CHƯƠNG III: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Nhóm thuyết trình số 8: Phạm Nhật Quang
Hoàng Minh Đức

Giảng viên hướng dẫn:
Hà Thị Ngọc Yến

BỐ CỤC BÀI THUYẾT TRÌNH

- Cơ bản về hệ phương trình tuyến tính
- Phương pháp Gauss và ví dụ giải hệ phương trình
- Thuật toán và ví dụ

1. CƠ BẢN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Đây là một phương trình đại số tuyến tính gồm n ẩn và m phương trình

Trong phạm vi thuyết trình hôm nay chúng tôi sẽ đề cập đến các nghiệm x_n và hệ số a_{ij} là số thực

DẠNG MA TRẬN CỦA HỆ:

- Có dạng AX=B, trong đó:

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$
- Khi $m = n$ thì A là ma trận vuông, khi đó nếu định thức của ma trận $\det A \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất theo công thức Crame: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$; $j = \overline{1n}$

Nhược điểm: Khối lượng tính toán lớn, chỉ giải được khi $m = n$, $\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ Cần một phương pháp khác tối ưu hơn

2. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Ý tưởng phương pháp:

Đưa ma trận A về dạng bậc thang, biểu diễn các nghiệm theo nghiệm đã biểu diễn trước đó

Ngoài ra có thể sử dụng để tìm hạng của một ma trận hay để tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông khả nghịch.

Thực hiện theo 2 quá trình thuận nghịch:

QUÁ TRÌNH THUẬN

- $$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

Đưa hệ phương trình về dạng có ma trận bậc thang

QUÁ TRÌNH NGHỊCH

- Từ hệ phương trình trên ta giải được $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ bằng phép thế dần, và kết quả cho ta nghiệm của hệ:
- Ví dụ:

$$x_n = t$$

$$x_{n-1} = k_1 t$$

$$x_{n-2} = k_2 t + C$$

....

ƯU ĐIỂM

Có thể sử dụng giải hệ với số phương trình và ẩn không cố định.

Có thể giải cả phương trình có định thức $= 0$

Khối lượng phép tính nhỏ với hệ n ẩn n phương trình:

$N = \frac{n}{3}(n^2 + 3n - 1)$ số phép nhân (chia)

$C = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n - 5)$ số phép cộng (trừ)

NHƯỢC ĐIỂM

Nhược điểm của phương pháp Gauss là khi giải nghiệm nếu ta phải chia cho $a_{ii}^{(k)} \approx 0$ thì nghiệm sẽ có sai số lớn.

VÍ DỤ:

Tạo ra ma trận bổ sung $\overline{A}$

Ví dụ 1:

$$\begin{cases} -2x + 3y + 3z = -9 \\ 3x - 4y + z = 5 \\ -5x + 7y + 2z = -14 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 3 & -9 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ -5 & 7 & 2 & -14 \end{array}\right]$$

Biến đổi trên hàng để đưa về ma trận bậc thang $\overline{A}'$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = -15t - 21 \\ y = -11t - 17 \\ z = t \end{cases}$$

VÍ DỤ:

Tạo ra ma trận bổ sung $\overline{A}$

Ví dụ 2:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - y - 2z = 4 \\ 5x + y - z = 10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right]$$

Biến đổi trên hàng để đưa về ma trận bậc thang $\overline{A}'$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

THUẬT TOÁN:

- Input: Ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính n ẩn n phương trình

Output: Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (hoặc hệ phương trình không có nghiệm duy nhất)

Phần 1: Đưa về ma trận bậc thang

Với i=1:

B1: Chọn số p nhỏ nhất thỏa mãn $i \leq p \leq n$ và $a_{pi} \neq 0$, nếu không có p thỏa mãn thì tăng i lên 1 đơn vị

B2: Nếu $p \neq i$ thì đổi chỗ hàng p và hàng i

THUẬT TOÁN:

B3: Với $j = i + 1, i + 2, \ldots.n$

$$\text{Xét } m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ thực hiện phép gán } (E_j - E_i . M_{ij}) \rightarrow E_j$$

B4: Kết thúc vòng lặp và tăng i lên 1 đơn vị, nếu i nhỏ hơn n và lặp lại bước 1

THUẬT TOÁN:

- Phần 2: Kiểm tra các hàng

B5: Nếu $a_{nn} \neq 0$:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

B6: Với mỗi i= n – 1, n – 2,… 1 thì:

$$x_i = \frac{a_{n,n+1} - \sum_{j=n+1}^{n} a_{ij}.x_j}{a_{ii}}$$

Xuất output: nghiệm của hệ phương trình $(x_1, \ldots x_n)$

THUẬT TOÁN:

- B8: Nếu $\begin{cases} a_{nj} = 0 \ \forall j = \overline{1, n} \\ a_{n,n+1} \neq 0 \end{cases}$

  Xuất output: “hệ phương trình vô nghiệm”

  Xét hàng E_n

  B9: Nếu $a_{nj} = 0 \ \ \forall j = \overline{1, n+1} \rightarrow$ Xóa hàng E_n

  gán $n = n - 1$ và thực hiện B9 đến khi các hàng có ít nhất 1 phần tử $\neq 0$.

THUẬT TOÁN:

- Phần 3: Trường hợp hệ có vô số nghiệm

B10: Với $i = 1$, $j = i$, kiểm tra $i \leq m$. Nếu sai chuyển tới bước cuối

B11: Với hàng i chọn số j nhỏ nhất sao cho $a_{ij} \neq 0$, lưu j vào mảng a_1[i]=j và tiếp tục tăng j thêm 1 đơn vị.

B12: Lưu vị trí j ứng với hàng i vào mảng a[i]=j

B13: Tăng ij thêm 1 đơn vị.

THANKS FOR WATCHING!