

Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2022/2023

Departamento de Matemática

Sistemas de equações lineares

Conceitos básicos

São diversos os problemas práticos com que nos deparamos no dia a dia que envolvem a resolução de sistemas de equações lineares. Embora alguns destes sistemas sejam simples de resolver, outros há que, devido às suas dimensões e complexidade, requerem métodos sistemáticos para a sua resolução. Este capítulo é dedicado ao estudo de um desses métodos.

Tal como no capítulo anterior, representamos por \mathbb{K} o conjunto \mathbb{R} ou o conjunto \mathbb{C} .

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$. Uma **equação linear** nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , sobre \mathbb{K} , é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

com $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

Os elementos a_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) designam-se por **coeficientes** da equação e o elemento b designa-se por **termo independente** da equação.

Sistemas de equações lineares

Definição

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Dá-se o nome de **sistema de m equações lineares em n incógnitas** x_1, x_2, \dots, x_n , sobre \mathbb{K} , a uma coleção de equações lineares

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.,$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição (continuação)

O sistema (S) diz-se **homogéneo** se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, i.e., se os termos independentes de (S) são todos nulos.

Chama-se **solução de (S)** a qualquer n -uplo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de \mathbb{K}^n tal que, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Representa-se por $\text{Sol}_{(S)}$ o **conjunto de soluções de (S)** , i.e.,

$$\text{Sol}_{(S)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Sistemas de equações lineares

Definição

Se (S) e (S') são sistemas de equações lineares sobre \mathbb{K} com o mesmo conjunto de soluções, diz-se que (S) e (S') são **equivalentes**.

.

Definição

Um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas e de coeficientes em \mathbb{K} diz-se:

- **impossível** se não tem solução i.e., se $\text{Sol}_{(S)} = \emptyset$;
- **possível** se tem, pelo menos, uma solução, i.e., se $\text{Sol}_{(S)} \neq \emptyset$;
- **possível determinado** se o sistema tem uma única solução;
- **possível indeterminado** caso o sistema tenha mais do que uma solução.

Observação: Um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas que seja homogéneo é sempre possível, uma vez que $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S) ; a esta solução dá-se a designação de ***solução trivial***.

Dado um sistema (S) de equações lineares entende-se por:

- ***discutir o sistema***, verificar se (S) é possível e, neste caso, se é determinado ou indeterminado;
- ***resolver o sistema***, determinar o conjunto de soluções do sistema.

Exemplo

A equação

$$x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

é equivalente a

$$x_1 = -x_2 + 8x_3.$$

Uma vez que x_2 e x_3 são arbitrários, este sistema é possível e indeterminado. Para obtermos uma solução diferente da trivial podemos considerar, por exemplo, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$, donde resulta $x_1 = 7$.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas:

$$\begin{cases} -x - 5y - 2z = 2 & (i) \\ 2x - 2y + z = 0 & (ii) \\ 3x + 3y + 3z = -1 & (iii). \end{cases}$$

Se adicionarmos (i) e (iii), obtemos obtemos a equação

$$2x - 2y + z = 1,$$

o que não é consistente com a equação (ii), pelo que o sistema não admite nenhuma solução, i.e., é um sistema impossível.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Dado o sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas

$$\begin{cases} 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 & (i) \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 & (ii) \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 & (iii) \end{cases}$$

vamos calcular a sua solução.

Se trocarmos a equação (i) com a equação (ii), obtemos

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 & (i) \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 & (ii) \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 & (iii) \end{cases}$$

Sistemas de equações lineares

Exemplo (continuação)

Agora, se substituirmos a equação (iii) por (iii)-(i) ficamos com

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 & (i) \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 & (ii) \\ 0x_1 - 1x_2 - 1x_3 = -10 & (iii) \end{cases}$$

Substituindo a equação (iii) por (iii)+(ii) tem-se

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 & (i) \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 & (ii) \\ 0x_1 + 0x_2 - 9x_3 = -27 & (iii) \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Finalmente, se multiplicarmos a equação (iii) por $-1/9$, obtém-se

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 & (i) \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 & (ii) \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 3 & (iii) \end{cases}$$

Neste momento é fácil determinar a solução do sistema; substituindo x_3 por 3 em (ii) obtém-se $x_2 = 7$ e da equação (i), por substituição de x_3 e x_2 , resulta que $x_1 = 7$. Assim, uma vez que o sistema admite solução e que esta é única, concluímos que o sistema é possível e determinado.

Sistemas de equações lineares

Em cada um dos exemplos anteriores, o sistema inicial foi sucessivamente transformado noutros sistemas efectuando apenas as seguintes operações sobre equações:

- 1) troca da equação i com a equação j ;
- 2) multiplicação da equação i por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
- 3) substituição da equação i pela sua soma com a equação j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

A estas operações damos a designação de ***operações elementares sobre equações***.

É simples de verificar que se (S') for um sistema obtido a partir de um sistema (S) efectuando uma operação elementar sobre as equações de (S) , então os dois sistemas são equivalentes.

Sistemas de equações lineares

Um sistema (S) de equações lineares e de coeficientes em \mathbb{K}

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

pode ser representado pela equação matricial

$$Ax = b$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sistemas de equações lineares

As matrizes A , x e b designam-se, respetivamente, por **matriz simples de (S)** , **matriz incógnita de (S)** e **matriz dos termos independentes de (S)** . Tendo em conta que as incógnitas têm um papel secundário na resolução de um sistema e que as operações elementares sobre as equações envolvem apenas os coeficientes e os termos independentes, o sistema (S) pode ainda ser representado, de uma forma mais abreviada, pela matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

à qual se dá a designação de **matriz ampliada de (S)** e que se representa por $[A|b]$. O sistema (S) fica completamente representado por esta matriz, uma vez que cada linha da matriz representa uma equação de (S) .

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Se consideramos o sistema (S) a seguir indicado

$$\begin{cases} 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

a matriz simples, a matriz incógnita e a matriz dos termos independentes deste sistema são, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada associada ao sistema é a matriz

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Sistemas de equações lineares

Dado um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas e de coeficientes em \mathbb{K} , o seu conjunto de soluções pode ser determinado através da resolução da equação matricial $Ax = b$ que lhe está associada. De facto, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S) se e só se

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = b.$$

Nos exemplos anteriores, os sistemas foram resolvidos recorrendo apenas a operações elementares sobre equações. Efectuar uma destas operações sobre as equações de um sistema (S) corresponde, em termos matriciais, a efectuar operações análogas sobre as linhas da matriz ampliada $[A \mid b]$ associada ao sistema.

Sistemas de equações lineares

Mais precisamente:

- trocar a equação i com a equação j no sistema (S) corresponde a trocar a linha i com a linha j da matriz $[A \mid b]$;
- multiplicar a equação i do sistema (S) por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ corresponde a multiplicar a linha i da matriz $[A \mid b]$ por α ;
- substituir a equação i do sistema (S) pela sua soma com a equação j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$ corresponde a substituir a linha i da matriz $[A \mid b]$ pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Definem-se como **operações elementares sobre linhas** da matriz A as seguintes operações:

- 1) troca da linha i com a linha j ;
- 2) multiplicação da linha i por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
- 3) substituição da linha i pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$,

Sistemas de equações lineares

Analogamente, define-se **operação elementar sobre as colunas** de uma matriz, bastando substituir “linha” por “coluna” na definição anterior.

Ao longo do texto adotaremos as seguintes notações para as operações elementares sobre linhas:

- $A \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} B$: para indicar que a matriz B é obtida da matriz A efetuando a troca das suas linhas i e j ;
- $A \xrightarrow{l_i \rightarrow \alpha l_i} B$: para indicar que a matriz B é obtida de A multiplicando a linha i da matriz A por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
- $A \xrightarrow{l_i \rightarrow l_i + \beta l_j} B$: para indicar que a matriz B é obtida de A substituindo a linha i da matriz A pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$.

Para representar as operações elementares por colunas adota-se notação semelhante à anterior, mas escreve-se c_j para indicar a coluna i .

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se a matriz $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ pode ser obtida da matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ efetuando uma operação elementar sobre linhas (respetivamente, colunas), então a matriz A também pode ser obtida de B efetuando uma operação elementar sobre linhas (respetivamente, colunas).

Demonstração.

No caso das operações elementares por linhas, basta ter em conta que:

- se $A \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} B$, então $B \xrightarrow{l_j \leftrightarrow l_i} A$;
- se $A \xrightarrow{l_i \rightarrow \alpha l_i} B$, com $\alpha \neq 0$, então $B \xrightarrow{l_i \rightarrow \frac{1}{\alpha} l_i} A$;
- se $A \xrightarrow{l_i \rightarrow l_i + \beta l_j} B$, então $B \xrightarrow{l_i \rightarrow l_i - \beta l_j} A$.

De forma análoga, justifica-se o resultado para o caso das operações elementares por colunas. □

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é **equivalente por linhas (respetivamente, por colunas)** a B se B pode ser obtida a partir de A efetuando um número finito de operações elementares sobre as linhas (respetivamente, colunas) de A .

Com base no teorema anterior é fácil concluir que se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas (respetivamente, colunas) a $B \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, então B é equivalente por linhas (respetivamente, colunas) a A e, por isso, podemos dizer apenas que A e B são equivalentes.

O resultado seguinte mostra-nos que podemos efetuar uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz premultiplicando A (ou seja, multiplicando A à esquerda) por uma matriz adequada.

Teorema

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então:

1. Se E é a matriz quadrada de ordem m obtida da matriz identidade I_m trocando as suas linhas i e j , então a matriz EA é obtida da matriz A trocando as suas linhas i e j .
2. Se E é a matriz de ordem m obtida da matriz identidade I_m multiplicando a linha i por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, então EA é a matriz obtida de A multiplicando a linha i por α .
3. Se E é a matriz quadrada de ordem m obtida da matriz identidade I_m substituindo a linha na posição i pela sua soma com β vezes a linha na posição j , então EA é a matriz obtida da matriz A substituindo a linha na posição i pela sua soma com β vezes a linha na posição j , $i \neq j$.

Analogamente ao que acontece com as operações elementares sobre linhas, uma operação elementar sobre as colunas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ pode ser obtida posmultiplicando A (ou seja, multiplicando A à direita) por uma matriz obtida da matriz I_n efetuando nas suas colunas a mesma operação elementar que se pretende efetuar na matriz A .

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos **matriz elementar sobre linhas** (**respetivamente, colunas**) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a toda a matriz que pode ser obtida da matriz identidade I_n por aplicação de uma operação elementar sobre as suas linhas (*respetivamente, colunas*).

Sistemas de equações lineares

Teorema

Toda a matriz elementar sobre linhas (respetivamente, colunas) é também uma matriz elementar sobre colunas (respetivamente, linhas).

Demonstração.

Facilmente se prova o resultado enunciado. De facto, tem-se:

- $I_n \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} E$ se e só se $I_n \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} E$;
- $I_n \xrightarrow{l_i \rightarrow \alpha l_i} E$ se e só se $I_n \xrightarrow{c_i \rightarrow \alpha c_i} E$;
- $I_n \xrightarrow{l_i \rightarrow l_i + \beta l_j} E$ se e só se $I_n \xrightarrow{c_i \rightarrow c_i + \beta c_j} E$;



A respeito de matrizes elementares é também conveniente observar que toda a matriz elementar sobre linhas (respetivamente, colunas) é uma matriz invertível.

Sistemas de equações lineares

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível e, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tem-se:

- 1) Se $i \neq j$ e $I_n \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} E$, então $I_n \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} E^{-1}$;
- 2) Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $I_n \xrightarrow{l_i \rightarrow \alpha l_i} E$, então $I_n \xrightarrow{l_i \rightarrow \frac{1}{\alpha} l_i} E^{-1}$;
- 3) Se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ e $I_n \xrightarrow{l_i \rightarrow l_i + \beta l_j} E$, então $I_n \xrightarrow{l_i \rightarrow l_i + (-\beta) l_j} E^{-1}$

Da mesma forma que as operações elementares sobre as equações de um sistema não alteram o seu conjunto de soluções, as operações elementares sobre as linhas da sua matriz ampliada também não alteram a solução da equação matricial associada ao sistema.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$ a equação matricial de um sistema de m equações lineares em n incógnitas, sobre \mathbb{K} . Se a matriz $[A' \mid b']$ é obtida de $[A \mid b]$ efectuando uma operação elementar sobre as linhas, então $A'x = b'$ e $Ax = b$ têm o mesmo conjunto de soluções.

Demonstração.

Cada operação elementar sobre as linhas da matriz ampliada $[A \mid b]$ corresponde a multiplicar (à esquerda) ambos os membros da equação $Ax = b$ por uma matriz elementar Q . Assim, tendo em conta que $A' = QA$, $b' = Qb$ e que as matrizes elementares são invertíveis, o resultado é imediato. De facto, dado $c \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$,

$$Ac = b \Rightarrow QAc = Qb \Rightarrow A'c = b'$$

e

$$A'c = b' \Rightarrow QAc = Qb \Rightarrow Q^{-1}QAc = Q^{-1}Qb \Rightarrow Ac = b. \quad \square$$

Observação: Como já observámos anteriormente, toda a matriz que é equivalente por linhas a uma matriz A também é equivalente por colunas à matriz A . Porém, o resultado anterior não é válido para todas as operações elementares por colunas. Com efeito, quando se aplicam operações elementares sobre matrizes, tendo por objetivo a resolução de sistemas, a única operação sobre colunas que pode ser aplicada é a troca de colunas, sendo que neste caso tem de se proceder a uma troca de incógnitas no sistema final que seja coerente com a troca de colunas efetuada. Por este motivo, na resolução de sistemas optaremos por recorrer apenas a operações elementares sobre linhas.

Discussão e resolução de sistemas

Nesta secção descrevemos um método que permite sistematizar o processo de resolução e discussão de sistemas: o método de eliminação de Gauss. Com este método o sistema inicial é transformado num outro sistema que lhe é equivalente mas de mais fácil resolução.

Sistemas de equações lineares

Num exemplo anterior o sistema

$$\begin{cases} 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

foi sucessivamente transformado, efectuando operações elementares sobre equações, até obtermos o sistema

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 3 \end{cases}$$

o qual é de resolução bastante mais simples.

Sistemas de equações lineares

Considerando a representação do sistema em termos de matrizes, esta transformação corresponde a efectuar sucessivas operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

até obtermos a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] .$$

Esta última matriz tem a particularidade de ter um formato que satisfaz as condições da definição seguinte.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma **matriz em escada** se satisfaz as seguintes condições

- se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j , então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;
- se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

1. As matrizes $\mathbf{0}_{m \times n}$ e I_n são matrizes em forma de escada.

2. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está em forma de escada.

3. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

embora muito parecida com a matriz anterior, não está em forma de escada (o primeiro elemento não nulo na linha 3 está na coluna 4 e a linha 4 não começa com 4 elementos nulos).

Exemplo (continuação)

4. A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não está em forma de escada (o primeiro elemento não nulo na linha 1 está na coluna 3 e a linha 2 não começa com 3 elementos nulos).

O processo que foi adoptado na resolução do sistema referido anteriormente, e que permitiu reduzir a matriz ampliada do sistema a uma matriz em escada, é um exemplo de aplicação do método descrito a seguir.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz em escada.

Sistemas de equações lineares

Demonstração.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Então a matriz A pode ser reduzida a uma matriz em escada, efectuando operações elementares sobre as suas linhas, de acordo com o seguinte processo.

Para k de 1 até m :

- i) Procurar a primeira coluna com elementos não nulos na linha k ou abaixo desta.
- ii) Se não existir a coluna indicada em i), dá-se o processo por terminado.
- iii) Caso exista a coluna referida em i) e se j_k é essa coluna, $j_k \in \{1, \dots, n\}$, assegura-se que o elemento na linha k desta coluna é não nulo, trocando, se necessário, a linha k com alguma linha que esteja abaixo; representemos por $a_{kj_k}^{(k)}$ esse elemento.
- iv) Para cada $i \in \{k + 1, \dots, m\}$, adiciona-se à linha i a linha k multiplicada por $-\frac{a_{ijk}^{(k)}}{a_{kj_k}^{(k)}}$, onde $a_{ijk}^{(k)}$ representa o elemento na linha i e coluna j_k da matriz que foi obtida após a aplicação dos passos anteriores.

Terminado o processo a matriz que se obtém é uma matriz em escada. \square

Ao processo descrito na demonstração anterior para reduzir uma matriz a uma matriz em escada dá-se a designação de ***método de eliminação de Gauss***.

Os elementos $a_{1j_1}^{(1)}, a_{2j_2}^{(2)}, \dots$ designam-se por ***pivots da eliminação***.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss a esta matriz, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Sistemas de equações lineares

Exemplo (continuação)

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{l_2 \rightarrow l_2 - l_1} \\ l_3 \rightarrow l_3 - 3l_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} l_3 \rightarrow l_3 - 4l_2 \\ l_4 \rightarrow l_4 + \frac{1}{2}l_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_4 \rightarrow l_4 - \frac{3}{4}l_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A última matriz obtida é uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas à matriz A.

Observação: Toda a transformação que pode ser feita numa matriz por meio de operações elementares sobre linhas também pode ser realizada por meio de operações elementares sobre colunas. Por conseguinte, toda a matriz pode ser transformada numa matriz em escada por meio de operações elementares sobre colunas. Porém, tal como já observámos anteriormente, a única operação sobre colunas que pode ser aplicada na resolução de sistemas é a troca de colunas (não esquecendo de efetuar no sistema final a troca de incógnitas coerente com a troca de colunas que foi efetuada).

Sistemas de equações lineares

O método de eliminação de Gauss, quando aplicado a uma matriz A , permite obter uma matriz em escada equivalente por linhas à matriz inicial. Porém, a matriz em escada que é obtida no final do processo pode não ser sempre a mesma, uma vez que há alguma flexibilidade na escolha das transformações elementares a efetuar sobre a matriz A (nomeadamente, na escolha das linhas que se trocam para colocar um elemento na posição de pivot). No entanto, embora não seja possível garantir a unicidade da matriz em escada que é obtida por aplicação do método de eliminação de Gauss, prova-se que o número de pivots usados no método de eliminação de Gauss, que é igual ao número de linhas não nulas da matriz em escada obtida de A , é univocamente determinado pelas entradas da matriz A . Com efeito, quaisquer matrizes em escada equivalentes por linhas a uma matriz A têm o mesmo número de linhas não nulas, pelo que faz sentido considerar a definição seguinte.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Designa-se por **característica** da matriz A , e representa-se por $\text{car}(A)$, o número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada que seja equivalente por linhas a A .

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Como vimos no exemplo anterior, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é equivalente por linhas à seguinte matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, como U tem 3 linhas não nulas, temos $\text{car}(A) = 3$.

Sistemas de equações lineares

O método de eliminação de Gauss pode ser utilizado na resolução de sistemas de equações lineares.

Um passo elementar deste método, quando aplicado à matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema $Ax = b$, consiste em adicionar a uma certa equação um múltiplo de outra, de forma a que na equação obtida seja nulo o coeficiente de certa incógnita. Diz-se que se eliminou essa incógnita da equação. Os passos elementares são conduzidos de maneira a eliminar a incógnita x_1 de todas as equações a partir da 2ª equação, depois eliminar a incógnita x_2 de todas as equações a partir da 3ª equação, etc.

Sistemas de equações lineares

Quando termina o método de eliminação de Gauss, obtemos uma matriz em escada $[U|c]$.

O sistema correspondente a esta matriz, $Ux = c$, é de resolução mais simples e há a garantia de ser equivalente ao sistema $Ax = b$, uma vez que $[U|c]$ é obtida de $[A|b]$ efectuando apenas operações elementares sobre linhas.

Quando se obtém o sistema correspondente à matriz $[U|c]$, é fácil verificar se o sistema é possível ou impossível: se $U = \mathbf{0}_{m \times n}$ e $c \neq 0$, podemos concluir de imediato que o sistema é impossível. Se o sistema for possível, resolve-se de baixo para cima, escrevendo, se necessário, as **incógnitas básicas** (as que estão a multiplicar pelos pivots) em função das **livres** (as restantes variáveis).

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{l_2 \rightarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - 2l_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Exemplo (continuação)

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - 3l_2} \\ l_4 \rightarrow l_4 + l_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{l_4 \rightarrow l_4 - \frac{1}{2}l_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right].$$

Exemplo (continuação)

Desta forma obtém-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rclclclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & - & x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

equivalente ao inicial, mas de mais fácil resolução. Da última equação obtém-se $x_4 = -5$, substituindo x_4 na 3ª equação temos $x_3 = 3$, donde $x_2 = 1$ e $x_1 = 1$.

Sistemas de equações lineares

Como vimos no exemplo anterior, quando se aplica o método de eliminação de Gauss na resolução de um sistema de equações lineares, a matriz ampliada do sistema é transformada, por meio de operações elementares sobre linhas, numa matriz em forma de escada. Mas, como iremos ver, o processo descrito no método de eliminação de Gauss pode ser complementado com outras operações elementares de forma a que a matriz ampliada do sistema seja transformada até se obter uma matriz em forma de *escada reduzida*, sendo que o sistema associado a esta matriz terá uma resolução mais simplificada.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é uma **matriz em escada reduzida** ou que está em **forma de escada reduzida** se satisfaz as seguintes condições:

- A é uma matriz em escada;
- se uma linha tem elementos não nulos, então o primeiro elemento não nulo da linha é igual a 1;
- se o primeiro elemento não nulo de uma linha i está na coluna j , então todos os elementos da coluna j , com exceção do elemento que está na linha i , são iguais a zero.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

1. As matrizes $0_{m \times n}$ e I_n são matrizes em forma de escada reduzida.

2. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está em forma de escada reduzida.

3. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

embora muito parecida com a matriz anterior, não está em forma de escada reduzida.

Exemplo (continuação)

4. A matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ não está em forma de escada reduzida.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada reduzida.

Sistemas de equações lineares

Demonstração.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se A é a matriz nula, então a matriz já está na forma de escada reduzida. Caso A não seja a matriz nula, então A pode ser transformada numa matriz em escada reduzida, efectuando operações elementares sobre as suas linhas, de acordo com o seguinte processo: aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A obtemos uma matriz em escada A' equivalente a A . Uma vez obtida a matriz em escada A' , anulam-se todos os elementos não nulos que estejam acima dos pivots $a_{kj_k}^{(k)}$ da matriz A' ; para tal, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, adiciona-se à linha i da matriz A' a linha k multiplicada por $-\frac{a_{ij_k}^{(k)}}{a_{kj_k}^{(k)}}$. Finalmente, multiplica-se cada linha não nula da matriz pelo inverso do pivot dessa linha. Terminado o processo, obtém-se uma matriz em escada reduzida e equivalente por linhas à matriz A . □

Ao processo de transformar uma dada matriz numa matriz em escada reduzida dá-se a designação de **condensação** da matriz.

É conveniente observar que uma matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida - a esta matriz em escada reduzida dá-se a designação de **forma de Hermite** de A .

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos a matriz a seguir indicada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método descrito anteriormente de forma a transformar a matriz A numa matriz em forma de escada reduzida, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \rightarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - 3l_1}]{\hspace{1cm}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas de equações lineares

Exemplo (continuação)

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\substack{l_3 \rightarrow l_3 - l_2 \\ l_4 \rightarrow l_4 + \frac{1}{2}l_2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_3 \rightarrow l_3 + 12l_4 \\ l_2 \rightarrow l_2 + 2l_4 \\ l_1 \rightarrow l_1 - 4l_4}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \\ \xrightarrow{l_1 \rightarrow l_1 + \frac{1}{4}l_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow -\frac{1}{4}l_2 \\ l_4 \rightarrow 2l_4}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A última matriz obtida é a forma de Hermite de A.

Sistemas de equações lineares

Observação: A transformação de uma matriz A numa matriz em forma de escada reduzida também pode ser obtida por meio de operações elementares sobre colunas, mas voltamos a recordar que nem todas as operações elementares sobre colunas podem ser aplicadas na resolução de um sistema de equações lineares.

O processo descrito no teorema anterior, por ser uma extensão do método de eliminação de Gauss, é designado por ***método de eliminação de Gauss-Jordan*** e também pode ser aplicado na resolução de sistemas de equações lineares. Aplicando este método à matriz ampliada de um dado sistema de equações lineares, esta matriz é transformada até que se obtenha uma matriz equivalente por linhas e em forma de escada reduzida; o sistema de equações correspondente a esta última matriz (equivalente ao sistema inicial) é, em princípio, de resolução mais simples.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos de novo o sistema seguinte, o qual já foi estudado num exemplo anterior.

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$

Nesse mesmo exemplo vimos que aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema é possível obter a matriz em escada a seguir indicada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

Sistemas de equações lineares

Exemplo (continuação)

Partindo desta última matriz e seguindo o processo descrito no teorema anterior temos

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} l_3 \rightarrow l_3 + 2l_4 \\ l_2 \rightarrow l_2 - l_4 \\ l_1 \rightarrow l_1 + l_4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} l_2 \rightarrow l_2 + \frac{1}{2}l_3 \\ l_1 \rightarrow l_1 - \frac{1}{2}l_3 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \rightarrow l_1 + 2l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} l_2 \rightarrow -l_2 \\ l_3 \rightarrow \frac{1}{2}l_3 \\ l_4 \rightarrow -l_4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

A última matriz obtida, em forma de escada reduzida, é equivalente por linhas à matriz $[A | b]$. Por conseguinte, o sistema inicial (S) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -5 \end{cases},$$

donde obtemos $Sol_{(S)} = \{(1, 1, 3, -5)\}$.

Seguidamente debruçamo-nos sobre um outro tipo de problema que também já foi referido no início do capítulo - a discussão de sistemas de equações lineares.

Como vamos ver, a discussão de um sistema pode ser feita recorrendo à característica da sua matriz simples e da sua matriz ampliada.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, $[A | b]$, podemos determinar a característica dessa matriz e a característica da matriz simples do sistema, A .

Sendo $[U|c]$ a matriz em escada obtida a partir de $[A|b]$ por aplicação do método de eliminação de Gauss, então $\text{car}([A|b])$ é o número de linhas não nulas de $[U|c]$ e $\text{car}(A)$ é número de linhas não nulas de U .

Note-se que se tem sempre $\text{car}(A) \leq \text{car}([A|b])$.

Designando por r a característica de A pode-se ter:

- 1) $r = m = n$;
- 2) $r = m < n$;
- 3) $r < m$

Sistemas de equações lineares

No caso 1), a matriz $[U | c]$ tem a forma

$$[U | c] = \left[\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} & c_n \end{array} \right]$$

que corresponde ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcllcl} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & \dots & + & u_{1n}x_n & = & c_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & \dots & + & u_{2n}x_n & = & c_2 \\ & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & u_{nn}x_n & = & c_n \end{array} \right.$$

em que $u_{ii} \neq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

A partir da última equação deste sistema obtemos $x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$ e, por substituição inversa nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$.

Neste caso o sistema é determinado.

Sistemas de equações lineares

No caso 2), em que temos $r = m < n$, a matriz $[U | c]$ será da forma

$$[U | c] = \left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \dots & u_{1j_1} & \dots & u_{1j_2} & \dots & u_{1j_3} & \dots & u_{1j_m} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{2j_2} & \dots & u_{2j_3} & \dots & u_{2j_m} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{3j_3} & \dots & u_{3j_m} & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{mj_m} & \dots & u_{mn} & c_n \end{array} \right]$$

onde, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, $u_{kj_k} \neq 0$ e, para todo $j < j_k$, $u_{kj} = 0$.

No sistema correspondente a $[U | c]$ são livres as incógnitas x_j , com $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, e obtemos as restantes incógnitas em função destas. Desta forma, o sistema é indeterminado.

Sistemas de equações lineares

No caso 3), em que $r < m$, tem-se

$$[U|c] = \left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \dots & u_{1j_1} & \dots & u_{1j_2} & \dots & u_{1j_3} & \dots & u_{1j_m} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{2j_2} & \dots & u_{2j_3} & \dots & u_{2j_m} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{3j_3} & \dots & u_{3j_m} & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{rj_r} & \dots & u_{rn} & c_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_m \end{array} \right]$$

Se $c_i \neq 0$, para algum $i \in \{r+1, \dots, m\}$, o sistema é obviamente impossível.

Se $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$, então as últimas $m - r$ equações do sistema correspondente à matriz $[U|c]$ são identidades, e o sistema é equivalente ao das r primeiras equações. Este sistema está num dos casos estudados antes; de facto, se $r = n$, o sistema enquadra-se no primeiro caso, e se $r < n$, temos um sistema do tipo que foi estudado no segundo caso.

Do que foi observado conclui-se o seguinte:

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Então

- o sistema é possível se e só se $\text{car}(A) = c([A|b])$;
- o sistema é possível determinado se e só se $\text{car}(A) = c([A|b]) = n$;
- o sistema é possível indeterminado se e só se $\text{car}(A) = c([A|b]) < n$.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos o sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} & + & 2x_2 & - & x_3 & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Sistemas de equações lineares

Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Exemplo (continuação)

O sistema correspondente à última matriz, e equivalente ao inicial, é o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ & + & 2x_2 & - & x_3 & & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & -1 \end{array} \right.$$

que obviamente é impossível.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos o sistema

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

Exemplo (continuação)

à qual corresponde o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rclclclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & - & x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

Uma vez que $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = 4$, o sistema é possível e determinado. De facto, da última equação resulta que $x_4 = -5$ e substituindo sucessivamente nas equações anteriores, obtemos $x_3 = 3$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos o sistema (S) de 3 equações lineares em 3 incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 \qquad \qquad + 4x_3 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 + l_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - \frac{1}{6}l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

concluimos que $c(A) = c(A|b) = 2 < 3$, pelo que o sistema é possível indeterminado. O sistema correspondente à última matriz é dado por

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 6x_2 = 6 \end{cases}$$

onde x_3 é arbitrário, $x_2 = 1$, $x_1 = 4 - 2x_3$.

Assim, $Sol(S) = \{(4 - 2a, 1, a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

No caso particular dos sistemas homogéneos já havíamos observado que estes sistemas são sempre possíveis. Agora, com base no teorema anterior, sabe-se também que o sistema $Ax = 0$, com $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, é determinado se e só $\text{car}(A) = n$.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$, com $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, um sistema de equações lineares. Dá-se a designação de **sistema homogéneo associado a** $Ax = b$ ao sistema $Ax = 0$.

O conjunto de soluções de um sistema e do sistema homogêneo associado estão relacionados de acordo com o estabelecido no teorema seguinte.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, e $y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ uma solução do sistema. Então $w \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ é solução de $Ax = b$ se e só se $w = y + z$, onde $z \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ é solução de $Ax = 0$.

Demonstração.

Seja $y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ uma solução de $Ax = b$.

Suponhamos que $z \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ é uma solução do sistema homogêneo $Ax = 0$. Então

$$A(y + z) = Ay + Az = b + 0 = b,$$

pelo que $w = y + z$ é solução de $Ax = b$.

Reciprocamente, suponhamos que w é solução de $Ax = b$. Então

$$A(w - y) = Aw - Ay = b - b = 0,$$

pelo que $w = y + (w - y)$ onde $w - y$ é solução de $Ax = 0$. □

Do teorema anterior segue de imediato o resultado seguinte.

Corolário

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Então, se for possível, o sistema $Ax = b$ é determinado se e só se o sistema homogéneo associado é determinado (i.e., admite como única solução $0_{n \times 1}$).

Inversão de matrizes

O método de eliminação de Gauss-Jordan, para além de nos facultar um algoritmo para a resolução de sistemas, dá-nos também um processo para decidir sobre a existência da inversa de uma matriz e para a calcular.

Antes de vermos de que forma o método de eliminação de Gauss-Jordan pode ser aplicado no cálculo da inversa de uma matriz, apresentamos uma caracterização de matrizes invertíveis que nos permite decidir sobre a invertibilidade de uma matriz através do cálculo da sua característica.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então A é invertível se e só se $\text{car}(A) = n$.

Demonstração.

Suponha-se que A é invertível. Então

$$Ax = 0 \Rightarrow A^{-1}(Ax) = 0 \Rightarrow (A^{-1}A)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Logo, como o sistema $Ax = 0$ é determinado, temos $\text{car}(A) = n$.

Reciprocamente, suponha-se que $\text{car}(A) = n$ e mostremos que A é invertível. Por definição, uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível se existir uma matriz $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = I_n = XA$.

Demonstração.

A existência de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = I_n$ é equivalente à existência de

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

tais que

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad Ax_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Sistemas de equações lineares

Demonstração (continuação).

Como $\text{car}(A) = n$, cada um dos sistemas indicado em (*) é possível e determinado, o que significa que existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = I_n$.

Para podermos concluir que X é a inversa de A falta verificar que $XA = I_n$.

Para tal, comecemos por mostrar que se $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz tal que $AB = 0$, então $B = 0$. De facto, se representarmos por b_i a coluna i de B , $i \in \{1, \dots, n\}$, então de $AB = 0$ segue que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $Ab_i = 0$. Como $\text{car}(A) = n$, o sistema $Ax = 0$ é determinado e, portanto, $b_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo $B = 0$.

Assim, de

$$A(XA - I_n) = A(XA) - A = (AX)A - A = I_n A - A = 0,$$

concluimos que $XA - I_n = 0$, i.e., $XA = I_n$. Logo, A é invertível.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então A é invertível se e só A é equivalente por linhas à matriz I_n .

Demonstração.

Seja A uma matriz invertível. Então $\text{car}(A) = n$. Seja F a matriz em forma de escada reduzida equivalente por linhas à matriz A . Como $\text{car}(A) = n$, também se tem $\text{car}(F) = n$. Uma vez que F é uma matriz em forma de escada reduzida e $\text{car}(F) = n$, então F não tem linhas nulas. Considerando que os pivots de F são todos iguais a 1, então $F = I_n$.

Demonstração (continuação).

Reciprocamente, admitamos que A é equivalente por linhas à matriz I_n .

Então

$$A = (E_1 \dots E_s)I_n.$$

onde E_1, \dots, E_s são matrizes elementares. Uma vez que E_1, \dots, E_s, I_n são matrizes invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é uma matriz invertível, então A é invertível.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então A é invertível se e só A é igual a um produto de matrizes elementares.

Demonstração.

Seja A uma matriz invertível. Então A é equivalente por linhas à matriz I_n , pelo que

$$A = (E_1 \dots E_s)I_n = E_1 \dots E_s,$$

onde E_1, \dots, E_s são matrizes elementares.

Se a matriz A é igual a um produto de matrizes elementares, então A é uma matriz invertível, uma vez que as matrizes elementares são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é uma matriz invertível. \square

Já sabemos que se $A, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ são matrizes tais que A é invertível e $AX = I_n$, então $XA = I_n$. Logo, sendo A uma matriz invertível, para determinarmos a sua inversa basta resolver os sistemas referidos em (*). Além disso, uma vez que a matriz simples destes sistemas é a mesma, podemos optar pela resolução de todos os sistemas em simultâneo. Tal é conseguido aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A \mid I_n]$; a matriz obtida após a aplicação deste método é a matriz $[I_n \mid A^{-1}]$.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Então, de

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - 5l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 + 2l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} l_1 \rightarrow l_1 - l_3 \\ l_2 \rightarrow l_2 - \frac{2}{3}l_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Sistemas de equações lineares

Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow{l_1 \rightarrow l_1 - l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{l_2 \rightarrow \frac{1}{2}l_2} \\ l_3 \rightarrow \frac{1}{3}l_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right],$$

concluimos que A admite inversa e que

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{18}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right].$$

Sistemas de equações lineares

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $AB = I_n$, então A e B são matrizes invertíveis, $B^{-1} = A$ e $BA = I_n$.

Demonstração.

Admitamos que $AB = I_n$. Então

$$Bx = 0 \Rightarrow ABx = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Assim, o sistema $Bx = 0$ também é possível e determinado, pelo que $\text{car}(B) = n$. Logo, B é invertível. Provemos, agora, que A é invertível. De facto, como $AB = I_n$ e B é invertível, tem-se

$$A = AI_n = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} = B^{-1}.$$

Como a matriz B^{-1} é invertível, então A é uma matriz invertível.

Considerando que $B^{-1} = A$ também se tem $BA = I_n$.



Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então AB é invertível se e só se A e B são invertíveis.

Demonstração.

Já tínhamos provado anteriormente que se A e B são invertíveis, então AB é invertível, pelo que resta provar a implicação contrária.

Para provar o resultado recíproco, comecemos por mostrar que se AB é invertível, então A é invertível. No sentido de se fazer esta prova por redução ao absurdo, admitamos que AB é invertível e que A não é invertível. Então

$$\text{car}(AB) = n \text{ e } \text{car}(A) < n.$$

Sistemas de equações lineares

Demonstração (continuação).

Sejam A' uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz A e E_p, \dots, E_1 matrizes elementares tais que $A' = E_p \cdots E_1 A$. Logo $A'B = E_p \cdots E_1 AB$, donde segue que

$$\text{car}(AB) = \text{car}(E_1 \cdots E_p(AB)) = \text{car}((E_p \cdots E_1 A)B) = \text{car}(A'B).$$

Como $\text{car}(AB) = n$, também se tem $\text{car}(A'B) = n$. No entanto, como $\text{car}(A) < n$, a matriz A' tem, pelo menos uma linha nula, pelo que $A'B$ também tem pelo menos uma linha nula e, portanto, $\text{car}(A'B) < n$ (contradição).

Mostremos, agora, que se AB é invertível, então B é invertível. De facto, como AB é invertível, existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $(AB)X = I_n$. Então $A(BX) = I_n$ e do resultado anterior segue que BX é invertível.

Consequentemente, pelo que foi provado anteriormente, B é invertível.