6. Übung (11.–15. Mai 2020)

# Programmierung

**Aufgabe 1 (AGS 12.4.1 ⋆)**

(a)

| $t$ | $FV(t)$ | $GV(t)$ |
|---|---|---|
| $(\lambda \underline{\underline{x}}.x\ \utilde{y})\,(\lambda \underline{\underline{y}}.y)$ | $\{\utilde{y}\}$ | $\{\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}\}$ |
| $(\lambda \underline{\underline{x}}.(\lambda \underline{\underline{y}}.\utilde{z}\,(\lambda \underline{\underline{z}}.z\,(\lambda \underline{\underline{x}}.y))))$ | $\{\utilde{z}\}$ | $\{\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}\}$ |
| $(\lambda \underline{\underline{x}}.(\lambda \underline{\underline{y}}.x\ \utilde{z}\,(y\utilde{z})))\,(\lambda \underline{\underline{x}}.\utilde{y}\,(\lambda \underline{\underline{y}}.y))$ | $\{\utilde{y}, \utilde{z}\}$ | $\{\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}\}$ |

(b)

- $\Big(\lambda x.\,\underbrace{(\lambda y.x\ z\,(y\ z))}_{GV=\{y\}}\Big)\ \underbrace{(\lambda x.y\,(\lambda y.y))}_{FV=\{y\}}$ ($GV \cap FV \neq \emptyset \Rightarrow \alpha$-Konversion nötig)

  $\Rightarrow_\alpha \Big(\lambda x.\,\underbrace{(\lambda y_1.x\ z\,(y_1\ z))}_{GV=\{y_1\}}\Big)\ \underbrace{(\lambda x.y\,(\lambda y.y))}_{FV=\{y\}}$

  $\Rightarrow_\beta \Big(\lambda y_1.(\lambda x.\,\underbrace{y\,(\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{z}_{FV=\{z\}}\ (y_1\ z)\Big)$

  $\Rightarrow_\beta \Big(\lambda y_1.(y\,(\lambda y.y))\,(y_1\ z)\Big)$

  $= (\lambda y_1.y\,(\lambda y.y)\,(y_1\ z))$

- $\Big(\lambda x.\,\underbrace{(\lambda y.(\lambda z.z))}_{GV=\{y,z\}}\Big)\ \underbrace{x}_{FV=\{x\}}\ (+\ y\,1)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda y.\ \underbrace{(\lambda z.z)}_{GV=\{z\}})\ \underbrace{(+\ y\,1)}_{FV=\{y\}}$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda z.z)$

- In dem gegebenen Term gibt es drei Teilterme, die $\beta$-reduziert werden können:
  $(\lambda x.(\lambda y.x\,(\lambda z.y\ z)))\,(((\underline{(\lambda x.(\lambda y.y))\,8})\,(\lambda x.(\lambda y.y)\,x))$,
  $(\lambda x.(\lambda y.x\,(\lambda z.y\ z)))\,(((\lambda x.(\lambda y.y))\,8)\,(\lambda x.\underline{(\lambda y.y)\,x}))$, bzw.
  $\underline{(\lambda x.(\lambda y.x\,(\lambda z.y\ z)))\,(((\lambda x.(\lambda y.y))\,8)\,(\lambda x.(\lambda y.y)\,x))}$;
  *aber nicht* $(\lambda x.(\lambda y.x\,(\lambda z.y\ z)))\,(\underline{((\lambda x.(\lambda y.y))\,8)\,(\lambda x.(\lambda y.y)\,x)})$, da $((\lambda x.(\lambda y.y))\,8)$ eine *Applikation* und *keine Abstraktion* ist. Durch die Wahl aus diesen Teiltermen entstehen mehrere Lösungswege, die aber zum selben Ergebnis führen; hier wird nur einer dieser Lösungswege gezeigt. Während der Lösung, gibt es in der zweiten bzw. dritten Zeile wieder Terme, bei denen drei bzw. zwei Teilterme $\beta$-reduziert werden können.

  $\Big(\lambda x.(\lambda y.x\,(\lambda z.y\ z))\Big)\,\Big(((\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{8}_{FV=\emptyset}\ )\,(\lambda x.(\lambda y.y)\,x)\Big)$

  $\Rightarrow_\beta \Big(\lambda x.(\lambda y.x\,(\lambda z.y\ z))\Big)\,\Big((\lambda y.y)\,(\lambda x.(\lambda y.\ \underbrace{y}_{GV=\emptyset}\ )\ \underbrace{x}_{FV=\{x\}}\ )\Big)$


`https://www.orchid.inf.tu-dresden.de` `thomas.ruprecht@tu-dresden.de`

$\Rightarrow_\beta \Big(\lambda x.(\lambda y.x\,(\lambda z.y\ z))\Big)\Big((\lambda y.\ \underbrace{y}_{GV=\emptyset}\ )\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset}\Big)$

$\Rightarrow_\beta \Big(\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.x\,(\lambda z.y\ z))}_{GV=\{y,z\}}\Big)\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset}$

$\Rightarrow_\beta (\lambda y.(\lambda x.\ \underbrace{x}_{GV=\emptyset}\ )\ \underbrace{(\lambda z.y\ z)}_{FV=\{y\}})$

$\Rightarrow_\beta (\lambda y.(\lambda z.y\ z)) \quad = (\lambda yz.y\ z)$

- $\Big(\lambda h.(\lambda x.h\,(x\ \ x))\,(\lambda x.h\,(x\ \ x))\Big)\,((\lambda x.\ \underbrace{x}_{GV=\emptyset}\ )\ \underbrace{(+\ 1\ 5)}_{FV=\emptyset})$

  $\Rightarrow_\beta \Big(\lambda h.(\lambda x.\underbrace{h\,(x\ \ x)}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.h\,(x\ \ x))}_{FV=\{h\}}\Big)\,(+\ 1\ 5)$

  $\Rightarrow_\beta \Big(\lambda h.h\,((\lambda x.\underbrace{h\,(x\ \ x)}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.h\,(x\ \ x))}_{FV=\{h\}})\Big)\,(+\ 1\ 5)$

  $\Rightarrow_\beta \Big(\lambda h.h\Big(h\,((\lambda x.h\,(x\ \ x))\,(\lambda x.h\,(x\ \ x)))\Big)\Big)\,(+\ 1\ 5)$

  $\longrightarrow$ endlose Rekursion, bei der $h$ durch $(+\ 1\ 5)$ noch reduziert werden könnte! Der Term hat keine Normalform.

  $\Rightarrow_\beta (+\ 1\ 5)\Big((+\ 1\ 5)\Big((\lambda x.(+\ 1\ 5)\,(x\ \ x))\,(\lambda x.(+\ 1\ 5)\,(x\ \ x))\Big)\Big)$

- $\Big(\lambda f.\ \underbrace{(\lambda a.(\lambda b.f\ a\ b))}_{GV=\{a,b\}}\Big)\ \underbrace{(\lambda x.(\lambda y.x))}_{FV=\emptyset}$

  $\Rightarrow_\beta \Big(\lambda a.(\lambda b.(\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.x)}_{GV=\{y\}}\ )\ \underbrace{a}_{FV=\{a\}}\ \ b)\Big)$

  $\Rightarrow_\beta \Big(\lambda a.(\lambda b.(\lambda y.\ \underbrace{a}_{GV=\emptyset}\ )\ \underbrace{b}_{FV=\{b\}}\ )\Big)$

  $\Rightarrow_\beta (\lambda a.(\lambda b.a)) \quad = (\lambda ab.a)$

### Aufgabe 2 (AGS 12.4.29 $\star$)

(a) $A = (\lambda xyz.y)$

(b) $B = (\lambda xy.yx)$

(c) $C = (\lambda x.xx)$

(d) $D = (CC)$

(e) $E = (\lambda xy.xyx)$

### Zusatzaufgabe 1 (AGS 12.4.40 $\star$)

$(\lambda f\ \underbrace{xy.fyx}_{\text{GV}=\{x,y\}})\ \underbrace{(\lambda xy.x)}_{\text{FV}=\emptyset}\,xy$

$\Rightarrow_\beta (\lambda xy.(\lambda x\ \ \underbrace{y.x}_{\text{GV}=\{y\}}\ )\ \ \underbrace{y}_{\text{FV}=\{y\}}\ \ x)xy$

$\Rightarrow_\alpha (\lambda xy.(\lambda xy_1.x)yx)xy$

$\Rightarrow_\beta (\lambda xy.(\lambda y_1.\underbrace{y}_{\text{GV}=\emptyset})\underbrace{x}_{\text{FV}=\{x\}})xy$
$\Rightarrow_\beta (\lambda x\underbrace{y.y}_{\text{GV}=\{y\}})\underbrace{x}_{\text{FV}=\{x\}}y$
$\Rightarrow_\beta (\lambda y.\underbrace{y}_{\text{GV}=\emptyset})\underbrace{y}_{\text{FV}=\{y\}}$
$\Rightarrow_\beta y$

**Zusatzaufgabe 2 (AGS 12.4.2)**

$(\lambda x\underbrace{y.x\,z\ \ (z\,y\,z)}_{GV=\{y\}})\ \ \underbrace{(\lambda x.y\ \ (\lambda y.y))}_{FV=\{y\}}$
$\Rightarrow_\alpha (\lambda x\underbrace{y_1.x\,z\ \ (z\,y_1\,z)}_{GV=\{y_1\}})\ \ \underbrace{(\lambda x.y\ \ (\lambda y.y))}_{FV=\{y\}}$
$\Rightarrow_\beta (\lambda y_1.(\lambda x.\underbrace{y\ \ (\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\ \ \underbrace{z}_{FV=\{z\}}\ \ (z\,y_1\,z))$
$\Rightarrow_\beta (\lambda y_1.(y\ \ (\lambda y.y))\ \ (z\,y_1\,z))$
$= (\lambda y_1.y\ \ (\lambda y.y)\ \ (z\,y_1\,z))$