

L'objectif du mini-projet est d'appliquer les algorithmes étudiés dans les chapitres sur les Equations Différentielles Ordinaires (EDO) et les Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Il s'effectue en binôme sur un sujet à choisir parmi les quatre proposés ci-dessous :

1. **Pendule simple amorti** (p. 2)
2. **Mouvement de Kepler** (p. 3)
3. **Pendule double non-amorti** (p. 5)
4. **Equation d'onde 2d** (p. 6)

L'évaluation se fait sous la forme d'une soutenance orale (date à préciser) d'une durée de 10 minutes, suivie de 10 minutes de questions/réponses. Le jury est constitué parmi les membres de l'équipe enseignante MSI.

1. Pendule simple amorti

On considère un pendule simple composé d'une bille de masse m suspendue à un fil de longueur l (et de masse négligeable) que l'on éloigne de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 et que l'on lance avec une vitesse angulaire initiale θ'_0 (cf. Fig. 1).

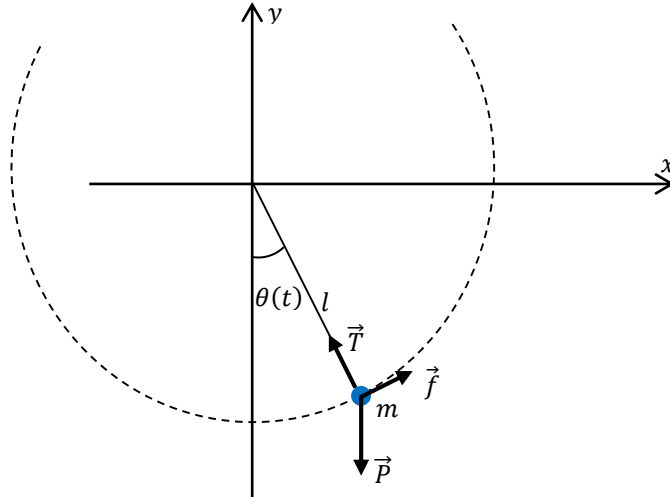


Figure 1 : Pendule simple amorti

La bille est soumise à trois forces : son poids (\vec{P}), la tension du fil (\vec{T}) et des forces de frottement de l'air (\vec{f}). On s'intéresse à l'évolution de l'angle θ en fonction du temps. On montre que la fonction $\theta(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\theta''(t) + \gamma\theta'(t) + \omega^2 \sin \theta(t) = 0 \quad (1)$$

où

- γ est un coefficient tenant compte de la résistance de l'air :

$$\gamma = \frac{6\pi r \eta}{m}$$

où r est le rayon de la bille et $\eta = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ est la viscosité de l'air à 20° C

- $\omega = \sqrt{g/l}$ est la fréquence propre d'oscillation du pendule, i.e. la fréquence d'oscillation lorsque les frottements de l'air sont négligés (pendule non amorti)
- $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur

Pistes de réflexion :

- Etude comparative des méthodes d'Euler et de Runge-Kutta
- Visualisation de la trajectoire du pendule dans l'espace réel, mais aussi dans l'espace des phases, c'est-à-dire dans un plan d'abscisse θ et d'ordonnées θ'
- Visualisation de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie totale en fonction du temps
- Cas particulier où $\gamma = 0$
- Cas particulier où le système possède une solution exacte et étude de la précision des méthodes implémentées
- Implémentation de la méthode de Verlet

2. Etude du mouvement de Kepler

On considère la trajectoire d'une planète orbitant autour d'une étoile. On suppose que l'orbite est elliptique avec une forte excentricité (voir Fig. 2). Cela signifie que la distance entre la planète et l'étoile varie fortement entre l'aphélie (point le plus éloigné de l'étoile) et le périhélie (point le plus proche). Dans l'hypothèse où la masse de la planète (notée m) est très inférieure à celle de l'étoile (notée M), le centre de gravité du système {étoile + planète} se situe à proximité du centre de l'étoile. Dans ce cas, le mouvement de la planète $P = (x(t), y(t))$ est modélisé par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x''(t) + \mathcal{G}M \frac{x(t)}{[x(t)^2 + y(t)^2]^{3/2}} = 0 & (1a) \\ y''(t) + \mathcal{G}M \frac{y(t)}{[x(t)^2 + y(t)^2]^{3/2}} = 0 & (1b) \end{cases}$$

où \mathcal{G} est la constante de gravitation universelle, elle apparait dans la troisième loi de Kepler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$$

où a est le demi-grand axe de l'orbite elliptique et T est la période de révolution de la planète autour de l'étoile.

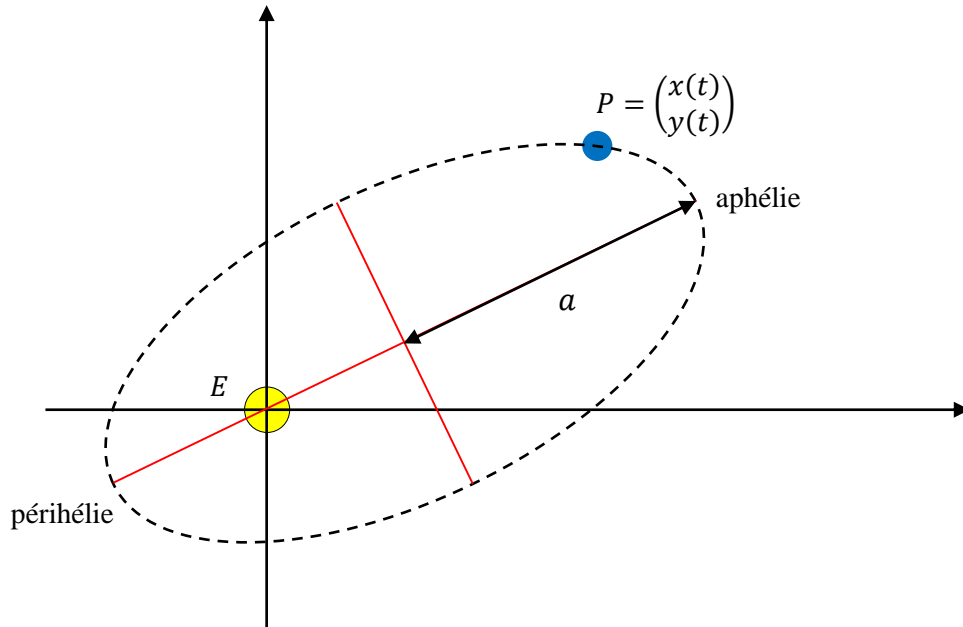


Figure 2 : Orbite elliptique (avec forte excentricité)
d'une planète P autour d'une étoile E

On prend les valeurs numériques suivantes :

$$a = 1 \text{ ua (unité astronomique)}, \quad T = 1 \text{ an}, \quad M = 1 \text{ masse solaire}$$

La constante de gravitation s'écrit alors, dans ce système d'unité :

$$\mathcal{G} = 4\pi^2$$

On se placera dans les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = 0,5 \\ y(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \\ y'(0) = 11,5 \end{cases}$$

Pour information :

- $1 \text{ ua} = \text{distance Terre-Soleil}$
- dans le système international (SI) on a :

$$1 \text{ ua} \simeq 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad M_{\text{Soleil}} \simeq 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad m_{\text{Terre}} \simeq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad \mathcal{G} \simeq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

[ces valeurs sont données à titre d'information, elle ne sont pas directement utiles pour résoudre le problème, elle ne doivent donc pas figurer dans votre code]

Pistes de réflexion :

- Etude comparative des méthodes d'Euler et de Runge-Kutta
- Implémentation de méthodes alternatives (Euler-Richardson, Verlet)
- Vérification de la troisième loi de Kepler et de la loi des aires (appelée aussi « deuxième loi de Kepler »)

3. Pendule double non-amorti

On considère le double pendule constitué d'une bille de masse m_1 suspendue à un fil de longueur l_1 et de masse négligeable, et d'une seconde bille de masse m_2 suspendue à un fil accrochée à la première masse, ce fil est de longueur l_2 et de masse négligeable (cf. Fig. 3). On ne tient pas compte de l'amortissement des mouvements des billes en supposant que les forces de frottement de l'air sont négligeables.

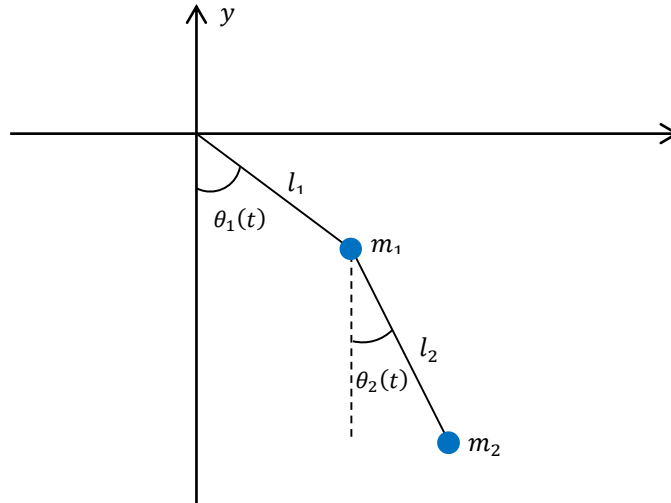


Figure 3 : Pendule double non-amorti

On montre alors que les angles $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ obéissent au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \mu l_1 \theta_1''(t) + l_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_2''(t) + l_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_2'(t)^2 + \mu g \sin(\theta_1(t)) = 0 \\ l_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_1''(t) + l_2 \theta_2''(t) - l_1 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \theta_1'(t)^2 + g \sin(\theta_2(t)) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2}$$

Pistes de réflexion :

- Etude comparative des méthodes d'Euler et Runge-Kutta
- Conservation de l'énergie totale du système
- Précisions des méthodes implémentées
- Trajectoires de deux doubles pendules partant avec des conditions initiales très proches (chaos)
- Etude de la sensibilité aux conditions initiales
- Implémentation de la méthode de Verlet

4. Equation d'onde 2d

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation d'onde bidimensionnelle. Cette équation décrit la propagation d'une onde dans une cavité à deux dimensions (comme par exemple une onde se propageant à la surface de l'eau dans un bassin). Si on note $f(x, y, t)$ l'amplitude de l'onde alors celle-ci est régie par l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, y, t) - c^2 \Delta f(x, y, t) = s(x, y, t), \quad x \in [0, L_x], \quad y \in [0, L_y], \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

où $s(x, y, t)$ représente la source émettrice de l'onde. On s'intéresse ici au cas où cette source est ponctuelle, localisée en un point de coordonnées (x_s, y_s) , et sinusoïdale de fréquence ν_0 , c'est-à-dire :

$$s(x, y, t) = \begin{cases} \sin(2\pi\nu_0 t), & x = x_s, \ y = y_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le milieu est au repos et que la vitesse de l'onde est nulle.

Pistes de réflexion :

- Cas d'une onde se propageant librement dans tout le domaine $[0, L_x] \times [0, L_y]$
- Présence d'une ou plusieurs ouvertures (cf. Fig. 4), et/ou de tout autre type d'obstacle de géométrie diverses et variées (disque, rectangle, triangle, ...)
- Cas particulier d'un scénario sans source mais avec une condition initiale non nulle (profil gaussien par exemple)
- Etude de la stabilité
- Implémentation d'une méthode implicite

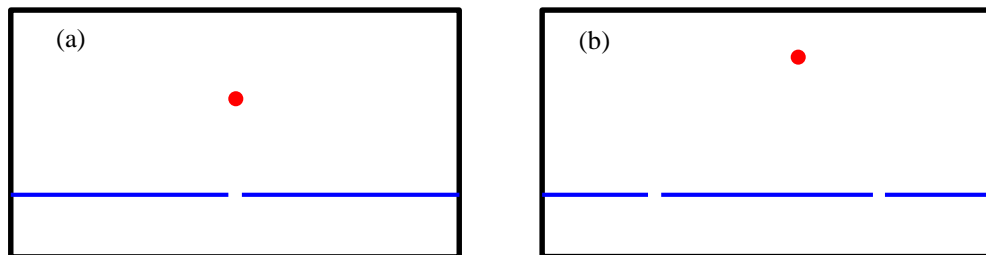


Figure 4 : Présence d'un « mur » (en bleu) présentant une ou plusieurs ouvertures (le point rouge symbolise la source)