ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Determinantes

Lic. Ciências da Computação **2022/2023**

1. Calcule, pela definição, os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2. Use o teorema de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

3. Calcule, reduzindo o problema ao cálculo do determinante de uma matriz triangular, o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 4 & 12 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \end{vmatrix} = 6$, determine:

(a) $\begin{vmatrix} 3b & 3c & 3a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} b & h & e \\ c & i & f \\ a & g & d \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g-3d & h-3e & i-3f \\ d & e & f \end{vmatrix}$

5. Sejam $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)(y_3 - x_3).$$

6. Seja $A = [a_{ij}]_n$ a matriz quadrada, de ordem n, cujos elementos são definidos por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Prove que $\det A = (-1)^{n-1}(n-1)$.

7. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se antissimétrica se $A^T = -A$. Mostre que, para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ com n ímpar e A antissimétrica, se tem $\det A = 0$.

8. Sejam $n, p, m \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$.

   Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

   (a) $|A| = 0$ sse $A = 0$;
   (b) $|A| = 1$ sse $A = I_n$;
   (c) $|A+B| = |A| + |B|$;
   (d) $|-A| = -|A|$;
   (e) $|-A| = |A|$;
   (f) $|AB| = |BA|$;
   (g) $|CD| = |DC|$.

9. Considere as seguintes matrizes de elementos reais:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 2 & 2a & 3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   com $\alpha, a \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule $|A|, |B|, |C|$ e $|D|$.
   (b) Diga, justificando, quais das matrizes indicadas são invertíveis.

10. Calcule a característica, o determinante, a matriz dos complementos algébricos, a adjunta e a inversa (caso exista) de cada uma das seguintes matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

   sabemos que

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -12 & x & 6 & 18 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 26 & -6 & y & -12 \\ 2 & -6 & 14 & 6 \end{bmatrix},$$

   com $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine x e y.
   (b) Calcule o determinante da matriz A.
   (c) Determine a inversa da matriz A.

12. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine os valores de k para os quais A_k é invertível.
   (b) Para um dos valores encontrados em (a) e, utilizando determinantes, determine A_k^{-1}.

13. Resolva os seguintes sistemas de Cramer:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$; $\quad$ $(b)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$;

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$.