ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Matrizes

Lic. Ciências da Computação **2022/2023**

1. Para as matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

indique:

(a) O tipo de cada matriz.
(b) Quais das matrizes são quadradas.
(c) Quais das matrizes são triangulares inferiores.
(d) Quais das matrizes são diagonais.

2. Escreva a tabela das seguintes matrizes:

(a) $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,\ldots,5}}$ onde $a_{ij} = i + j$;
(b) $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,\ldots,5}}$ onde $b_{ij} = |i - j|$;
(c) $C = [c_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que $n = 3$ e $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$;
(d) $D = [d_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que $n = 3$ e $d_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i > j \\ 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i < j \end{cases}$;

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique se:

(a) $A - 3A + 2I_3 = 0_{3\times 3}$;
(b) $A + I_3 = 0_{3\times 3}$;
(c) $2A - 3A = -I_3$.
(d) $A + 0_{3\times 3} = A + I_3$.

4. Se possível calcule AB e BA sendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diga quais das seguintes expressões identificam matrizes, e em tais casos calcule-as.

(a) $A + 2B$; (b) AB; (c) $AC + D$;

(d) $(A + B)C$; (e) ACD; (f) $2ACA + A$.

6. Seja A uma matriz do tipo $m \times (m + 5)$ e B uma matriz do tipo $n \times (11 - n)$ tais que AB e BA estão definidas. Determine os valores possíveis para m e n.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva as seguintes equações matriciais:

(a) $3(X + \frac{1}{2}A) = 5(X - \frac{3}{4}B)$;

(b) $X + A = 2(X - B)$.

8. Dê exemplos de matrizes A e B tais que $A \neq B$ e:

(a) $A^2 = -I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$;

(b) $A^2 = 0_{2\times 2}$ e $A \neq 0$;

(c) $AB = 0_{2\times 2}$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$;

(d) $AB = 0_{2\times 2}$, com A e B sem elementos nulos;

(e) A, C e D tais que $AC = AD$ e $C \neq D$.

(f) A e B tais que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

(g) A e B tais que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

[Sugestão: procurar as condições gerais a satisfazer e depois construir os exemplos.]

9. Sejam A, B matrizes 2×2 reais tais que
$$AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
Mostre que $a + d = 0$.

10. Verifique que:

    (a) a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

    (b) a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

11. Use a definição para calcular a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$;

    (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $D = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A, B e C matrizes invertíveis de ordem n.

    (a) Qual a inversa de $AB^{-1}C$?

    (b) As matrizes A^2 e $A+B$ são invertíveis? Em caso afirmativo, indique a respetiva inversa. Em caso negativo, dê um contraexemplo.

13. Sejam A uma matriz invertível de ordem m e B, C matrizes do tipo $m \times n$ tais que $AB = AC$. Mostre que $B = C$.

14. Indique A^T no caso de A ser

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

15. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que se as matrizes A e B são simétricas, então:

    i) As matrizes $A + B$ e αA são simétricas;

    ii) A matriz AB é simétrica se e só se $AB = BA$.

16. Dê exemplo de uma matriz quadrada de ordem 3 que seja simultaneamente simétrica e antissimétrica.

17. Mostre que o produto de quaisquer duas matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal.

18. Diga quais das seguintes matrizes são simétricas, quais são ortogonais, quais são hermíticas e quais são unitárias:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$; (d) $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.