



**UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1**  
**INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES**

**MASTER 2 EN ACTUARIAT**

---

**Processus de Hawkes, Simulation et Application dans la  
Modélisation du Risque de Défaut et la Tarification.**

---

*Par:*

Tuan Anh NGUYEN

Date: 14 mai 2023

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Processus de Hawkes et ses propriétés.</b>	<b>3</b>
2.1	Specification . . . . .	5
2.2	Méthode de transformation générale pour explorer le processus de Hawkes . . . . .	5
2.3	Aperçu du moment de l'intensité . . . . .	8
2.4	Moment de $N_t$ . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Simulation du processus de Hawkes</b>	<b>12</b>
3.1	Methode de Simulation . . . . .	12
3.2	Évaluation du modèle . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Évaluation de l'indice des swaps de défaut de crédit</b>	<b>16</b>
4.1	Resultat . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>

## **Abstract**

Ce rapport explore les démonstrations de certaines propriétés de distribution du processus de Hawkes dans l'application à la modélisation du risque de défaut.

Ensuite, nous montrons comment simuler le processus de Hawkes avec Monte Carlo.

Enfin, nous appliquons ces simulations pour estimer la valeur des CDX. Notre rapport montre que le processus de Hawkes peut aider à faire cela de manière plus précise.

# Chapter 1

## Introduction

L'effondrement de Lehman Brothers a presque détruit le système financier. Cela nous a montré comment tout dans l'économie est connecté. Lehman Brothers était un acteur clé dans le trading des dérivés. Il avait beaucoup de contrats d'assurance liés à la défaillance potentielle de nombreuses entreprises et était lui-même assuré par de nombreux autres contrats. Lorsqu'il a fait faillite, les paiements qu'il a déclenchés ont poussé certains assureurs à faire également défaut, causant des pertes pour ceux qui leur avaient acheté une assurance. Cela a également affecté ceux qui avaient des contrats avec Lehman Brothers.

Ce genre de situation nous donne envie de concevoir des modèles pour prédire quand les entreprises pourraient faire défaut et comment cela pourrait affecter les autres entreprises. Un processus ponctuel auto-exciteur est un type de modèle qui permet aux événements passés d'influencer les futurs. Par exemple, la perte financière causée par un événement affecterait l'avenir. Cela crée également un lien entre les taux d'événements et les pertes qu'ils causent, ce que nous voyons dans la réalité.

Nous avons utilisé le processus de Hawkes, un simple processus ponctuel auto-exciteur, comme point de départ. Le taux d'événements dans un processus de Hawkes change en réponse aux événements et essaie de revenir à un certain niveau en l'absence d'événement.

Nous avons montré qu'une version du processus de Hawkes suit une certaine équation. La solution de cette équation est une fonction qui dépend de la valeur initiale du processus. En étudiant cette fonction, nous avons réussi à déterminer la distribution de probabilité d'un processus de Hawkes. Nous avons obtenu des formules pour les moments du processus. Nous expliquerons la preuve en détail.

Nous avons utilisé un processus de Hawkes pour modéliser la perte totale due aux défauts dans un groupe d'entreprises. Les moments où les sauts se produisent sont les moments où les entreprises font défaut, et les tailles des sauts sont les pertes lors du défaut. Ce modèle montre comment un défaut peut affecter d'autres entreprises. Il prend également en compte le fait que les taux de défaut et de récupération ont tendance à être négativement corrélés. Nous régénérons une méthode de simulation présentée par (nom de l'auteur) pour simuler le processus de Hawkes.

Nous n'avons utilisé qu'un modèle de Hawkes de base en raison de ressources limitées. Même si nous avons choisi les paramètres pour le modèle, nous l'avons utilisé pour montrer comment le prix d'un indice de swap de défaut de crédit peut changer en fonction des paramètres du modèle

## Chapter 2

# Processus de Hawkes et ses propriétés.

Considérons une séquence de temps d'arrêt par défaut  $0 < T_1 < T_2 < \dots$  définis sur un espace de probabilité complet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  avec une filtration d'information complète et continue à droite  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . La nature de la mesure de probabilité  $P$  dépend de l'application. Dans les applications de gestion des risques,  $P$  est la mesure réelle ou statistique. Dans les applications d'évaluation,  $P$  est une mesure de tarification sans risque, par rapport à laquelle le prix actualisé d'un titre négocié est une martingale.

La perte financière à  $T_n$  est donnée par une variable aléatoire  $\xi_n \in \mathcal{F}_{T_n}$ . La séquence  $(T_n, \xi_n)$  génère un processus de dénombrement des défauts non explosif  $N$  donné par  $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$  et un processus de points de perte  $L$  défini par  $L_t = \sum_{n \geq 1} \xi_n 1_{T_n \leq t}$ .

Nous proposons de spécifier les processus  $N$  et  $L$  directement à travers un taux d'arrivée ou une intensité conditionnelle  $\lambda$  et une distribution  $\nu$  sur  $(0, \infty)$  pour la perte  $\xi_n$  lors d'un événement. Cela nous permettra de modéliser la relation de regroupement des défauts, car en raison de plusieurs raisons communes, le défaut d'une entreprise a également un impact sur le défaut d'autres entreprises dans l'économie.

Selon la définition d'un processus stochastique régulier, l'intensité suit un processus stochastique strictement positif qui décrit le taux de défaut moyen conditionnel dans le sens que  $E(N_{t+\Delta} - N_t | \mathcal{F}_t) \approx \lambda_t \Delta$  pour un petit  $\Delta > 0$ .

Cela signifie que la distribution de  $N_T$  lorsque nous connaissons  $N_t$  dépend complètement de la distribution (ou, en termes courants, des comportements) de  $\lambda$ . Afin de le

prouver, nous devons simplement prouver que  $N - \int_0^\cdot \lambda_s ds$  est une martingale locale par rapport à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$ , ce qui signifie

$$E(N_T - \int_0^T \lambda_s ds | \mathcal{F}_t) = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$$

, ou nous pouvons également écrire

$$E(N_T | \mathcal{F}_t) = N_t + \int_t^T \lambda_s ds$$

.

Cela peut simplement être prouvé par la définition :

$$E[N_{T+\Delta} - N_t | \mathcal{F}_t] = \lambda_t \Delta \text{ avec } \Delta \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow E[N_T - N_t | \mathcal{F}_t] = \int_t^T \lambda_s ds$$

Le processus suivi par  $\lambda$  détermine complètement la distribution conditionnelle de  $N$ . Dans l'application du modèle de Hawkes dans la modélisation des défauts, nous analysons une famille de modèles pour  $\lambda$  dont les caractéristiques peuvent capturer tous les comportements de défaut dans un portefeuille spécifié ci-dessous :

**Les dépendances entre les moments de défaut des différentes entreprises.**

Cela pourrait être dû à des sensibilités communes à des facteurs de risque économiques communs et à des relations informationnelles et contractuelles interconnectées entre les entreprises, ce qui peut faciliter la propagation de la détresse financière d'une entreprise à une autre. On parle alors d'effet de regroupement ou de phénomènes de rétroaction. **Cela est modélisé en ajustant le niveau d'intensité pour qu'il augmente lorsqu'un défaut se produit.**

**La corrélation négative entre les taux de défaut et les taux de récupération.**

En période de forts taux de défaut, les créanciers récupèrent souvent moins en cas de défaut que lors de périodes avec relativement moins de défauts. **Cette observation est incorporée dans le modèle en utilisant deux paramètres : la sensibilité de l'intensité, notée theta, par rapport à la perte réalisée totale, et le taux de récupération, noté kappa.**

En d'autres termes, ce modèle capture deux aspects cruciaux du risque de crédit : la tendance des défauts à se regrouper dans le temps (reflétant les effets de contagion) et la tendance des pertes en cas de défaut à être plus élevées lorsque les défauts sont plus fréquents (reflétant la nature procyclique des taux de récupération).

## 2.1 Specification

Selon (Errais,2011), nous examinons un modèle d'intensité de base qui incorpore les caractéristiques décrites ci-dessus. Nous supposons que les événements arrivent avec une intensité  $\lambda$  donnée par

$$\lambda_t = u(t) + \int_0^t h(t-s)dL_s. \quad (2.1)$$

L'intensité du premier défaut  $u(t) = c + e^{-\kappa t}(\lambda_0 - c)$  est une fonction déterministe du temps,  $c > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$ , et l'impact d'une perte sur l'intensité est régie par la fonction

$$h(v) = \delta e^{-\kappa v}, \quad v \geq 0, \quad (2.2)$$

avec  $\kappa \geq 0$  et  $\delta \geq 0$ . L'aléa du taux de défaut est conduit par deux sources d'incertitude: le moment des événements et le recouvrement à ces événements. À un défaut, l'intensité monte par la perte réalisée mise à l'échelle avec le paramètre de sensibilité  $\delta$ . Plus le recouvrement est bas, plus le saut du taux de défaut est élevé. L'impact d'un événement décroît exponentiellement avec le temps à un taux  $\kappa$ . Le niveau de réversion est  $c$ . Il s'ensuit que les défauts sont positivement auto-affectants, ou auto-excitants. De plus, les taux de défaut et de recouvrement sont négativement corrélés.

L'intensité  $\lambda$  régit les temps d'événement communs de  $N$  et  $L$ . Alors que les sauts du processus de défaut  $N$  sont de taille unitaire, les sauts du processus de perte  $L$  sont tirés de la distribution  $\nu$  sur  $(0, \infty)$  de perte donnée en cas de défaut. Le processus bidimensionnel  $J = (L, N)$  est un processus de Hawkes.

## 2.2 Méthode de transformation générale pour explorer le processus de Hawkes

Une propriété très importante que nous allons utiliser tout au long de ce rapport est la formule des générateurs infinitésimaux de la fonction  $\{(\lambda_{\sqcup}, \mathcal{N}_{\sqcup}, \sqcup)\}$  qui est notée  $\mathcal{D}\{(\lambda_t, N_t, t)\}$ .

À partir de la définition ci-dessus et en raison de la décroissance exponentielle, nous pouvons voir que  $\lambda_t$  est un processus de Markov. En particulier, il diminue avec un taux  $\kappa(\lambda_t - c)$  et subit des sauts ascendants (auto-excitants) qui ont une fonction de distribution  $L$  avec un taux  $\lambda_t$ . De plus, lorsque des sauts de ce dernier type se produisent,  $N_t$  augmente de 1. Ainsi,  $(N_t, \lambda_t)$  est également un processus de Markov.



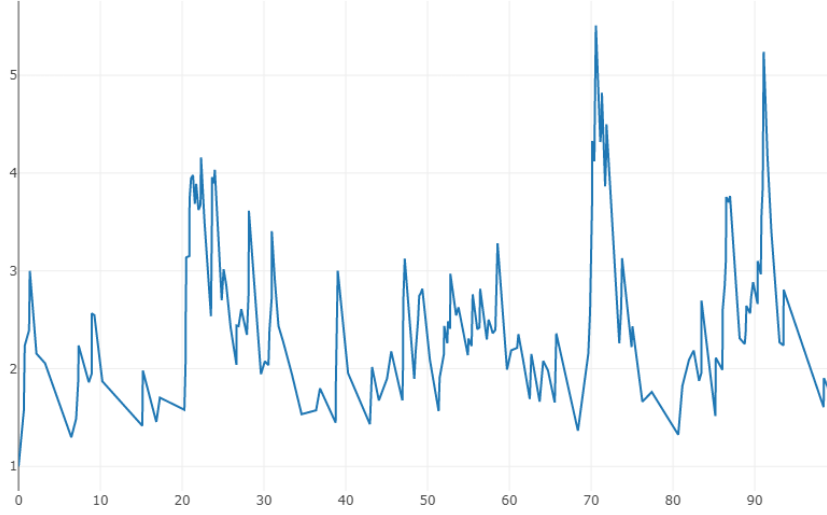


Figure 2.1: exemple d'intensité avec  $\lambda_0 = 1$ ,  $c = 0.9$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\delta = 1$

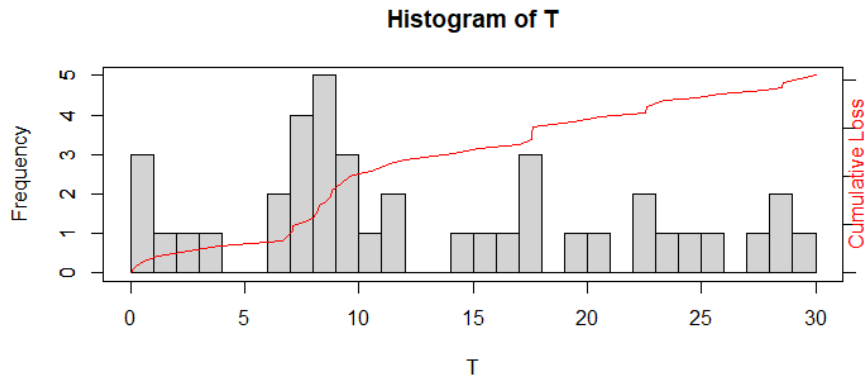


Figure 2.2: exemple de Hawkes process avec  $\lambda_0 = 1$ ,  $c = 0.9$ ,  $\kappa = 2$ ,  $\delta = 1$

À l'aide de la théorie des processus de Markov déterministes par morceaux et en utilisant les résultats de Davis (1984), le générateur infinitésimal du processus d'intensité de défaut  $(\lambda_t, N_t, t)$  agissant sur une fonction  $f(\lambda, N_t, t)$  dans son domaine  $\mathcal{D}(A)$  est donné par

$$(Dg)(\lambda, N_t) = \kappa(c - \lambda)g_\lambda(\lambda, x) + \lambda \int [g(\lambda + \delta z, N_t + 1) - g(\lambda, N_t)]d\nu(z). \quad (2.3)$$

Grâce à l'article de (Dassios et Zhao, 2017), nous dérivons la transformée de Laplace conjointe, fonction génératrice de probabilités de  $(\lambda_T, N_T)$  pour un temps fixe  $T$  qui peut être utilisée pour comprendre la probabilité de  $(\lambda_T, N_T)$ .

**Proposition 2.1** Pour les constantes  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $v \geq 0$  et le temps  $0 \leq t \leq T$ , la transformée de Laplace conjointe conditionnelle, fonction génératrice de probabilités pour le processus  $\lambda_t$  et le processus ponctuel  $N_t$  est donnée par

$$E[\theta^{N_T - N_t} e^{-v\lambda_T} | \mathcal{F}_t] = e^{-(a(T) - a(t))} e^{-B(t)\lambda_t},$$

où  $B(t)$  est déterminé par l'équation différentielle ordinaire non linéaire (EDO)

$$-B'(t) + \kappa B(t) + \theta g(B(t)) - 1 = 0$$

où  $g(u) := \int_0^\infty e^{-uz} d\nu(z)$ , avec la condition aux limites  $B(T) = v$ , et  $a(t)$  est déterminé par

$$a(t) = c\kappa \int_0^t B(s)ds$$

**Preuve.** Considérons une fonction  $f(\lambda_t, N_t, t)$  de forme exponentielle affine

$$f(\lambda, N_t, t) = e^{a(t)} \theta^{N_t} e^{-B(t)\lambda},$$

pour que cette fonction soit une martingale, elle doit satisfaire:  $(Dg)(\lambda, N_t, t) = 0$ . Cela signifie que:

$$\frac{df}{dt} + \kappa(c - \lambda) \frac{df}{d\lambda} + \lambda \left( \int [f(\lambda + \delta z, N_t + 1, t) - g(\lambda, N_t, t)] d\nu(z) \right) = 0$$

Nous avons:

$$\frac{df}{dt} = e^{a(t)} \theta^{N_t} e^{-B(t)\lambda} (a'(t) + B'(t)\lambda) = f(a'(t) + B'(t)\lambda)$$

$$\frac{df}{d\lambda} = -e^{a(t)}\theta^{N_t}e^{-B(t)\lambda}B(t) = -fB(t)$$

$$\int [f(\lambda + \delta z, N_t + 1, t) - f(\lambda, N_t, t)]d\nu(z) = f\left[\int (\theta e^{zB(t)})dv(z) - 1\right]$$

En utilisant ces trois résultats, nous avons:

$$(Dg)(\lambda, N_t, t) = f(a'(t) + B'(t)\lambda - \kappa(c - \lambda)fB(t) + \lambda(f\left[\int (\theta e^{-zB(t)})dv(z) - 1\right]) = 0$$

$$\Rightarrow (a'(t) + B'(t)\lambda - \kappa(c - \lambda)B(t) + \lambda\left[\int (\theta e^{-zB(t)})dv(z) - 1\right]) = 0$$

Puisque l'équation est vraie pour tout  $\lambda_s$ , nous avons les EDO suivantes:

$$B'(t) - \kappa B(t) + \int (\theta e^{-zB(t)})dv(z) - 1 = 0$$

$$a'(t) - \kappa c B(t) = 0$$

avec les conditions aux limites sur  $B(T) = v$  et nous pouvons choisir  $a(0) = 0$  de sorte que:

$$a(t) = \kappa c \int_0^t B(s)ds$$

La proposition 2.1 en découle.

Grâce à la proposition ci-dessus, nous pouvons déduire la transformée de Laplace de  $\lambda_t$  en remplaçant  $\theta = 0$  et la fonction génératrice de probabilités de  $N_t$  en remplaçant  $B(t) = 0$ . Pour plus de détails sur les formules des deux fonctions, nous renvoyons à l'article de (A. Dassios et H. Zhao, 2013) ou l'article de (Gao, Zhou, and Zhu, 2021) sur un processus plus général mais pouvant être spécifié pour obtenir les fonctions du modèle d'intensité de défaut.

## 2.3 Aperçu du moment de l'intensité

En utilisant la Proposition 2.1, nous pouvons obtenir la formule explicite pour le premier et le deuxième moment de  $\lambda_t$ . Mais il pourrait y avoir une autre façon de les trouver plus facilement en utilisant directement la formule de Dynkin. Selon la proposition 2.1 de (Errais, 2011), nous pouvons prouver qu'en utilisant la propriété de martingale du générateur infinitésimal, nous avons un  $F$ -martingale

$$f(\lambda_t, N_t) - f(\lambda_0, N_0) - \int_0^t Df(\lambda_s, N_s)ds$$

pour  $f \in D(A)$ . Ou nous pouvons écrire :

$$E[f(\lambda_T, N_T)] = f(\lambda_t, N_t) + E \left[ \int_t^T Df(\lambda_s, N_s) ds \right]$$

Maintenant, en posant  $f(\lambda, N_t) = \lambda$ , nous avons

$$D\lambda = \kappa(c - \lambda) + \lambda \int (\delta z) dv(z).$$

$$= \kappa c + \lambda(\delta l - \kappa) = \kappa c + \lambda\mu$$

avec  $l = \text{mean}(z) = \int (z) dv(z)$  et  $\mu = \delta l - \kappa$

Et nous avons

$$E \left[ \lambda_t - \int_0^t D\lambda_s ds \middle| \lambda_0 \right] = \lambda_0.$$

Par conséquent,

$$E[\lambda_t | \lambda_0] = \lambda_0 + E \left[ \int_0^t D\lambda_s ds \middle| \lambda_0 \right] = \lambda_0 - \mu \int_0^t E[\lambda_s | \lambda_0] ds + \int_0^t \kappa c ds$$

En différentiant par rapport à  $t$ , nous obtenons l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \mu m(t) + c\kappa$$

où  $m(t) = E[\lambda_t | \lambda_0]$  et  $\mu = \delta l - \kappa$  avec la condition initiale  $m(0) = \lambda_0$ . Cette EDO a pour solution

$$E[\lambda_t | \lambda_0] = -\frac{c\kappa}{\mu} + \left( \lambda_0 + \frac{c\kappa}{\mu} \right) e^{\mu t}$$

pour  $\mu = \delta l - \kappa \neq 0$

et

$$E[\lambda_t | \lambda_0] = \lambda_0 + (c\kappa)t$$

pour  $\mu = \delta l - \kappa = 0$ .

À l'étape suivante, nous cherchons à trouver la formule explicite de la variance de  $\lambda_t$ .

En posant  $f(\lambda, n) = \lambda^2$ , nous avons

$$D\lambda^2 = -2(\kappa - \delta l)\lambda^2 + (2\kappa c + \int \delta^2(z^2)dv(z))\lambda$$

$$= -2\mu\lambda^2 + \lambda(2\kappa c + \int \delta^2(z^2)dv(z))$$

avec  $\mu = \delta l - \kappa$  et  $\rho = (2\kappa c + \int \delta^2(z^2)dv(z))$

Puisque nous avons

$$E\left[\lambda_t^2 - \int_0^t D\lambda_s^2 ds \mid \lambda_0\right] = \lambda_0^2$$

Par conséquent,

$$E[\lambda_t^2 \mid \lambda_0] = \lambda_0^2 - 2\mu \int_0^t E[\lambda_s^2 \mid \lambda_0] ds + \rho \int_0^t E[\lambda_s \mid \lambda_0] ds$$

. En différentiant par rapport à  $t$ , nous obtenons l'EDO suivante :

$$\frac{du(t)}{dt} - 2\mu u(t) = \rho \left( \lambda_0 + \frac{\kappa c}{\mu} \right) e^{\mu t} - \rho \frac{\kappa c}{\mu}$$

Cette EDO a pour solution

$$v(t) = \frac{1}{2\mu^2} \kappa c \rho (e^{\mu t} - 1)^2 + 2\mu \lambda_0 e^{\mu t} (\rho (e^{\mu t} - 1) + \mu \lambda_0 e^{\mu t})$$

Pour  $\delta \neq \mu_1 G$ , on a

$$E[\lambda_t^2 \mid \lambda_0] = \lambda_0^2 + \rho \lambda_0 t + \frac{1}{2}(\kappa c)t^2$$

pour  $\delta = \mu_1 G$ .

## 2.4 Moment de $N_t$

Dans cette section, nous allons reproduire la formule explicite pour  $E[N_t]$ .

Par la définition même de ce processus, nous avons

$$E[N_{T+\Delta} - N_t \mid \mathcal{F}_t] = \lambda_t \Delta \quad \text{avec } \Delta \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow E[N_T - N_t \mid \mathcal{F}_t] = \int_t^T \lambda_s ds.$$

En utilisant la même technique, nous avons :

$$E[N_t - N_0 | F_0] = E \left[ \int_0^t \lambda_s ds | F_0 \right], \quad (2.4)$$

et nous connaissons également  $E[\lambda_t]$  d'après la proposition précédente. En supposant que  $N_0 = 0$ , nous avons

$$E[\lambda_t | \lambda_0] = -\frac{c\kappa}{\mu} + \left( \lambda_0 + \frac{c\kappa}{\mu} \right) e^{\mu t}$$

pour  $\mu = \delta l - \kappa \neq 0$

et

$$E[\lambda_t | \lambda_0] = \lambda_0 + (c\kappa)t$$

pour  $\mu = \delta l - \kappa = 0$ .

En résolvant l'équation, la solution pour  $\mu \neq 0$  est donnée par :

$$E(N_t) = c_1(e^{\mu t} - 1) + c_2 t$$

où  $c_1 = \frac{\kappa c + \mu \lambda_0}{\mu^2}$  et  $c_2 = -\frac{\kappa c}{\mu}$ .

Et pour  $\mu = 0$ , la solution est :

$$E[N_t] = \lambda_0 t + c\kappa \frac{t^2}{2}$$

# Chapter 3

## Simulation du processus de Hawkes

### 3.1 Methode de Simulation

Selon (Dassios et Zhao, 2013), l'algorithme de simulation exacte est donné par l'Algorithme 3.1 pour un processus de Hawkes univarié avec une intensité décroissante exponentiellement (défini dans la spécification 1.1) et des tailles aléatoires de sauts auto-excitants dans le processus d'intensité. Cet algorithme est très facile à mettre en œuvre car chaque temps d'interarrivée aléatoire des sauts dans le processus de Hawkes peut être simulé exactement en le décomposant en deux variables aléatoires indépendantes et plus simples sans inverser la fonction de distribution cumulative sous-jacente.

**Algorithme 3.1 (Univarié).** L'algorithme de simulation pour un chemin d'échantillon d'un processus de Hawkes unidimensionnel avec une intensité décroissante exponentiellement  $(N_t, \lambda_t)$ ,  $t \geq 0$  conditionné à  $\lambda_0$  et  $N_0 = 0$ , avec une distribution de taille de saut  $L \sim v(z)$  (Distribution des pertes à chaque défaut) et  $\bar{K}$  temps de saut  $\{T_1, T_2, \dots, T_{\bar{K}}\}$  :

1. Définir les conditions initiales  $T_0 = 0$ ,  $\lambda_{T_0}^\pm = \lambda_0 > a$ ,  $N_0 = 0$ , et  $k \in \{0, 1, 2, \dots, \bar{K} - 1\}$
2. Simuler le  $(k + 1)$ -ième temps d'interarrivée  $S_{k+1}$  en utilisant :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_{(1)k+1} \wedge S_{(2)k+1} \quad \text{si } D_{k+1} > 0 \\ &= S_{(2)k+1} \quad \text{si } D_{k+1} < 0 \end{aligned}$$

où

$$D_{k+1} = 1 + \frac{\kappa \ln U_1}{\lambda_{T_k}^+ - a}, \quad U_1 \sim U[0, 1],$$

et

$$S_{(1)k+1} = -\frac{1}{\delta} \ln D_{k+1}, \quad S_{(2)k+1} = -\frac{1}{a} \ln U_2, \quad U_2 \sim U[0, 1].$$

3. Enregistrer le  $(k+1)$ -ième temps de saut  $T_{k+1}$  dans le processus d'intensité  $\lambda_t$  en utilisant :

$$T_{k+1} = T_k + S_{k+1}.$$

4. Enregistrer le changement au temps de saut  $T_{k+1}$  dans le processus d'intensité  $\lambda_t$  en utilisant :

$$\lambda_{T_{k+1}}^+ = \lambda_{T_k}^- + Y_{k+1}, \quad L_{K+1} \sim v(z)$$

où

$$\lambda_{T_k}^- = (\lambda_{T_k}^+ - a) e^{-\delta(T_{k+1} - T_k)} + a.$$

5. Enregistrer le changement au temps de saut  $T_{k+1}$  dans le processus ponctuel  $N_t$  en utilisant :

$$N_{T_{k+1}}^+ = N_{T_k}^- + 1. \quad (3.2)$$

### Preuve

Tout d'abord, nous rappelons la fonction d'intensité de base du processus de Hawkes :

$$\lambda_t = u(t) + \int_0^t h(t-s) dL_s.$$

avec  $u(t) = c + (\lambda_0 - c)e^{-\kappa t}$  et  $h(v) = \delta e^{-\kappa v}$

Étant donné le  $k$ -ième temps de saut  $T_k$ , le processus ponctuel a le processus d'intensité  $\{\lambda_t\}_{T_k \leq t < T_k + S_{k+1}}$  qui suit l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$\frac{d\lambda_t}{dt} = -\kappa(\lambda_t - c), \quad (3.3)$$

avec la condition initiale  $\lambda_t|_{t=T_k} = \lambda_{T_k}$ . Évidemment, (3.3) a pour solution unique

$$\lambda_t = (\lambda_{T_k} + c) e^{-\kappa(t-T_k)} + c, \quad Tk \leq t < Tk + Sk + 1,$$

$$\begin{aligned} F_{S_{k+1}}(s) &= P\{S_{k+1} \leq s\} = 1 - P\{S_{k+1} > s\} = 1 - P\{N_{Tk+s} - N_{Tk} = 0\} \\ &= 1 - \exp\left(-\int_{Tk}^{Tk+s} \lambda(u) du\right) \end{aligned}$$



$$= 1 - \exp\left(\int_0^s \lambda_{T+k+v} dv\right) \\ = 1 - \exp\left((\lambda_{T+k} - c)\left(1 - e^{-\kappa s}\right)/\delta - sc\right). \quad (3.4)$$

En utilisant la méthode de transformation inverse, nous avons  $S_{k+1} = F_{S_{k+1}}^{-1}(U)$ , où  $U \sim [0, 1]$ . Cependant, nous pouvons éviter d'inverser cette fonction  $F_{S_{k+1}}(\cdot)$  de l'équation (3.4) en décomposant  $S_{k+1}$  en deux variables aléatoires plus simples et indépendantes  $S_{(1)k+1}$  et  $S_{(2)k+1}$  via  $S_{k+1} = S_{(1)k+1} \wedge S_{(2)k+1}$ , où

$$P\{S_{(1)k+1} > s_o\} = \exp\left((\lambda_{T+k} - c)\left(1 - e^{-\kappa s}/\kappa\right)\right),$$

$$P\{S_{(2)k+1} > s_o\} = e^{-cs},$$

puisque

$$P\{Sk+1 > s\} = \exp\left((\lambda_{T+k} - a)\left(1 - e^{-\kappa s}/\kappa\right)\right) \times e^{-cs} = P\{S_{(1)k+1} > s_o\} \times P\{S_{(2)k+1} > s_o\} = P\{S_{(1)}$$

Pour la simulation de  $S_{(1)k+1}$ , puisque

$$F_{S_{(1)k+1}}(s) = P\{S_{(1)k+1} \leq s_o\} = 1 - \exp\left((\lambda_{T+k} - c)\left(1 - e^{-\kappa s}/\kappa\right)\right),$$

Nous fixons

$$\exp\left(-(\lambda_{T+k}-c)\left(1-\frac{e^{-\delta S_{(1)k+1}}}{\kappa}\right)\right)=U_1.$$

Nous pouvons inverser cette fonction simple explicitement en

$$S_{(1)k+1} = -\frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{\kappa \ln U_1}{\lambda_{T+k} - a} \right). \quad (3.5)$$

Notez que  $S_{(1)k+1}$  est une variable aléatoire défectueuse car

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F_{S_{(1)k+1}}(s) = P\{S_{(1)k+1} \leq \infty\} = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda_{T+k} - a}{\kappa}\right) < 1,$$

et la condition pour simuler un  $S_{(1)k+1}$  valide est  $D_{k+1} > 0$  où

$$D_{k+1} = 1 + \frac{\delta \ln U_1}{\lambda_{T+k} - a}.$$

Pour la simulation de  $S_{(2)k+1}$ , puisque  $S_{(2)k+1} \sim Exp(c)$ , nous avons

$$S_{(2)k+1} = -\frac{1}{c} \ln U_2$$

Ainsi, pour la simulation de  $S_{k+1}$ , nous avons

$$S_{k+1} = S_{(1)k+1} \wedge S_{(2)k+1}$$

si  $D_{k+1} > 0$ ,

$$S_{k+1} = S_{(2)k+1}$$

si  $D_{k+1} < 0$ ,

où  $S_{(1)k+1}$  et  $S_{(2)k+1}$  sont donnés respectivement par (3.5) et (3.6).

Par conséquent, le  $(k + 1)$ -ème temps de saut  $T_{k+1}$  dans le processus de Hawkes est donné par

$$T_{k+1} = T_k + S_{k+1},$$

et le changement dans  $\lambda_t$  et  $N_t$  au moment  $T_{k+1}$  peut être facilement déduit comme donné par (3.1) et (3.2), respectivement.

## 3.2 Évaluation du modèle

Dans cette section, nous utilisons les résultats dérivés des preuves précédentes pour évaluer l'exactitude de notre modèle de processus de Hawkes. Nous utilisons la méthode de Monte Carlo avec 10 000 simulations pour comparer les résultats obtenus en utilisant les formules explicites pour  $\lambda$  et le nombre de défauts à différents moments. Tout au long de la simulation de cet article, la perte en cas de défaut est toujours fixée selon une distribution uniforme.

T	Lamda Sim	Lambda Explicit	error_lambda	Nt Sim	Nt Explicit	error_N
1	1.59	1.58	0.81%	1.31	1.28	1.65%
2	2.20	2.22	-0.80%	3.15	3.18	-0.90%
3	2.91	2.92	-0.39%	5.72	5.74	-0.39%
4	3.71	3.71	0.12%	9.06	9.05	0.13%
5	4.55	4.57	-0.41%	13.11	13.18	-0.51%
6	5.55	5.52	0.58%	18.35	18.22	0.71%
7	6.54	6.58	-0.47%	24.10	24.26	-0.63%
8	7.74	7.74	-0.05%	31.37	31.40	-0.11%
9	9.06	9.03	0.31%	39.87	39.78	0.23%
10	10.57	10.45	1.19%	49.91	49.51	0.82%

Figure 3.1: Validation du modele en examinant les  $N_t$  et  $\lambda_t$

Nous pouvons constater qu'avec une méthode de simulation simple, nous pouvons obtenir des résultats de haute précision. Ainsi, nous pouvons utiliser cela pour évaluer les prix de certains dérivés de défauts dans les prochaines étapes.

## Chapter 4

# Évaluation de l'indice des swaps de défaut de crédit

Dans cette section, nous utilisons une méthode simple de simulation de Monte Carlo pour la valorisation d'un indice de swaps - un type de produit dérivé de défaut de crédit. Selon (Errais, 2011), Les swaps sur indice sont basés sur un portefeuille dont les  $n$  titres constitutifs ont un nominal de 1, une échéance à la date  $T$  et des dates de paiement des primes  $(t_m)$ . La perte au  $k$ -ème défaut est notée  $\delta_k \in [0, 1]$ . Le swap est spécifié par un seuil inférieur d'attachement  $K \in [0, 1]$  et un seuil supérieur d'attachement  $K' \in (K, 1]$ . Un swap d'indice a des seuils d'attachement  $K = 0$  et  $K' = 1$ . Le nominal du swap est donné par  $K = n(K' - K)$ . Le vendeur de protection couvre les pertes du portefeuille au fur et à mesure qu'elles surviennent, à condition que les pertes cumulées soient supérieures à  $K$  mais n'excèdent pas  $K'$ . Les paiements cumulés au temps  $t$ , notés  $U_t$ , sont donnés par le "call spread" :

$$U_t = (L_t - Kn)^+ - (L_t - Kn')^+.$$

La valeur à l'instant  $t \leq T$  de ces paiements est donnée par :

$$D_t = E \left[ \int_t^T e^{-r(s-t)} dU_s \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Selon (Errais, 2011) :

$$D_t = e^{-r(T-t)} E(U_T \mid \mathcal{F}_t) - U_t + r \int_t^T e^{-r(s-t)} E(U_s \mid \mathcal{F}_t) ds.$$

Le souscripteur de protection reçoit les paiements en cas de perte et, en contrepartie, effectue des paiements de prime au vendeur de protection. Chaque paiement

de prime comprend deux parties. La première partie est un paiement initial, exprimé en tant que fraction  $F$  du nominal de la tranche  $K$ . Pour un swap d'indice,  $F = 0$ . La deuxième partie comprend des paiements proportionnels au nominal de prime  $I_t$ , qui est donné par  $n - (N_t \wedge n) = n + (N_t - n)^+ - N_t$  pour un swap d'indice et  $K - U_t$  pour un swap de tranche avec  $K < 1$ . Soit  $c_m$  la fraction de l'année correspondant à la période  $m$ , généralement égale à  $1/4$  pour des paiements trimestriels. En utilisant  $S$  pour désigner le taux de prime en cours, la valeur à l'instant  $t \leq T$  des paiements de prime est donnée par :

$$P_t(F, S) = FK + S \sum_{t_m \geq t} e^{-r(t_m - t)} c_m E(I_{t_m} | \mathcal{F}_t).$$

Pour un taux initial fixe  $F$ , le spread en cours  $S_t$  à l'instant  $t$  est la solution  $S = S_t$  de l'équation  $D_t = P_t(F, S)$ . En fixant  $D_t = P_t(F, S)$  pour un  $S$  donné, on obtient une valeur  $F = F_t$  pour le taux initial  $F_t$  à l'instant  $t$ .

## 4.1 Resultat

Since the actual prices of CDX in the market are limited to only some people, we use a hypothetical market parameters to show the sensitivity of price of CDX. For the parameters of the intensity model, we take  $\kappa = 2$ ,  $\lambda_0 = 0.6$ ,  $\delta = 1$ , market discount rate at 0.05 and  $a = 0.5$ . The result of sensitivity testing is shown in the graph below.

Maturity \	0	0.5	1	1.5	2
1	0.00040	0.00044	0.00049	0.00052	0.00060
2	0.00072	0.00081	0.00097	0.00111	0.00132
3	0.00103	0.00116	0.00138	0.00168	0.00207
4	0.00128	0.00154	0.00177	0.00213	0.00271
5	0.00154	0.00180	0.00211	0.00261	0.00337
6	0.00175	0.00206	0.00242	0.00300	0.00387
7	0.00194	0.00226	0.00274	0.00337	0.00452
8	0.00211	0.00245	0.00293	0.00372	0.00487
9	0.00227	0.00262	0.00319	0.00393	0.00536
10	0.00239	0.00282	0.00334	0.00426	0.00572

Figure 4.1: Maturity and Delta sensitivity testing

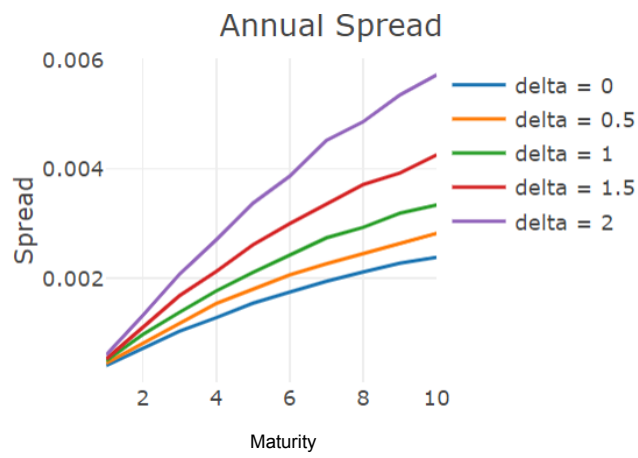


Figure 4.2: Maturity and Delta sensitivity testing

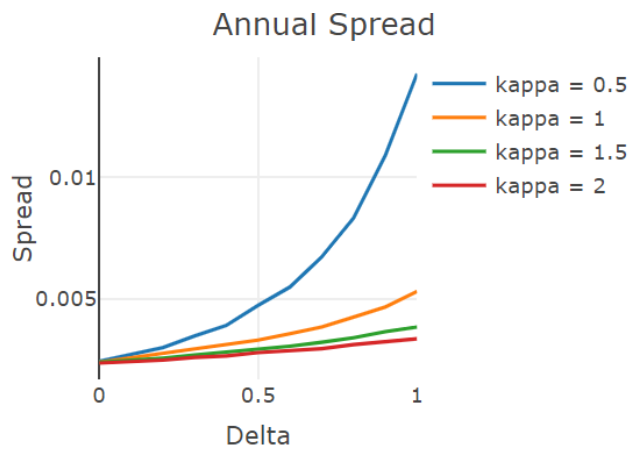


Figure 4.3: Kappa and Delta sensitivity testing

# Chapter 5

## Conclusion

En utilisant la propriété de Markov, nous pouvons analyser et comprendre le comportement du processus de Hawkes. Cette propriété nous permet de modéliser le processus comme une séquence d'événements indépendants de la mémoire, où l'intensité des événements futurs dépend uniquement de l'historique passé.

La distribution et les moments du processus de Hawkes peuvent être étudiés à l'aide de transformations et de méthodes analytiques. Cela nous permet de caractériser statistiquement le processus et d'estimer des quantités telles que la moyenne, la variance et les corrélations des événements.

La simulation du processus de Hawkes est un outil précieux pour comprendre et évaluer le modèle. En utilisant des méthodes de simulation telles que la simulation Monte Carlo, nous pouvons générer des trajectoires d'échantillons qui capturent la nature stochastique du processus. Cela nous permet d'estimer différentes mesures statistiques et d'évaluer la performance des modèles théoriques.

Le processus de Hawkes trouve des applications importantes dans la tarification des produits financiers. En modélisant les événements de défaut ou les événements ponctuels dans le cadre des produits dérivés, nous pouvons utiliser le processus de Hawkes pour estimer les prix et les valeurs actuelles associés à ces produits.

# Bibliography

- [1] Dassios, A., Zhao, H. (2013). Exact simulation of Hawkes process with exponentially decaying intensity. *Methodology and Computing in Applied Probability*
- [2] Dassios, A., Zhao, H. (2013). A dynamic contagion process. *Journal of Applied Probability*, 50(4), 1003-1017.
- [3] Errais, E., Giesecke, K., & Goldberg, L. R. (2011). Affine point processes and portfolio credit risk..
- [4] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of nondiffusion stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*
- [5] Gao, X., Zhou, X., Zhu, L. (2021). Transform Analysis for Hawkes Processes with Applications in Dark Pool Trading.