Números Reais

Maria Joana Torres

2022/23

O conjunto dos números reais será indicado por $\mathbb{R}$

Duas operações:

- adição $\quad x, y \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad x + y \in \mathbb{R}$ (soma)
- multiplicação $\quad x, y \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad x.y \in \mathbb{R}$ (produto)

Os axiomas que essas operações satisfazem são os seguintes:

Axioma 1. Propriedade associativa:

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad \text{e} \quad (x.y).z = x.(y.z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Axioma 2. Propriedade comutativa:

$$x+y = y+x \quad \text{e} \quad x.y = y.x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Axioma 3. Elementos neutros: existem em $\mathbb{R}$ dois elementos distintos 0 e 1 t.q.

$$x+0 = x \quad \text{e} \quad x.1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Axioma 4. Inversos:
todo o $x \in \mathbb{R}$ tem um *inverso aditivo* (ou *simétrico*) $-x \in \mathbb{R}$ t.q. $x+(-x) = 0$
e,
se $x \neq 0$, existe também um *inverso multiplicativo* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ t.q. $x.x^{-1} = 1$

Axioma 5. Propriedade distributiva:

$$x.(y+z) = x.y + x.z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

.

Existe um subconjunto de $\mathbb{R}$, que representamos por $\mathbb{R}^+$, chamado o conjunto dos números reais positivos, que satisfaz as seguintes propriedades:

Axioma 6. *A soma e o produto de dois números reais positivos é um número positivo*:

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$$
$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x.y \in \mathbb{R}^+$$

Axioma 7. Dado $x \in \mathbb{R}$, verifica-se uma e uma só das situações seguintes:

$$x = 0, \; x \in \mathbb{R}^+, \; -x \in \mathbb{R}^+$$

Se denotarmos por $\mathbb{R}^-$ o conjunto dos números $-x$ onde $x \in \mathbb{R}^+$, a condição do Axioma 7 é equivalente a dizer que $\mathbb{R}$ é a união disjunta de $\mathbb{R}^-$, $\{0\}$ e $\mathbb{R}^+$.

Os números $y \in \mathbb{R}^-$ chamam-se negativos.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que x é menor do que y, e escrevemos $x < y$, quando $y - x \in \mathbb{R}^+$. De modo análogo, dizemos que x é maior do que y, e escrevemos $x > y$, quando $x - y \in \mathbb{R}^+$.

A relação binária $<$ satisfaz as seguintes propriedades:

O1. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$

O2. Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas
$x = y$, $x < y$ ou $y < x$

O3. Monotonia da adição:

$$\text{se } x < y \text{ então } x + z < y + z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

O4. Monotonia da multilplicação:

$$\text{se } x < y \text{ e } z > 0 \text{ então } x.z < y.z;$$

$$\text{se } x < y \text{ e } z < 0 \text{ então } x.z > y.z$$

- o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

- o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

- o conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$$

- aos números reais que não são racionais chamamos números irracionais e denotamos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Definição: Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é

- **majorante de** X se $\quad \forall x \in X \qquad x \leq a$;
- **minorante de** X se $\quad \forall x \in X \qquad a \leq x$;
- **máximo de** X se a é majorante de X e $a \in X$. Representa-se $a = \max X$;
- **mínimo de** X se a é minorante de X e $a \in X$. Representa-se $a = \min X$.

Nota:

Observemos que, se a é majorante de X, qualquer elemento maior do que a é também majorante de X. Analogamente, se a é minorante de X, qualquer elemento menor do que a é minorante de X.

Definição:

- Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **majorado** ou **limitado superiormente** se possui algum majorante.

- Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **minorado** ou **limitado inferiormente** se possui algum minorante.

- Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **limitado** quando X é, simultaneamente, majorado e minorado, isto é, quando

$$\exists c, d \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad c \leq x \leq d,$$

ou, equivalentemente, quando

$$\exists c, d \in \mathbb{R}, \quad X \subseteq [c, d].$$

Definição:

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **supremo de** X e representa-se $a = \sup X$, se verifica as duas condições seguintes:

- $\forall x \in X \quad x \leq a \qquad$ (a é majorante de X);
- se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in X,\ x \leq b$, então $a \leq b \qquad$ (a é o menor dos majorantes).

Definição:

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **ínfimo de** X e representa-se $a = \inf X$, se verifica as duas condições seguintes:

- $\forall x \in X \quad a \leq x \qquad$ (a é minorante de X);
- se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in X,\ b \leq x$, então $b \leq a \qquad$ (a é o maior dos minorantes).

Nota:

- O supremo e o ínfimo de um conjunto, quando existem, são únicos.
- Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ majorado tem máximo se e só se $\sup X \in X$. Em particular, se $a = \sup X$ e $a \in X$, então $a = \max X$.
- Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ minorado tem mínimo se e só se $\inf X \in X$. Em particular, se $a = \inf X$ e $a \in X$, então $a = \min X$.

O seguinte axioma confere a $\mathbb{R}$ uma estrutura de corpo ordenado completo.

Axioma 8. Axioma do supremo (ou da completude de $\mathbb{R}$)
Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$.

Propriedade 1
Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{R}$.

Propriedade 2 [Propriedade Arquimediana dos reais]
Sejam $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$, quaisquer. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Propriedade 3
Todo o intervalo não degenerado de números reais possui uma infinidade de racionais e uma infinidade de irracionais.

Dado $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ representa o **valor absoluto** ou **módulo** de x, definido da seguinte forma:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

O valor absoluto verifica as seguintes propriedades.

Propriedades Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então:

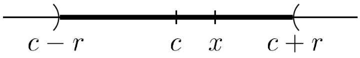
1. $|x| \geq 0 \quad$ e $\quad |x| = 0 \quad$ sse $\quad x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x| \geq x \quad$ e $\quad |x| \geq -x$
4. $-|x| \leq x \leq |x|$
5. sendo $a \geq 0$, tem-se que $|x| \leq a \quad$ sse $\quad -a \leq x \leq a$
6. sendo $a \geq 0$, tem-se que $|x| \geq a \quad$ sse $\quad x \geq a \quad \vee \quad x \leq -a$
7. $|x.y| = |x|.|y|$
8. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, sempre que $y \neq 0$
9. $|x + y| \leq |x| + |y|$
10. $|x| - |y| \leq \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$
11. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

A noção de valor absoluto permite introduzir o conceito de distância entre dois números reais. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, chama-se distância de x a y ao número $d(x, y)$ definido por

$$d(x, y) = |x - y|$$

Na figura seguinte está representado um ponto c e o intervalo aberto centrado em c e de raio (semi-amplitude) $r > 0$, ou seja, o intervalo

$$]c - r, \, c + r[\,.$$



Este intervalo é o lugar geométrico dos

pontos da reta cuja distância a c é menor do que r

ou, dito de forma equivalente, o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : \; |x - c| < r\}\,.$$

Definição:

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $x \in X$ diz-se **ponto interior de** X se

$$\exists\, \epsilon > 0 : \quad]x - \epsilon, x + \epsilon[\subseteq X.$$

O conjunto dos pontos interiores a X designa-se por **interior de** X e representa-se por $\operatorname{int} X$ ou $\mathring{X}$.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **aberto** quando $\operatorname{int} X = X$.

Definição:

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ diz-se **ponto aderente a** X se

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad]x - \epsilon, x + \epsilon[\, \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes a X designa-se por **aderência de** X ou por **fecho de** X e representa-se por $\mathrm{ad}\, X$ ou $\overline{X}$.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **fechado** quando $\overline{X} = X$.

Definição:

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ diz-se **ponto de acumulação de** X se

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \big(\,]x-\epsilon, x+\epsilon[\,\setminus\{x\}\big) \cap\ X \neq \emptyset.$$

Em particular, dizemos que x é **ponto de acumulação à direita de** X quando

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad]x, x+\epsilon[\, \cap X \neq \emptyset$$

e que x é **ponto de acumulação à esquerda de** X quando

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad]x-\epsilon, x[\, \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de X designa-se por **derivado** de X e representa-se por X'.
O conjunto dos pontos de acumulação à direita representa-se por X'_+ e o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda por X'_-.

Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é **ponto isolado de** X se pertencer a X mas não for ponto de acumulação de X, isto é,

$$\exists\, \epsilon > 0 \qquad]x-\epsilon, x+\epsilon[\, \cap X = \{x\}.$$

Definição:

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ diz-se **ponto de fronteira de** X se for ponto aderente a X e a $\mathbb{R} \backslash X$, isto é, quando

$$\forall \epsilon > 0, \quad]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de fronteira de X designa-se por **fronteira** de X e representa-se por $\operatorname{fr} X$ ou ∂X.