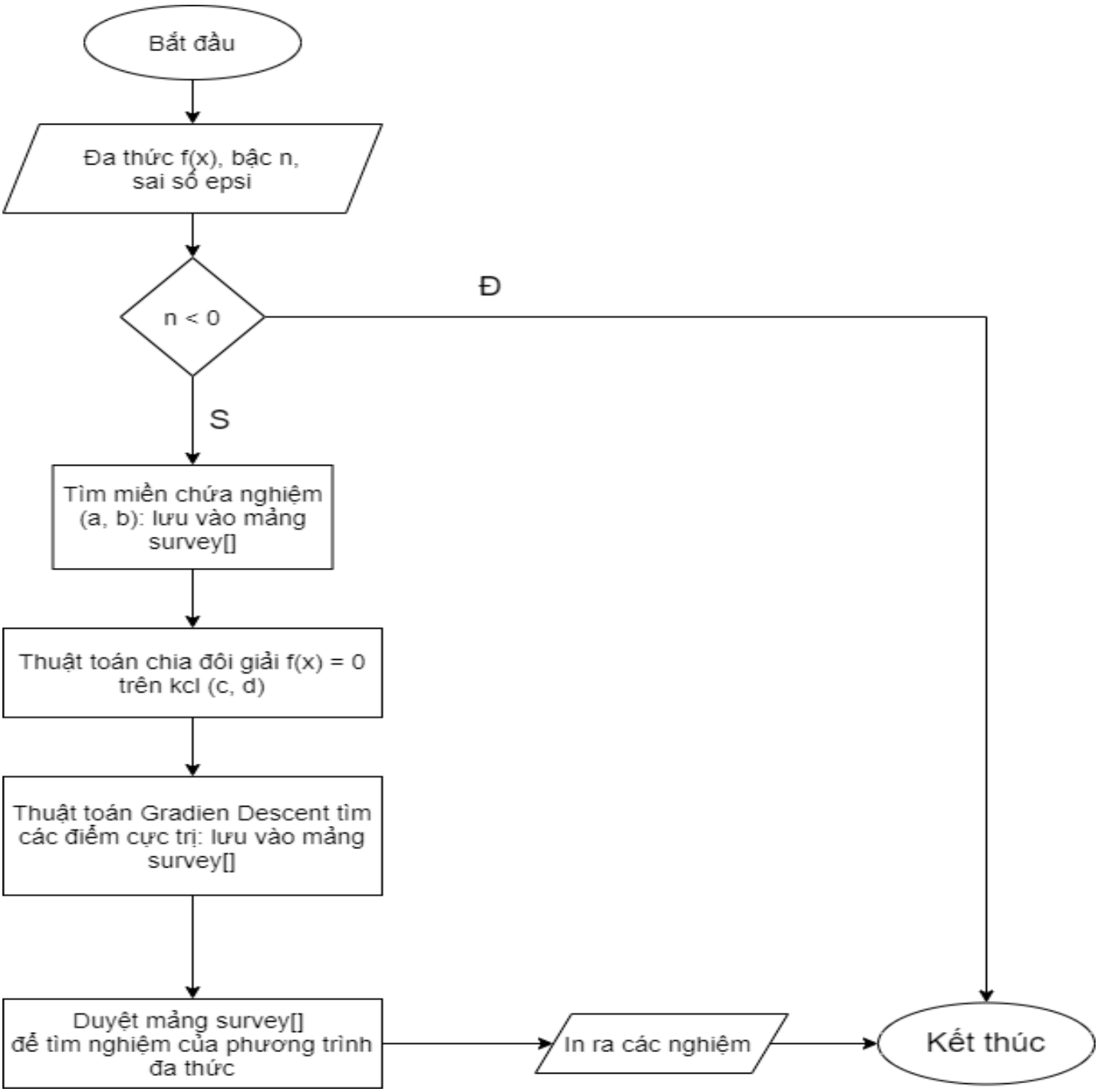
I. Thuật toán tổng thể

1. Thuật toán tổng thể chương trình

Input: bậc đa thức n, đa thức f(x), sai số epsi

Output: các nghiệm của phương trình đa thức f(x) = 0



II. Thuật toán chi tiết

1. Hàm nhập đa thức bậc n: f(x)

input: n
output: mảng a[n] là mảng chứa các hệ số của đa thức f(x)
Function nhap_DT:
    for i = 0 to n:
        nhập a[i]

2. Hàm tính giá trị f(x)

input: x, n, a[n]
output: giá trị của f(x) tại x
Function f:
    sum = 0
    for i = 0 to n:
        sum = sum + a[i] * x^{n-i}
    return sum

3. Hàm tính giá trị đạo hàm của f(x)

input: x, n, a[n]
output: giá trị của đạo hàm f(x) tại x là df(x)
Function df:
    sum = 0
    for i = 0 to n - 1:
        sum = sum + a[i] * (n – i) * x^{n-1-i}
    return sum

4. Hàm tìm miền chứa nghiệm của đa thức f(x)

input:n, a[n], địa chỉ low, up

```
output: miền chứa nghiệm (low, up)
Function domain_solution:
        low = 1, up = -1
        for i = 0 to n:
            temp[n] = a[n] //mảng tạm thời temp[n] lưu trữ các hệ số
        for j = 1 to 2:
            max = 0
            k = 0
            if tem[0] < 0:
                for i = 0 to n:
                    temp[i] = - temp[i]
            for i = 1 to n:
                if temp[i] < 0:
                    k = i
                    thoát khỏi vòng lặp
            for i = 1 to n:
                if temp[i] < 0:
                    if |temp[i]| > max:
                        max = |temp[i]|
            if max = 0:
                if up = -1:
                    up = 0
                else:
                    low = 0
            else:
                if up = -1:
                    up = 1 + (max / temp[0])^(1/k)
                else:
                    low = -(1 + (max / temp[0])^(1/k) )
            for i = 0 to n:
                if n chia dư i = 1:
```

temp[n – i] = - temp[n – i]

5. Thuật toán chia đôi giải phương trình f(x) = 0 trong kcl (c, d)

input: n, a[n], c, d, epsi
output: nghiệm gần đúng x
function bisection:
    do:
        mid = (c + d) / 2
        if f(a, n, mid) = 0:
            return mid
        if f(a, n, mid) * f(a, n ,c) > 0:
            c = mid
        else:
            d = mid
        denta = |d – c|
    while (denta > epsi)
    return mid

6. Giải phương trình đa thức f(x) = 0

input: n, a[n], epsi
output: các nghiệm của phương trình đa thức f(x) = 0
Function solve:
    eta = e^{-7}
    k = 0
    survey[n] //Mảng để chứa 2 các cực trị và miền chứa nghiệm
    if n = 0:
        if a[0] = 0:
            print “phương trình đa thức vô số nghiệm”
        else:

```
            print “phương trình đa thức vô nghiệm”
if n = 1:
      print “Nghiệm duy nhất là: -a[1]/a[0]
domain_solution(a, n, low, up)
if low = up:
     if f(a, n, low) = 0:
           print “Nghiệm là:” low
     else:
           print “Phương trình vô nghiệm”
else:
//Thuật toán Gradient Descent tìm cực trị
x1 = low
x0 = x1
k = 1
while (x0 < up):
     if df(f, x0) > 0:
           sign = 1
     else:
           sign = -1
     eta = 10^-7
     x1 = x0 + sign * eta *df(f, x0)
     while (|df(f, x1)| > epsi):
           if df(f, x0) * df(f, x1) > 0:
                 while eta < 0.008:
                       eta = eta * 2
                       x1 = x0 + sign * eta * df(f, x0)
                       if df(f, x1) * df(f, x0) < 0
                             eta = eta / 2
                             thoát vòng lặp while
           else:
                 while eta > 0:
```

```
                    eta = eta / 2
                    x1 = x0 + sign * eta *df(f, x0)
                    if df(f, x1) * df(f, x0) > 0:
                        thoát vòng lặp while

        x1 = x0 + sign * eta * df(f, x0)
        x0 = x1
        eta = 10^-7
Thêm x1 vào mảng survey: survey[k] = x1
x1 = x1 + 0.001
k = k + 1
Thêm low và up vào mảng survey[]: survey[0] = low
                                   survey[k] = up

 // Bắt đầu tìm nghiệm của phương trình đa thức
for i = 0 to k – 1:
    value1 = f(a, n, survey[i])
    value2 = f(a, n, survey[i + 1])
    if |value1| <= epsi:
        print "nghiệm là: " survey[i]
    if |value2| <= epsi:
        print "nghiệm là: " survey[i+1]
    else:
        if value1 * value2 < 0:
            print "nghiệm là: "
            bisection(a, n, survey[i], survey[i+1], epsi)
```

III. Ưu và nhược điểm của phương pháp giải phương trình đa thức theo thuật toán chia đôi + Gradient Descen với phương pháp chia nhỏ miền chứa nghiệm rồi tính giá trị tại từng điểm.

1. Ưu điểm
   - Độ phức tạp thuật toán thấp hơn
   - Tốc độ tìm ra các nghiệm của phương trình đa thức nhanh hơn
   - Thuật toán GD có sử dụng eta động giúp việc tìm ra các cực trị nhanh hơn rất nhiều và hiệu quả hơn dùng eta tĩnh
2. Nhược điểm
   - Khó cài đặt thuật toán trên máy tính hơn so với phương pháp chia nhỏ miền nghiệm
   - Một số đa thức với độ dốc đồ thì quá lớn thì tìm rất lâu và có thể không tìm ra được

IV. Tóm tắt phương pháp

1. Chú ý: phương pháp Gradient Descent với eta động tìm các cực trị trong khoảng đóng [a, b]
   - Dãy lặp để tìm cực trị: x1 = x0 + sign * eta *f'(x0).
     Với giá trị x0 là điểm xuất phát bất kì: x0 = a
     + sign = 1 nếu đi tìm cực đại (f'(x) > 0)
     + sign = - 1 nếu đi tìm cực tiểu (f'(x) < 0)
   - Thực hiện lặp để tìm ra cực trị tiếp theo và tính eta động bằng cách:

- Nếu mà f’(x1) * f’(x0) > 0 và f’(x1) < 0.008 thì ta sẽ tính lại giá trị eta = eta * 2 và kết thúc vòng lặp khi f’(x1) * f’(x0) < 0
- Nếu mà f’(x1) * f’(x0) < 0 => ta sẽ tính lại giá trị eta = eta / 2 và kết thúc vòng lặp khi f’(x1) * f’(x0) > 0

- Lưu toàn bộ giá trị cực trị và 2 đầu mút của miền chứa nghiệm vào mảng survey[]

2. Cài đặt được thuật toán tìm miền chứa nghiệm

+ upper – bround = $1 + \left(\frac{max}{a[0]}\right)^{1/k}$, với max là giá trị âm có trị tuyệt đối lớn nhất, k là chỉ số của phần tử âm đầu tiên.

+ lower – bround = $-\left[1 + \left(\frac{max}{a[0]}\right)^{1/k}\right]$, tương tự như khi đi tìm upper_bround, nhưng ta thay giá trị của x = - x.

3. Cài đặt thuật toán chia đôi

4. Duyệt mảng survey[] để tìm nghiệm của đa thức

- Duyệt từng giá trị trong mảng survey[]:
  - Nếu mà f(survey[i]) = 0 => giá trị đó chính là nghiệm của đa thức
  - Nếu mà f(survey[i]) * f(survey[i+1]) < 0 => 2 giá trị đó thỏa mãn khoảng cách li nghiệm và ta sẽ dùng thuật toán chia đôi để tìm nghiệm của f(x) = 0