

Notas para a unidade curricular
Álgebra Linear CC

Carla Mendes

2022/2023

1. Matrizes

1.1 Conceitos básicos

Neste capítulo introduz-se o conceito de matriz e estudam-se operações e propriedades relacionadas com matrizes. As matrizes são um objeto central no estudo de álgebra linear e são bastantes os contextos em áreas da matemática e suas aplicações em que o conceito de matriz se revelou ser fundamental. Por exemplo, para a representação e tratamento de informação que esteja dependente de parâmetros é frequente o recurso a matrizes.

Ao longo deste capítulo designamos por \mathbb{K} o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos; quando necessário indicaremos explicitamente se nos referimos ao conjunto \mathbb{R} dos números reais ou ao conjunto \mathbb{C} dos números complexos. Aos elementos de \mathbb{K} damos a designação de **escalares**.

Definição 1.1.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se **matriz do tipo** $m \times n$ (ou **de ordem** $m \times n$) **sobre** \mathbb{K} a uma aplicação $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $A(i, j) = a_{ij}$ e que se representa por um quadro em que os mn elementos a_{ij} são dispostos em m filas horizontais e n filas verticais do seguinte modo*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, chama-se **linha i da matriz A** ao elemento (a_{i1}, \dots, a_{in}) de \mathbb{K}^n .

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, chama-se **coluna j da matriz A** ao elemento (a_{1j}, \dots, a_{mj}) de \mathbb{K}^m .

Ao elemento a_{ij} de \mathbb{K} , $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, chama-se **entrada (i, j) ou elemento da posição (i, j) da matriz A** . Por vezes, representa-se a entrada (i, j) da matriz A por $A_{i,j}$.

Notação e terminologia:

- O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre \mathbb{K} representa-se por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.
- O conjunto de todas as matrizes sobre \mathbb{K} é representado por $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.
- Em geral, representaremos as matrizes por letras maiúsculas e as suas entradas pela mesma letra, minúscula ou maiúscula, com índices que indicam a respetiva posição na matriz. Havendo ambiguidade coloca-se uma vírgula a separar o índice da linha e o índice da coluna. Por exemplo, escreveremos $a_{2,34}$ ou $A_{2,34}$ para indicar o elemento na linha 2 e coluna 34 da matriz A .
- Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}),$$

representaremos a matriz A abreviadamente de uma das seguintes formas: $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$; $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Quando o tipo da matriz for claro pelo contexto ou se não for importante para o estudo em questão, podemos escrever simplesmente $A = [a_{ij}]$.

- Uma matriz diz-se **real** ou **complexa** consoante os seus elementos sejam reais ou complexos.

Exemplo 1.1.2. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz real do tipo 3×2 , i.e. $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ (é claro que também temos $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{C})$). A linha 2 da matriz A é o elemento $(3, 4)$ de \mathbb{R}^2 . A coluna 2 da matriz A é o elemento $(0, 4, -1)$ de \mathbb{R}^3 . O elemento a_{32} (situado na linha 3 e coluna 2 da matriz) é o real -1 .

Exemplo 1.1.3. Por $C = [c_{ij}]_{2 \times 3}$, onde $c_{ij} = i^j$, para $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$, representa-se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.1.4. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ diz-se **matriz nula de ordem** $m \times n$, e representa-se por $0_{m \times n}$ (ou apenas por 0 , caso não haja ambiguidade), se, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, tem-se $a_{ij} = 0$.

Exemplo 1.1.5. $0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Definição 1.1.6. Sejam $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Diz-se que as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ são **iguais**, e escreve-se $A = B$, se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$, quaisquer que sejam $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.

Exemplo 1.1.7. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$, com $b_{ij} = m.d.c.(i, j)$ são matrizes iguais.

Definição 1.1.8. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que:

- A é uma **matriz linha** se $m = 1$.
- A é uma **matriz coluna** se $n = 1$.
- A é uma **matriz quadrada** se $m = n$.

Exemplo 1.1.9. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna (do tipo 3×1) e a matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha (do tipo 1×4).

Notação e terminologia:

- É usual representar matrizes coluna e matrizes linha por letras minúsculas; além disso, é usual omitir o índice 1 que é comum a todos os elementos. Por exemplo,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

representam uma matriz linha de ordem 4 e uma matriz coluna de ordem 3, respectivamente.

- O conjunto $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas do tipo $n \times n$ também se representa por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Uma matriz A pertencente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz quadrada de ordem n ou, simplesmente, uma matriz de ordem n e pode representar-se por $A = [a_{ij}]_n$.

Definição 1.1.10. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}]_n$ uma matriz quadrada sobre \mathbb{K} . Os elementos a_{ii} , $i \in \{1, \dots, n\}$, designam-se por **elementos principais de A** . Diz-se que os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ se dispõem na **diagonal principal de A** e que os elementos $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ se dispõem na **diagonal secundária de A** .

Exemplo 1.1.11. Os elementos principais da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

são -1 , 0 e 2 e os elementos que se dispõem na sua diagonal secundária são 1 , 0 e -4 .

Definição 1.1.12. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$ diz-se:

- **triangular superior** se, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$i > j \implies a_{ij} = 0;$$

- **triangular inferior** se, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$i < j \implies a_{ij} = 0;$$

- **diagonal** se é simultaneamente triangular superior e triangular inferior, i.e., se, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

Exemplo 1.1.13. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz triangular superior, B é uma matriz triangular inferior e C é uma matriz diagonal.

Notação: Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode representar-se abreviadamente por $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Exemplo 1.1.14. No exemplo anterior, tem-se $C = \text{diag}(1, 0, 2, 3)$.

Definição 1.1.15. Uma matriz diagonal em que todos os elementos diagonais são iguais diz-se uma **matriz escalar**.

Definição 1.1.16. Dá-se a designação de **matriz identidade de ordem n** , e representa-se por I_n , à matriz escalar de ordem n em que todos os elementos diagonais são iguais a 1, i.e., se para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tem-se

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Exemplo 1.1.17. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

1.2 Operações com matrizes

Nesta secção definem-se algumas operações envolvendo matrizes: adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e multiplicação de matrizes.

Definição 1.2.1. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz soma de A e B** , e representa-se por $A + B$, à matriz cuja entrada (i, j) é o elemento $a_{ij} + b_{ij}$, i.e.,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}.$$

Exemplo 1.2.2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Então

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 & 3+4 \\ 2+2 & 1+(-1) & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como se poderá verificar no resultado seguinte, a adição de matrizes de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ satisfaz propriedades semelhantes às da adição de elementos de \mathbb{K} .

Teorema 1.2.3. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Então

i) $A + B = B + A.$ (comutatividade da adição em $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$)

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C.$ (associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$)

- iii) $0_{m \times n} + A = A = A + 0_{m \times n}$. ($0_{m \times n}$ elemento neutro da adição em $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$)
- iv) existe uma matriz A' tal que $A + A' = 0_{m \times n} = A' + A$.
(existência de elemento oposto, para a adição, de qualquer $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$)

Demonstração. Demonstramos as propriedades i) e iv), deixando a ii) e a iii) como exercício.

i) Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. As matrizes $A + B$ e $B + A$ são ambas do tipo $m \times n$. Além disso,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}},$$

$$B + A = [b_{ij} + a_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

e, como a adição em \mathbb{K} é comutativa, temos $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, para quaisquer $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, as matrizes $A + B$ e $B + A$ são iguais.

iv) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e seja $A' = [a'_{ij}]$ a matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $a'_{ij} = -a_{ij}$. Então $A + A' \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e temos

$$A + A' = [a_{ij} + a'_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}},$$

onde $a_{ij} + a'_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$, para quaisquer $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo, $A + A' = 0_{m \times n}$. Por i), temos $A' + A = 0_{m \times n}$. \square

Observação:

- Sendo A , B e C matrizes do mesmo tipo, podemos escrever, sem ambiguidade, $A + B + C$ para representar $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$, atendendo à associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.
- A matriz A' da proposição anterior representa-se por $-A$.
- Dadas duas matrizes A e B com a mesma ordem, representa-se por $A - B$ a soma de matrizes $A + (-B)$.

Definição 1.2.4. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{K})$. Chama-se **produto do escalar α pela matriz A** , e representa-se por αA , a matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ cujo elemento (i, j) é αa_{ij} , i.e.,

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}.$$

Exemplo 1.2.5. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ então $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Teorema 1.2.6. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então*

$$i) (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

$$ii) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

$$iii) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

$$iv) 0A = 0_{m \times n}.$$

$$v) 1A = A.$$

$$vi) (-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A).$$

Demonstração. Mostramos a propriedade *i)*, ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

i) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então $(\alpha\beta)A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e, uma vez que $(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, também temos $\alpha(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Verifica-se ainda que

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)A &= [(\alpha\beta)a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \\ \alpha(\beta A) &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \end{aligned}$$

e, considerando que o produto de elementos de \mathbb{K} é associativo, tem-se $(\alpha\beta)a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij})$, para quaisquer $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$. \square

Observação: A matriz A' da proposição 1.2.3 é a matriz $(-1)A$ e, tal como já foi referido, escrevemos $-A$ para representar esta matriz.

Definição 1.2.7. *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$. Designa-se por **produto de A por B**, e representa-se por AB , a matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i, j) é $\sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$, isto é,*

$$\begin{aligned} AB &= \left[\sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \\ &= [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip-1}b_{p-1j} + a_{ip}b_{pj}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.8. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então AB é a matriz do tipo 2×4 sobre \mathbb{R} tal que

$$\begin{aligned}(AB)_{11} &= 0 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1, & (AB)_{12} &= 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2, \\(AB)_{13} &= 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0, & (AB)_{14} &= 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2, \\(AB)_{21} &= 2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 1 = 8, & (AB)_{22} &= 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 7, \\(AB)_{23} &= 2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 2 = 4, & (AB)_{24} &= 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 9,\end{aligned}$$

i.e.,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Observação: Contrariamente ao que sucede com a adição de matrizes, a multiplicação de matrizes não é, em geral, comutativa, tal como se pode verificar nos exemplos que a seguir se apresentam.

Exemplo 1.2.9. Considerando as matrizes A e B do exemplo anterior, concluímos que BA não está definido, pois o número de colunas de B não coincide com o número de linhas de A .

Exemplo 1.2.10. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} = BA.$$

Definição 1.2.11. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A e B duas matrizes quadradas de ordem n . Diz-se que as matrizes A e B são **comutáveis** ou **permutáveis** se $AB = BA$.

Embora o produto de matrizes não seja comutativo, existem outras propriedades que se prova serem válidas relativamente a esta operação.

Teorema 1.2.12. Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e B, C matrizes tais que as operações a seguir indicadas estejam definidas. Então

$$i) \quad (AB)C = A(BC). \quad (\text{associatividade da multiplicação})$$

$$ii) \quad A(B + C) = AB + AC. \quad (\text{distributividade, à esquerda, da multiplicação em relação à adição})$$

$$iii) \quad (A + B)C = AC + BC. \quad (\text{distributividade, à direita, da multiplicação em relação à adição})$$

$$iv) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

$$v) \quad 0_{p \times m}A = 0_{p \times n}, \quad A0_{n \times p} = 0_{m \times p}.$$

$$vi) \quad AI_n = A, \quad I_m A = A.$$

$$vii) \quad \text{se } m = n, \quad I_n A = AI_n = A.$$

Demonstração. Provam-se as propriedades i) e ii), ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

i) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ e $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$. As matrizes $A(BC)$ e $(AB)C$ são ambas do tipo $m \times q$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$, tem-se

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{t=1}^p b_{kt}c_{tj} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^p a_{ik}b_{kt}c_{tj}, \\ ((AB)C)_{ij} &= \sum_{t=1}^p (AB)_{it}c_{tj} = \sum_{t=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kt} \right) c_{tj} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^p a_{ik}b_{kt}c_{tj}, \end{aligned}$$

pelo que $(A(BC))_{ij} = ((AB)C)_{ij}$. Logo, $A(BC) = (AB)C$.

ii) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ e $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. As matrizes $A(B+C)$ e $AB+AC$ são ambas do tipo $m \times p$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, p\}$, tem-se

$$\begin{aligned} (A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\ &= (AB+AC)_{ij}. \end{aligned}$$

Logo, $A(B+C) = AB+AC$. □

Observação: Sejam A , B e C matrizes tais que os produtos $(AB)C$ e $A(BC)$ estão definidos. Então, atendendo à associatividade da multiplicação, podemos escrever ABC para representar qualquer um dos produtos indicados.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Atendendo à definição de multiplicação de matrizes, é simples concluir que a multiplicação de A por A está definida se e só se $m = n$. Neste caso, faz sentido a definição seguinte.

Definição 1.2.13. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chamamos **potência de expoente k de A** , com $k \in \mathbb{N}_0$, à matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que representamos por A^k , definida por

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Teorema 1.2.14. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $k, l \in \mathbb{N}_0$. Então*

$$i) A^k A^l = A^{k+l}.$$

$$ii) (A^k)^l = A^{kl}.$$

Demonstração. Exercício. □

1.3 Matrizes invertíveis

Definição 1.3.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se **invertível** se existe uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = XA = I_n$.*

Exemplo 1.3.2. *A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, pois existe $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tal que*

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e}$$

$$XA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema 1.3.3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então existe uma e uma só matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA' = I_n = A'A$.*

Demonstração. (Existência) Se A é uma matriz invertível, então existe uma matriz A' tal que $AA' = I_n$ e $A'A = I_n$.

(Unicidade) Sejam X e Y matrizes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $AX = XA = I_n$ e $AY = YA = I_n$. Então

$$X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_n Y = Y. \quad \square$$

Definição 1.3.4. *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. A única matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n = AA'$ designa-se por **matriz inversa** de A e representa-se por A^{-1} .*

Exemplo 1.3.5. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Do exemplo 1.3.2 sabe-se que A é invertível e tem-se*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tal como se pode verificar no exemplo seguinte, nem toda a matriz quadrada é invertível.

Exemplo 1.3.6. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ não é invertível. Com efeito, se admitirmos que existe $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $AX = XA = I_2$, tem-se

$$AX = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a-c & -b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & a-b \\ c-d & c-d \end{bmatrix} = XA,$$

pelo que $0 = c - d = 1$. (contradição).

Definição 1.3.7. Uma matriz quadrada que não admite inversa diz-se uma **matriz singular** ou **não invertível**.

Dadas matrizes $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diz-se que A' é a inversa de A se ambas as igualdades $AA' = I_n$ e $A'A = I_n$ são satisfeitas. Contudo, sabendo que A é invertível, pode-se concluir que A' é a inversa de A verificando apenas uma das igualdades indicadas: $AA' = I_n$ ou $A'A = I_n$.

Teorema 1.3.8. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível e $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n$ (respectivamente, $AA' = I_n$). Então $A' = A^{-1}$ e, portanto, $AA' = I_n$ (respectivamente, $A'A = I_n$).

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ e admitamos que A é uma matriz invertível de ordem n e que A' é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A'A = I_n$. Então,

$$A'A = I_n \Rightarrow A'AA^{-1} = I_nA^{-1} \Rightarrow A'I_n = A^{-1} \Rightarrow A' = A^{-1},$$

e, portanto, $AA' = I_n$. □

Teorema 1.3.9. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $AB = I_n$ e $CA = I_n$, então $B = C$, A é invertível e $A^{-1} = B = C$.

Demonstração. Admitamos que $AB = I_n$ e $CA = I_n$. Então

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

Portanto, A é invertível e da Proposição 1.3.3 segue que $A^{-1} = B$. □

Os dois resultados anteriores podem ser generalizados. De facto, se A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = I_n$, então também se tem $BA = I_n$, pelo que A e B são matrizes invertíveis e $A = B^{-1}$ e $B = A^{-1}$. A prova desta generalização é apresentada no próximo capítulo.

A respeito de matrizes invertíveis prova-se também o resultado seguinte.

Teorema 1.3.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis. Então:*

- i) A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ii) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração. i) Imediata pela própria definição de matriz invertível.

ii) Como

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

conclui-se que a inversa de AB existe e é a matriz $B^{-1}A^{-1}$. □

1.4 Transposta e transconjugada de uma matriz

Definição 1.4.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **transposta de A** , e representa-se por A^T , à matriz de $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i, j) é a_{ji} , i.e., $A^T = [b_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$, onde $b_{ij} = a_{ji}$.*

Exemplo 1.4.2. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Teorema 1.4.3. *Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre \mathbb{K} tais que as operações seguintes estejam definidas. Então*

- i) $(A^T)^T = A$;
 - ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
 - iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
 - iv) $(AB)^T = B^T A^T$;
-

Demonstração. Demonstramos a propriedade *iv*), ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

iv) Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times n}$. Então $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são ambas matrizes do tipo $n \times m$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, tem-se

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = (AB)_{ji} = ((AB)^T)_{ij}.$$

Logo, $(AB)^T = B^T A^T$. □

Teorema 1.4.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz invertível, então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Demonstração. Pela alínea *iv*) da proposição anterior, tem-se

$$\begin{aligned} (A^{-1})^T A^T &= (AA^{-1})^T = (I_n)^T = I_n \quad \text{e} \\ A^T (A^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n. \end{aligned}$$

Logo, a matriz A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. □

Definição 1.4.5. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se:*

- i) **simétrica** se $A^T = A$;*
- ii) **antissimétrica** se $A^T = -A$.*

Exemplo 1.4.6. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica, mas a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ não é, uma vez que os elementos b_{13} e b_{31} não são iguais.

Teorema 1.4.7. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então*

- i) $A + A^T$ é uma matriz simétrica.*
- ii) $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica.*

Demonstração. Pelas alíneas *i*) e *ii*) da Proposição 1.4.3, tem-se

$$\begin{aligned} (A + A^T)^T &= A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T, \\ (A - A^T)^T &= A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T). \end{aligned}$$

Logo, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica. □

Teorema 1.4.8. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e de uma matriz antissimétrica.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tem-se

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Pela proposição anterior, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica. Logo, $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é uma matriz simétrica e $\frac{1}{2}(A - A^T)$ é uma matriz antissimétrica. Portanto, toda a matriz A é a soma de matriz simétrica e de uma matriz antissimétrica. \square

Teorema 1.4.9. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz simétrica e invertível, então A^{-1} é uma matriz simétrica.*

Demonstração. Se A é uma matriz simétrica, temos $A^T = A$. Então,

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

e, portanto, A^{-1} é uma matriz simétrica. \square

Definição 1.4.10. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se **ortogonal** se $AA^T = I_n = A^T A$.*

Observação: Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

Exemplo 1.4.11. A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal, pois

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema 1.4.12. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz ortogonal, então, A^{-1} é também uma matriz ortogonal.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz ortogonal, temos

$$AA^T = I_n = A^T A.$$

Então

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = I_n^{-1} = I_n$$

e

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I_n^{-1} = I_n,$$

pelo que A^{-1} é também uma matriz ortogonal. \square

Definição 1.4.13. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **conjugada de A** , e representa-se por \overline{A} , à matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, $(\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$. Define-se a **transconjugada** de A , e representa-se por A^* , como sendo a transposta da conjugada de A .

Observação: Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tem-se $\overline{A} = A$ e, portanto, $A^* = A^T$.

Exemplo 1.4.14. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 3 \\ 2+3i & 4 & i \\ 0 & 0 & 6-4i \end{bmatrix}.$$

Então

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 3 \\ 2-3i & 4 & -i \\ 0 & 0 & 6+4i \end{bmatrix} \quad e \quad A^* = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -i & 6+4i \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.4.15. Sejam A e B matrizes sobre \mathbb{K} e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, sempre que as operações seguintes estejam definidas, tem-se:

- i) $(A^*)^* = A$;
- ii) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
- iii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;
- iv) $(AB)^* = B^* A^*$;
- v) $(A^k)^* = (A^*)^k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. i) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. As matrizes $(A + B)^*$ e $A^* + B^*$ são ambas do tipo $n \times m$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, tem-se

$$\begin{aligned} [(A + B)^*]_{ij} &= [(\overline{A + B})^T]_{ij} = (\overline{A + B})_{ji} \\ &= \overline{(A + B)_{ji}} = \overline{A_{ji} + B_{ji}} \\ &= \overline{A_{ji}} + \overline{B_{ji}} = (\overline{A})_{ji} + (\overline{B})_{ji} \\ &= ((\overline{A})^T)_{ij} + ((\overline{B})^T)_{ij} = A_{ij}^* + B_{ij}^*. \end{aligned}$$

Logo, $(A + B)^* = A^* + B^*$.

A prova das restantes propriedades é deixada como exercício. \square

Definição 1.4.16. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se **hermítica** se $A^* = A$.*

Exemplo 1.4.17. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 + 3i \\ 0 & 2 & -i \\ 2 - 3i & i & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz hermítica.

Definição 1.4.18. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se **unitária** se $AA^* = I_n = A^*A$.*

Observação: Se A é uma matriz unitária, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^*$.

Teorema 1.4.19. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então*

- i) *Se A é uma matriz unitária, então A^{-1} é uma matriz unitária.*
- ii) *Se A e B são matrizes unitárias, então AB é uma matriz unitária.*

Demonstração. Exercício. \square