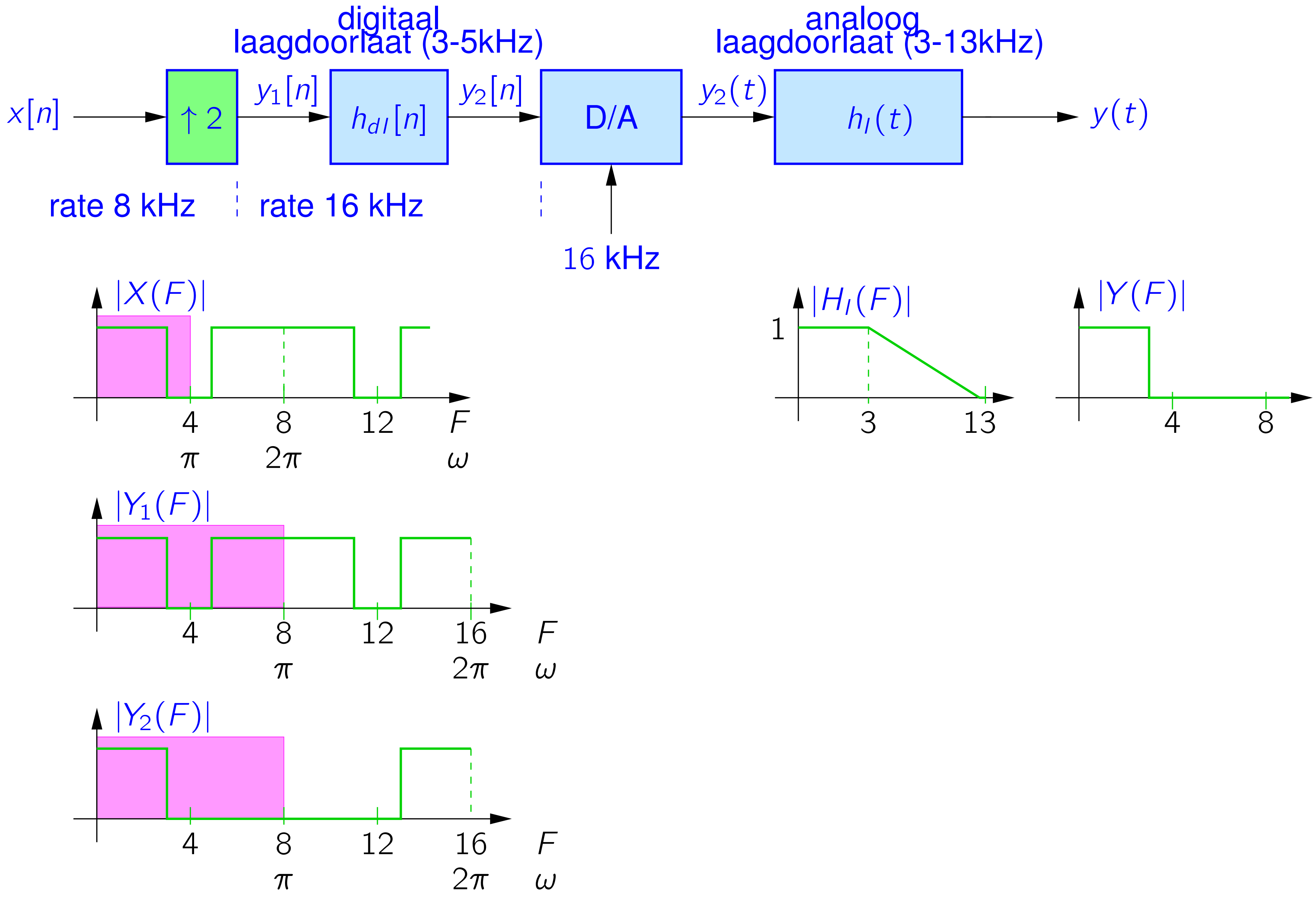
Stel een digitaal audiosignaal $x[n]$ dat weer tijdscontinue gemaakt moet worden (D/A). De hoogste frequentie is 3 kHz, de sample rate 8 kHz.

Na D/A omzetting is een analoog interpolatiefilter nodig (image rejection filter) met een transitieband van 3 tot 5 kHz.



In plaats hiervan kunnen we eerst upsamplen met een factor 2, en daarna de D/A

Multirate systemen



Het analoge filter kan nu veel eenvoudiger gemaakt worden.

Multirate systemen

Soortgelijke toepassing: oversampling bij CD speler (tentamen jan.06)

Een CD bevat digitale audiosamples met een sample rate van 44 kHz. De hoogst hoorbare frequentie in een audiosignaal is bij mensen ongeveer 20 kHz.

- Op een CD-speler staat de mededeling "2 times oversampling".

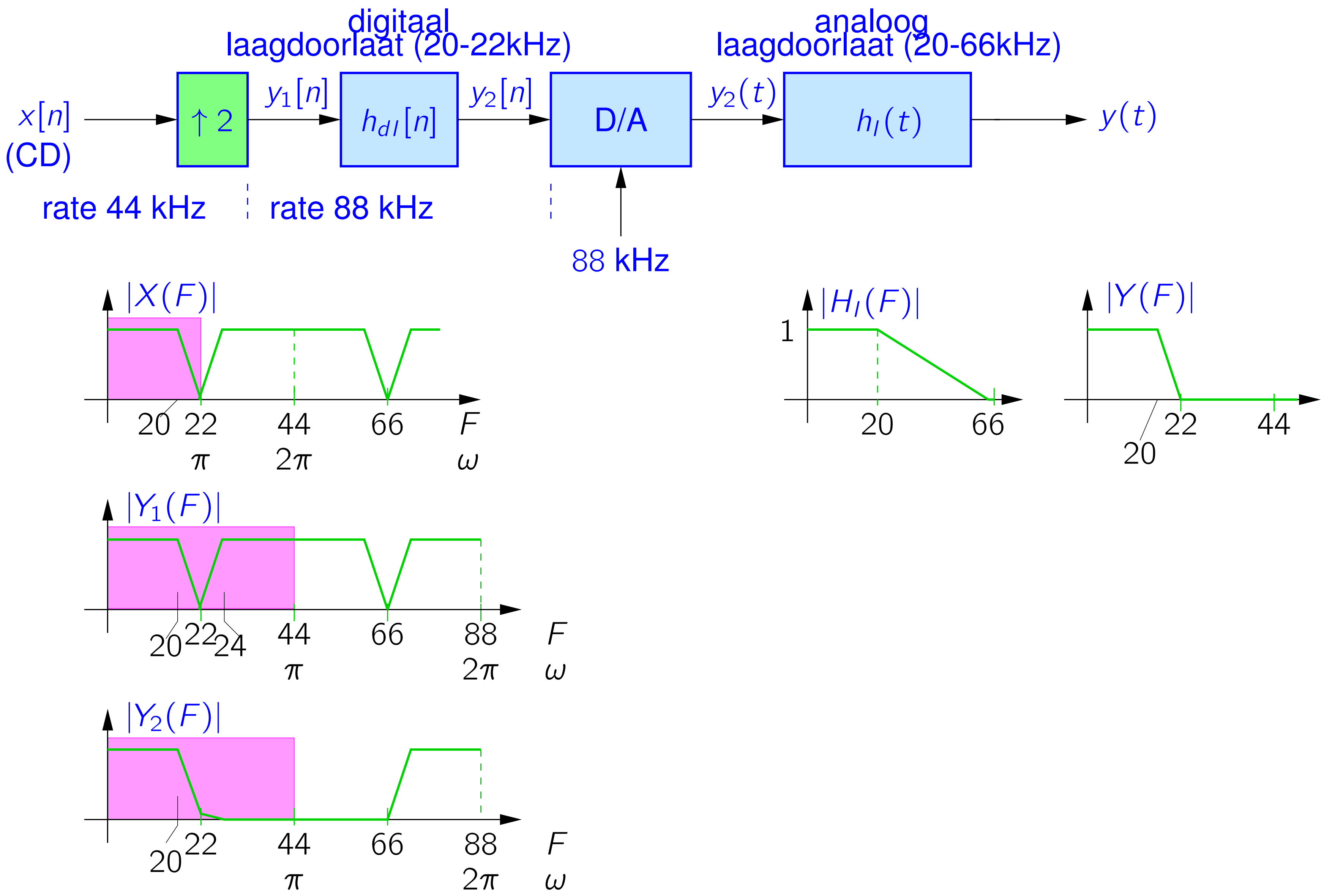
  Wat wordt hier precies mee bedoeld?

  Antw.: Het gaat hier om D/A omzetting. De gegevensstroom van de CD (de samples) wordt uitgebreid met nullen (een nul tussen iedere twee samples) zodat de datarate hierna twee keer zo hoog is.

  Hierdoor wordt het analoge interpolatiefilter eenvoudiger.

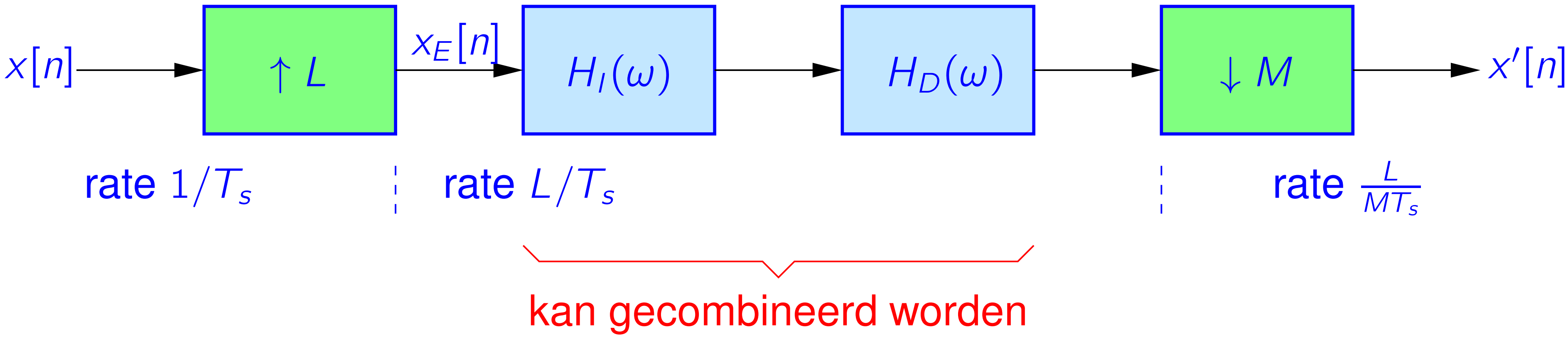
- Teken het blokschema van de reconstructie, en van ieder signaal het frequentiediagram.

Multirate systemen



Samplerate conversie met een rationale factor

We kunnen de twee systemen combineren en daardoor de samplerate met een rationale factor L/M vergroten: eerst upsamplen met L, dan downsamplen met M. (Door deze volgorde wordt onnodig informatieverlies voorkomen)

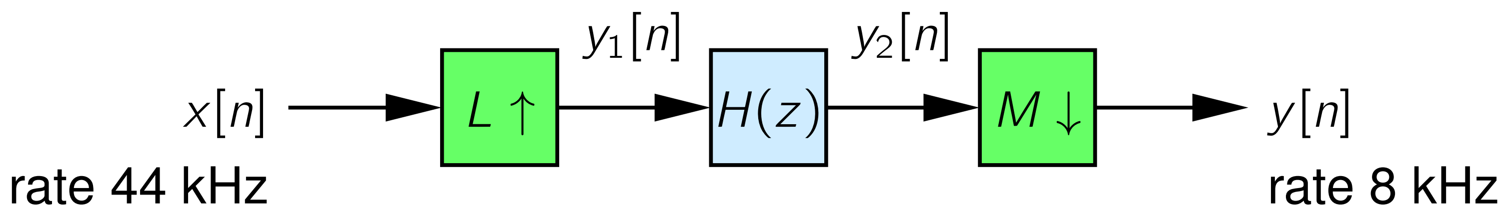


De twee laagdoorlaatfilters kunnen gecombineerd worden tot een die afkapt op de laagste frequentie: $\omega_c = \min(\pi/M, \pi/L)$.

Multirate systemen

Toepassing sample-rate conversie (tentamen juni'05)

Gegeven een tijddiscreet audiosignaal $x[n]$ in CD kwaliteit: de sample rate is 44 kHz. Om dit over een telefoonlijn te versturen is het gewenst de samplerate te verlagen naar 8 kHz, met minimaal kwaliteitsverlies.

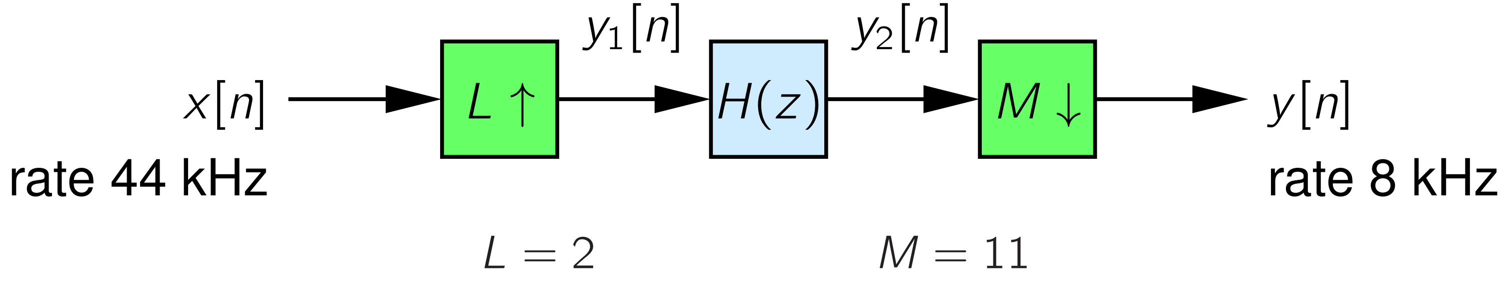


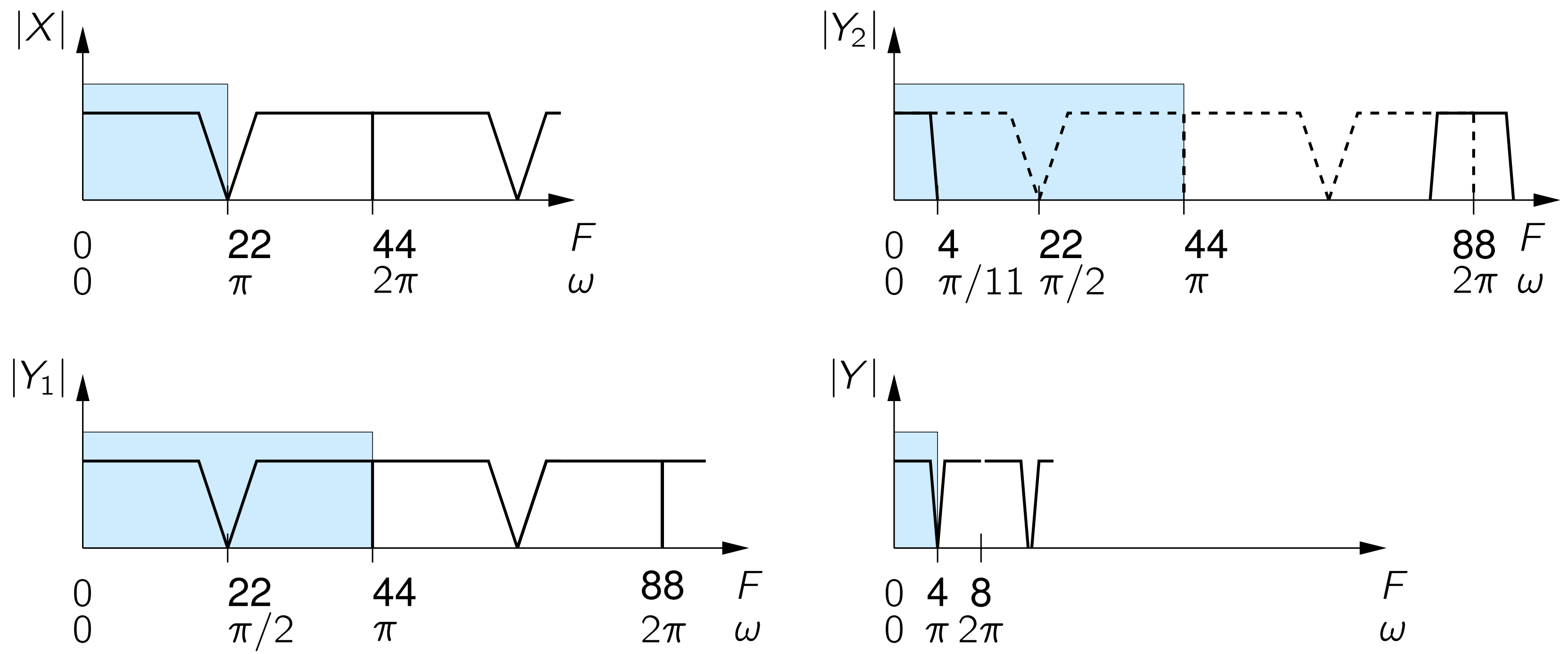
- Wat zijn geschikte waarden voor de upsamplingfactor L en de downsampling factor M?

  Antw.: $L = 2,\ M = 11$ zodat $44\frac{L}{M} = 8$

Multirate systemen

- Wat is de specificatie van het filter $H(z)$?



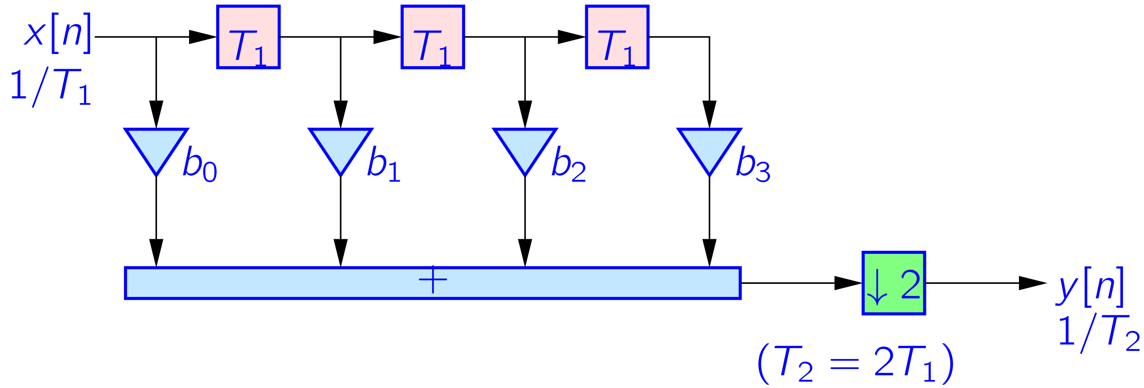


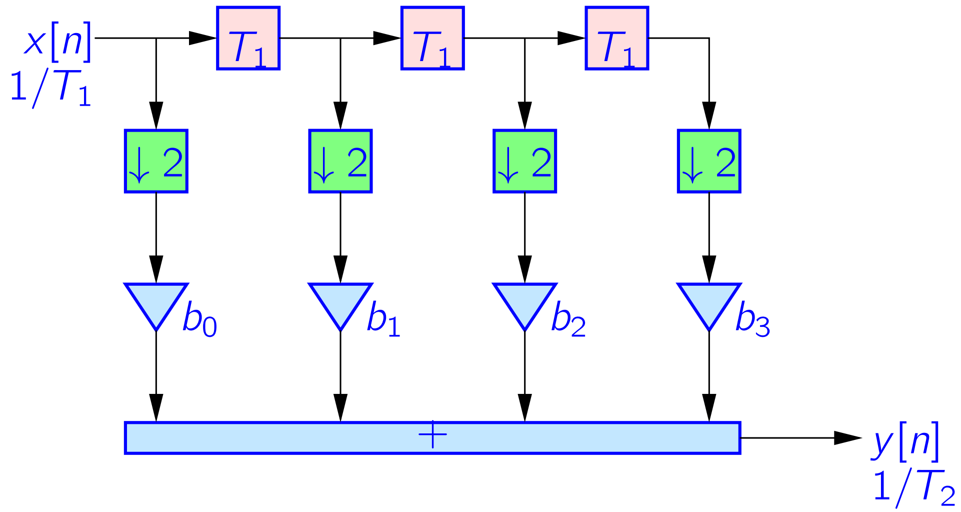
$H(z)$ moet afkappen boven 4 kHz (overeenkomend met $\omega = \frac{\pi}{11}$).

Multirate systemen

Toepassing op filterimplementatie

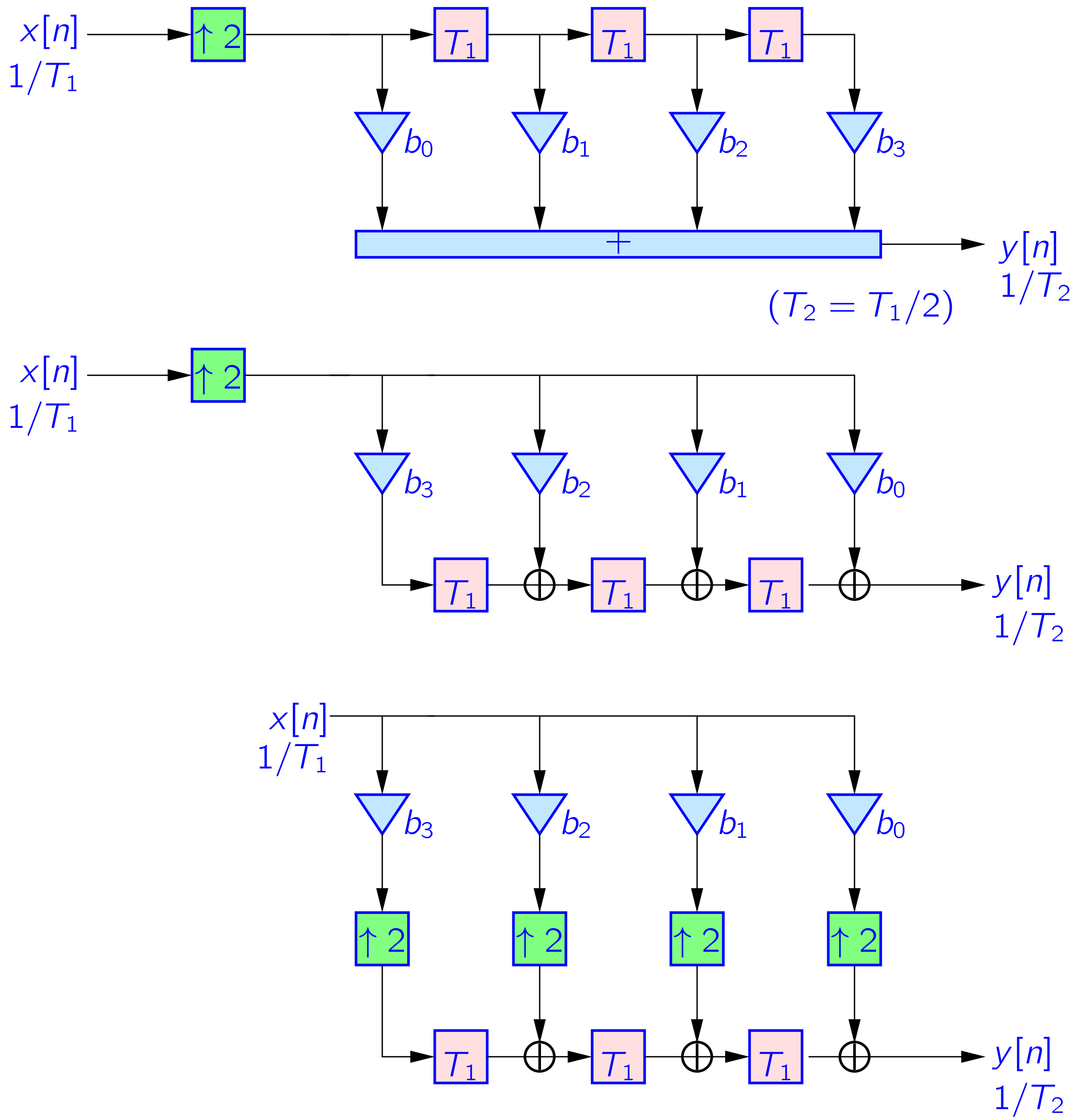
Bij lowpass filtering en decimatie kunnen de filters op een lagere rate geimplementeerd worden:





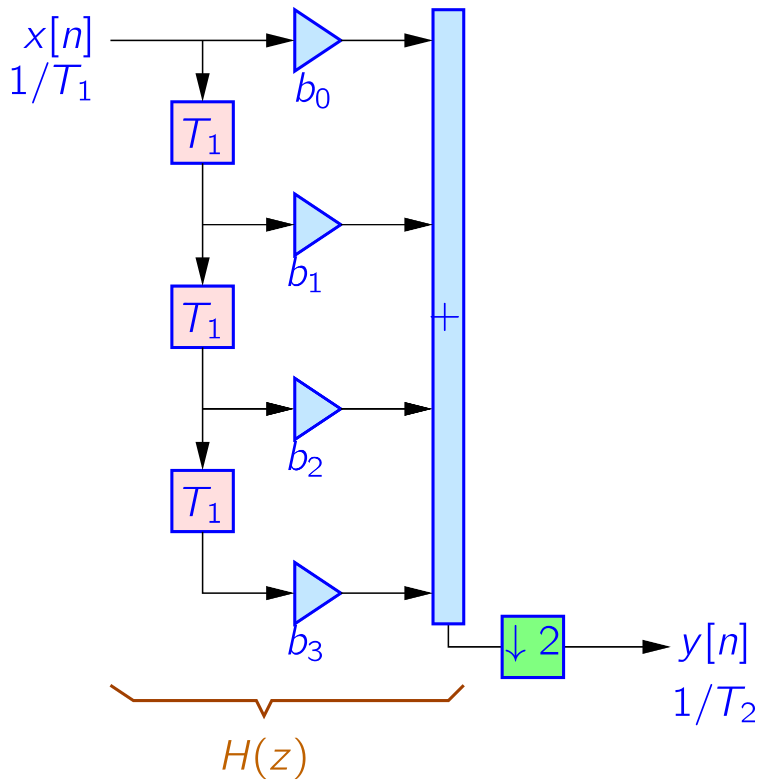
Multirate systemen

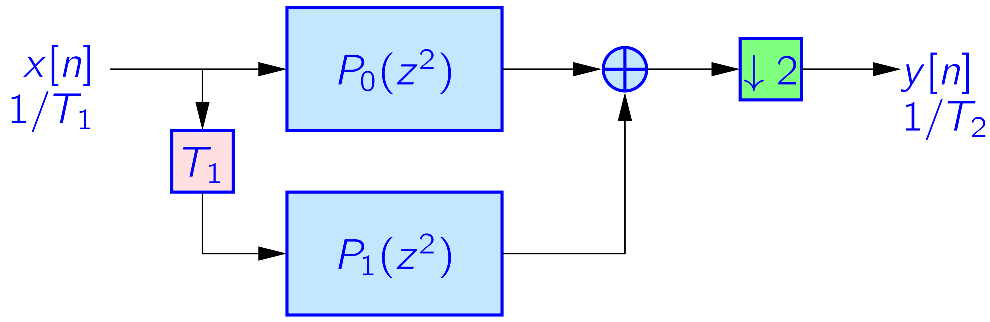
Idem bij upsampling (interpolatie):

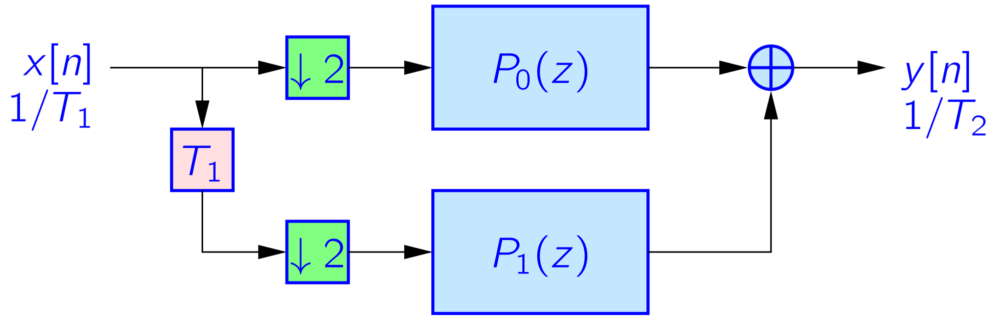


Multirate systemen

Polyphase filters (1-slide introductie ...)







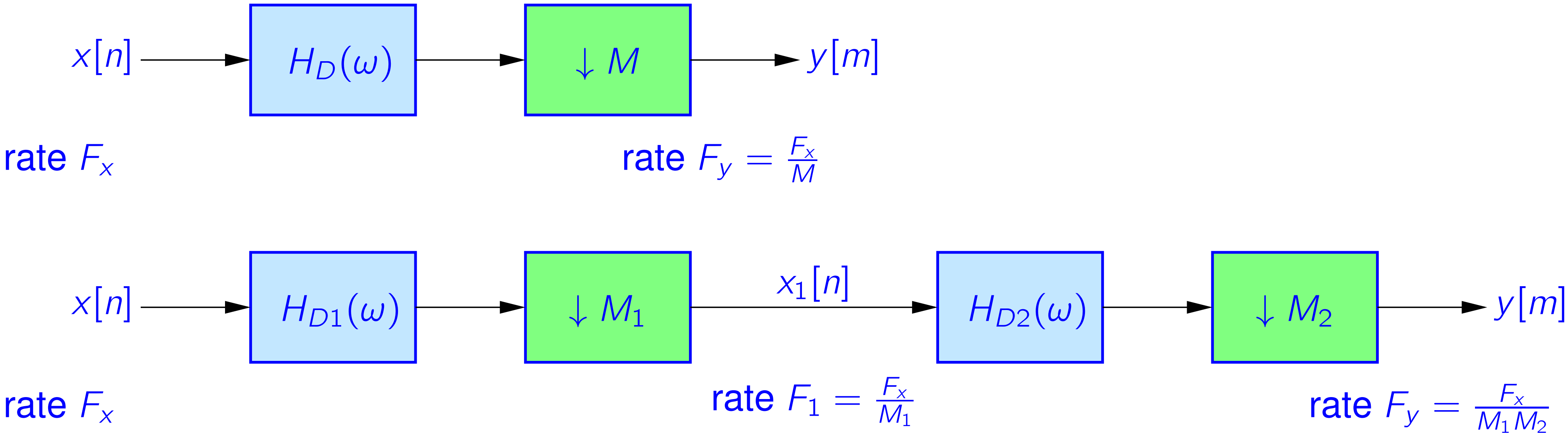
$$P_0(z) = b_0 + b_2 z^{-1}$$
$$P_1(z) = b_1 + b_3 z^{-1}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} \\ &= \left(b_0 + b_2 z^{-2}\right) + z^{-1}\left(b_1 + b_3 z^{-2}\right) \\ &= P_0(z^2) + z^{-1} P_1(z^2) \end{aligned}$$

Multistage sample-rate conversie

Als L en/of M groot zijn, is het efficient de sample-rate conversie in een aantal kleinere stappen uit te voeren (lagere filterorden)

Bijvoorbeeld: factoriseer $M = M_1 M_2$



Multistage sample-rate conversie

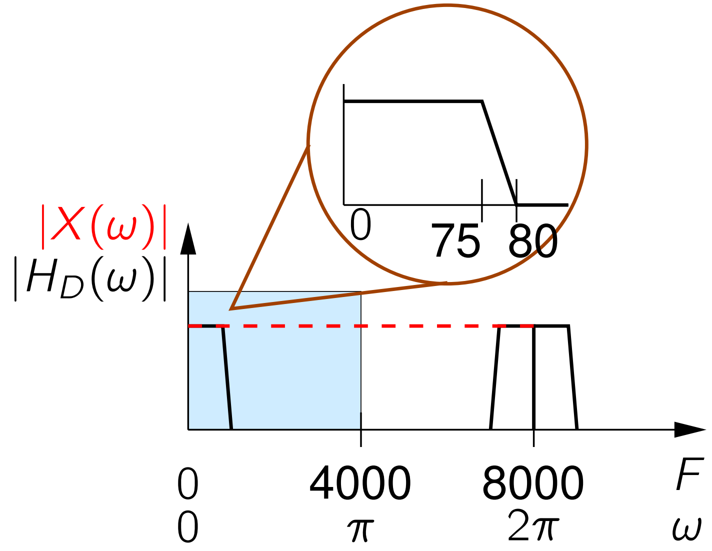
Voorbeeld (Proakis ex.10.6.1)

Gegeven een audio-signaal, gesampled met $F_x = 8$ kHz, hoogste bandbreedte 4 kHz. We willen het signaal van 0–80 Hz isoleren, en resamplen op $F_y = 160$ Hz.

De decimatiefactor is $M = 8000/160 = 50$.

Filterspec: gegeven als

doorlaatband:	$0 \leq F \leq 75$	ripple: $\delta_1 = 10^{-2}$
transitieband:	$75 \leq F \leq 80$	
stopband:	$80 \leq F \leq 4000$	ripple: $\delta_2 = 10^{-4}$



Een heuristische formule om de filterorde te schatten voor een gegeven spec is (Kaiser)

$$\hat{N} = \frac{-10\log(\delta_1\delta_2) - 13}{14.6\,\delta f}, \qquad \text{waarin} \quad \delta f = \frac{F_{stop} - F_{pass}}{F_x}$$

Hier: $\delta f = \frac{5}{8000} = \frac{1}{1600}$ en $\hat{N} = 5151$: zeer hoog.

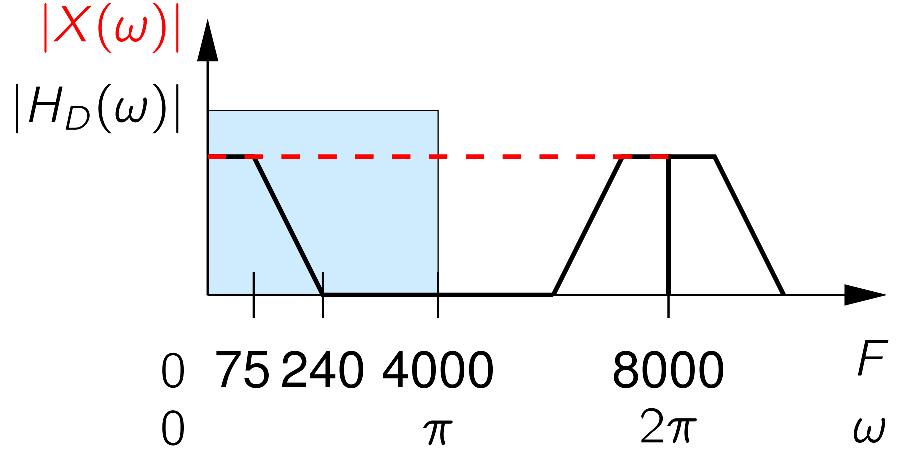
Multistage sample-rate conversie

Alternatieve implementatie in twee stappen

- Stel $M_1 = 25$, $M_2 = 2$.
- Hieruit volgt $F_1 = F_x/M_1 = 320$ Hz. Passband blijft $0 \leq F \leq 75$.

  Transitieband $75 \leq F \leq 240$. ($240 = 320 - 80$, zie volgende slide)

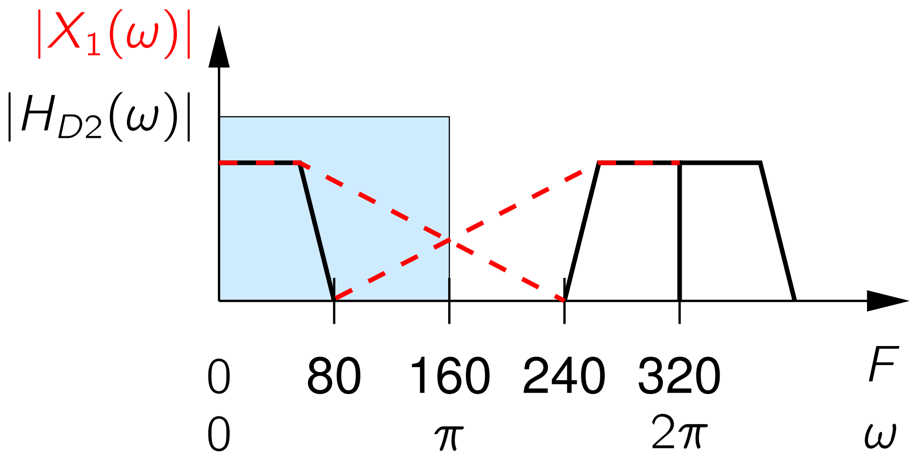
  Ripples: $\delta_1 = 0.5 \cdot 10^{-2}$ (de helft want er zijn twee stages), $\delta_2 = 10^{-4}$



- De filterorde van het eerste decimatiefilter $H_{D1}(\omega)$ volgt (Kaiser) als $\hat{N}_1 = 167$.

  Veel kleiner want $\delta f = \dfrac{165}{8000} = \dfrac{1}{48}$ is veel groter.

Multistage sample-rate conversie



Tweede filterspec:

- Passband $0 \leq F \leq 75$

  transitieband $75 \leq F \leq 80$

  $\delta_1 = 0.5 \cdot 10^{-2}$, $\delta_2 = 10^{-4}$

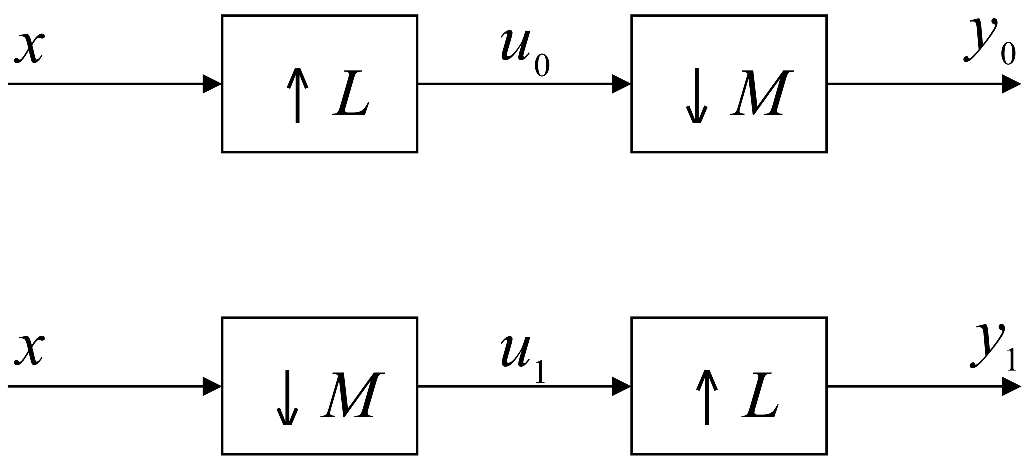
- Volgt filterorde tweede decimatiefilter als $\hat{N}_2 = 220$

  Totaal: $167 + 220 = 387$ ipv 5151 (factor 13 reductie in aantal filtercoeffienten)

- Het originele filter heeft 5151 vermenigvuldigers lopend op 160 Hz, is 824 kflops

  Voor de gefactoriseerde versie: $167 * 320 + 220 * 160 = 88$ kflops

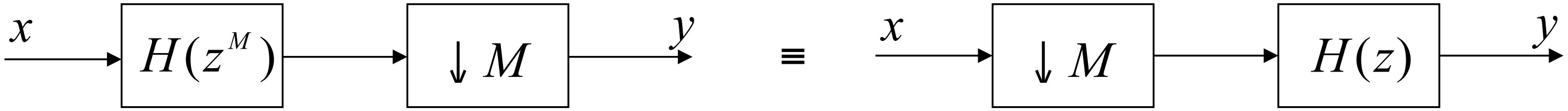
Interconnection of Decimators/ Expanders



$y_0 = y_1$ iff (M, l) relative prime (greatest common divisor is one)

Noble Identities

Identity 1:



Identity 2:

Polyphase Representation

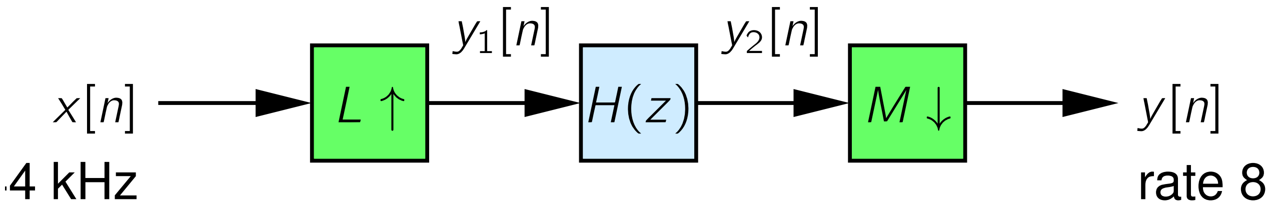
Given any integer M, we have

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k}$$

where

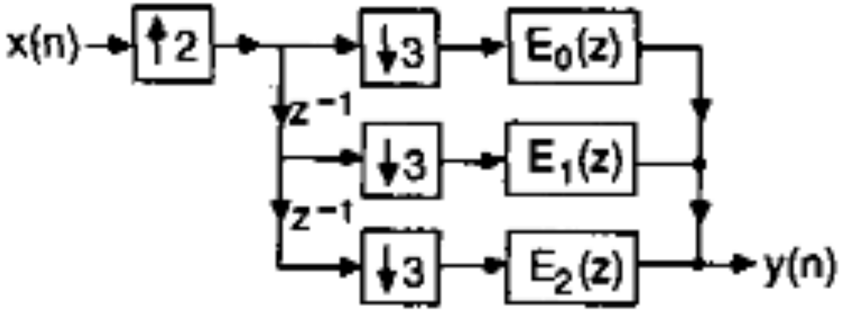
$$E_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k+nM) z^{-n}, \quad k = 0, \ldots, M-1$$

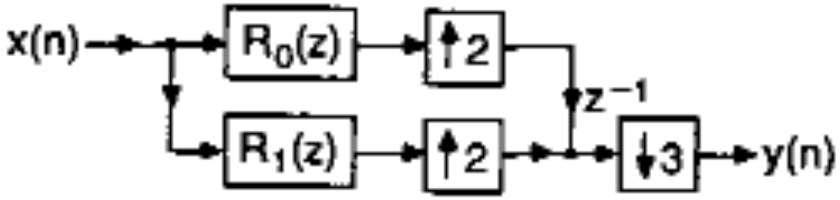
Efficient Structure for Fractional Decimation



Example: $L = 2, M = 3$

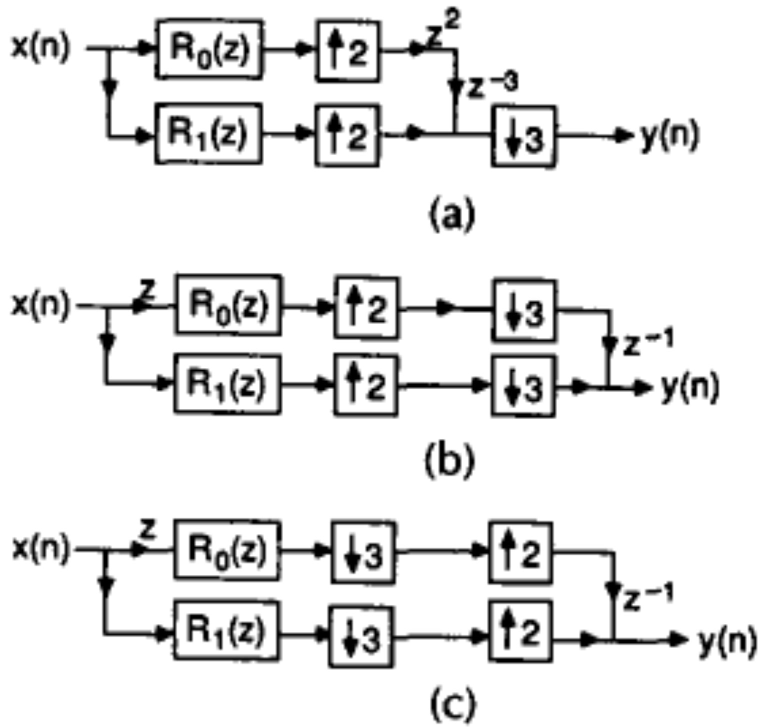
Efficient Structure for Fractional Decimation





$$(R_k(z) = E_{M-1-k}(z))$$

Efficient Structure for Fractional Decimation



Efficient Structure for Fractional Decimation