



TECHNIQUE NUMERIQUE



P R O J E T :

Modélisation du SCR d'un contrat d'épargne par méthodes de
simulation



Auteurs : HOANG Phuong Trang

NGUYEN Thi Hanh

LE Thi Thanh Nga

NGUYEN Tuan Anh

Professeur : SALHI Yahia

Lyon, Février 2023

Contents

1	Introduction	2
2	Calcul de NAV_0	2
3	Comparaison des méthodes de simulation de NAV_1	3
3.1	La méthode des Simulations dans les Simulations (<i>SdS</i>)	3
3.2	La méthode de Least-Square Monte-Carlo (<i>LSMC</i>)	3
3.2.1	Sensibilité par rapport à N	4
3.2.2	Sensibilité par rapport à M	5
3.2.3	Sensibilité par rapport à d	6
3.3	Calcul des intervalles de confiance	6
4	Sensibilité du SCR avec la méthode LSMC	9
4.1	Sensibilité par rapport au taux garanti r_g	9
4.2	Sensibilité par rapport au taux sans risque r	10
5	Annexe	11

Introduction

Le contrat d'épargne maturité à 2 ans qu'on focalise pour modélisation a des characteristics:

- Le sous-jacent $(S_t)_{t \geq 0}$ suit un processus de Black-Scholes (mouvement Brownien géométrique)
- Le fond est utilisé pour investir x en actif risqué et le reste en l'autre produit usant taux sans risque
- Le contrat d'épargne est caractisé par une garantie de capital à terme, alors, l'assureur peut être remboursé:

$$\max(e^{r_g \times T} \times PM_0; R \times VM_T) \quad \text{où} \quad R = \frac{PM_0}{VM_0} \quad (1)$$

- L'autre manière presente sous deux composante:

- Une partie garantie: $BE_T = R \times VM_0 \times (x \times S_T + (1 - x) \times e^{rT})$
- Une partie optionnelle: $O_T = (K - S_T)^+$ où

$$K = R \times VM_0 \times e^{r_g \times T} - x \times R \times VM_0 \times e^{rT} \text{ (Preuve : Annexe)}$$

Dans ce rapport, on présente le schéma simple pour calculer NAV_0 , puis on expose les différentes méthodes de simulation employées pour modéliser la distribution de NAV_1 .

$$NAV_t = \underbrace{e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}}[VM_T | S_t]}_{\text{actif}} - \underbrace{e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}}[BE_T + O_T | S_t]}_{\text{passif}} \quad (2)$$

où \mathbb{P} est la mesure utilisée dans l'historique et \mathbb{Q} est l'environnement de probabilités avec la mesure risque neutre appliquant dans la deuxième année. Finalement, on va analyser et comparer nos résultats pour l'estimation du SCR qui représente le montant minimal en fonds propres qu'une compagnie d'assurance doit détenir pour couvrir ses risques avec une probabilité donnée avec chaque méthode. La formule est définie comme:

$$SCR = NAV_0 - VaR_{99.5\%} \left(\frac{NAV_1}{1 + r_1} \right) \quad (3)$$

Calcul de NAV_0

Concernant la formule (2), on simule $N = 10000$ fois pour obtenir NAV_0 , la solution explicité de l'EDP basée sur le mouvement brownien géométrique S_t .

$$S_T = S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \times (T-t) + \sigma \times (W_T - W_t)}$$

$$\text{où } W_T - W_t \sim N(0, T - t)$$

Par la méthode de simulation Monte Carlo, on obtient une $NAV_0 = 7.182014$.

Comparaison des méthodes de simulation de NAV_1

Concernant la comparaison entre les méthodes de simulation, on veut déduire la distribution de NAV_1 et puis donner la valeur de SCR.

3.1 La méthode des Simulations dans les Simulations (*SdS*)

Voici les étapes détaillées:

- Suppose que $N = 1000$ trajectoire du sous-jacent $S_t^k, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$;
- Estime NAV_1^k par la simulation Monte-Carlo pour chaque simulation dans le première temps;

$$NAV_1^k = \frac{1}{M} e^{-r(T-t)} \sum_{i=1}^M (VM_T^{k,i} - BE_T^{k,i} - O_T^{k,i})$$

où M est la paramètre de simulation pour chaque k dans la première étape;

- Évalue la $Var_{99.5\%}$ de NAV_1 escomptée à partir de N simulations.
- Calcule la valeur du SCR selon l'équation (1).

Une fois la distribution de NAV_1 déterminée, on peut calculer le SCR selon l'équation (3) et on obtient 7.170935.

3.2 La méthode de Least-Square Monte-Carlo (*LSMC*)

L'idée principale de cette méthode est d'appliquer la méthode SdS avec un nombre moindre de simulations secondaires (M) et d'utiliser ensuite une régression linéaire basée sur une base orthonormée pour mieux déterminer la variation de NAV_1 . :

1. La base polynomiale canonique: $(X_n)_{n \in N^*}$.
2. Les polynômes d'Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$$

3. Les polynômes de Chebyshev:

$$T_n(x) = n \sum_{k=0}^n (-2)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!(2k)!} (1-x)^k$$

4. Les polynômes de Gegenbauer:

$$C_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(2\alpha)_n}{n!} {}_2F_1(-n, 2\alpha + n, \alpha + \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2})$$

où ${}_2F_1$ est se réfère à la fonction hypergéométrique:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

et:

$$x^n = \frac{x!}{(x-n)!}$$

5. Les polynômes de Jacobi:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n]$$

6. Les polynômes de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

Étant donné que ces différentes bases polynomiales sont équivalentes, leur choix n'a pas d'effet significatif sur le résultat de l'estimation, mais plutôt sur le temps de calcul requis (montrant à 3.3). Avec $N = 10000$, $M = 1000$ et $d = 7$ et après appliquer les polynômes de méthode LSMC, toutes les valeurs du SCR sont 6.92079, sauf Laguerre est 6.922025.

3.2.1 Sensibilité par rapport à N

Fixé $M = 1000$, avec la méthode de simulation SdS, on observe la convergence du SCR à partir de 25000 simulations de N.

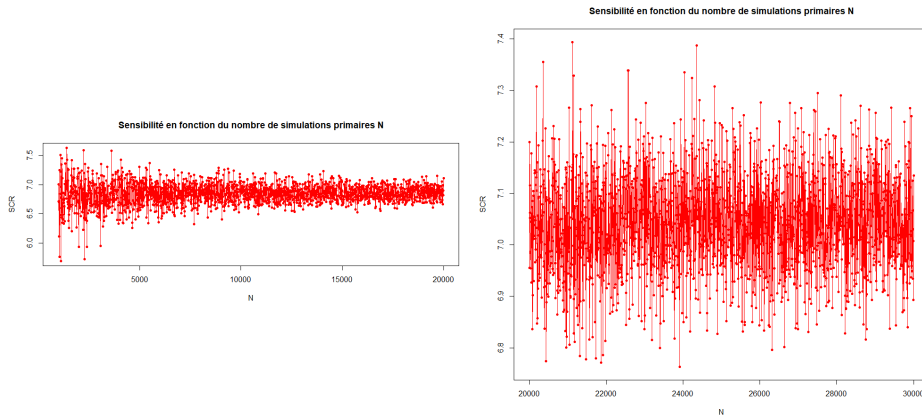


Figure 1: Tuning nombre de simulation primaire N par la méthode SdS

Encore fixant $M = 1000$ pour la méthode LSMC, la convergence apparaît à partir d'environ 4000 simulations de N.

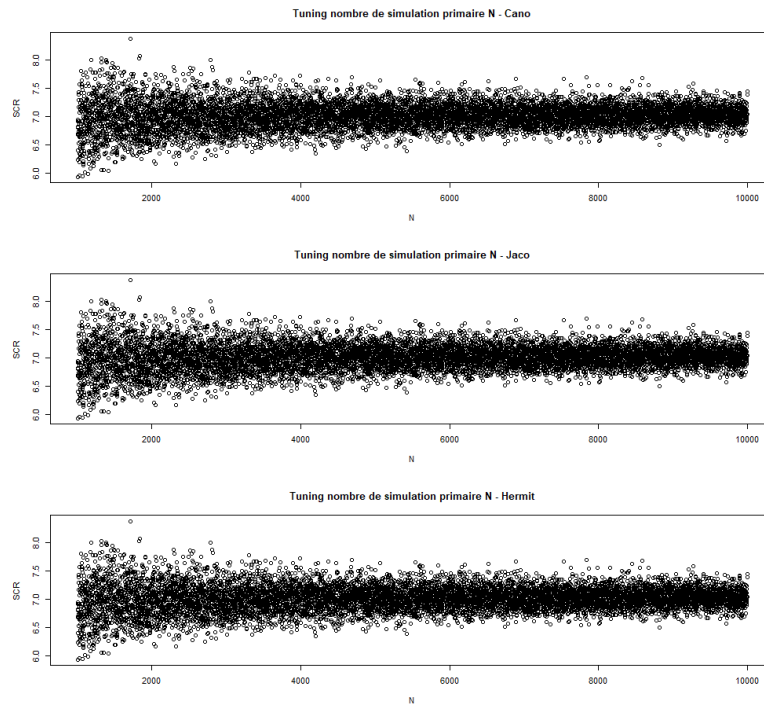


Figure 2: Tuning nombre de simulation primaire N par la méthode LMSC

3.2.2 Sensibilité par rapport à M

Fixé $N = 25000$, on a mené une analyse similaire et constaté que la précision de l'estimation du SCR n'est pas excessivement affectée par les variations du nombre de simulations secondaires M, pourvu qu'un nombre suffisant de simulations soit utilisé (le nombre adéquat dépendant de la méthode employée).

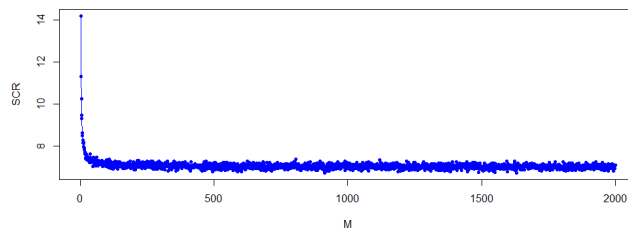


Figure 3: Tuning en fonction du nombre de simulations secondaires M

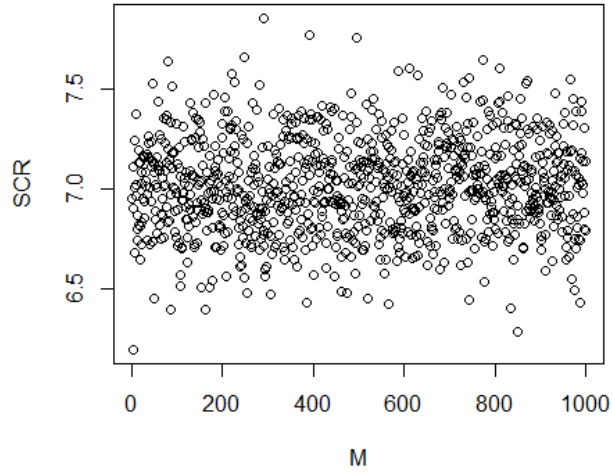


Figure 4: Tuning nombre de simulation secondaire M par la méthode LSMC avec la base canonique

3.2.3 Sensibilité par rapport à d

À partir de $d = 5$, il n'y a pas beaucoup de différence dans les résultats du SCR.

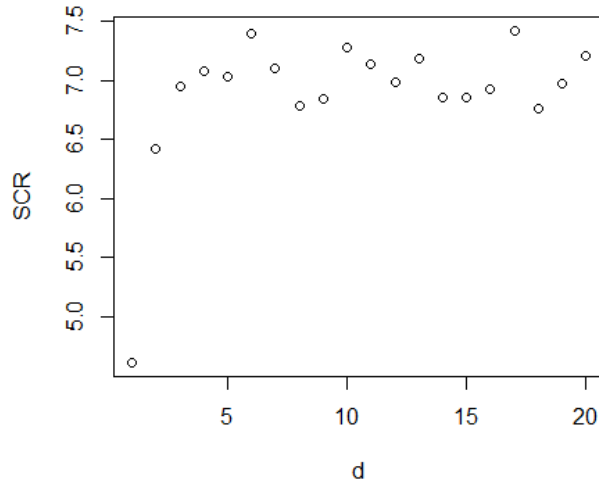


Figure 5: Tuning nombre de simulation de polynômes

3.3 Calcul des intervalles de confiance

Toutefois, les résultats obtenus sont assez similaires globalement. En effet, les intervalles de confiance sont plutôt proches. Les méthode SdS est néanmoins plus lourde en terme de temps de calcul que la méthode LSMC.

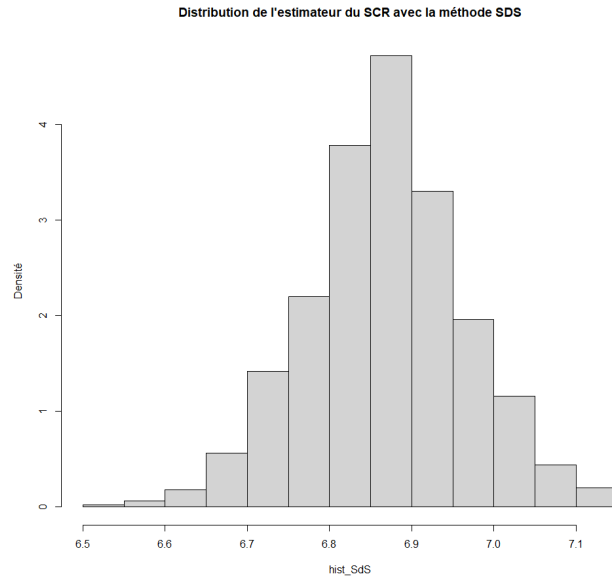


Figure 6: Distribution de l'estimateur du SCR avec la méthode SDS

Les graphiques suivants montrent les distributions de la méthode LSMC avec chaque polynôme. On peut voir que la méthode des polynômes de Laguerre donne le SCR le plus élevé, tandis que celle des polynômes sur la base de Canonique propose le SCR le plus faible.

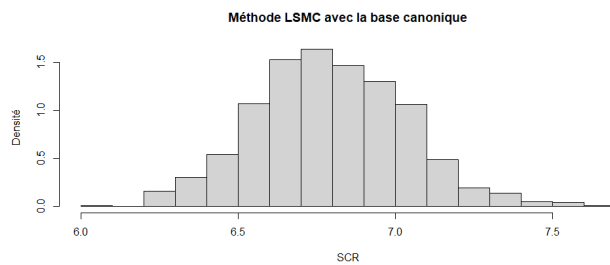


Figure 7: La base Canonique

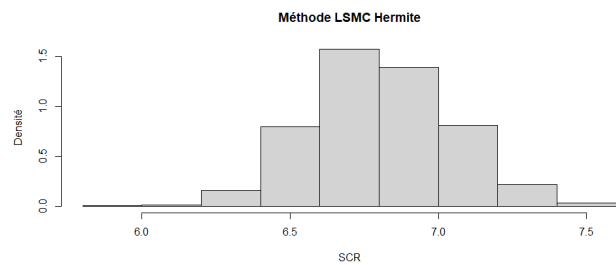


Figure 8: Le polynôme d'Hermite

En général, on s'intéresse à l'amplitude de l'intervalle de confiance, qui donne une idée de la précision de l'estimation. Plus l'amplitude est étroite, plus l'estimation est précise et fiable. Par la comparaison, l'amplitude de l'intervalle de confiance est presque la même. Cependant, la valeur du SCR par méthode SdS est plus grande que les autres.

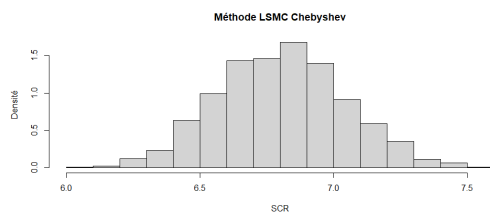


Figure 9: Le polynôme de Chebyshev

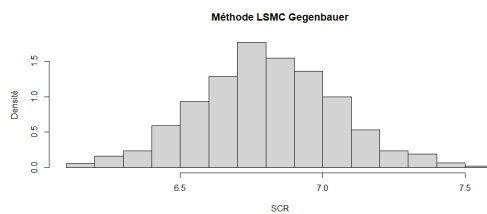


Figure 10: Le polynôme de Gegenbauer

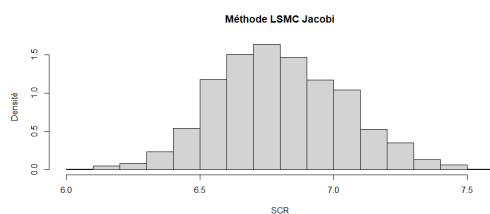


Figure 11: Le polynôme de Jacobi

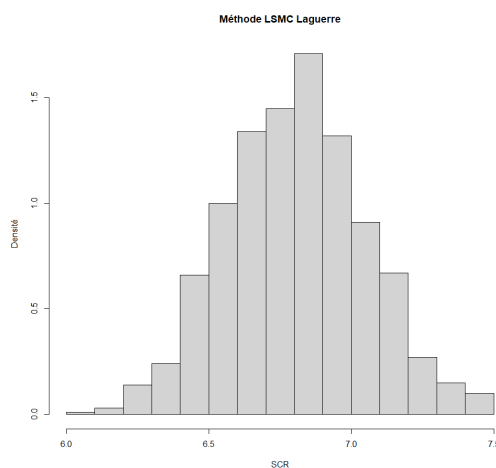


Figure 12: Le polynôme de Laguerre

Méthode	M	N	d	Temps de calcul	Intervalle de confiance à 95%
SdS	250	25000	0	0.987	[6.8628 ; 6.8747]
LSMC (Cano)	200	4000	7	0.1687	[6.7798 ; 6.8095]
LSMC (Hermite)	200	4000	7	0.2281	[6.7896 ; 6.8188]
LSMC (Chebyshev)	200	4000	7	0.3445	[6.7897 ; 6.8191]
LSMC (Gegenbauer)	200	4000	7	0.2204	[6.7882 ; 6.8182]
LSMC (Jacobi)	200	4000	7	0.1912	[6.7853 ; 6.8148]
LSMC (Laguerre)	200	4000	7	0.2085	[6.7902 ; 6.8204]

Table 1: Comparaison des différentes méthodes de simulation

Sensibilité du SCR avec la méthode LSMC

Dans cette dernière partie, on attache $N = 25000$, $M = 500$ et $d = 7$ avec la méthode LSMC, spécialisé avec la base canonique, le polynôme de Jacobi et d'Hermite.

4.1 Sensibilité par rapport au taux garanti r_g

On a constaté une similitude dans les valeurs SCR, même lorsque la valeur du taux garanti change.

taux garantie	SCR canonique	SCR jacobi	SCR hermite
0.000	5.723179	5.723179	5.723179
0.003	6.325659	6.325659	6.325659
0.005	6.830611	6.830611	6.830611
0.010	7.723544	7.723544	7.723544
0.020	9.681445	9.681445	9.681445
0.025	10.764689	10.764689	10.764689
0.045	14.858659	14.858659	14.858659
0.055	17.164306	17.164306	17.164306
0.065	19.197210	19.197210	19.197210

Table 2: Relation entre les valeurs du taux garanti et les valeur du SCR

La relation entre le taux garanti et le SCR est proportionnel les uns aux autres, parce que le fait qu'une augmentation du taux technique entraîne une augmentation des provisions, car les montants engagés sont plus élevés.

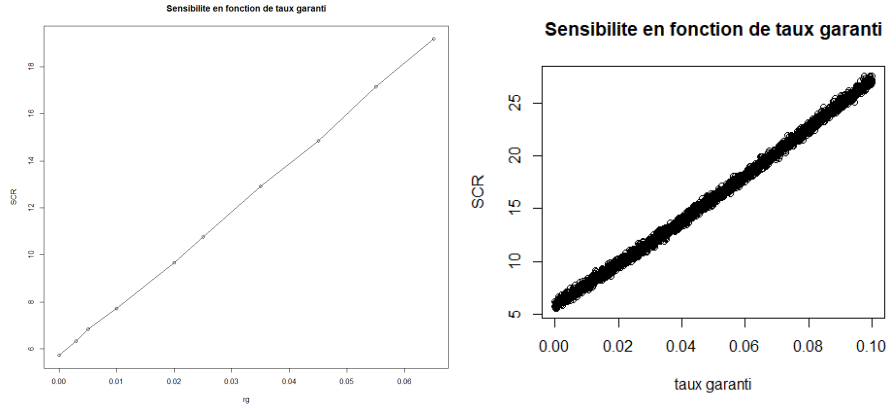


Figure 13: Relation entre le taux garanti et le SCR

4.2 Sensibilité par rapport au taux sans risque r

Les résultats présentés dans le tableau 3 et l'illustration 14 indiquent une corrélation négative entre le taux sans risque et le SCR. Cette relation s'explique par le processus d'actualisation, car un taux d'intérêt plus élevé tend à réduire la valeur d'un montant donné. Nous avons également remarqué, comme cela a été constaté auparavant, que les valeurs de SCR étaient identiques pour différentes bases polynomiales orthonormées, pour un taux sans risque donné.

taux sans risque	SCR canonique	SCR jacobi	SCR hermite
0	7.069710	7.069710	7.069710
0.015	6.898799	6.898799	6.898799
0.02	6.597370	6.597370	6.597370
0.025	6.652327	6.652327	6.652327
0.035	6.646823	6.646823	6.646823
0.045	6.269917	6.269917	6.269917
0.055	6.307325	6.307325	6.307325
0.065	6.133965	6.133965	6.133965
0.075	6.025842	6.025842	6.025842

Table 3: Relation entre les valeurs du taux sans risque et les valeur du SCR

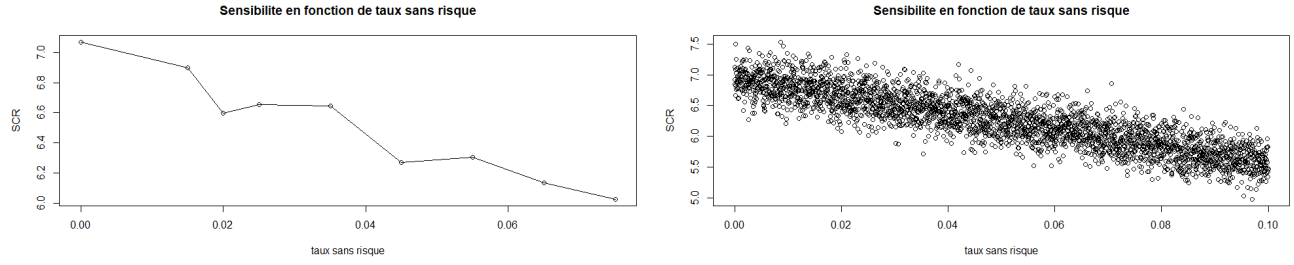


Figure 14: Relation entre le taux sans risque et le SCR

Annexe

Preuve la formule du "*strike price K*": $PM_0 \times e^{r_g \times T} - (1 - x) \times PM_0 \times e^{rT}$

$$\max(e^{r_g \times T} \times PM_0; R \times VM_T) = \begin{cases} PM_0 \times e^{r_g \times T} & PM_0 \times e^{r_g \times T} > R \times VM_T \\ R \times VM_T & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{ou } R \times VM_T = x \times PM_0 \times S_T + (1 - x) \times PM_0 \times e^{rT}$$

$$\Rightarrow (4) = \begin{cases} PM_0 \times e^{r_g \times T} & PM_0 \times e^{r_g \times T} > x \times PM_0 \times S_T + (1 - x) \times PM_0 \times e^{rT} \\ x \times PM_0 \times S_T + (1 - x) \times PM_0 \times e^{rT} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4) = \begin{cases} PM_0 \times e^{r_g \times T} & PM_0 \times e^{r_g \times T} - (1 - x) \times PM_0 \times e^{rT} > x \times PM_0 \times S_T \\ x \times PM_0 \times S_T + (1 - x) \times PM_0 \times e^{rT} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où } K = PM_0 \times e^{r_g \times T} - (1 - x) \times PM_0 \times e^{rT}$$

$$S'_T = x \times PM_0 \times S_T$$

$$\Rightarrow (4) = \begin{cases} PM_0 \times e^{r_g \times T} & K > S'_T \\ BE_T & K < S'_T \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4) = BE_T + (K - S'_T)^+$$