Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Números Reais

2. (a) $\frac{3}{8} > 0,37$

   (b) $0,33 < \frac{1}{3}$

   (c) $\sqrt{2} > 1,414$

   (d) $5 = \sqrt{25}$

   (e) $\frac{3}{7} > 0.428571$

   (f) $\frac{22}{7} > \pi$

3. (a) $x = 2,25 = \frac{9}{4}$

   (b) $x = 3,721 = \frac{3721}{1000}$

   (c) $x = 5,(4) = \frac{49}{9}$

   (d) $x = 0,(17) = \frac{17}{99}$

   (e) $x = 3,2(7) = \frac{59}{18}$

   (f) $x = 3,66(087) = \frac{365721}{99900}$

4. (a) Por exemplo, $\frac{\pi}{100}$

   (b) Por exemplo, $\frac{32}{11 \times 10} = \frac{32}{110}$.

5. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = -5$ e $y = 1$, tem-se $-5 < 1$ e, no entanto, $|-5| = 5 > 1 = |1|$.

(b) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = -5$ e $y = 2$, tem-se $-5 < 2$ e, no entanto, $(-5)^2 = 25 > 4 = 2^2$.

(c) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = 2$ e $y = 4$, tem-se $2 < 4$ e, no entanto, $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

(d) Afirmação verdadeira. Basta observar que a função $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente.

(e) Afirmação verdadeira. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$x < y \Rightarrow x + x < x + y \Rightarrow 2x < x + y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2}$$

e

$$x < y \Rightarrow x + y < y + y \Rightarrow x + y < 2y \Rightarrow \frac{x+y}{2} < y.$$

(f) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = 5$ e $y = 10$, tem-se $5 < 10$ e, no entanto, $\frac{1}{|5|} > \frac{1}{|10|}$.

6. (a) $|x - 0| < 2$

(b) $|x - (-2)| < 2$

(c) $|x - 2| < 2$

(d) $|x - 2| < 5$

(e) $|x - (-2)| < 5$

7. (a) $[-1, +\infty[$

(b) $[0, \frac{1}{2}]$

(c) $]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$

(d) $]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$

(e) $[-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}]$

(f) $]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$

(g) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$

(h) $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

(i) $]-3, -2[\cup]2, 3[$

(j) $]-\frac{3}{2}, 1[$

(k) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(l) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(m) $]-3, -2[\cup]2, 3[$

(n) $[0, 2[$

(o) $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

(p) $]1, +\infty[$

8. (a) $\{-7,-1\}$ (b) $\{-4,2\}$

(c) $\{-1\}$ (d) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$

9. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x=4$ e $y=4$, tem-se $\sqrt{4+4}=\sqrt{8}\neq 4=\sqrt{4}+\sqrt{4}$.

   (b) Afirmação falsa. Por exemplo, para $n=2$, $x=2$ e $y=1$, tem-se $(2+1)^2=9\neq 4+1=2^2+1^2$.

   (c) Afirmação verdadeira. Justifique.

10. (a) Conjunto dos majorantes: $[7,+\infty[$; $\sup A=7$; $\max A=7$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,0]$; $\inf A=0$; $\min A=0$
    A é limitado porque é majorado e minorado

    (b) Majorantes: $[2,+\infty[$; $\sup B=2$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $\emptyset$; não existe ínfimo nem mínimo
    B não é limitado porque não é minorado

    (c) Conjunto dos majorantes: $[2,+\infty[$; $\sup C=2$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,1]$; $\inf C=1$; não existe mínimo
    C é limitado porque é majorado e minorado

    (d) Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{2},+\infty[$; $\sup D=\sqrt{2}$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,1]$; $\inf D=1$; $\min D=1$
    D é limitado porque é majorado e minorado

    (e) Conjunto dos majorantes: $\emptyset$; não existe supremo nem máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,1]$; $\inf E=1$; $\min E=1$
    E não é limitado porque não é majorado

    (f) Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{5},+\infty[$; $\sup F=\sqrt{5}$; não existe máximo
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,-\sqrt{5}]$; $\inf F=-\sqrt{5}$; não existe mínimo
    F é limitado porque é majorado e minorado

    (g) Conjunto dos majorantes: $[0,+\infty[$; $\sup G=0$; $\max G=0$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,0]$; $\inf G=0$; $\min G=0$
    G é limitado porque é majorado e minorado

    (h) Conjunto dos majorantes: $[1,+\infty[$; $\sup H=1$; $\max H=1$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,0]$; $\inf H=0$; não existe mínimo
    H é limitado porque é majorado e minorado

    (i) Conjunto dos majorantes: $[\frac{1}{2},+\infty[$; $\sup I=\frac{1}{2}$; $\max I=\frac{1}{2}$
    Conjunto dos minorantes: $]-\infty,-1]$; $\inf I=-1$; $\min I=-1$
    I é limitado porque é majorado e minorado

11. (a) Seja $X = \mathbb{N}$. Então,
$\operatorname{int} X = \emptyset$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = \mathbb{N}$. X é fechado porque $\overline{X} = X$
$X' = \emptyset$

(b) Seja $X = \mathbb{R}$. Então,
$\operatorname{int} X = \mathbb{R}$. X é aberto porque $\operatorname{int} X = X$
$\overline{X} = \mathbb{R}$. X é fechado porque $\overline{X} = X$
$X' = \mathbb{R}$

(c) Seja $X = \mathbb{Z}$. Então,
$\operatorname{int} X = \emptyset$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = \mathbb{Z}$. X é fechado porque $\overline{X} = X$
$X' = \emptyset$

(d) Seja $X = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Então,
$\operatorname{int} X = \emptyset$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = \mathbb{R}$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
$X' = \mathbb{R}$

(e) Seja $X = \mathbb{Q}$. Então,
$\operatorname{int} X = \emptyset$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = \mathbb{R}$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
$X' = \mathbb{R}$

(f) Seja $X = [0, 2[$. Então,
$\operatorname{int} X =]0, 2[$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = [0, 2]$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
$X' = [0, 2]$

(g) Seja $X = [0, 3]$. Então,
$\operatorname{int} X =]0, 3[$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = [0, 3]$. X é fechado porque $\overline{X} = X$
$X' = [0, 3]$

(h) Seja $X =]5, 10[$. Então,
$\operatorname{int} X =]5, 10[$. X é aberto porque $\operatorname{int} X = X$
$\overline{X} = [5, 10]$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
$X' = [5, 10]$

(i) Seja $X = \mathbb{Q} \cap [-2, 0[$. Então,
$\operatorname{int} X = \emptyset$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = [-2, 0]$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
$X' = [-2, 0]$

(j) Seja $X = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0, 2]$. Então,
$\operatorname{int} X = \emptyset$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = [0, 2]$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
$X' = [0, 2]$

(k) Seja $X =]0,3[\backslash\{1\} \cup \{4,5\}$. Então,
$\operatorname{int} X =]0,3[\backslash\{1\}$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = [0,3] \cup \{4,5\}$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
$X' = [0,3]$

(l) Seja $X = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Então,
$\operatorname{int} X = \emptyset$. X não é aberto porque $\operatorname{int} X \neq X$
$\overline{X} = X \cup \{0\}$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
$X' = \{0\}$

12. (a) Por exemplo, $[1,2[$ ou $\mathbb{Q}$

(b) $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$

(c) Por exemplo, $]1,2[$

(d) Por exemplo, $[1,+\infty[$

(e) Por exemplo, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

(f) Por exemplo, $[1,2[$

(g) Por exemplo, $[1,2[$

(h) Por exemplo, $[1,3]$

(i) Por exemplo, $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(j) Por exemplo, $\{2\}$

(k) Por exemplo, $]1,2[\cup]2,3[$

(l) Por exemplo, $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

13. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, para $A =]0,2[$ tem-se que A é aberto (justifique) e, no entanto, A é limitado (justifique).

(b) Afirmação falsa. Por exemplo, para $A =]1,3[$ e $B = \{2\}$ tem-se que $A \cup B =]1,3[$, que é aberto (justifique que A é aberto, que B é fechado e que $A \cup B$ é aberto).

(c) Afirmação falsa. Por exemplo, para $A =]1,3]$ e $B = [3,5[$ tem-se que $A \cap B = \{3\}$, que é fechado (justifique que A e B não são abertos nem fechados e que $A \cap B$ é fechado).

(d) Afirmação falsa. O conjunto $A =]0,4[\cap\mathbb{Q}$ não é aberto porque $\operatorname{int} A = \emptyset \neq A$.

(e) Afirmação falsa. O conjunto $A = [0,7] \cap \mathbb{Q}$ não é fechado porque $\overline{A} = [0,7] \neq A$.

(f) Afirmação falsa. Tem-se que $A =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$. Consequentemente, o conjunto dos majorantes é o conjunto vazio e, portanto, A não é limitado superiormente.

(g) Afirmação verdadeira. Justifique.

14. (a) $\operatorname{int} A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$; $\overline{A} = A' = \mathbb{R}$
Conjunto dos majorantes: $\emptyset$; não existe supremo nem máximo
Conjunto dos minorantes: $\emptyset$; não existe ínfimo nem mínimo

(b) $B =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$
$\operatorname{int} B =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$; $\overline{B} = B' = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{2}, +\infty[$; $\sup B = \sqrt{2}$; não existe máximo
Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -\sqrt{2}]$; $\inf B = -\sqrt{2}$; não existe mínimo

(c) $C =]-\sqrt{50}, \sqrt{50}[\cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
$\operatorname{int} C = \emptyset$; $\overline{C} = C' = [-\sqrt{50}, \sqrt{50}]$
Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{50}, +\infty[$; $\sup C = \sqrt{50}$; não existe máximo
Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -\sqrt{50}]$; $\inf B = -\sqrt{50}$; não existe mínimo

(d) $D =]-\infty, 0[$
$\operatorname{int} D =]-\infty, 0[$; $\overline{D} = D' =]-\infty, 0]$
Conjunto dos majorantes: $[0, +\infty[$; $\sup D = 0$; não existe máximo
Conjunto dos minorantes: $\emptyset$; não existe ínfimo nem mínimo

(e) $E =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$
$\operatorname{int} E =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$; $\overline{E} = E' = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$
Conjunto dos majorantes: $\emptyset$; não existe supremo nem máximo
Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -1]$; $\inf E = -1$; não existe mínimo

(f) $F = (]-2, 2[\cap \mathbb{Q}) \cup ([1, \pi] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$
$\operatorname{int} F =]1, 2[$; $\overline{F} = F' = [-2, \pi]$
Conjunto dos majorantes: $[\pi, +\infty[$; $\sup F = \pi$; $\max F = \pi$
Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -2]$; $\inf F = -2$; não existe mínimo

(g) $G = (]-7, -1[\cap \mathbb{Q}) \cup (]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$
$\operatorname{int} G =]-\sqrt{3}, -1[$; $\overline{G} = G' = [-7, \sqrt{3}]$
Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{3}, +\infty[$; $\sup G = \sqrt{3}$; não existe máximo
Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -7]$; $\inf G = -7$; não existe mínimo

(h) $\operatorname{int} H = H \backslash \{0\}$; $\overline{H} = H' = [0, 1]$
Conjunto dos majorantes: $[1, +\infty[$; $\sup H = 1$; não existe máximo
Conjunto dos minorantes: $]-\infty, 0]$; $\inf H = 0$; $\min H = 0$