TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

----o0o---

BÁO CÁO

GIẢI TÍCH SỐ

***ĐỀ TÀI*:**

**TÌM GIÁ TRỊ RIÊNG TRỘI &
GIÁ TRỊ RIÊNG TRỘI TIẾP THEO**

GV hướng dẫn: TS. HÀ THỊ NGOC YẾN

Nhóm sinh viên thực hiện:

Họ & tên	MSV	Mã lớp
Nguyễn Tuấn Anh	20185431	125002
Nguyễn Ngọc Diệp	20185440	125002
Nguyễn Minh Thu	20185482	125002
Thái Văn Trường	20174307	125002
Phùng Văn Tuyên	20173601	125002

HÀ NỘI, 4/2021

LỜI NÓI ĐẦU

Vecto riêng và giá trị riêng có vai trò nổi bật trong việc phân tích các biến đổi tuyến tính. Trong tiếng Anh, giá trị riêng và vecto riêng tương ứng được gọi là ***eigenvalue*** và ***eigenvector***. Ban đầu được sử dụng để nghiên cứu các trục chính của sự quay của các vật rắn, giá trị riêng và vecto riêng ngày càng có nhiều ứng dụng, ví dụ: trong phân tích ổn định, phân tích rung động, lí thuyết orbital nguyên tử, nghiên cứu băng hà trong địa chất, hệ số lây nhiễm cơ bản, và công nghệ nhận diện khuôn mặt.

Với phương pháp Danilepski và phương pháp A.N.Cơrưlôp là những phương pháp tìm trị riêng đúng (nếu nghiệm của phương trình đặc trưng được giải đúng). Với những phương trình đặc trưng giải nghiệm gần đúng thì ta chỉ được giá trị riêng gần đúng. Sau khi tìm hiểu và nghiên cứu nhóm chúng em xin trình bày phương pháp lũy thừa để tìm trị riêng gần đúng. Bài báo cáo dưới đây của bọn em gồm hai phần: Lí thuyết và Thuật toán áp dụng phương pháp lũy thừa để tìm giá trị riêng trội và phương pháp xuống thang để tìm các giá trị riêng tiếp theo.

Do khả năng viết thuật toán và chương trình của nhóm em còn kém nên không thể tạo ra được một chương trình tìm giá trị riêng trội và giá trị riêng trội tiếp theo một cách hoàn chỉnh, nên mong cô góp ý cho bọn em ạ.

Chúng em xin cảm ơn cô Hà Thị Ngọc Yến đã có những hướng dẫn, góp ý trong quá trình tiến hành bài nghiên cứu này.

Nhóm sinh viên thực hiện

MỤC LỤC:

I. Nội dung lí thuyết

1. Trị riêng, vectơ riêng:

1.1 <u>Định nghĩa</u>:

Cho A là ma trận vuông cấp n trên trường số K (K= ℝ ; ℂ). Số $\lambda \in K$ được gọi là giá trị riêng (gọi tắt là trị riêng – kí hiệu GTR) của ma trận A, nếu tồn tại một vectơ $v \neq 0$ sao cho: $Av = \lambda v$

Khi đó vectơ v được gọi là vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ

1.2 <u>Tính chất</u>:

- Giá trị riêng λ chính là nghiệm của phương trình det(A- λI) = 0 (được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận A).
- Một giá trị riêng có thể có nhiều vectơ riêng.
- Mỗi vectơ riêng chỉ ứng với một giá trị riêng duy nhất.
- Ma trận A là nghiệm của đa thức đặc trưng của chính nó (trong trường hợp này đa thức đặc trưng được coi là đa thức ma trận, nghĩa là biến số của nó không phải là biến số thực mà là biến ma trận)
- Nếu $\lambda = 0$ là giá trị riêng của ma trận A thì A không khả nghịch. Ngược lại, nếu mọi giá trị riêng của A đều khác không thì A khả nghịch.
- Nếu λ là giá trị riêng của ma trận A thì λ^k là giá trị riêng của ma trận A^k

1.3 Một số cách tìm giá trị riêng và vector riêng

-Giải phương trình $\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}) = 0$ tìm các giá trị riêng. Ứng với mỗi giá trị riêng λ ta giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})\mathrm{v} = 0$.

-Sử dụng phương pháp Danhilepski đưa ma trận A về dạng ma trận có phương trình đặc trưng theo công thức để giải và tìm giá trị riêng.

-Sử dụng phương pháp luỹ thừa để tính gần đúng giá trị riêng trội và vector riêng tương ứng.

2. Giá trị riêng trội

- Xét ma trận A= $[a_{ij}]$ là ma trận đơn giản, nó là ma trận mà các phần tử a_{ij} (i, j = $\overline{1,n}$) đều là thực và mỗi trị riêng bội k có đủ k vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Như vậy, giả sử ma trận A cấp n có đủ n trị riêng thực hoặc phức (đơn hoặc bội) được đánh số theo module giảm dần:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ \dots\dots\dots\dots\dots \geq |\lambda_n|$$

Có các vecto riêng ứng với các giá trị riêng: $Av_i = \lambda_i v_i$

Khi đó: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \Rightarrow \lambda_1$ là giá trị riêng trội

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \text{ là các giá trị riêng trội}$$

3. Phương pháp lũy thừa tìm GTR trội

❖ Sử dụng tính chất: $|q| < 1 \Rightarrow q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- Xây dựng công thức

- Xét ma trận A[a_{ij}] là ma trận vuông cấp n, có các phần tử a_{ij} với i, j = $\overline{1,n}$ đều là thực và mỗi trị riêng bội k có đủ k vectơ riêng độc lập tuyến tính.
- Như vậy, giả sử ma trận A cấp n có đủ n trị riêng thực hoặc phức (đơn hoặc bội) được đánh số theo module giảm dần:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ \dots\dots\dots\dots\dots \geq |\lambda_n|$$

- Các vecto riêng tương ứng lần lượt là: $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ là các vecto độc lập tuyến tính
- Giả sử: có vecto X là tổ hợp tuyến tính các vecto riêng

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad \text{với } a_i - \text{Const} \qquad \textbf{(I)}$$

Ta chọn vectơ X nào có $a_i \neq 0$ và tính dãy:

$$AX = A\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i A v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i$$

$$A^2X = A\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^2{}_i v_i \qquad (\text{Vì } Av_i = \lambda_i v_i\ )$$

………………………………

$$A^kX = A(A^{k-1}X) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k v_i$$

$$\Rightarrow \frac{A^kX}{\lambda_1^k} = a_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} v_i \qquad \textbf{(II)}$$

3.1. **Trường hợp 1**: trị riêng trội $|\boldsymbol{\lambda_1}| > |\boldsymbol{\lambda_2}|$

Giả sử trị riêng của ma trận A thỏa mãn điều kiện:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ \dots\dots\dots\dots\dots \geq |\lambda_n| \qquad \textbf{(*)}$$

- Từ (2) tính:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^kX}{\lambda_1^k} = \lim_{k\to\infty}[a_1v_1 + \sum_{s=2}^{n} a_k \frac{\lambda_s^k}{\lambda_1^k} v_k] = a_1 v_1$$

(Do giả thiết **(*)** nên khi k→ ∞ thì $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$ với i= $\overline{2,n}$)

Hay khi k đủ lớn thì: $\frac{A^kX}{\lambda_1^k} \approx a_1v_1 \Rightarrow \frac{A^{k+1}X}{\lambda_1^k} = A(\frac{A^kX}{\lambda_1^k}) \approx \lambda_1(a_1v_1)$

Do đó: $A(A^kX) \approx \lambda_1(A^kX)$ $\Rightarrow$ vecto riêng của λ_1 là (A^kX)

Và: $\lambda_1 \approx \frac{(A^{k+1}X)_j}{(A^kX)_j}$ với $j = \overline{1,n}$ **(1)**

<u>Ví dụ 1:</u> Tìm trị riêng trội của ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Giải:

Ta chọn vector riêng X bất kì, ở đây lấy $X = (1,1,1)^t$. Ta tính được AX, A^2X,... được viết thành bảng sau:

A			X	AX	A^2X	A^3X	A^4X	A^5X	A^6X
2	3	2	1	7	78	900	10589	125128	1480345
4	3	5	1	12	134	1569	18512	218927	2590563
3	2	9	1	14	171	2041	24207	286654	3393124

Ta thấy:

$$\frac{(A^6X)_j}{(A^5X)_j} = \begin{cases} \frac{1480345}{125128} \approx 11.8306 \ (j = 1) \\ \frac{2590563}{218927} \approx 11.8330 \ (j = 2) \\ \frac{3393124}{286654} \approx 11.8370 \ (j = 3) \end{cases}$$

Do đó có thể lấy $\lambda_1 \approx 11.83$ và vector riêng là vector A^6X. Tuy vậy các vector riêng khác nhau một hằng số nhân, nên ta chọn vector riêng $X_1 = (1; 1.750; 2.991)^t$.

Nhận xét: Vậy với giả thiết **(*)**, ta chọn vectơ X bất kì có $a_1 \neq 0$, tính dãy $AX,\ A^2X, \dots, A^{k+1}X$, tính cho đến khi tỉ số **(1)** xấp xỉ bằng nhau, k đủ lớn, thì tìm được trị riêng trội là λ_1 của ma trận A. Nếu các tỉ số này không tương đương nhau thì ta chuyển sang trường hợp 2

3.2. Trường hợp 2: $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$ và $\lambda_1 = -\lambda_2$

Giả sử: $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ và $\lambda_1 = -\lambda_2$

Ta có:

$$AX = a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i\lambda_i v_i$$

$$\Rightarrow AX = \lambda_1(a_1v_1 - a_2v_2) + \sum_{i=3}^{n} a_i\lambda_i v_i$$

$$\Rightarrow A^2X = \lambda_1^2(a_1v_1 + a_2v_2) + \sum_{i=3}^{n} a_i\lambda_i^2 v$$

$$\Rightarrow A^{2k}X = \lambda_1^{2k}(a_1v_1 + a_2v_2) + \sum_{i=3}^{n} a_i\lambda_i^{2k} v_i$$

$$\Rightarrow \frac{A^{2k}X}{\lambda_1^{2k}} = a_1v_1 + a_2v_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i \frac{\lambda_i^{2k}}{\lambda_1^{2k}} v_i$$

Ta có: $\lim_{k\to\infty}\frac{A^{2k}X}{\lambda_1^{2k}} = \lim_{x\to\infty}[a_1v_1 + a_2v_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i\frac{\lambda_i^{2k}}{\lambda_1^{2k}}v_i] = a_1v_1 + a_2v_2$

Vì: khi $k \to \infty$ và $\lambda_i < \lambda_1$ (i= $\overline{3,n}$) $\Rightarrow \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k} \to 0$

$$\frac{A^{2k}X}{\lambda_1^{2k}} \approx a_1v_1 + a_2v_2 \quad \text{(khi k đủ lớn)}$$

$$A^2\left(\frac{A^{2k}X}{\lambda_1^{2k}}\right) \approx \lambda_1^2\left(\frac{A^{2k}X}{\lambda_1^{2k}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\left(A^{2k+2}X\right)_j}{(A^{2k}X)_j} \approx \lambda_1^2 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad \textbf{(2)}$$

Nhận xét:

Trong quá trình tính các bước lũy thừa liền nhau các tỷ số các thành phần không có xu hướng gần nhau, nhưng ở các bước cùng chẵn hoặc cùng lẻ các tỉ số có xu hướng trùng nhau, tỉ số đó được xem là xấp xỉ của $\lambda_1^2 \Rightarrow \pm\lambda_1$

* Để tìm vecto riêng tương ứng:

Từ: $A^{2n-1}X \approx \lambda_1^{2n-1}(a_1v_1 - a_2v_2)$

$A^{2n}X \approx \lambda_1^{2n}(a_1v_1 + a_2v_2)$

$\Rightarrow A^{2k}X + \lambda_1A^{2k-1}X \approx \lambda_1^{2k}2a_1v_1$ và $A^{2k}X - \lambda_1A^{2k-1}X \approx \lambda_1^{2k}2a_2v_2$ (cộng trừ 2 vế)

Hay $A\left(A^{2k}X + \lambda_1A^{2k-1}X\right) \approx \lambda_1^{2k}2a_1Av_1 = \lambda_1^{2k}2a_1\lambda_1v_1 = \lambda_1\left(\lambda_1^{2k}2a_1v_1\right) \approx \lambda_1(A^{2k}X + \lambda_1A^{2k-1}X)$

Vậy với λ_1 thì vecto riêng tương ứng là:

$$v_1 \approx A^{2k}X + \lambda_1A^{2k-1}X$$

Còn với $\lambda_2 = -\lambda_1$ thì vecto riêng tương ứng là:

$$v_2 \approx A^{2k}X - \lambda_1A^{2k-1}X$$

3.3. Trường hợp 3: $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$ *và* $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

Giả sử: $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ và $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

Ta có:

$$\frac{A^kX}{\lambda_1^k} = a_1v_1 + a_2\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}v_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i\frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k}v_i\,; \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

Ta tính: $\lim_{k\to\infty}[\sum_{i=3}^{n} a_i\frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k}v_i] = 0$

$$\Rightarrow \frac{A^kX}{\lambda_1^k} \approx a_1v_1 + a_2\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}v_2 \Rightarrow A^kX = a_1\lambda_1^kv_1 + a_2\lambda_2^kv_2$$

$$\Rightarrow A^{n+2}X - (\lambda_1 + \lambda_2)A^{n+1}X + \lambda_1\lambda_2A^nX = 0$$

Đặt: $\lambda_1 + \lambda_2 = p\,; \lambda_1\lambda_2 = q$; (1; -p; q) $\neq (0;0;0)$

$\Rightarrow A^{n+2}X - pA^{n+1}X + qA^nX = 0$

- λ_1, λ_2 là 2 nghiệm của phương trình: $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$
- Viết dưới dạng tọa độ : $(A^{n+2}X)_i - p(A^{n+1}X)_i + q(A^nX)_i = 0 \quad i = \overline{1,n}$

- Lấy hai tọa độ bất kì, chẳng hạn i= r , $i = s$, $(r \neq s)$ ta được hai phương trình và ghép với phương trình (19) được hệ 3 phương trình:

$$\begin{cases} \lambda^2 - p\lambda + q = 0 \\ (A^{n+2}X)_r - p(A^{n+1}X)_r + q(A^nX)_r = 0 \\ (A^{n+2}X)_s - p(A^{n+1}X)_s + q(A^nX)_s = 0 \text{ với } 3 \text{ ẩn là } 1, p, q \end{cases}$$

- Hệ trên là hệ thuần nhất nên để có nghiệm khác 0 thì định thức phải bằng 0

$$\Rightarrow Det \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ (A^{n+2}X)_r & (A^{n+1}X)_r & (A^nX)_r \\ (A^{n+2}X)_s & (A^{n+1}X)_s & (A^nX)_s \end{vmatrix} = 0$$

Từ đó ta tính được $\lambda_{1;2}$

- Để tìm vecto riêng, ta xét:

$$A^nX \approx \lambda_1^n a_1 v_1 + \lambda_2^n a_2 v_2$$

$$=> \begin{cases} A^{n+1}X - \lambda_1 A^nX \approx a_2\lambda_2^n(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 \\ A^{n+1}X - \lambda_2 A^nX \approx a_1\lambda_1^n(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} A(A^{n+1}X - \lambda_1 A^nX) \approx \lambda_2(A^{n+1}X - \lambda_1 A^nX) \\ A(A^{n+1}X - \lambda_2 A^nX) \approx \lambda_1(A^{n+1}X - \lambda_2 A^nX) \end{cases}$$

$\rightarrow$Vecto riêng ứng với λ_2 là$(A^{n+1}X - \lambda_1 A^nX)$

$\rightarrow$Vecto riêng ứng với λ_1 là $(A^{n+1}X - \lambda_2 A^nX)$

Ví dụ 2: Tính trị riêng và vector riêng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải:

Chọn X = (-1,1,0,0)^t. Ta tính A^mX thành bảng sau:

X	-1	1	0	0
AX	3	2	-1	1
A^2X	-4	-30	-1	-2
A^3X	-25	182	37	5
A^4X	274	-814	-303	-12
A^5X	-1677	2770	1747	29
A^6X	-7900	-5634	-8069	-70
A^7X	-29573	-10922	29981	169
A^8X	78374	201490	-79359	-408
A^9X	-35205	-1396942	37403	985

Qua bảng này, ta thấy rằng các tỉ số (8) và (12) biến đổi khá linh tinh, điều đó chứng tỏ rằng ma trận A có các trị riêng trội là phức liên hợp λ_1 và $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Chúng là nghiệm của phương trình dạng (19), cụ thể là:

$$\begin{vmatrix} 1 & -29573 & -10922 \\ Z & 78374 & 201490 \\ Z^2 & -35205 & -1396942 \end{vmatrix} = 0$$

Hay $Z^2 + 8{,}02Z + 20{,}05 = 0$

Ta tính ra: $Z = -4{,}01 \pm 1{,}99i$

Vậy $\lambda_1 = -4{,}01 + 1{,}99i\,; \lambda_2 = -4.01 - 1{,}99i$

Sau khi đã tìm ra trị riêng λ_1 và λ_2, ta có thể tìm các vector riêng tương ứng.

Dựa vào (21), ta có

$$A^{m+1}X - \lambda_1 A^m X \approx C_2\lambda_2^m(\lambda_2 - \lambda_1)X_1$$
$$A^{m+1}X - \lambda_2 A^m X \approx C_1\lambda_1^m(\lambda_1 - \lambda_2)X_2$$

Do đó

$$A(A^{m+1}X - \lambda_1 A^m X) \approx \lambda_2(A^{m+1}X - \lambda_1 A^m X)$$
$$A(A^{m+1}X - \lambda_2 A^m X) \approx \lambda_1(A^{m+1}X - \lambda_2 A^m X)$$

Vậy $A^{m+1}X - (-4{,}01 + 1{,}99i)A^m X$ *là vector riêng ứng với λ_2*

$A^{m+1}X - (-4{,}01 - 1{,}99i)A^m X$ *là vector riêng ứng với λ_1*

4. Phương pháp xuống thang tìm GTR trội tiếp theo

❖ Mối quan hệ giữa trị riêng của hai ma trận A và A^T:

Giả sử λ là trị riêng của ma trận A^T. Khi đó: $\det(A^T - \lambda I) = 0$

Ta có : $\det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I^T)$ (do $I^T = I$)

$= \det((A - \lambda I)^T)$

$= \det(A - \lambda I)$ (do $\det(A) = \det(A^T)$)

=> 2 ma trận A và A^T có cùng trị riêng.

Tiếp theo, ta đi tìm mối quan hệ giữa các vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau của ma trận A và A^T.

✓ Đặt vấn đề: Giả sử v_1 là vectơ riêng của ma trận A tương ứng với giá trị riêng λ_1 và W_1 là vectơ riêng của ma trận A^T tương ứng với giá trị riêng λ_1.

Từ định nghĩa $Av_1 = \lambda_1 v_1$ ta viết: $(A - \lambda E)v_1 = 0$

- Ta tạo ma trận A_1 dạng: $A_1 = A - \frac{\lambda_1}{W_1^T v_1} v_1 W_1^T$ **(**)**

Chú ý là $v_1 W_1^T$ là một ma trận còn $W_1^T v_1$ là một con số. Khi nhân hai vế của biểu thức **(**)** với v_1 ta có:

$$A_1 v_1 = Av_1 - \frac{\lambda_1}{W_1^T v_1} v_1 W_1^T v_1$$

$= Av_1 - \lambda_1 v_1.\frac{W_1^T v_1}{W_1^T v_1}$

$= Av_1 - \lambda_1 v_1 = 0$

=> A_1 chấp nhận giá trị riêng bằng không.

Nếu v_2 là vec tơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ_2,thì khi nhân (**) với v_2 ta có:

$A_1 v_2 = Av_2 - \frac{\lambda_1}{W_1^T v_1} v_1 W_1^T v_2$

$= Av_2 - \lambda_1 v_1.\frac{W_1^T v_2}{W_1^T v_1}$ **(***)**

Theo định nghĩa vì W_1 là vectơ riêng của A^T ⇔ $\lambda_1 W_1 = A^T W_1$

Chuyển vị ta nhận được: $(A^T W_1)^T = \lambda_1 W_1^T$

Áp dụng tính chất: $(Av)^T = v^T A^T$ và $(A^T)^T = A$

=> $W_1^T A = \lambda_1 W_1^T$

Nhân cả 2 vế với v_2=> $W_1^T A v_2 = \lambda_1 W_1^T v_2$ mà $Av_2 = \lambda_2 v_2$

Nên: $W_1^T \lambda_2 v_2 = W_1^T \lambda_1 v_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) W_1^T v_2 = 0$

Khi $\lambda_1 \neq \lambda_2$ thì: $W_1^T v_2 = 0$ thay vào (***) ta có: $A_1 v_2 = Av_2 = Av_2$

Nhận xét:

Như vậy λ_2 là giá trị riêng lớn nhất của ma trận A_1 và như vậy có thể áp dụng thuật toán này để tìm các giá trị riêng còn lại của ma trận. Các bước tính toán như sau :

- Khi đã có $\lambda 1$ và v1 ta tìm $W1$ là vectơ riêng của AT ứng với giá trị riêng $\lambda 1$ (ví dụ tìm $W1$ bằng cách giải phương trình $(A^T - \lambda_1 E)W1 = 0$). Từ đó tính ma trận $A1$ theo công thức

-Tìm giá trị riêng và vec tơ riêng của A_1 bằng cách lặp luỹ thừa và cứ thế tiếp tục và xuống thang (n-1) lần ta tìm đủ n giá trị riêng của ma trận A.

II. Thuật toán và hệ thống ví dụ

1. Thuật toán

1.1. Thuật toán tổng quan:

a. Nhập ma trận vuông cấp n

b. Lặp n lần:

i. Khởi tạo vector $X=(1,1,..1)^t$

ii. Tính các vector A^mX và kiểm tra:

1. Nếu các vector kề nhau hội tụ, đánh dấu là trường hợp 1
2. Nếu các vector có bậc luỹ thừa cùng chẵn hoặc lẻ hội tụ, đánh dấu là trường hợp 3.
3. Nếu từ vector thứ 10 trở đi, 2 trường hợp trên không có dấu hiệu thoả mãn, đánh dấu là trường hợp 4.

iii. Xử lý các trường hợp:

iv. TH1&2: Đưa ra trị riêng trội và vector tương ứng. Tính ma trận mới để tìm trị riêng tiếp theo

v. TH3&4: Đưa ra các trị riêng trội và vector riêng tương ứng. Thông báo kết thúc chương trình.

1.2. Thuật toán chi tiết:

Trong chương trình, ta sẽ lưu các vector A^mX vào các cột của 1 mảng 2 chiều là mảng B. Ta có thể thay vì lưu toàn bộ các vector tính được thì chỉ lưu 1 số lượng vector nhất định vào các mảng 1 chiều. Thế nhưng nếu làm như vậy ta sẽ không thể truy cập tuỳ ý đến các vector A^mX.

Đối với phương pháp luỹ thừa, quan trọng nhất của thuật toán là điều kiện dừng vòng lặp tính toán vì việc tính toán chỉ gồm các phép nhân ma trận và các công thức có sẵn. Sau đây là thuật toán của hàm kiemtra() được dùng để xác định sai lệch giữa 2 vector được lưu trong mảng B:

a. Dữ liệu vào: mảng B, hàng h1, hàng h2, số n.

b. Biến $\mathrm{tam} \coloneqq |b[1,h1] - b[1,h2]|$

c. $\mathrm{For}\ i = 2 \to n$

i. $\text{Nếu } (|b[i,h1] - b[i,h2]|) > \mathrm{tam}$ thì

$\mathrm{tam} \coloneqq |b[i,h1] - b[i,h2]|$

d. $\mathrm{kiemtra} = \mathrm{tam}$

Sau mỗi lần tính thêm được 1 vector $A^m Y$, hàm kiemtra() sẽ được sử dụng như sau

e. Nếu $\mathrm{kiemtra}(b, m, m-1, n) \leq E$, thì $th = 1$, kết thúc việc tính toán
f. Nếu $\mathrm{kiemtra}(b, m, m-2, n) \leq E$, thì $th = 3$, kết thúc việc tính toán
g. Nếu $\mathrm{kiemtra}(b, m, m-1, n) - \mathrm{kiemtra}(b, m-1, m-2, n) > 0$ và $\mathrm{kiemtra}(b, m, m-2, n) - \mathrm{kiemtra}(b, m-1, m-3, n) > 0$ và $m > 10$ thì $th = 4$, kết thúc việc tính toán.

(Ở đây ta có thể dùng điều kiện đơn giản hơn rằng nếu không xảy ra th=1,2 và th=3 thì th=4 bởi nếu trị riêng không rơi vào 3 trường hợp đầu thì sẽ rơi và trường hợp phức)

Trong đó E là sai số mong muốn giữa các vector. Để đánh dấu trường hợp 4, ta phải xét hiệu của hàm kiemtra() với hàm kiemtra() của 2 vector trước. Nếu như dãy vector hội tụ thì hiệu của chúng phải nhỏ hơn 0, ngược lại tức là không hội tụ. Biến th dùng để lưu trường hợp để xử lý dãy vector.

h. Trường hợp 1 và 2:
    i. Tính thêm 1 vector $A^{m+1}X$. Tính được giá trị riêng trội bằng toạ độ lớn nhất của $A^{m+1}X$.
    ii. In ra vector riêng là $A^{m+1}X$
    iii. Tính ma trận A mới để tìm trị riêng tiếp theo.
i. Trường hợp 3:
    i. Tính thêm 2 vector $A^{m+1}X$ và $A^{m+2}X$.
    ii. Tìm toạ độ lớn nhất của $A^{m+2}X$ và $A^m X$
    iii. Tính được 2 trị riêng trái dấu là 2 căn của tỷ số giữa 2 toạ độ trên
    iv. Tính được 2 vector riêng tương ứng với các trị riêng theo công thức.
    v. Kết thúc chương trình.
k. Trường hợp 4:
    i. Tính thêm 2 vector $A^{m+1}X$ và $A^{m+2}X$.
    ii. Thiết lập và giải phương trình (8) để tìm được 2 trị riêng phức
    iii. Tính vector riêng theo công thức đã tìm được
    iv. Kết thúc chương trình.

2. Ví dụ:

2.1. Tìm giá trị riêng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Kết quả in ra màn hình:

```
3
2.00  3.00  2.00
4.00  3.00  5.00
3.00  2.00  9.00


day vector tinh duoc
  7.000000  78.000000 900.000000   0.437435   0.436512   0.436278   0.436218
 12.000000 134.000000 1569.000000   0.764737   0.763733   0.763474   0.763408
 14.000000 171.000000 2041.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000
gia tri rieng thu 1 la: 11.835782
vector rieng tuong ung la: 0.436218 0.763408 1.000000

day vector tinh duoc
  0.594968   1.671596   5.178123  -0.472765  -0.479571  -0.477611  -0.478169  -0.478010  -0.478055  -0.478042
  0.790794   0.418797   2.979949  -0.228918  -0.244764  -0.240201  -0.241500  -0.241129  -0.241235  -0.241205
 -0.683106  -3.983870 -10.410673   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000
gia tri rieng thu 2 la: 3.029450
vector rieng tuong ung la: -0.478042 -0.241205 1.000000

day vector tinh duoc
  0.910960   0.367925  -0.318768  -0.292982  -0.292983
  0.950234  -0.238980   0.206327   0.189637   0.189637
 -1.344119  -1.256749   1.088010   1.000000   1.000000
gia tri rieng thu 3 la: -0.864690
vector rieng tuong ung la: 1.000000 -0.647264 -3.413173

--------------------------------
Process exited after 0.02664 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Đây là trường hợp 1: thực, đơn bội 1.

Ma trận A có giá trị riêng trội $\lambda_1 = 11.835782$ và vecto riêng tương ứng X = $(0.436218;0.763408;1)^t$

2.2. Tìm trị riêng của ma trận:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

```
4
2.00  0.00  0.00  0.00
0.00  2.00  0.00  0.00
0.00  0.00  1.00  0.00
0.00  0.00  0.00  0.50


day vector tinh duoc
  2.000000   4.000000   8.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000
  2.000000   4.000000   8.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000
  1.000000   1.000000   1.000000   0.062500   0.031250   0.015625   0.007813   0.003906
  0.500000   0.250000   0.125000   0.003906   0.000977   0.000244   0.000061   0.000015
gia tri rieng thu 1 la: 2.000000
vector rieng tuong ung la: 1.000000 1.000000 0.000061 0.000000

day vector tinh duoc
 -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061
 -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061  -0.000061
  0.999878   0.999878   0.999878   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000
  0.500000   0.250000   0.125000   0.062508   0.031254   0.015627   0.007813   0.003907
gia tri rieng thu 2 la: 1.000000
vector rieng tuong ung la: -0.000061 -0.000061 1.000000 0.000061

day vector tinh duoc
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
 -0.000061  -0.000031  -0.000015  -0.000122  -0.000122
  0.499939   0.249969   0.124985   1.000000   1.000000
gia tri rieng thu 3 la: 0.500000
vector rieng tuong ung la: 0.000000 0.000000 -0.000122 1.000000
```

Ma trận B có giá trị riêng trội $\lambda_1 = 2$ và vecto riêng tương ứng là: X = (1;1;0.000061;0)^t

2.3. Tìm trị riêng ma trận

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
4
5.00  0.00  0.00  0.00
0.00  -5.00  0.00  0.00
0.00  0.00  -2.00  0.00
0.00  0.00  0.00  -1.00


day vector tinh duoc
  5.000000  25.000000 125.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000
 -5.000000  25.000000 -125.000000   1.000000  -1.000000   1.000000  -1.000000   1.000000  -1.000000   1.000000  -1.000000   1.000000
 -2.000000   4.000000  -8.000000   0.025600  -0.010240   0.004096  -0.001638   0.000655  -0.000262   0.000105  -0.000042   0.000017
 -1.000000   1.000000  -1.000000   0.001600  -0.000320   0.000064  -0.000013   0.000003  -0.000001   0.000000  -0.000000   0.000000

gia tri rieng thu 1 la: 5.000000 vector rieng tuong ung la: 50.000000 0.000000 -0.000101 0.000000
gia tri rieng thu 2 la: -5.000000 vector rieng tuong ung la: 0.000000 50.000000 0.000235 0.000000
gap gia tri rieng troi trai dau, chuong trinh se dung tai day
--------------------------------
Process exited after 0.02738 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Đây là trường hợp trị riêng trái dấu.

Ma trận C có 2 giá trị riêng trội là $\lambda_1 = 5 \rightarrow X_1 = (50; 0; -0.000101; 0)^t$

$\lambda_2 = -5 \rightarrow X_2 = (0; 50; 0.000235; 0)^t$

2.4. Tìm trị riêng ma trận

$$D=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
4
-2.00  1.00  1.00  1.00
-7.00  -5.00  -2.00  -1.00
0.00  -1.00  -3.00  -2.00
-1.00  0.00  -1.00  0.00


day vector tinh duoc
  1.000000 -25.000000 174.000000  -0.926082  -0.953938   0.548198   0.087800  -0.134072  -0.323423  -0.582419
-15.000000  82.000000 -314.000000   0.813094  -0.099755   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000   1.000000
 -6.000000  37.000000 -203.000000   1.000000   1.000000  -0.569760  -0.094570   0.131058   0.321740   0.581216
 -2.000000   5.000000 -12.000000   0.030623   0.019079  -0.008931  -0.002804  -0.001249  -0.000697  -0.000498
1.000000 7.997423 19.983217 -15.974098
tri rieng thu 1 la: -4.00+2.00i
vector rieng tuong ung la: 15.97-(4.00)i 5.12-(1.28)i -15.97-(-3.99)i -0.00-(-0.00)i

tri rieng thu 2 la: -4.00-2.00i
vector rieng tuong ung la: 15.97+(4.00)i 5.12+(1.28)i -15.97+(-3.99)i -0.00+(-0.00)i
gap tri rieng phuc, chuong trinh se dung tai day
--------------------------------
Process exited after 0.02634 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Đây là trường hợp trị riêng phức liên hợp.