

Sucessões

Maria Joana Torres

2022/23

Definição:

Uma função $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **sucessão real**.

À regra de correspondência $n \longmapsto u(n)$ chamamos **termo geral da sucessão** e ao elemento $u(n)$ chamamos **termo de ordem n** .

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Representamos a sucessão u de uma das seguintes formas:

- $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $(u_n)_n$ simplesmente, se daí não advier confusão.

Dada uma sucessão, o seu contradomínio designa-se por **conjunto dos termos da sucessão**.

Dizemos que uma sucessão é **definida por recorrência** se o termo de ordem n da sucessão for definido à custa de alguns dos $n - 1$ termos anteriores.

Exemplo:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Definição: Uma sucessão $(u_n)_n$ diz-se:

- **constante** se $u_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$, para algum $a \in \mathbb{R}$;

- **limitada inferiormente ou minorada** se

$$\exists a \in \mathbb{R} : u_n \geq a, \forall n \in \mathbb{N};$$

- **limitada superiormente ou majorada** se

$$\exists b \in \mathbb{R} : u_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N};$$

- **limitada** se é, simultaneamente minorada e majorada, ou seja se

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq u_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N};$$

ou equivalentemente, se

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : |u_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição: Uma sucessão $(u_n)_n$ diz-se:

- **crescente** se

$$u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N};$$

em particular, **estritamente crescente** se

$$u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N};$$

- **decrescente** se

$$u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N};$$

em particular, **estritamente decrescente** se

$$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N};$$

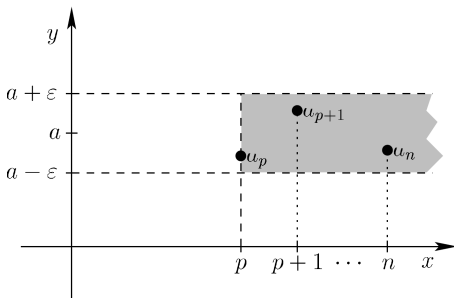
- **monótona** se é crescente ou decrescente.

Definição:

Dado $a \in \mathbb{R}$, diz-se que uma **sucessão** $(u_n)_n$ é **convergente para a** , que **tende para a** ou que **tem limite a** , se

$$\forall \epsilon > 0 \exists p \in \mathbb{N} \forall n \geq p \quad |u_n - a| < \epsilon.$$

Escreve-se $(u_n)_n \xrightarrow[n]{} a$, $u_n \xrightarrow[n]{} a$ ou $\lim_n u_n = a$.



Definição:

Uma sucessão $(u_n)_n$ diz-se **convergente** se existir um número real a tal que

$$\lim_n u_n = a.$$

Uma sucessão que não é convergente diz-se **divergente**.

Teorema [Unicidade do limite]:

Uma sucessão não pode convergir para dois limites diferentes.

Teorema :

Toda a sucessão convergente é limitada.

A recíproca do Teorema anterior é falsa, isto é, nem toda a sucessão limitada é convergente.

Por exemplo, a sucessão $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, é limitada mas não é convergente.

Do teorema anterior sai uma consequência muito importante: se uma sucessão não é limitada então ela é divergente.

Exemplo: A sucessão definida por $u_n = 2n$; $n \in \mathbb{N}$, é divergente, porque não é limitada.

Teorema:

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão monótona e limitada. Então $(u_n)_n$ é convergente e:

1. se $(u_n)_n$ é crescente, $\lim_n u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$;
2. se $(u_n)_n$ é decrescente, $\lim_n u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema:

Sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ duas sucessões convergentes respetivamente para a e para b . Então:

1. $(u_n + v_n)_n$ é uma sucessão convergente para $a + b$;
2. $(u_n v_n)_n$ é uma sucessão convergente para ab ;
3. se $v_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, então $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ é uma sucessão convergente para $\frac{a}{b}$.

Teorema:

Sejam $(u_n)_n$ uma sucessão convergente para zero e $(v_n)_n$ uma sucessão limitada. Então $(u_n v_n)_n$ é uma sucessão convergente para zero.

Teorema [das sucessões enquadradas]:

Sejam $(u_n)_n$ e $(w_n)_n$ duas sucessões convergentes tais que

$$\lim_n u_n = \lim_n w_n = a.$$

Seja $(v_n)_n$ outra sucessão tal que, a partir de uma certa ordem, se tem

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Então $(v_n)_n$ também é convergente e $\lim_n v_n = a$.

Definição:

Dada uma sucessão $(u_n)_n$ de números reais, uma sua **subsucessão** é uma restrição da correspondente aplicação $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito de \mathbb{N} , digamos

$$N^* = \{n_1, n_2, \dots, n_p, \dots\}, \quad \text{com } n_1 < n_2 < \dots < n_p \dots$$

Tal subsucessão representa-se por $(u_n)_{n \in N^*}$ ou por $(u_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$.

Teorema:

Se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente para a , qualquer sua subsucessão é convergente para a .

Corolário:

1. Se $(u_n)_n$ possui uma subsucessão divergente então $(u_n)_n$ é também divergente.
2. Se $(u_n)_n$ possui duas subsucessões convergentes para limites diferentes então $(u_n)_n$ é divergente.
3. Se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente possuindo uma subsucessão de limite a então $\lim_n u_n = a$.
4. Se $\lim_n u_n = a$ então, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_{n+k} = a$.

Definição:

Diz-se que uma **sucessão** $(u_n)_n$ **tende para** $+\infty$ (resp. $-\infty$) se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists p \in \mathbb{N} \forall n \geq p \quad u_n > M \quad (\text{resp. } u_n < M).$$

Escreve-se $\lim_n u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n]{} +\infty$
 (resp. $\lim_n u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n]{} -\infty$).

Teorema:

1. Toda a sucessão crescente e não limitada tende para $+\infty$;
2. Toda a sucessão decrescente e não limitada tende para $-\infty$.

Teorema:

Se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim_n u_n = 0$ se e só se $\lim_n \frac{1}{|u_n|} = +\infty$.

Nota:

A proposição anterior diz-nos que o inverso de um infinitésimo (sucessão convergente para zero) é, em módulo, um infinitamente grande e que o inverso de um infinitamente grande em módulo é um infinitésimo.

No cálculo de limites de sucessões, algumas indeterminações comuns são:

$$\frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$