Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Cálculo
2022/23

Séries

1. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$

2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$

3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 9$

4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{50}{3}$

5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{n+1}}{3^n} = \frac{9}{2}$

6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{4}$

7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{1}{45}$

8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} 4^{-(n+2)} = \frac{9}{16}$

9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = -1$

10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$

12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right) = \frac{1}{2}$

2. Considere as sucessões definidas por $a_n = \dfrac{2n+n^2}{3n^2+7}$, $b_n = \dfrac{1}{\pi^{2n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e ainda as sucessões de termo geral

$$x_n = a_n + 3b_n, \quad y_n = \begin{cases} a_n & \text{se } n \leq 10^8 \\ b_n & \text{se } n > 10^8 \end{cases} \quad \text{e} \quad z_n = \begin{cases} b_n & \text{se } n \leq 10^8 \\ a_n & \text{se } n > 10^8 \end{cases}.$$

   (a) Conclua, justificando, que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é divergente e que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ é convergente.

   (b) Justificando devidamente, determine a natureza das séries

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \quad \text{e} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n.$$

3. Apresente duas séries divergentes, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$, tais que $u_n + v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ seja convergente.

4. Estude a natureza das seguintes séries:

1 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos\frac{1}{n}$

2 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e}\right)^n$

3 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e}+\frac{1}{n}\right)^n$

4 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{e^n}$

5 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2+1}$

6 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

7 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n \operatorname{sen} n}{\mathrm{e}^n}$

8 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n+5^n}{3^n}$

9 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

10 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{5}{3\cdot 2^n}$

11 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^2+1}\, r^n, \quad 0<r<1$

12 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, r^n, \quad 0<r<1$

13 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n+1}\, r^n, \quad 0<r<1$

14 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}}{n^3+2n}$

15 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+5}$

16 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\cos n}{n\,!}$

17 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{5n^2}$

18 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^3+2}$

19 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,\cos(n\pi)}{2^n}$

20 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$

21 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,!}{2^{2n}}$

22 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{10}+7}$

23 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\,!}{n^n}$

24 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}$

25 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^3}$

26 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{n}$

27 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+\sqrt[n]{e}}$

28 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!}$

4. (continuação) Estude a natureza das seguintes séries:

29 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n\pi)}$

30 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

31 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}$

32 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n\, n\,!}{n^n}$

33 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n+1}$

34 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2\cos(n\pi)}{1+n^3}$

35 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n\,\frac{4+\cos n}{n^3}$

36 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

37 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\,!}$

38 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$

39 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log n}{n}$

40 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+\operatorname{sen} n}{n^2}$

41 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{n^5+n^2+1}$

42 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

43 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

44 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^5}{2^n}$

45 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{(n+2)!}$

46 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}}$

5. Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe:

(a) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja divergente, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ seja divergente e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n+v_n)$ seja convergente;

(b) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja convergente, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ seja divergente e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n+v_n)$ seja convergente;

(c) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ seja convergente e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja divergente;

(d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja convergente e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ seja divergente;

(e) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $(n^2u_n)_n$ convirja para zero e $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja divergente;

(f) uma sucessão $(u_n)_n$ de termos positivos tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge e $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ diverge;

(g) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n\geq 1} u_n^3$ seja divergente;

(h) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n\geq 1} u_n^2$ seja divergente;

(i) uma série de termos negativos divergente;

(j) uma série alternada divergente;

(k) uma série alternada absolutamente convergente.

6. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões tais que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ é convergente, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente;

(b) se $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n < 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ é convergente;

(c) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+u_n)$ é divergente;

(d) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+u_n}$ é convergente;

(e) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente, então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{1+u_n}$ é também convergente;

(f) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente e $v_n = \begin{cases} u_n & \text{se } n \leq 100 \\ \frac{1}{n^3} & \text{se } n > 100 \end{cases}$, então $\sum_{n\geq 1} v_n$ é também divergente;

(g) a série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + 2}{\sqrt{n}}$ é divergente;

(h) a série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{3^n}$ é convergente mas não absolutamente convergente.