

Phương pháp giả lập Monte Carlo cho định giá chứng quyền kiểu châu Âu

Lê Minh Tú *, Nguyễn Xuân Vy †, Phan Lộc Sơn †

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM

Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

{19120734*, 19120732†, 19120033†}@student.hcmus.edu.vn

Tóm tắt nội dung: Bài báo giới thiệu phương pháp giả lập Monte Carlo để ứng dụng tính giá của chứng quyền kiểu châu Âu, với kết quả thu được thông qua giả lập có thể so sánh với công thức định giá chính xác của chứng quyền là mô hình Black-Scholes. Bài báo cũng giới thiệu hai phương pháp đơn giản để giảm sai số chuẩn của giả lập là tăng số mẫu thử và phương pháp Antithetic variates. Kết quả thực nghiệm cho thấy sai số có giảm theo dự đoán lý thuyết. Hơn nữa, bài báo còn nhằm giúp hiểu rõ hơn về phương pháp giả lập Monte Carlo và ứng dụng của nó, và thông qua đó mở rộng việc ứng dụng để định giá trên các loại công cụ tài chính khác, và cuối cùng đề xuất một số cải tiến của giả lập để thu được một kết quả gần với thực tế hơn, vượt qua một số điểm yếu của mô hình Black-Scholes trong việc định giá chứng quyền kiểu châu Âu.

Index Terms: Monte Carlo simulation, Black Scholes model, European options, Pricing, Variance reduction.

1. Giới thiệu chung

Mô phỏng Monte Carlo (MCS) [1] được sử dụng trong tài chính để định giá các công cụ tài chính. Ưu điểm của MCS so với các phương pháp khác là MCS có thể giải quyết các vấn đề khó trong khi các phương pháp khác không thể. Đó là lý do tại sao MCS chủ yếu được sử dụng để định giá các hợp đồng tài chính phức tạp, các công cụ. Định giá MCS bằng cách mô phỏng các biến ảnh hưởng đến giá, sau đó kết luận câu trả lời từ mẫu. Nhưng MCS đang dựa vào tính ngẫu nhiên và lấy mẫu, vì vậy kết quả có thể có phương sai cao và không đủ tốt để sử dụng trong thực tế. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi sử dụng MCS để định giá quyền chọn kiểu châu Âu và chứng minh cách tăng số lượng mô phỏng có thể đưa ra câu trả lời tốt hơn bằng cách giảm sai số chuẩn của mẫu. Hơn nữa, chúng tôi sử dụng phương pháp antithetic variates tương đương với hedging trong thực tế, bằng cách nắm giữ hai tài sản có mối tương quan nghịch, sẽ làm giảm sự biến động cũng như sai số chuẩn, do đó đưa ra câu trả lời tốt hơn từ mô phỏng.

Bài báo được tổ chức như sau. Phần 2 giới thiệu khái quát về quyền chọn kiểu châu Âu và mô hình Black-Scholes [2]. Phần 3 giới thiệu phương pháp giả lập Monte Carlo và ứng dụng trong việc định giá chứng quyền kiểu châu Âu. Phần 4 trình bày hai phương pháp cơ bản để tăng tính hiệu quả của giả lập Monte Carlo.

Phần 5 bao gồm kết quả thực nghiệm mà nhóm em đã tự cài đặt lại theo phương pháp đã có sẵn, và nêu các kết quả so sánh khi thực nghiệm từng phương pháp. Phần 6 trình bày kinh nghiệm mà nhóm em thu được trong quá trình thực hiện nghiên cứu. Phần 7 đưa ra kết luận và nêu lên các hướng nghiên cứu trong tương lai.

2. Một số khái niệm

2.1. Quyền chọn kiểu châu Âu

Quyền chọn kiểu châu Âu là một loại quyền chọn, một loại công cụ tài chính phái sinh, dựa trên một tài sản có biến động về giá, mà thời điểm thực hiện quyền chỉ được giới hạn tại điểm đáo hạn định trước. Tức là giả sử tài sản dựa trên có thay đổi, thì người nắm giữ chứng quyền không được thực hiện quyền để thực hiện hóa lợi nhuận sớm được.

Quyền chọn châu Âu có hai loại là mua và bán, với quyền chọn mua (call), người nắm giữ có quyền bán tài sản với một giá cố định định trước, nhưng không bắt buộc phải thực hiện, và sẽ được hưởng lợi khi giá tài sản tăng khi nắm giữ quyền. Ngược lại, quyền chọn bán (put), người nắm giữ sẽ được quyền bán với một giá cố định định trước và sẽ hưởng lợi khi giá tài sản giảm khi nắm giữ quyền.

2.2. Mô hình Black-Scholes

Mô hình Black-Scholes được ứng dụng để định giá chính xác của chứng quyền kiểu châu Âu, dựa trên phương trình Black-Scholes, mà từ đó có thể tính ra giá lý thuyết của quyền chọn kiểu châu Âu trong một số ràng buộc lý thuyết cụ thể và cho trước phương sai và tỷ suất sinh lời kỳ vọng của tài sản (Expected return và risk của tài sản). Ở đây chúng tôi chỉ sử dụng kết quả của nghiên cứu là công thức (1) tính giá trị lý thuyết của chứng quyền để so sánh với phương pháp giả lập Monte Carlo, để xem chi tiết về công thức và cách hình thành công thức thì tham khảo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" [2].

$$C = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-rt}$$

$$\text{với } d_1 = \frac{(\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})t)}{\sigma\sqrt{t}} \quad (1)$$

$$\text{và } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

với C là giá của chứng quyền, S_t là giá trị hiện tại của tài sản dựa trên, K là giá thực hiện quyền, r là lãi suất phi rủi ro, t là thời gian còn lại tới ngày đáo hạn, σ là độ biến động của tài sản và N là CDF của phân phối chuẩn tắc.

3. Phương pháp giả lập của Monte Carlo

Giả lập Monte Carlo là một lớp nhiều thuật toán dựa vào việc lấy mẫu thử ngẫu nhiên để tính toán ra một kết quả cụ thể. Ý tưởng là dựa vào sự ngẫu nhiên để lấy một mẫu thử ngẫu nhiên các kết quả có được của bài toán, và từ đó ước lượng kết quả của bài toán bằng các phương pháp thống kê. Giả lập Monte Carlo

được ứng dụng rộng rãi trong các ngành toán, vật lý, khoa học máy tính, kinh tế, để giải các bài toán phức tạp, không hoặc bất khả thi để tính ra lời giải, hoặc giải các bài toán bản chất phụ thuộc nhiều vào ngẫu nhiên.

Trong phạm vi nghiên cứu này, sử dụng phương pháp của (Boyle, Broadie, Glasserman, 1997 [3]) để tính giá của chứng quyền bằng Monte Carlo như sau:

- Tạo n biến ngẫu nhiên độc lập tuân theo phân phối chuẩn.

$$Z_i \sim N(0, 1) \quad (2)$$

- Với mỗi biến ngẫu nhiên trên, ta sẽ tính giá tài sản của một lần giả lập tại thời điểm đáo hạn T bằng công thức:

$$S(T) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_i} \quad (3)$$

với $S(x)$ là giá của tài sản tại thời điểm x , r là lãi suất phi rủi ro, σ là độ biến động của tài sản và Z_i là biến ngẫu nhiên thứ i .

- Tính giá trị $P(T)$ của chứng quyền tại thời điểm T với K là giá trị thực hiện:

$$P(T) = \begin{cases} \max(S(T) - K, 0), & \text{đối với chứng quyền mua} \\ \max(K - S(T), 0), & \text{đối với chứng quyền bán} \end{cases} \quad (4)$$

- Tính giá trị chiết khấu của chứng quyền tức giá trị hiện tại $P(0)$ của chứng quyền:

$$P(0) = P(T)e^{-rT} \quad (5)$$

- Tính trung bình kết quả của n lần giả lập, ta sẽ có giá trị lý thuyết của chứng quyền.

4. Áp dụng một số phương pháp để giảm phương sai khi áp dụng giả lập Monte Carlo

4.1. Giảm phương sai giả lập bằng cách tăng số lần giả lập

Vì kết quả từng lần giả lập là một biến ngẫu nhiên, sau n lần giả lập, giá của chứng quyền sẽ là trung bình kết quả của n lần giả lập (sau khi tính chiết khấu), và có sai số chuẩn là:

$$SE = \sqrt{\frac{\text{var}(x)}{n}} \quad (6)$$

với $\text{var}(x)$ là phương sai của mẫu. Vì $\text{var}(x)$ không thay đổi với mỗi lần chạy, và thông qua công thức, ta có thể giảm SE bằng cách tăng số lần giả lập n , ngoài ra còn rút ra được kết luận nếu muốn giảm sai số đi z lần, thì ta phải tăng n lên z^2 lần. Thông qua cách này ta có thể điều khiển được mức độ sai số của giả lập, giới hạn sai số ở mức chấp nhận được

4.2. Giảm phương sai giả lập bằng phương pháp biến đổi nghịch (Anti-thetic variates)

Giả sử ta giả lập hai lần và lấy trung bình của chúng:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (7)$$

ta có phương sai của \bar{x} là:

$$var(\bar{x}) = \frac{var(x_1) + var(x_2) + 2cov(x_1, x_2)}{4} \quad (8)$$

Do đó, muốn giảm phương sai của \bar{x} , x_1 và x_2 phải hoàn toàn tương quan nghịch biến. Từ kết quả này, ta có thể có được một thuật toán giả lập tốt hơn bằng cách thêm một biến đổi nghịch với biến đang giả lập và kết hợp chúng lại.

5. Kết quả thực nghiệm

5.1. Kết quả sau khi chạy giả lập Monte Carlo đơn giản

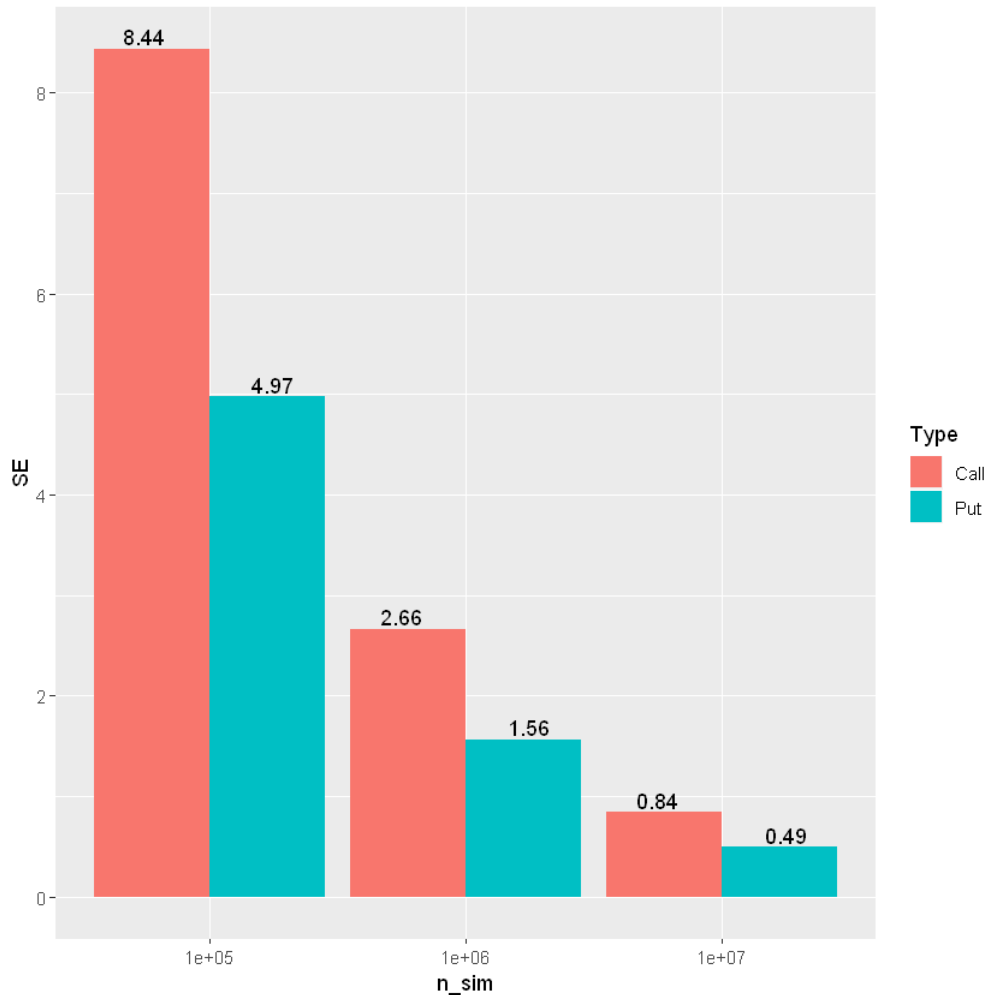
Trong quá trình thực nghiệm, chúng em sử dụng chứng quyền các giá trị của chứng quyền CMWG2104 với các giá trị tham khảo như sau: $T = 284/365$, $r = 0.045$, $\sigma = 0.2972$, $S(0) = 13700$, $K = 13500$. Tham khảo hình 1, biểu đồ sai số chuẩn được tạo bằng ngôn ngữ python, với việc tính toán sai số chuẩn của giả lập dựa trên công thức ở các phần 2, 3 và 4. Bảng I là kết quả so sánh giữa 3 lần giả lập với số lần giả lập lúc sau gấp 10 lần lúc trước. Ta thấy kết quả thu được đúng với những phần được trình bày ở trên rằng khi số lần giả lập tăng lên, sai số chuẩn giảm dần.

Số lần giả lập	Số lần so với lần thực hiện thứ nhất	Sai số chuẩn so với lần thực hiện thứ nhất
100.000	-	-
1.000.000	10	$\sim 3,1$
10.000.000	100	~ 10

Bảng I
KẾT QUẢ VÀ SO SÁNH BA LẦN GIẢ LẬP

5.2. Kết quả của hai giải thuật cơ bản và giải thuật cải tiến với số lần giả lập tương tự nhau

Tham khảo hình 2, biểu đồ giá trị của sai số chuẩn khi sử dụng phương pháp Antithetic Variates và phương pháp MCS đơn giản, với việc tính toán sai chuẩn của phương pháp Antithetic Variates dựa trên công thức ở phần 4.2 và số lần giả lập là 10^7 . Thông qua biểu đồ thu được, ta có thể thấy sai số chuẩn của thuật giả lập cải tiến có giảm hiệu quả gần gấp đôi. Ứng với thực tế phương pháp này giống với việc hedging danh mục đầu tư ngoài thực tế, với việc nắm giữ hai công cụ tài chính có biên động giá ngược nhau (trái phiếu - cổ phiếu, ...), sẽ giúp danh mục ít biến động hơn so với chỉ nắm giữ một công cụ.

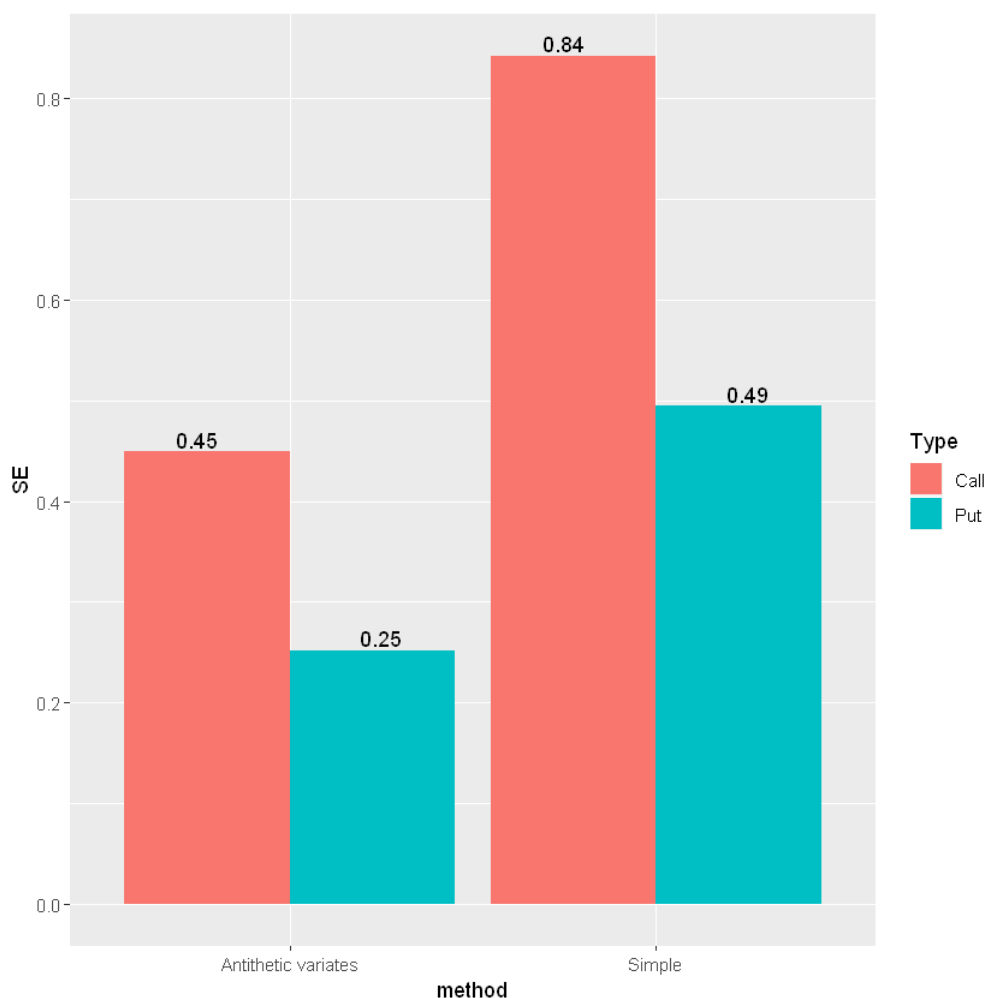


Hình 1. Giá trị của sai số chuẩn khi tăng số lượng mô phỏng.

6. Kinh nghiệm thu được

Thông qua nghiên cứu này, chúng em xem như là một cơ hội học tập là chính, do đó, chúng em đã lựa chọn giả lập Monte Carlo để nghiên cứu. Sau quá trình tìm hiểu, chúng em lựa chọn ứng dụng như trên. Chúng em sau đó tìm các paper liên quan tới nội dung này. Ban đầu quá trình nghiên cứu khó khăn do các tài liệu có nhiều kiến thức toán nâng cao, do đó chúng em chỉ dừng lại ở các phương pháp cơ bản, lấy các kết quả của các paper đó và cài đặt các mô hình cho ra các biểu đồ trên.

Tuy kết quả nghiên cứu có hạn chế, chúng em hài lòng với những kinh nghiệm đạt được khi làm nghiên cứu này, ngoài ra, chúng em cũng hài lòng với những kiến thức đạt được ở ngành tài chính khi nghiên cứu, một trong những ngành ứng dụng nhiều kết quả của ngành khoa học máy tính, phù hợp cho các thành viên nếu sau này ứng dụng nghiên cứu hoặc làm việc trong ngành này.



Hình 2. Giá trị của sai số tiêu chuẩn sử dụng phương pháp Antithetic Variates và phương pháp MCS đơn giản.

7. Kết luận

Tuy tốn tài nguyên tính toán hơn so với mô hình Black-Scholes, kết quả cũng không chính xác bằng, nhưng, có thể mở rộng giả lập Monte Carlo để định giá các công cụ tài chính phức tạp, chưa có mô hình định giá chính xác. Ngoài ra, một số điểm yếu của mô hình Black-Scholes như không xét đến thuế và các chi phí giao dịch, thời gian thanh toán khớp với ngày đáo hạn là không đúng với thực tế, ta có thể tùy chỉnh giả lập Monte Carlo, thêm các chi tiết này vào giả lập và cho kết quả sát thực tế hơn.

Phương pháp giả lập Monte Carlo cũng có nhiều cải tiến về tính chính xác, hiệu quả tính toán hơn. Có thể ứng dụng các phương pháp này để mở rộng nghiên cứu.

Tài liệu liên quan

- [1] P. L. Bonate, “A brief introduction to monte carlo simulation,” *Clin Pharmacokinet*, 2001. DOI: 10.2165/00003088-200140010-00002.
- [2] F. Black and M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” *The Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973.
- [3] P. Boyle, M. Broadie, and P. Glasserman, “Monte carlo methods for security pricing,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, pp. 1267–1321, 1997.