ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Sistemas de equações lineares

Lic. Ciências da Computação **2022/2023**

1. Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em forma de escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Indique uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a cada uma das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Indique a característica de cada matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Determine, caso existam, os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & k \end{bmatrix}$$

é inferior a 3.

5. Determine, caso existam, os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 22 & -9 \\ 3 & -1 & a^2-5 & a-3 \end{bmatrix}$$

é 3.

6. Determine o conjunto de soluções dos seguintes sistemas de equações lineares:

a) $\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & -5x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & +x_4 & +3x_5 & = & 0 \\ x_1 & & +\ x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +\ x_3 & -\ x_4 & = & 0 \\ & x_3 & +\ x_4 & = & 0 \\ x_1 & +4x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$;

c) $\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +\ x_2 & -\ x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +\ x_3 & = & 1 \\ x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 4 \end{array}\right.$; d) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - \ x_2 + x_3 & = & -1 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 & = & -9 \\ 3x_1 + \ x_2 - 2x_3 & = & -9 \end{array}\right.$;

e) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 + \ x_2 + \ 2x_3 + \ x_4 & = & 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 & = & 8 \\ 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 4x_4 & = & 13 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 & = & -10 \end{array}\right.$; f) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 - \ 3x_2 & = & -1 \\ -4x_1 - \ 6x_2 & = & -2 \\ 12x_1 - 18x_2 & = & -6 \end{array}\right.$.

7. Diga, justificando, se cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e de coeficientes reais é possível e, em caso afirmativo, indique se é determinado ou indeterminado:

a) $\left\{\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rrrrrrrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 6x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rrrrrrrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \end{array}\right.$

8. Sejam A uma matriz real de ordem 4×5 e b uma matriz coluna real de ordem 4×1. Classifique o sistema $Ax = b$ sabendo que

(a) $car(A) = car([A|b]) = 4$.
(b) $car(A) = 3$ e $car([A|b]) = 4$.
(c) o vetor $(1, 0, -1, 1, 2)$ é solução do sistema $Ax = b$.

9. Efectue os seguintes produtos de matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Com base nos resultados obtidos indique um sistema de equações lineares

(i) com três equações e quatro incógnitas que tenha $(0, 1, 1, 0)$ como solução;
(ii) com três equações e duas incógnitas que tenha $(-1, 1)$ como solução;
(iii) com três equações e três incógnitas que seja possível e indeterminado.

10. Discuta, em função dos parâmetros t e k, cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e de coeficientes em $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 2 \\ x_1 + tx_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 1x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - kx_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + (k+1)x_3 = t-2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = t \end{cases}$.

11. Para $t, k \in \mathbb{R}$, sejam

$$A_{k,t} = \begin{bmatrix} k & t & 1 \\ 1 & kt & 1 \\ 1 & t & k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad b_t = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

(a) Determine, justificando, os valores de t e k para os quais o sistema $A_{k,t}x = b_t$ é:

i) possível e determinado;

ii) impossível.

(b) Resolva os sistemas $A_{0,2}x = b_2$ e $A_{1,1}x = b_1$.

12. Sejam $Ax = 0$ um sistema determinado, de m equações lineares em n incógnitas, e b uma matriz coluna com m linhas. Mostre que o sistema $AX = b$ ou é impossível ou é possível e determinado.

13. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad \text{e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$.

(b) Verifique que $[-1, 1, 1, 2]^T$ é solução do sistema $Ax = b$. Determine o conjunto de soluções do sistema $Ax = b$.

14. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}),\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$ e verifique se $[-2, 3, 1, -1]^T$ é solução de $Ax = b$.

(b) Determine o conjunto de soluções de $Ax = b$.

15. Usando o algoritmo de Gauss-Jordan calcule, se possível, a inversa de:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

16. Determine os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais as seguintes matrizes são invertíveis

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$

17. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que a matriz A é invertível e calcule a sua inversa usando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

(b) Resolva o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

18. Sejam $A = [-2 + 2(i-j)^2]_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}$.

(a) Verifique que A é invertível e calcule a sua inversa usando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

(b) Resolva o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.