



Números Reais

1. Qual é o erro do seguinte argumento?

Sejam x e y dois números reais quaisquer tais que $x = y$. Então

$$\begin{aligned}x^2 = xy &\Rightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \Rightarrow (x + y)(x - y) = y(x - y) \\&\Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2y = y \Rightarrow 2 = 1\end{aligned}$$

2. Nos exercícios seguintes substitua o símbolo $*$ por $<$, $>$ ou $=$ de modo a obter afirmações corretas:

$$\begin{array}{lll}(\text{a}) \frac{3}{8} * 0,37 & (\text{b}) 0,33 * \frac{1}{3} & (\text{c}) \sqrt{2} * 1,414 \\(\text{d}) 5 * \sqrt{25} & (\text{e}) \frac{3}{7} * 0.428571 & (\text{f}) \frac{22}{7} * \pi\end{array}$$

3. Represente os seguintes números racionais sob a forma de quociente de números inteiros:

$$(\text{a}) 2,25 \quad (\text{b}) 3,721 \quad (\text{c}) 5,(4) \quad (\text{d}) 0,(17) \quad (\text{e}) 3,2(7) \quad (\text{f}) 3,66(087)$$

4. Apresente um exemplo de:

$$\begin{array}{ll}(\text{a}) \text{ um número irracional pertencente ao intervalo } \left[\frac{3}{100}, \frac{4}{100} \right]; \\(\text{b}) \text{ um número racional pertencente ao intervalo } \left[\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{10} \right].\end{array}$$

5. Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes relações é verdadeira ou falsa:

$$\begin{array}{lll}(\text{a}) |x| < |y| & (\text{b}) x^2 < y^2 & (\text{c}) \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \quad (x, y \neq 0) \\(\text{d}) x^3 < y^3 & (\text{e}) x < \frac{x+y}{2} < y & (\text{f}) \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|y|} \quad (x, y \neq 0)\end{array}$$

6. Em cada uma das alíneas seguintes encontre uma desigualdade da forma $|x - a| < \epsilon$ cuja solução seja o intervalo dado:

$$(\text{a})] - 2, 2[\quad (\text{b})] - 4, 0[\quad (\text{c})] 0, 4[\quad (\text{d})] - 3, 7[\quad (\text{e})] - 7, 3[$$

7. Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

- | | |
|---|---|
| (a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$ | (b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$ |
| (c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$ | (d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2 - 1) \geq 0\}$ |
| (e) $\{x \in \mathbb{R} : 5x + 2 \leq 1\}$ | (f) $\{x \in \mathbb{R} : 3 - x \geq 2\}$ |
| (g) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$ | (h) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$ |
| (i) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$ | (j) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0\}$ |
| (k) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \leq 1\}$ | (l) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$ |
| (m) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$ | (n) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \leq 0\}$ |
| (o) $\{x \in \mathbb{R} : x - 3 < 2 x \}$ | (p) $\{x \in \mathbb{R} : x + 1 > x - 3 \}$ |

8. Indique em extensão os seguintes conjuntos:

- | | |
|--|---|
| (a) $\{x \in \mathbb{R} : x + 4 = 3\}$ | (b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$ |
| (c) $\{x \in \mathbb{R} : x = x + 2 \}$ | (d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 7)^2 = 0\}$ |

9. Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contraexemplo para as relações que forem falsas.

- | | | |
|--|---------------------------|------------------------|
| (a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ | (b) $(x+y)^n = x^n + y^n$ | (c) $(xy)^n = x^n y^n$ |
|--|---------------------------|------------------------|

10. Verifique se os seguintes subconjuntos de \mathbb{R} são majorados, minorados, limitados. Indique ainda se têm supremo, ínfimo, máximo ou mínimo:

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $A = [0, 2] \cup]3, 5[\cup \{6, 7\}$ | (b) $B =]-\infty, 2[$ | (c) $C =]1, 2] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ |
| (d) $D = [1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ | (e) $E = [1, +\infty[$ | (f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 5\}$ |
| (g) $G = \left\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < \frac{16}{25}\right\}$ | (h) $H = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ | (i) $I = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ |

11. Determine o interior, o fecho (ou aderência) e o derivado de cada um dos seguintes conjuntos e indique quais são abertos e quais são fechados:

- | | | | |
|-------------------------------|---|--|---|
| (a) \mathbb{N} | (b) \mathbb{R} | (c) \mathbb{Z} | (d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ |
| (e) \mathbb{Q} | (f) $[0, 2[$ | (g) $[0, 3]$ | (h) $]5, 10[$ |
| (i) $\mathbb{Q} \cap [-2, 0[$ | (j) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 2]$ | (k) $]0, 3[\setminus \{1\} \cup \{4, 5\}$ | (l) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ |

12. Quando possível, apresente um subconjunto A de \mathbb{R} que:

- (a) não seja aberto nem fechado;
- (b) seja simultaneamente aberto e fechado;
- (c) seja aberto e limitado;
- (d) seja fechado e não limitado;
- (e) tenha o interior vazio e seja não limitado;
- (f) seja limitado mas não seja aberto nem fechado;
- (g) não contenha o seu derivado;
- (h) coincida com o seu derivado;
- (i) tenha um único ponto de acumulação;
- (j) seja fechado e tal que $\overline{\text{int } A} \neq A$;
- (k) seja aberto e tal que $\text{int } \overline{A} \neq A$;
- (l) tenha apenas dois pontos de acumulação.

13. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

- (a) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto então A não é limitado;
- (b) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto e $B \subseteq \mathbb{R}$ é fechado então $A \cup B$ não é aberto nem fechado;
- (c) se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não são abertos nem fechados então $A \cap B$ não é aberto nem fechado;
- (d) o conjunto $A =]0, 4[\cap \mathbb{Q}$ é aberto;
- (e) o conjunto $A = [0, 7] \cap \mathbb{Q}$ é fechado;
- (f) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 6 - x^2 < 1\}$ é limitado superiormente;
- (g) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 7\}$ é fechado e limitado.

14. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, a aderência, o derivado, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam).

- (a) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
- (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$
- (c) $C = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 50\}$
- (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < |x|\}$
- (e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^5 > x^3\}$
- (f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : |x| < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq \pi\}$
- (g) $G = \{x \in \mathbb{Q} : |x + 4| < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 - 3 < 0\}$
- (h) $H = [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$